КАФЕДРА

В М М Ф

Вариант 26

В Ы С Ш А Я МАТЕМАТИКА

Сборник индивидуальных домашних заданий

для студентов
технических специальностей ТПУ

Таблица эквивалентных бесконечно малых

Если $\alpha(x) \to 0$, то справедливо:

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
2. $\arcsin\alpha(\mathrm{x}) \sim \alpha(\mathrm{x})$
3. $\mathrm{tg}\ \alpha(x) \sim \alpha(x)$
4. $\mathrm{arctg}\ \alpha(x) \sim \alpha(x)$
5. $1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$
6. $\ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x)$
7. $\log_a[1+\alpha(x)] \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$
8. $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$
9. $a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\cdot\ln a$
10. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x) - \dfrac{(\alpha(x))^3}{6}$
2. $\arcsin\alpha(\mathrm{x}) \sim \alpha(\mathrm{x}) + \dfrac{(\alpha(\mathrm{x}))^3}{6}$
3. $\mathrm{tg}\ \alpha(x) \sim \alpha(x) + \dfrac{(\alpha(x))^3}{3}$
4. $\mathrm{arctg}\ \alpha(x) \sim \alpha(x) - \dfrac{(\alpha(x))^3}{3}$
5. $1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2} - \dfrac{(\alpha(x))^4}{24}$
6. $\ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x) - \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$
7. $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x) + \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$
8. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n} + \dfrac{1-n}{2n^2}(\alpha(x))^2$

Второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e,$$

$$e = 2,7182818284590...$$

Сумма n членов арифметической прогрессии

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

Сумма n членов геометрической прогрессии со знаменателем q

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$\text{При } |q|<1 \qquad S = \frac{b_1}{1-q}$$

Факториалы

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots(n-1)\cdot n, \qquad \begin{array}{l} 0! = 1 \\ 1! = 1 \\ 2! = 1\cdot 2 = 2 \\ 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6 \\ 4! = 24, \qquad 5! = 120, \ldots \end{array}$$

$$(2n)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot\ldots(2n-1)\cdot 2n, \qquad (2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots(2n-2)\cdot 2n$$

$$(2n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1), \qquad (2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)\cdot(2n+1)$$

Формула Стирлинга

$$\text{При больших значениях } n \qquad n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{2\pi n}$$

Если C–константа, а $U(x)$ и $V(x)$ – дифференцируемые функции, то

Основные правила дифференцирования

1. $(C)' = 0$
2. $(C \cdot U)' = C \cdot U'$
3. $(U \pm V)' = U' \pm V'$
4. $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$
5. $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - U\,V'}{V^2}$
6. $[y(U(x))]' = y'_u \cdot U'_x$
7. $x'_y(y) = \dfrac{1}{y'_x(x)}$
8. $y'(x) = y(x) \cdot (\ln\ y(x))'$
9. $\left(U^V\right)' = V \cdot U^{V-1} \cdot U' + U^V \cdot \ln U \cdot V'$
10. $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} \qquad y''(x) = \dfrac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}$

Таблица производных

1. $\left(U^k\right)' = k\,U^{k-1} \cdot U'$
2. $\left(\sqrt{U}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{U}} \cdot U'$
3. $\left(\dfrac{1}{U}\right)' = -\dfrac{1}{U^2} \cdot U'$
4. $\left(a^U\right)' = a^U \cdot \ln\ a \cdot U'$
5. $\left(e^U\right)' = e^U \cdot U'$
6. $(\log_a U)' = \dfrac{1}{U\ \ln a} \cdot U'$
7. $(\ln U)' = \dfrac{1}{U} \cdot U'$
8. $(\sin U)' = \cos U \cdot U'$
9. $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$
10. $(\mathrm{tg}\ U)' = \dfrac{1}{\cos^2 U} \cdot U'$
11. $(\mathrm{ctg}\ U)' = -\dfrac{1}{\sin^2 U} \cdot U'$
12. $(\arcsin \mathrm{U})' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{U}^2}} \cdot \mathrm{U}'$
13. $(\arccos\ U)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
14. $(\mathrm{arctg}\ U)' = \dfrac{1}{1+U^2} \cdot U'$
15. $(\mathrm{arcctg}\ U)' = -\dfrac{1}{1+U^2} \cdot U'$
16. $(\mathrm{sh}\ U)' = \mathrm{ch}\ U \cdot U'$
17. $(\mathrm{ch}\ U)' = \mathrm{sh}\ U \cdot U'$
18. $(\mathrm{th}\ U)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\ U} \cdot U'$

Основные неопределенные интегралы

1. $\int U^k\,dU = \dfrac{U^{k+1}}{k+1} + C, \quad (k \neq -1)$

2. $\int dU = U + C$

3. $\int \dfrac{dU}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U} + C$

4. $\int \dfrac{dU}{U^2} = -\dfrac{1}{U} + C$

5. $\int \dfrac{dU}{U} = \ln|U| + C$

6. $\int a^U\,dU = \dfrac{a^U}{\ln a} + C$

7. $\int e^U\,dU = e^U + C$

8. $\int \sin U\,dU = -\cos U + C$

9. $\int \cos U\,dU = \sin U + C$

10. $\int \dfrac{dU}{\cos^2 U} = \operatorname{tg} U + C$

11. $\int \dfrac{dU}{\sin^2 U} = -\operatorname{ctg} U + C$

12. $\int \operatorname{tg} U\,dU = -\ln|\cos U| + C$

13. $\int \operatorname{ctg} U\,dU = \ln|\sin U| + C$

14. $\int \dfrac{dU}{\sin U} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{U}{2}\right| + C$

15. $\int \dfrac{dU}{\cos U} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{U}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$

16. $\int \dfrac{dU}{a^2 + U^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{U}{a} + C$

17. $\int \dfrac{dU}{U^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{U-a}{U+a}\right| + C$

18. $\int \dfrac{dU}{\sqrt{a^2 - U^2}} = \arcsin\dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{a}} + \mathrm{C}$

