Лекция 2. Кинематика материальной точки

Понятие механики. Модели в механике

Механика – раздел физики, который изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

Механическое движение – это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.

Механика подразделяется: на статику, кинематику и динамику.

Кинематика – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил.

Динамика – изучает движения тел в связи с теми причинами, которые обусловливают это движение.

Статика – изучает условия равновесия тел.

Понятие механики. Модели в механике

Классическая механика рассматривает движение макроскопических тел со скоростями, значительно меньшими, чем скорость света в вакууме.

Релятивистская механика (специальная теория относительности) рассматривает движение тел со скоростями, близкими к скорости света.

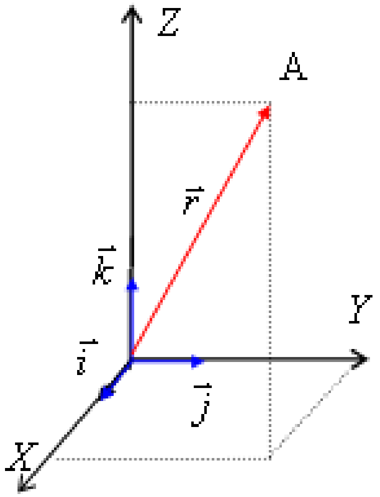
Квантовая механика рассматривает движения элементарных частиц.

Абсолютно твердое тело – модель тела, деформацией которого можно пренебречь в условиях данной задачи.
Материальная точка – тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется

Сведения о векторах

Векторными называются величины, характеризующиеся не только численным значением (модулем), но и направлением $\vec{r}$ или $\mathbf{r}$

Радиус-вектором $\vec{r}$ некоторой точки А называется вектор, проведенный из выбранного начала координат в данную точку.



(орты) $\vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}, \vec{\mathrm{k}}$

$$\vec{\mathrm{r}} = x\vec{\mathrm{i}} + y\vec{\mathrm{j}} + z\vec{\mathrm{k}}\,.$$

$x\vec{\mathrm{i}},\ y\vec{\mathrm{j}},\ z\vec{\mathrm{k}}$ – компоненты, или составляющие, вектора $\vec{r}$

Модуль радиус-вектора, можно выразить через координаты вектора $\vec{r}$, используя теорему Пифагора:

$$\left|\vec{\mathrm{r}}\right| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Сведения о векторах

Сложение векторов осуществляется по следующей схеме: начало каждого последующего вектора совмещают с концом предыдущего, результирующий вектор проводится из начала первого в конец последнего.
Умножение векторов производится на скалярную или векторную величину. Перемножение векторов может быть скалярным или векторным.

Скалярное произведение двух векторов $\vec{d}$ и $\vec{b}$ $\quad c = \vec{d} \cdot \vec{b} \equiv \vec{d}\,\vec{b} \equiv \left(\vec{d}, \vec{b}\right) = \left|\vec{d}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha,$

$|d|$ и $|b|$ – модули перемножаемых векторов, α – угол между ними.

Векторное произведение двух векторов $\vec{d}$ и $\vec{b}$ $\quad \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{b} \equiv \left[\vec{d}\,\vec{b}\right] = \left(\left|\vec{d}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\alpha\right) \cdot \vec{n},$

$\vec{n}$ – единичный вектор, направленный перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы-сомножители. Направление вектора $\vec{n}$, а также результирующего вектора $\vec{c}$ можно найти по правилу правого винта или по ≪правилу буравчика≫.

Модуль векторного произведения – $\quad \left|\left[\vec{d}\,\vec{b}\right]\right| = db\sin\alpha\,.$

Система отсчета, тело отсчета

Система отсчета (СО) – совокупность системы координат и часов, связанных с телом, относительно которого изучается движение.