19. $\int \dfrac{dU}{\sqrt{U^2 \pm a^2}} = \ln\left|U + \sqrt{U^2 \pm a^2}\right| + C$

20. $\int \operatorname{sh} U\,dU = \operatorname{ch} U + C$

21. $\int \operatorname{ch} U\,dU = \operatorname{sh} U + C$

22. $\int \dfrac{dU}{\operatorname{ch}^2 U} = \operatorname{th} U + C$

23. $\int \dfrac{dU}{\operatorname{sh}^2 U} = -\operatorname{cth} U + C$

24. $\int \sqrt{U^2 \pm a^2}\,dU = \dfrac{1}{2}\left(U\sqrt{U^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left|U + \sqrt{U^2 \pm a^2}\right|\right) + C$

25. $\int \sqrt{a^2 - U^2}\,dU = \dfrac{1}{2}\left(U\sqrt{a^2 - U^2} + a^2 \arcsin\dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{a}}\right) + C$

26. $\int e^{\alpha U}\sin\beta U\,dU = \dfrac{e^{\alpha U}}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha\sin\beta U - \beta\cos\beta U) + C$

27. $\int e^{\alpha U}\cos\beta U\,dU = \dfrac{e^{\alpha U}}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha\cos\beta U + \beta\sin\beta U) + C$

Ряды Маклорена элементарных функций

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$,

2. $\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

3. $\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$,

4. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

5. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$,

6. $(1+x)^m = 1 + \dfrac{m}{1!}x + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$,

7. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$,

8. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$,

9. $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$,

10. $\arcsin x = x + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\dfrac{x^7}{7} + \ldots$

11. $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \ldots$

12. $\operatorname{th} x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 - \ldots$

Ряд и интеграл Фурье (основные формулы)

1. Ряд Фурье функции, заданной на интервале $[-\pi;\ \pi]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx$$

2. Ряд Фурье функции, заданной на интервале $[-l;\ l]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\ dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\ dx$$

3. Ряд Фурье функции, заданной на интервале $[0;\ l]$

По синусам

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\ dx$$

По косинусам

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\ dx$$

4. Ряд Фурье $f(x),\ x \in (-l;\ l)$ в комплексной форме

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n(\omega_n)e^{i\omega_n x}, \quad \text{где} \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l}, \quad S_n(\omega_n) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\omega_n x}dx$$

5. Интеграл Фурье функции $f(x),\ x \in (-\infty;\ \infty)$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\ dt\right)\ d\omega$$

Для четной функции $\quad f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\cos\omega x\ d\omega\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\ dt$

Для нечетной функции $\quad f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\sin\omega x\ d\omega\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\ dt$

6. Преобразование Фурье функции $f(x),\ x \in (-\infty;\ \infty)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

7. Косинус и синус преобразования Фурье функции $f(x),\ x \in (0;\ \infty)$

$$F_c(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\ dx, \qquad F_s(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\omega x\ dx$$

Таблица изображений и оригиналов

	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\dfrac{1}{p}$
2	t	$\dfrac{1}{p^2}$
3	t^2	$\dfrac{2}{p^3}$
4	e^{-at}	$\dfrac{1}{p+a}$
5	$t\ e^{-at}$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
6	$t^2 e^{-at}$	$\dfrac{2}{(p+a)^3}$
7	$\begin{cases} f(t), & 0 \le t \le \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$	$F(p)(1-e^{-p\tau})$
8	$\sin at$	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$
9	$\cos at$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$

	$f(t)$	$F(p)$
10	$t \sin at$	$\dfrac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$
11	$t \cos at$	$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
12	$\mathrm{sh}\ at$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$
13	$\mathrm{ch}\ at$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$
14	$e^{-at} \sin bt$	$\dfrac{b}{(p+a)^2+b^2}$
15	$e^{-at} \cos bt$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
16	$e^{-at}\mathrm{sh}\ bt$	$\dfrac{b}{(p+a)^2-b^2}$
17	$e^{-at}\mathrm{ch}\ bt$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2-b^2}$
18	$\delta(t)$	1
19	$\delta(t-\tau)$	$e^{-p\tau}$

1. Вычислить определители

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти матрицу $\mathbf{X}$ из уравнения. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Решить системы линейных уравнений

a) методом Крамера, b) матричным методом

$$a)\ \begin{cases} 3x - 5y + z = 29 \\ x + 4y - z = -6 \\ 3x + y - 3z = 15 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x + 4y - 13z = -27 \\ 3x - y + z = 10 \\ 12x + 5y - 7z = -23 \end{cases}$$

4. Решить системы методом Гаусса

$$a)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 - 7x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы матриц.

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $|AB| = 7$, $|AD| = 2\sqrt{2}$, $\alpha = \angle BAD = 45°$, $\vec{m}$ – единичный вектор в направлении основания , $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении стороны D. Разложить векторы сторон $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ и векторы диагоналей трапеции $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ по векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

2. Определить координаты точки C, лежащей на прямой, проходящей через точки A и B, если $A(-5;2;-4)$, $B(3;2;-2)$ и $|AC| : |CB| = 3 : 8$

3. В треугольнике с вершинами $A(-1;3;-2)$, $B(4;1;-2)$, $C(2;0;3)$.
Найти: a) вектор медианы AM,
b) вектор высоты BD,
c) любой по модулю вектор биссектрисы угла C.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:
$A(4;3;2)$, $B(1;2;3)$, $C(-3;-2;-1)$. Найти:
a) координаты четвертой вершины D,
b) длину высоты, опущенной на сторону AB,
c) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - 2\vec{q}$, где $|\vec{p}| = \sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 4$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}) = \pi/4$. Определить:
a) косинус угла между диагоналями;
b) длину высоты, опущенной на сторону $\vec{a}$.

6. Найти единичный вектор $\vec{e}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{2;0;2\}$ и $\vec{b} = \{3;0;0\}$, если $(\vec{e}\,\hat{}\,\vec{i}) \geq \pi/2$.

7. В пирамиде $ABCD$ с вершинами в точках
$$A(1;2;0),\ B(3;0;-3),\ C(5;2;6),\ D(-2;4;-1)$$
найти объем и длину высоты, опущенной на грань ABC.

8. Доказать, что векторы $\vec{p} = \{0;1;-2\}$, $\vec{q} = \{3;-1;1\}$, $\vec{r} = \{4;1;0\}$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{x} = \{-5;9;-1\}$ в этом базисе.

Аналитическая геометрия на плоскости

1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(-5;3)$:

a) параллельно прямой $\begin{cases} x = 5t - 1 \\ y = 3t - 1 \end{cases}$

b) перпендикулярно прямой $4x + 3y + 12 = 0$

c) под углом 45^0 к прямой $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 1$

2. Даны вершины треугольника ABC A(-1;1), B(5; -11), C(-8;3).

Составить: a) уравнение стороны AB,

b) уравнение медианы CM,

c) уравнение высоты AH и найти ее длину.

3. Даны две прямые l_1 и l_2

$l_1 : y = -2x + 11, \qquad l_2 : \begin{cases} x = 3t \\ y = t + 2 \end{cases}$ Найти:

a) точку пересечения прямых,

b) косинус угла между прямыми,

c) составить уравнения биссектрис углов между прямыми.

4. Привести уравнения линий к каноническому виду и построить;

1) $x^2 + y^2 + 3x - y = 0$, 2) $3x^2 - 4x + 2y^2 - 10y + 13 = 0$,

3) $y = 3 - \sqrt{x^2 + 5x + 10}$, 4) $x = -y^2 + 3y + 11$,

5) $x^2 - 4xy + y^2 + 8x + 16y = 15$, 6) $3x^2 + 4xy + 3y^2 + 8x + 6y - 14 = 0$.

5. Составить уравнение и построить линию, для каждой точки которой отношение расстояния до начала координат к расстоянию до прямой $y + 6 = 0$ равно $0,75$.

6. Построить линии, заданные в полярных координатах:

1) $\rho = -\sin(\varphi - \dfrac{5\pi}{4})$, 2) $\rho = \cos^3 \dfrac{\varphi}{3}$, 3) $\rho = \dfrac{3}{2 + \cos\varphi}$.

7. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = -2t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2\sin 2t \\ y = 4\cos 2t \end{cases}$

8. Построить фигуру, ограниченную линиями

1) $\left| \begin{array}{l} y = 5x, \quad x + y = 6, \\ x = 6. \end{array} \right.$ 2) $\left| \begin{array}{l} \rho = 2\cos(\varphi + \pi/6), \\ \rho = 2\sin(\varphi + \pi/6). \end{array} \right.$

Аналитическая геометрия в пространстве

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-7;2;1)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = \{-6;1;1\}$, $\vec{a}_2 = \{3;-2;2\}$ Найти расстояние от начала координат до этой плоскости и объем пирамиды, отсекаемой плоскостью от координатного угла.

2. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} 2x - 4y + z + 3 = 0 \\ 2x - y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

получить ее канонические и параметрические уравнения. Определить расстояние от начала координат до прямой.

3. Найти точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t - 2 \\ z = t + 3 \end{cases} \quad \text{и плоскостью} \quad 2x - 6y + 14z = 0.$$

Составить уравнение проекции данной прямой на эту плоскость.

4. Даны вершины треугольной пирамиды
$A(3;-1;5)$, $B(-5;-3;2)$, $C(-2;-6;-3)$, $D(-2;2;1)$.
Составить уравнение грани ABC и уравнение высоты DH, опущенной на эту грань. Найти дину высоты DH.

5. Построить поверхности

1) $x^2 + z^2 = 2z$ 2) $x^2 + y^2 = (z-2)^2$

3) $z = -(\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4})$ 4) $y^2 - 4y + z = 0$

5) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x = 0$ 6) $z = 3 + \sqrt{2 - x}$

6. Построить область, ограниченную поверхностями

1) $\left| \begin{array}{l} z = x^2, \\ x + y = 6, \\ y = 2x \\ z = 0. \end{array} \right.$ 2) $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4z^2, \\ x^2 + y^2 = 2z \\ x = 0, \quad y = 0, \\ (x > 0, \quad y > 0) \end{array} \right.$

Предел. Непрерывность

1. Найти пределы

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-3n+1}{(2n^2-1)^2-(2n^2-5)^2}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[4]{n}+\sqrt{16n^4+1}}{(3n-5\sqrt{n})\sqrt{2n^2-n+1}}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n-7^n}{5\cdot 7^{n-1}+5^{n+2}}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2-1}-\sqrt{3n^2+n}\right)$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+n!}{3(n+1)!-(n-1)!}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{5n^3}{2-7n^3}+e^{\frac{1}{2n}}\right]$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+2}-\dfrac{x^3-2x}{x^2-5}\right)$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n^2+2n+3}{n^2+2n+1}\right]^{3n-7}$
9. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3-\sqrt{x^2-7}}{\sqrt{x+4}-2}$
10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 7x}{\sin x\cdot\mathrm{arctg}^2\sqrt{5x}}$
11. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+4x-5}{2x^2+7x-15}$
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{4x+1}{4x+6}\right]^{3x-1}$
13. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin(x-\pi/3)}{1/2-\cos x}$
14. $\lim\limits_{x\to2}(x-1)^{\frac{1}{\sqrt{x-2}}}$
15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\mathrm{arcsin2x^3})}{\mathrm{arctg}^3 7x}$
16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(e^{3x}-1)}{\sqrt{1+5x}-1}$

2. Сравнить две бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to0$, если

1) $\alpha(x)=\sin 5x-2\mathrm{tgx}$, $\quad\beta(x)=\sqrt[3]{x^4+x^2+5x^3}$
2) $\alpha(x)=\cos^4 x-1$, $\quad\beta(x)=\sqrt[3]{1-3x^3}-1$