Система координат (СК) — это математический инструмент, который позволяет определять положение точки или объекта в пространстве

Существует декартова, сферическая и цилиндрическая СК

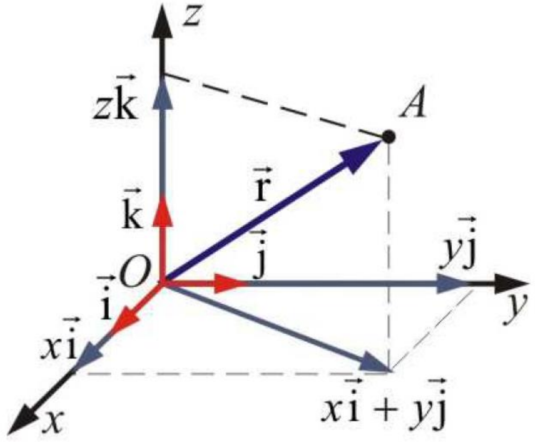


Рис. Декартова система координат.
Задается:
x, y, z или $\overline{r}$

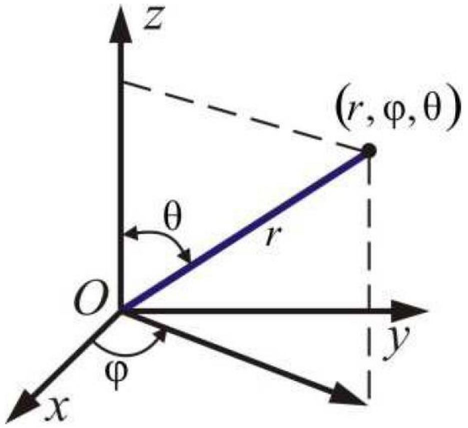


Рис. Сферическая система Координат
Задается:
длиной r, углами θ и φ

Преобразования от сферических к декартовым координатам:

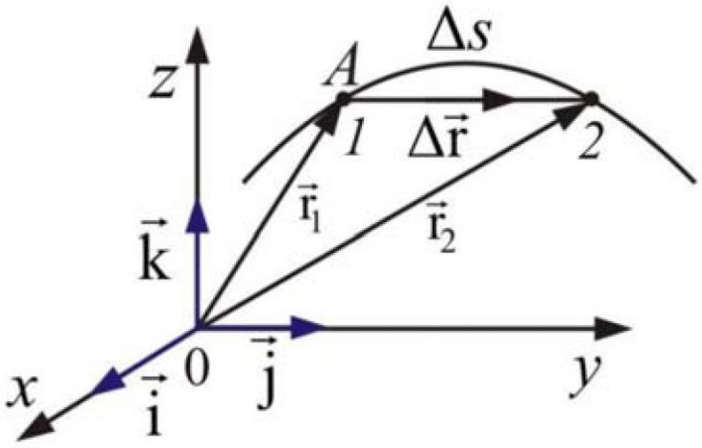
$$\boxed{x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta.}$$

Кинематика материальной точки.

При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются и задаются **кинематическими уравнениями движения материально точки:**

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t). \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Степени свободы – число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве.

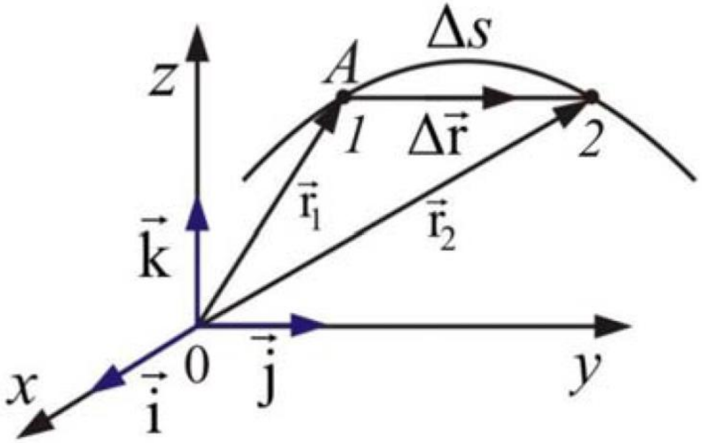


3х мерное пространство	3 степени свободы
В плоскости	2 степени свободы
Вдоль одной прямой	1 степень свободы

Путь, перемещение

Траекторией точки – непрерывная линия, которую описывает точка при своём движении.