3. Для данных бесконечно малых при $x\to x_0$ величин записать эквивалентнные в виде $A(x-x_0)^k$

1. $x\cdot\mathrm{arctg}\,\sqrt[3]{x}$, $\quad x_0=0$
2. $\sin(x\cdot\sin\sqrt{x^5})$, $\quad x_0=0$
3. $\ln^3(x^2+x-19)$, $\quad x_0=4$
4. $\sqrt[3]{35-x^3}-2$, $\quad x_0=3$

4. Исследовать на непрерывность функции

1. $y=\dfrac{4x^3}{x^2-25}$
2. $y=1+3^{-\frac{1}{x+4}}$
3. $y=\begin{cases}2-x^2, & x\le0\\ 2+\sin x, & 0<x\le\pi/2\\ 3^{x/|x|}, & x>\pi/2\end{cases}$

Производные

1 Найти производные $y'(x)$ данных функций

1) $y = \ln \sqrt[4]{2^x + 5x} + \sqrt{2^x + 5x}$ 2) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} + \sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{2x^3}$

3) $y = 8^{\sin x} \cdot \left(x - \dfrac{1}{\cos 5x}\right)$ 4) $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \cos^2 \ln \dfrac{1}{x} - 2^{\sqrt{x}} \cdot \ln \sin 3x$

5) $y = \dfrac{1 - x^2}{\sqrt{\arcsin^3 x}} - \sqrt[5]{\dfrac{x}{x^2+6}}$ 6) $y = tg^{\,3}\left(ctg\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) - \sqrt{\sin\left(\cos \dfrac{1}{x^2}\right)}$

7) $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{\sin 5x \cdot \cos 4x}{(1 - x^5)^4}}$ 8) $y = \dfrac{(x-5)^3\sqrt{x^2+1}}{\arcsin^2 3x \cdot \ln^7 x}$

9) $y = \left(\cos^2 5x\right)^{\sqrt{\ln 3x}}$ 10) $y = (\ln \arcsin x)^{\mathrm{arctg}\ 4x}$

11) $\begin{cases} x = \dfrac{2t + t^2}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{2t - t^2}{1 + t^3} \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x = \mathrm{ctg}\ (2e^t) \\ y = \ln(\mathrm{tg}\ e^t) \end{cases}$

13) $\mathrm{arctg} 2y - 5^{(2x+3y)} = \dfrac{y}{x}$ 14) $\sqrt{x} \cdot\ (y+4)^2 = y^3 + 7y - 2.$

2. Найти вторую производную y'' функции

1) $y = \sqrt[4]{(1 - x^2)^3}$ 2) $\begin{cases} x = t + 1/t \\ y = \ln t^3 \end{cases}$

3 Вычислить значение производной функции в точке

1) $y = b\arcsin\dfrac{x}{b} - \sqrt{b^2 - x^2},\qquad x_0 = \dfrac{b}{a}$

2) $\begin{cases} x = \sqrt{t - 1} \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{t-1}} \end{cases}\qquad t_0 = 2$

4. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функции

1) $y = ctg^2 x$ 2) $y = (\ln 3)^{\sqrt{x}}$

5 Доказать, что функция $y = \dfrac{1+x}{1-x}$ удовлетворяет уравнению

$y' = \dfrac{1 + y^2}{1 + x^2}$

Приложения производной

1 Исследовать на экстремум функции:

$$1)\ \ y = \frac{x^3 - 1}{x^3}, \qquad 2)\ \ y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2},$$

$$3)\ \ y = x - \ln(x+1).$$

2 Составить уравнения всех асимптот следующих кривых:

$$1)\ \ y = \frac{x-1}{x^2 - 2x}, \qquad 2)\ \ y = (2x-1)e^{5x},$$

$$3)\ \ y = x - \sqrt[3]{x^2}.$$

3 Провести полное исследование и построить графики функций:

$$1)\ \ y = \sin 2x + 2\cos x, \qquad 2)\ \ y = \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|,$$

$$3)\ \ y = \frac{x^2 - x - 2}{2x - 6}.$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_o$, или соответствующей значению параметра $t = t_o$

$$1)\ \ y = \frac{x^3+2}{x^3-2}, \qquad x_0 = -2$$

$$2)\ \ \begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t_0 = \pi/3$$

5 Каков должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади S, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^2 + \frac{16}{x} - 16 \quad \text{в интервале} \quad [1;\ 4]$$

7. Используя правило Лопиталя, найти пределы:

$$1)\ \ \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\mathrm{ctg}\frac{\pi x}{2}} \qquad 2)\ \ \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}x} \qquad 3)\ \ \lim_{x\to 0} \frac{3^{5x} - 2^x}{\mathrm{arctg}x + x^3}$$

1. Найти и изобразить области определения функций:

1) $z = \cos(x - y)$ 2) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

1) $z = \dfrac{3x^2 - 5y}{x - y^4}$ 2) $z = \ln\cos\dfrac{2y}{x^2 - \sqrt{y}}$

3) $z = \sqrt{x^2y^5} - \mathrm{ctg}e^{\sin^2 y}$ 4) $z = \left(x^4 + 5\right)^{\frac{1}{y}} - \dfrac{y}{\arcsin\sqrt{2x - y^2}}$

3. Найти частные производные z'_x и z'_y сложной функции

$z = u^2v^3$, где $u = \ln(x - 6y^2)$, $v = \cos 3x$

4. Найти производную z'_t, если

$z = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{y}}$, $x = \arcsin t$, $y = \sqrt{1 - t^2}$

5. Найти производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{d\,z}{d\,x}$, если

$z = x \cdot \sqrt[3]{y} + y \cdot \ln(x^2 - \sqrt{y})$, где $y = \sin^2\dfrac{2}{x - 3}$.

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

1) $y^2x = \cos\dfrac{y}{x} - \mathrm{tg}^3x$, 2) $xe^{2y} = 5 - \cos^3\left(x - \dfrac{1}{y}\right)$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением $x\ \ln(z^2 + y) = \dfrac{3y}{\sqrt{x}} + \ln(z^3 - 4y)$

8. Найти первый dz и второй d^2z дифференциалы функции

$$z = y\ \sin(x - y)$$

9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 5$ в точке $M_o(1;\ 2;\ z_o)$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 - 6xy + 3y^2$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$z = 2x^2 + 2xy - \dfrac{y^2}{2} - 4x$ в замкнутой области $D : \{x \geq 0;\ y \leq 2;\ y \geq 2x\}$.

Неопределенный интеграл

1. $\int \frac{x\,dx}{x^4-16}$

2. $\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x^7}}$

3. $\int \frac{(1-\cos x)\,dx}{(x-\sin x)^3}$

4. $\int x\cdot e^{1-3x^2}\,dx$

5. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln^2 x+2}}$

6. $\int \frac{(1+\arcsin^2 x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

7. $\int (\mathrm{tg}^2\,x+\mathrm{tg}^4\,x)\,dx$

8. $\int \frac{e^{5x}\,dx}{2-3e^{5x}}$

9. $\int \frac{(5x-2)}{x^2+4}\,dx$

10. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

11. $\int (7x+5)\,\cos 3x\,dx$

12. $\int \arccos 2x\,dx$

13. $\int (x^5+x^2)\cdot e^{-x^3}\,dx$

14. $\int \frac{\ln^2 x\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

15. $\int e^{3x}\cdot\cos 3x\,dx$

16. $\int \mathrm{arctg}\,\sqrt{3x}\,dx$

17. $\int \frac{dx}{x^2+7x-2}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3-x^2}}$

19. $\int \frac{x\,dx}{x^2+4x+29}$

20. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{x^2-x}}$

21. $\int \frac{dx}{x^4-x^2-2}$

22. $\int \frac{(x^2+5)\,dx}{(x-1)\cdot(x+2)^2}$

23. $\int \frac{dx}{x^3+8}$

24. $\int \frac{(x^3-3x^2-12)\,dx}{x\,(x-4)\,(x-3)}$

25. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\,\sqrt{x}}$

26. $\int \frac{\sqrt{x+3}\,dx}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}}$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

28. $\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}\,dx$

29. $\int x^2\cdot\sqrt{x^2-4}\,dx$

30. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+2}}$

31. $\int \frac{dx}{1+3\cos x}$

32. $\int \frac{dx}{\cos^2 x-4\sin^2 x+5}$

33. $\int \sin^4(x/2)\,dx$

34. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^7 x}$

35. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^4 x}$

36. $\int \frac{dx}{2+\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x}$

37. $\int \frac{(e^x-2)\,dx}{e^x+6}$

38. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}\,dx$

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

1) $\int\limits_1^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 4}}$ 2) $\int\limits_0^1 x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx$ 3) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 + 3\sin x}$

4) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(1/x)\, dx$ 5) $\int\limits_3^4 \frac{dx}{x^4 - 4x^2}$ 6) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}\, dx$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

1) $y = \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}$, $[0;\ 1]$ 2) $y = x\ \cos x$, $[0;\ \ \pi/2]$

3. Оценить значения интегралов

1) $\int\limits_{-1}^{2} e^{3x-x^2}\, dx$ 2) $\int\limits_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1) $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x(2+\ln x)^2}$ 2) $\int\limits_0^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

3) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ 4) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $\left| \begin{array}{l} y = \sqrt{e^x - 1}, \\ y = 0, \\ x = \ln 2. \end{array} \right.$ 2) $\left| \begin{array}{l} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t + 1, \\ x = 0, \quad (x \geq 0). \end{array} \right.$ 3) $\rho = 0,5 + \cos\varphi$.

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY:

1) $\left| \begin{array}{l} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}, \\ x = 0, \quad y = 0. \end{array} \right.$ 2) $\left| \begin{array}{l} x = 3t^2, \\ y = 3\ln t, \quad x = 0, \quad y = 0. \end{array} \right.$

7. Вычислить длины дуг кривых:

1) $L: \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x}, \\ x \in [1/9;\ 1]. \end{array} \right.$ 2) $L: \left| \ \rho = 2/\varphi, \quad \varphi \in [1;\ 2]. \right.$

8. Заряд Q равномерно распределен вдоль четверти окружности радиуса R. Найти величину силы, с которой заряженная дуга притягивает одноименный заряд q, расположенный в центре окружности.

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$1)\ \ y=2x,\ \ y=2x+3,\ \ \ x=1,\ \ x=2.$$
$$2)\ \ x=27-y^2,\ \ x=-6y.$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_{1/2}^{1} dx\int\limits_{1/x}^{2} f(x,y)\,dy+\int\limits_{1}^{2} dx\int\limits_{x}^{2} f(x,y)\,dy.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} y\,dx\,dy, \qquad D:\{x^2+y^2\le ax,\ \ y\ge 0\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ \ y=\frac{8}{x^2+4};\ \ 4y=x^2.$$
$$2)\ \ y=4x+x^2,\ \ y=x+4.$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной
поверхностной плотности $\delta(x;y)$

$$1)\ \ D:\ \{x^2\le y\le 2\},\ \ \delta(x;y)=2-y.$$
$$2)\ \ D:\ \{x^2+y^2\le R^2,\ \ \ -x\le y\le x\sqrt{3}\},\ \ \ \ \delta(x;y)=3x^2+2.$$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$
в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V),
ограниченной поверхностями:

$$1)\ y=\sqrt{25-x^2},\ \ \ x=4,\ \ z=y,\ \ x\ge 0,\ \ \ z\ge 0.$$
$$2)\ z=18-x^2-y^2,\ \ y=x,\ \ \ \ y=3,\ \ x\ge 0,\ \ \ z\ge 0.$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$1)\ \ y^2+z^2=2z,\ \ x=4-y^2-z^2,\ \ \ x\ge 0.$$
$$2)\ \ z=3x,\ \ y^2=2-x,\ \ \ z\ge 0.$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\ \{x^2+y^2=2x,\ \ x+z=2,\ \ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Криволинейный и поверхностный интегралы

1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(L)} (x+y)\,dl$,

где L – $\rho^2 = \cos 2\varphi, \quad \varphi \in [-\pi/4;\ \pi/4]$.