Путь – длинна траектории ΔS**.** Если точка движется по прямой, то приращение $|\Delta\vec{r}|$ равно пути ΔS.



Пусть за время Δt точка А переместилась из точки 1 в точку 2.

Вектор перемещения $\Delta\boldsymbol{r}$ есть приращение $\vec{r}$ за время Δt:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k},$$

или

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k};$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Скорость

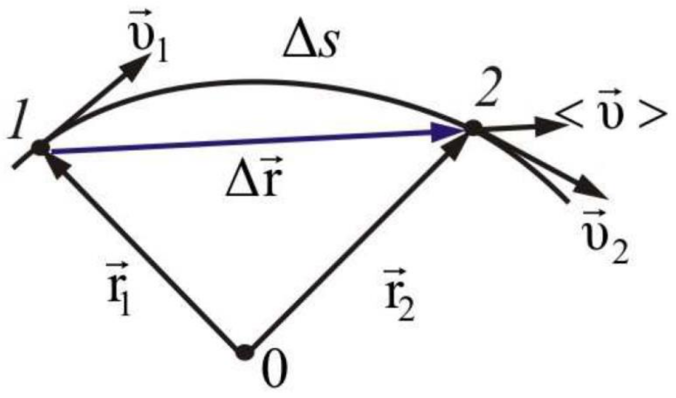
Средний вектор скорости определяется как отношение вектора перемещения $\vec{r}$ ко времени Δt, за которое это перемещение произошло:

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \langle \vec{\upsilon} \rangle .$$

Средняя путевая скорость $$\boxed{\langle \upsilon \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t} .}$$

Мгновенная скорость материальной точки $$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} .$$

Мгновенная скорость $\vec{v}$ – вектор скорости в данный момент времени, равный первой производной от *r* по времени и направлен по касательной к траектории в данной точке в сторону движения точки А.



На рис. вектор $\langle \vec{v} \rangle$ совпадает с направлением вектора $\Delta \vec{r}$

Скорость

Модуль вектора скорости $$\upsilon \equiv |\vec{\upsilon}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$$

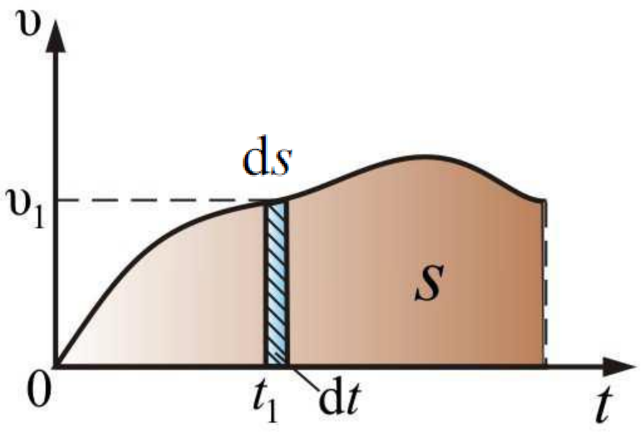
При $dt \to 0$, т. е. на бесконечно малом участке траектории, $ds = dr$ (перемещение совпадает с траекторией).

В этом случае мгновенную скорость можно выразить через скалярную величину – путь:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

$ds = \upsilon dt$ – площадь бесконечно узкого прямоугольника. Вычислим весь путь s за время t:

$$s = \int_0^t \upsilon dt.$$



<u>Геометрический смысл этого интеграла в том, что площадь под кривой $\upsilon(t)$ есть путь тела за время t.</u>

Путь при равномерном движении (с постоянной скоростью): $\boxed{s = \upsilon t.}$

принцип суперпозиции

Если материальная точка участвует в нескольких движениях, то ее результирующее перемещение $d\vec{r}$ равно векторной сумме перемещений:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 + \ldots + d\vec{r}_i + d\vec{r}_n = \sum_{i=1}^{n} d\vec{r}_i,$$