2. Найти массу линии $\begin{cases} x = t\ \cos t, \\ y = t\ \sin t, \quad \text{где} \quad t \in [0; 2\pi], \\ z = t, \end{cases}$

если линейная плотность $\delta(x;y;z) = 2z - \sqrt{x^2+y^2}$.

3. Найти длину дуги линии $y^2 = x^3$, если $0 \le x \le 5$.

4. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $z \ge 0$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2 = r^2$, $(r < R)$.

5. Найти массу части поверхности цилиндра $x^2+y^2 = R^2$, ограниченной плоскостями $z = 0$, $z = H$, если поверхностная плотность $\delta(x;y;z) = \dfrac{1}{R^2+z^2}$.

6. Вычислить $\iint\limits_{(S)} \dfrac{d\sigma}{(1+x\ +z)^2}$, где (S)– часть плоскости $x+y+z = 1$, заключенная в первом октанте.

7. Вычислить $\int\limits_{(L)} x^2\, e^{x^3}\, dx + y\, dy$, где L– дуга параболы $y = x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$.

8. Доказать, что выражение $\dfrac{2x\ (1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \dfrac{e^y}{1+x^2}\,dy$ является полным дифференциалом функции $U(x;y)$, и найти эту функцию.

9. Вычислить $\iint\limits_{(S)} (y^2+z^2)\,dydz$, где (S)– внешняя сторона части поверхности $x = 4-y^2-z^2$, отсеченная плоскостью $x = 0$.

10. Вычислить $\iint\limits_{(S)} x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$, где (S)– нижняя сторона поверхности $x^2+y^2 = z^2$, $0 \le z \le 3$.

Скалярное и векторное поле

1. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;\ y) = x^2 \cdot \vec{i} + xy \cdot \vec{j}$ вдоль отрезка прямой от точки $A(0;\ 1)$ до точки $B(1;\ 2)$.

2. Найти работу силового поля $\vec{F} = -x^2\, y^3 \cdot \vec{i} + \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ вдоль дуги кривой $L:\ x = \sqrt[3]{4}\cos t,\quad y = \sqrt[3]{4}\sin t,\quad z = 3,\quad t \in [0;\ \pi/2]$.

3. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали

1) $\vec{A} = \{x;\ \ 2y;\ \ z\}$, где $S-$ часть плоскости $x + 2y + 2z = 2$, вырезанной координатными плоскостями.

2) $\vec{A} = (\ln y + 7x) \cdot \vec{i} + (\sin z - 2y) \cdot \vec{j} + (e^y - 2z) \cdot \vec{k}$, где $S-$ сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$.

3) $\vec{A} = xz \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$, где $S-$ полная поверхность пароболоида $x^2 + y^2 = 1 - z,\quad z = 0$.

4. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L

1) $\vec{A} = \{(x - y);\ \ (3x - 2)\},\quad L -$ окружность $x^2 + y^2 = 6y$.

2) $\vec{A} = (x^2 - y) \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + \vec{k},\quad L - \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 9. \end{cases}$

5. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A} = \{12x^2yz;\ 4x^3z;\ 4x^3y - 2e^{2z}\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти потенциал.

6. Построить поверхности уровня скалярного поля

$$U(x;y;z) = y - \sqrt{x^2 - z^2}.$$

7. Найти производную скалярного поля $U(x;\ y;\ z) = x^2y - \sqrt{x\,y + z^2}$ в точке $M_o(1;\ 5;\ -2)$ в направлении вектора $\vec{a} = 2\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$.

8. В точке $M_0(2; 1/3; \sqrt{3/2})$ найти угол между векторами – градиентами скалярных полей

$$U(x;y;z) = x^2yz^3, \qquad V(x;y;z) = \frac{3}{2}\,x^2 + 3y^2 - 2\,z^2$$

Дифференциальные уравнения и системы

1. Найти общие решения уравнений первого порядка

1) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2.$
2) $xy' + xe^{y/x} - y = 0.$
3) $\ln\cos y dx + x \ \mathrm{tg}\ y\ dy = 0.$
4) $xy^2y' = x^2 + y^3.$
5) $(x + \ln^2 y - \ln y)\, y' = y/2.$
6) $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0.$

2. Найти частные решения уравнений

1) $y' = \dfrac{x}{y}e^{2x} + y, \quad y(0) = 2.$
2) $(1 + e^{3y})x\, dx = e^{3y}dy, \quad y(2) = 0.$
3) $(x + 2y)\, dx - x\, dy = 0, \quad y(-1) = 3.$
4) $y' + 2xy = 2x^3\, y^3, \quad y(0) = \sqrt{2}.$

3. Найти решения уравнений высшего порядка

1) $x^2\, y'' = (y')^2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2.$
2) $y'' = y' + x.$
3) $2(y')^2 = (y-1)\, y''.$
4) $y'' = \cos^3 x.$
5) $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}.$
6) $y'' - y' = \dfrac{2-x}{x} \cdot e^x.$
7) $y'' - 4y' + 29y = 104 \sin 5x.$
8) $y'' - 2y' - 8y = x^2\, e^{2x}.$
9) $y''' + y'' = 49 - 24x^2,$
10) $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x+4)\, e^x.$
11) $x^2\, y'' + x\, y' + 25y = 0,$
12) $x^2\, y'' - 8x\, y' + 14y = 5x^2.$
13) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = -8e^{-t}\, \sin 2t, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 6.$
14) $\ddot{x} + x = t^3 - 4t^2 + 7t - 10, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 3.$

4. Найти решения линейных систем

1) $\begin{cases} \dot{x} = x - 7y \\ \dot{y} = -3x + 5y \end{cases}.$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = 5x + y \\ \dot{y} = -10x + 7y \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 2. \end{matrix}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 7y \end{cases}.$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 9x - 8y - 2\cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = 10x - 9y + 3\sin t \end{cases}.$

Числовые и функциональные ряды.