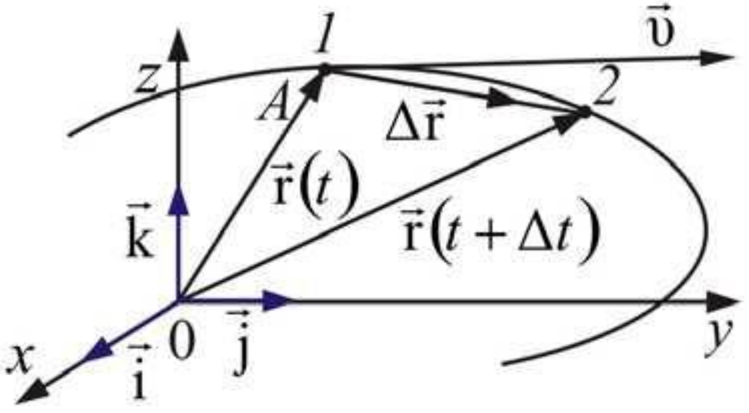
так как $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, то $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \ldots + \vec{\upsilon}_i + \vec{\upsilon}_n$, или $\vec{\upsilon} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\upsilon}_i.$

Принцип суперпозиции (принцип наложения) – допущение, согласно которому результирующий эффект сложного процесса взаимодействия представляет собой сумму эффектов, вызываемых каждым воздействием в отдельности при условии, что они не влияют друг на друга.

Проекция вектора скорости на оси координат

Положение точки А задается радиус-вектором $\vec{r}$. Зная что $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, то проекции вектора скорости $\vec{\upsilon}$ на оси x, y, z:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt};\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt};\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}.$$



Модуль вектора скорости: $$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}\ .$$

Так как скорость – величина векторная, то ее можно представить с помощью единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

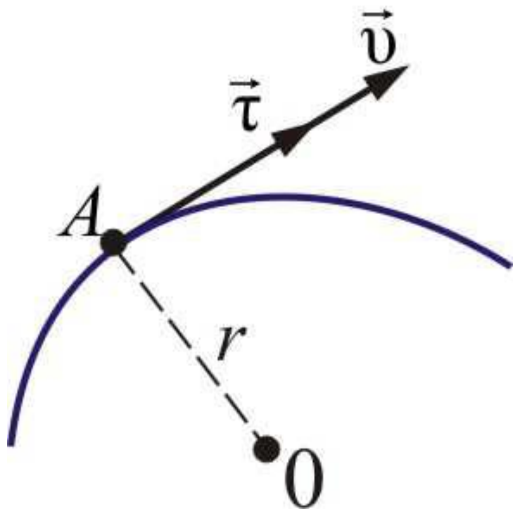
Ускорение и его составляющие

Ускорение – быстрота изменения скорости по времени и направлению: $\boxed{\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}.}$

Введем единичный вектор $\vec{\tau}$ связанный с точкой А и направленный по касательной к траектории движения точки А.

$\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau},$ где $\upsilon = |\vec{\upsilon}|$ – модуль вектора скорости. Найдем ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n .$$



$\boxed{\vec{a}_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}}$ – тангенциальное ускорение, совпадающее с направлением $\vec{\upsilon}$ в данной точке.

Ускорение и его составляющие

Тангенциальное ускорение показывает изменение вектора скорости по величине:

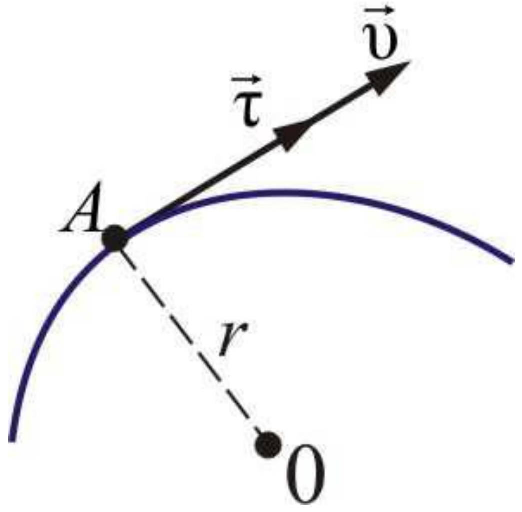
- если $d\upsilon/dt > 0$, то $\vec{a}_\tau$ направлено в ту же сторону, что и вектор $\vec{\upsilon}$, т. е. ускоренное движение;
- если $d\upsilon/dt < 0$, то $\vec{a}_\tau$ направлено в противоположную сторону $\vec{\upsilon}$, т. е. замедленное движение;
- при $d\upsilon/dt = 0$ $\vec{a}_\tau = 0$, $\vec{\upsilon} = \mathrm{const}$ – движение с постоянной по модулю скоростью.

Ускорение и его составляющие

Нормальное ускорение показывает быстроту изменения направления вектора скорости.

$$\boxed{\vec{a}_n = \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt}}$$

– нормальное ускорение или центростремительное, т. к. направлено оно к центру кривизны, перпендикулярно вектору $\vec{\tau}$.



Модуль нормального ускорения $\left|\vec{a}_n\right| \equiv \vec{a}_n = \upsilon^2/r$,

тогда $\vec{a}_n = \dfrac{\upsilon^2}{r}\vec{n}$.

Суммарный вектор ускорения при движении точки вдоль плоской кривой равен:

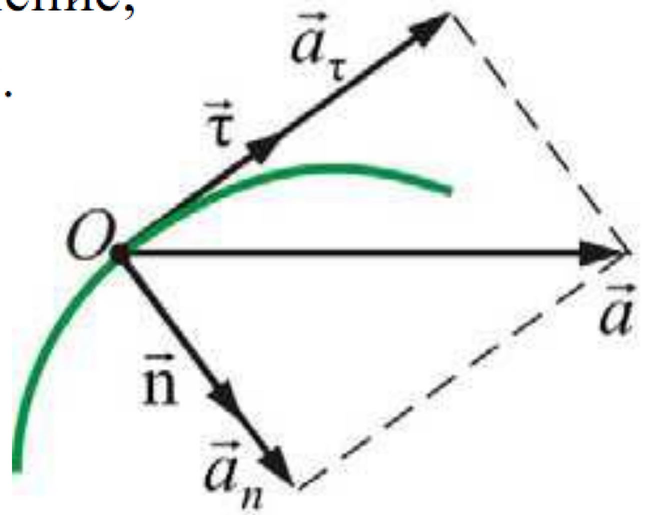
$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{r}\vec{n}.$$

Ускорение и его составляющие

Модуль общего ускорения равен: $\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\ .}$

Рассмотрим несколько предельных (частных) случаев:

- $a_\tau = 0;\ a_n = 0$ – равномерное прямолинейное движение;
- $a_\tau = \text{const};\ a_n = 0$ – равноускоренное прямолинейное движение;
- $a_\tau = 0;\ a_n = \text{const}$ – равномерное движение по окружности.



Прямая и обратная задача кинематики

Прямая задача кинематики сводится к определению кинематических характеристик по известному закону движения (скорости, ускорения, пути).

Дано: $\vec{r} = \vec{r}(t) -$ *уравнение в векторной форме;*

$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) -$ *уравнения движения в скалярной форме*

Найти: зависимость скорости и ускорения от времени

Обратная задача кинематики заключается в нахождении закона движения по известной скорости (ускорению) и начальному кинематическому состоянию.

Дано:

Зависимость скорости и ускорения от времени

$\vec{v} = \vec{v}(t) -$ *уравнение в векторной форме;*

$a = a(t), \quad v = v(t) -$ *уравнения движения в скалярной форме*

Найти: уравнение движения

Кинематика твердого тела. Виды движения

Виды движений:

- поступательное;
- вращательное (вокруг неподвижной оси);
- плоское;
- вокруг неподвижной точки;
- свободное.

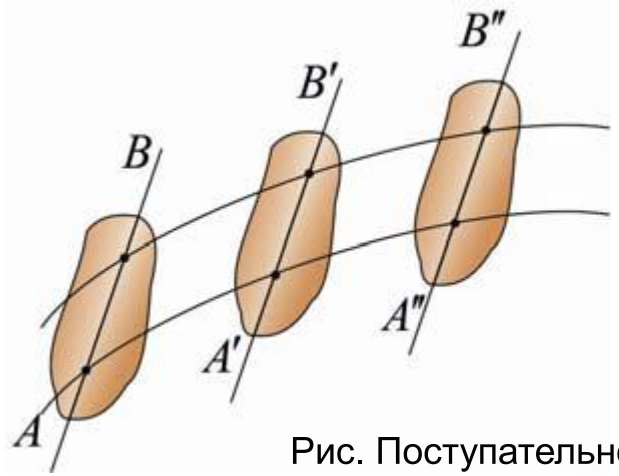


Рис. Поступательное движение тела

Поступательное – это такое движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе и все точки твердого тела совершают равные перемещения за одинаковое время.

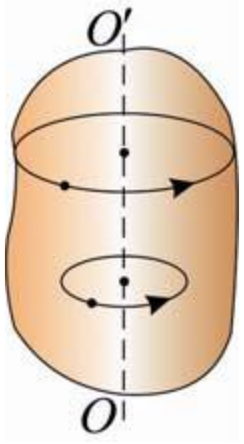


Рис. Вращательное движение тела

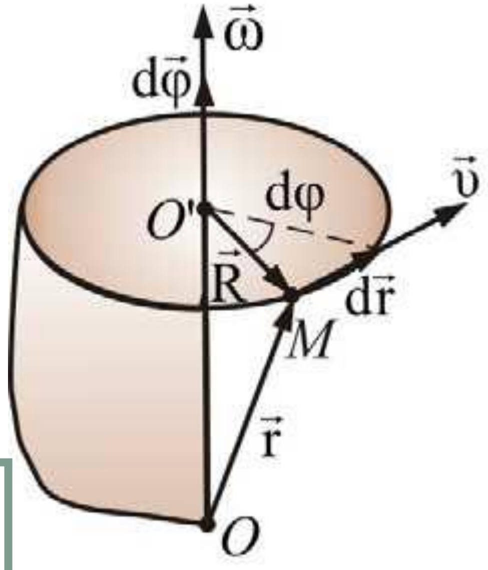
Вращательное движение – вид движения, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью OO' вращения

Вращательное движение вокруг неподвижной оси

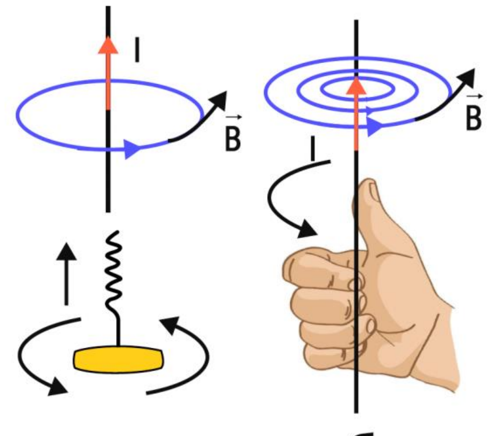
Вращательным движением вокруг неподвижной оси – движение твердого тела, при котором две его точки О и О' остаются неподвижными. Прямая ОО ' – ось вращения.

Пусть абсолютно твердое тело вращается вокруг неподвижной оси ОО‘.
$\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{\varphi}}$ – вектор элементарного поворота тела.

Направление вектора $d\vec{\varphi}$ и направление вращения связаны ≪правилом буравчика≫).



Правило “буравчика” (правого винта или правой руки)



Мысленно "вкрутите" правый винт (или буравчик) в направлении оси вращения так, чтобы его вращение совпадало с направлением вращения объекта.

Вектор элементарного поворота направлен вдоль оси вращения в ту сторону, куда движется винт (или буравчик) при вкручивании.

Вращательное движение вокруг неподвижной оси

Элементарные повороты удовлетворяют обычному правилу сложения векторов:

$$d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2.$$

Угловая скорость вектор $\vec{\omega}$, численно равный первой производной от угла поворота по времени и направленный вдоль оси вращения в направлении $d\vec{\varphi}$ ($\vec{\omega}$ и $d\vec{\varphi}$ всегда направлены в одну сторону):

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

При ω = const, вращение вокруг неподвижной оси равномерное.

Пусть $\vec{v}$ – линейная скорость точки М. Если $dr = \upsilon dt$ и $dr = R d\varphi$, то связь линейной скорости и угловой:

$$\boxed{\upsilon = \frac{dr}{dt} = \frac{R d\varphi}{dt} = \omega R, \text{ или } \vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{R}].}$$

Вектор $\vec{v}$ ортогонален к векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$ и направлен в ту же сторону, что и векторное произведение $[\vec{\omega}, \vec{R}]$

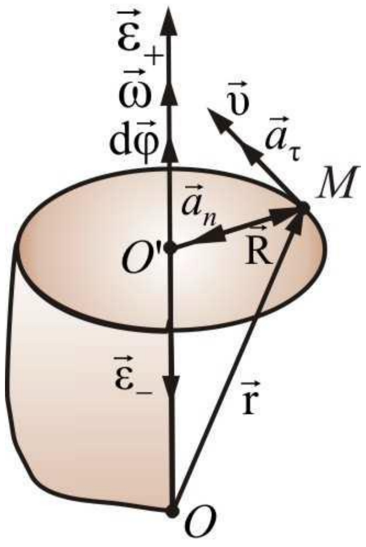
Вращательное движение вокруг неподвижной оси

Период вращения T – промежуток времени, в течение которого тело совершает полный оборот (т. е. поворот на угол φ = 2π).

Частота ν – число оборотов тела за одну секунду.

При вращении с угловой скоростью ω имеем:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu\,;\; T = \frac{2\pi}{\omega}\,;\; \nu = \frac{1}{T}.$$



Угловое ускорение характеризует величину изменения угловой скорости при вращении твердого тела.

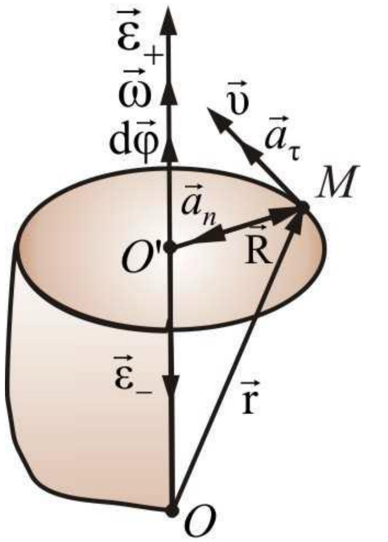
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Вектор $\vec{\varepsilon}_+$ направлен в ту же сторону, что и ω при ускоренном вращении ($d\omega\,/\,dt > 0$) , а $\vec{\varepsilon}_-$ направлен в противоположную сторону при замедленном вращении ($d\omega\,/\,dt < 0$)

Вращательное движение вокруг неподвижной оси

Выразим нормальное и тангенциальное ускорение точки М

Угловая скорость вектор $\vec{\omega}$, численно равный первой производной от угла поворота по времени и направленный вдоль оси вращения в направлении $d\vec{\varphi}$ ($\vec{\omega}$ и $d\vec{\varphi}$ всегда направлены в одну сторону):



$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon; \quad a_\tau = R\varepsilon; \quad a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R.$$

<u>Формулы простейших случаев вращения тела вокруг неподвижной оси:</u>

- *равномерное вращение* $\varepsilon = 0;\ \omega = \text{const},\ \varphi = \varphi_0 \pm \omega t;$
- *равнопеременное вращение* $\varepsilon = \text{const};\ \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t;\ \varphi = \omega_0 t \pm \varepsilon t^2/2.$