1. Найти суммы числовых рядов

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{12}{36n^2-12n-35}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3-n}{n(n+1)(n+3)}$

2. Исследовать ряды на сходимость

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin^3\dfrac{1}{n}$ 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{5n}{7n-4}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{4^n\cdot n^n}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{e^{1/n^2}-1}{3n^2}$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos^n\dfrac{2n}{2^n\sqrt{2n+3}}$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{3n+5}{6n+7}\right)^n$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{(\ln n+2)^5}}$ 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3^{-\sqrt{2n+5}}}{\sqrt{2n+5}}$

3. Найти интервалы сходимости функциональных рядов

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-n}x^n}{\sqrt{n^3+1}}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n(x+1)^n}{n!}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^4}\sin^n(3x)$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-4x^2)^n$

4. Найти суммы функциональных рядов

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)x^{n+2}$ 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2-2n-2)x^n$

5. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$ функции

1) $y=\cos^2(\pi x/6)$, $x_0=3$. 2) $y=\ln\dfrac{2+x}{3+4x}$, $x_0=0$

3) $y=9^{3x}$ $x_0=-2$, 4) $y=\dfrac{1}{x^2+9x+20}$ $x_0=0$.

6. Вычислить интегралы с точностью до 0,001

1) $\int\limits_0^{0,1}\sin 8x^2\,dx$ 2) $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}\,dx$

Ряды Фурье. Интеграл Фурье

1. Заданную на интервале $(-l;\ l)$ функцию разложить в тригонометрический ряд Фурье. Построить график суммы полученного ряда.

$$1)\ f(x) = 3x - 1, \quad x \in (-\pi/2;\ \pi/2),$$

$$2)\ f(x) = x + \sin 3x, \quad x \in (-2;\ 2)$$

$$3)\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}x + 1, & -\pi < x \le 0, \\ 1/2, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

2. Функцию $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 2, & 1 \le x < 2 \end{cases}$ разложить в ряд Фурье по ортогональной системе функций $\left\{\sin\dfrac{n\pi x}{2}, \quad n = 1, 2, ...\infty\right\}$. Построить график суммы полученного ряда.

3. Функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 2, \\ x - 4, & 2 \le x < 4 \end{cases}$ разложить в ряд Фурье по ортогональной системе $\left\{\cos\dfrac{n\pi x}{4}, \quad n = 0, 1, 2, ...\infty\right\}$. Построить график суммы полученного ряда.

4. Функцию $f(x) = 2x + 1, \quad -\pi < x < \pi$ представить тригонометрическим рядом Фурье в комплексной форме. Записать:

a) спектральную функцию $S(\omega_n)$,
b) амплитудный спектр $A(\omega_n) = |S(\omega_n)|$
c) фазовый спектр $\varphi(\omega_n) = \arg S(\omega_n)$.

5. Функцию $f(x) = e^{-|x|}, \quad x \in (-\infty;\ \infty)$ представить интегралом Фурье.

6. Найти преобразование Фурье $F(\omega)$ функции

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

7. Найти косинус преобразование Фурье $F_c(\omega)$ функции

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 < x \le 3, \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Комплексные числа и функции

1. Даны числа $z_1 = 3 - 3i$, $z_2 = 5 + 4i$. Вычислить:

1) $2z_1 - 3z_2$, 2) $(z_2)^2$, 3) $\dfrac{\overline{z}_1 - z_2}{z_2}$, 4) $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$,

5) $\sqrt[3]{z_1^2 z_2}$, 6) $\ln z_1$ 7) $\cos z_2$, 8) $\operatorname{sh} \overline{z}_1$.

Результаты вычислений представить в показательной и алгебраической формах.

2. Определить и построить на комплексной плоскости семейства линий, заданных уравнениями

$$1)\ \operatorname{Im}\,(z - i)^2 = C, \qquad 2)\ \frac{1}{\cos(\arg\, z)} = C.$$

3. Решить уравнения

$$1)\ \operatorname{sh}\, z + \operatorname{ch}\, z = 2i, \qquad 2)\ z^2 + z = 3i.$$

4. На комплексной плоскости заштриховать области, в которых при отображении функцией $f(z) = 2i\, e^{(i-2)\,z}$ имеет место

a) сжатие $k \le 1$;

b) поворот на угол $0 \le \alpha \le 90^o$.

5. Доказать, что функция $u(x : y) = x^2 - y^2 + 2x - 3y + 5$ может служить действительной частью аналитической функции $f(z) = u + iv$ и найти ее.

6. Вычислить интегралы

1) $\displaystyle\int\limits_{(L)} \frac{dz}{z+5}$, где $L:$ ломаная с вершинами $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + i$;

2) $\displaystyle\int\limits_{(L)} (z - |z|)\, dz$, где $L:$ $\{\ |\, z\,| = 1,\ \operatorname{Re}\, z > 0\ \}$.

7. Вычислить, используя интегральную формулу Коши

$$\oint\limits_{(L)} \frac{z\, dz}{z^2 - 1}, \qquad \text{где } L: \begin{cases} 1)\ |z - 1| = 1/2; \\ 2)\ |z + 2| = 2; \\ 3)\ |z| = 2. \end{cases}$$

Вычеты и их приложения

1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-i)\ln n}.$$

2. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(z-i)^n}.$$

3. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z - z_0$

$$\text{а)}\ \frac{8z-256}{z^4+8z^3-128z^2}, \quad z_0 = 0; \quad \text{б)}\ z^2 \sin\frac{z+3}{z-1}, \quad z_0 = 1.$$

4. Для функции $(\sin^3 z)/[z^2(1-\cos z)]$ найти изолированные особые точки и определить их тип.

5. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

$$\text{а)}\ \frac{z}{z+2}\sin(z-3i), \quad z = 3i; \qquad \text{б)}\ \frac{\operatorname{sh}(\pi i z)}{(z-2-i)^2(z-1)}, \quad z = 0;$$

$$\text{в)}\ z^2 \exp\frac{4}{(z-i)^3}, \quad z = i; \qquad \text{г)}\ \frac{\operatorname{ch} z - \cos 3z}{z\sin(5\pi z)}, \quad z = 0;$$

$$\text{д)}\ \frac{2z}{z^2+4}\exp\frac{-i}{3z+i}, \quad z = \infty; \qquad \text{е)}\ 2z\sin^2\frac{\pi}{3z}, \quad z = \infty.$$

6. Вычислить интегралы

$$\text{а)}\ \int\limits_{|z|=1} \frac{z^3-i}{(z-\pi)\sin 2z}dz; \qquad \text{б)}\ \int\limits_{|z|=1} \frac{z^2\exp(1/z^2)-1}{z}dz;$$

$$\text{в)}\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)}; \qquad \text{г)}\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+17}dx;$$

$$\text{д)}\ \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{8-3\sqrt{7}\sin t}dt; \qquad \text{е)}\ \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos t)^2}dt.$$

Операционный метод

1. Найти изображения следующих функций

1) $f(t) = e^{-4t}\sin 3t\cos 2t.$ 3) $f(t) = \dfrac{d}{dt}[te^{-2t}\sin t].$

2) $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}.$ 4) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ t\ \sin(t-1), & 1 \le t \le 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases}$

2. Найти оригиналы функций по заданным изображениям

1) $F(p) = \dfrac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}.$ 2) $F(p) = -\dfrac{e^{-p}}{p^2-1}.$

3. Найти решение задачи Коши операционным методом

1) $5\dot{x} + 3x = 1 - \cos t,$ $x(0) = 0.$

2) $\ddot{x} + x = t^2 + 6t + 2,$ $x(0) = 0,$ $\dot{x}(0) = 0.$

3) $\ddot{x} - 16x = 3e^t + 5t,$ $x(0) = 2,$ $\dot{x}(0) = 0.$

4) $\ddot{x} + \dot{x} + 5x = \sin 2t,$ $x(0) = 0,$ $\dot{x}(0) = -2.$

4. Решить уравнения, используя формулу Дюамеля

1) $\ddot{x} + 9x = \dfrac{1}{\cos 3t},$ $x(0) = 0,$ $\dot{x}(0) = 0.$

2) $\ddot{x} + x = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < 2, \\ -1, & 2 \le t \le 3, \\ 0, & t > 3, \end{cases}$ $x(0) = 0,$ $\dot{x}(0) = 0.$

5. Найти решение систем операционным методом

1) $\begin{cases} \dot{x} = x - 7y \\ \dot{y} = -3x + 5y \end{cases},$ $\begin{matrix} x(0) = 0, \\ y(0) = 1 \end{matrix}.$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = 5x + y \\ \dot{y} = -10x + 7y \end{cases},$ $\begin{matrix} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{matrix}$

Теория вероятностей

1. Последовательно послано четыре радиосигнала. Вероятности приема каждого из них не зависят от того, приняты ли остальные сигналы, и соответственно равны 0.1; 0.2; 0.3; 0.4. Определить вероятность приема не менее трех сигналов.

2. В электрическую цепь параллельно включены 3 лампочки, каждая из которых может перегореть в течение определенного отрезка времени независимо от других с вероятностью 0.15. Какова вероятность, что хотя бы 2 лампочки будут гореть весь срок.

3. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0.95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0.8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

4. В среднем каждый час на конвейер наряду с другими поступает 2 бракованные детали. Какова вероятность того, что за смену (8 часов) на конвейер поступит не более трех бракованных деталей?

5. Цена деления шкалы амперметра равна 0.1 А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0.02.

6. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ ax^2, & 0 \le x \le 1 \\ a(2-x)^2, & 1 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

1) найти постоянную a,
2) найти функцию распределения F(x),
3) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$,
4) вычислить математическое ожидание $M(X)$,
5) вычислить дисперсию $D(X)$,
6) вычислить вероятность $P\,(0,5 < X < 1,5)$.

Математическая статистика

1. ОТК производит выборочное обследование партий по 100 изделий в каждой на предмет выявления бракованных. Обследовано 30 партий изделий. Результаты обследования (наличие бракованных изделий в партиях) оказались следующими:

$$N = \begin{cases} 6 \quad 7 \quad 3 \quad 5 \quad 3 \quad 1 \quad 7 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 3 \quad 6 \quad 4 \quad 5 \\ 1 \quad 2 \quad 6 \quad 5 \quad 6 \quad 2 \quad 8 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 5 \quad 7 \quad 4 \quad 0 \quad 3 \end{cases}$$

Найти средний процент числа бракованных изделий в каждой партии и величину стандартного разброса.

2. В результате проведенных случайных измерений абсолютных значений тока (I A) в электрической цепи получены следующие значения:

$$I = \begin{cases} 7,23 \quad 4,98 \quad 2,87 \quad 0,22 \quad 7,03 \quad 4,08 \quad 6,49 \quad 5,58 \quad 4.06 \quad 5,45 \\ 5,73 \quad 1,25 \quad 3,33 \quad 6,37 \quad 3,58 \quad 8,36 \quad 5,44 \quad 4,98 \quad 7,04 \quad 4,65 \end{cases}$$

Определить среднюю мощность тока в цепи, если ее активное сопротивление составляет 5 Ом.

3. По условиям задач 1 и 2

a) составить статистическую таблицу распределения относительных частот случайной величины,

b) построить полигон и гистограмму распределения.

4. Дана статистическая таблица распределения частот в случайной выборке.

a) Построить полигон и гистограмму распределения.

b) Найти величины $\overline{x}$ и s^2 выборки.

c) Записать теоретический закон распределения. Найти теоретические значения вероятностей и сравнить их с величинами относительных частот.

d) Использрвать критерий Пирсона для установления правдоподобности выбранной гипотезы о законе распределения.

1)

x_i	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
n_i	7	13	11	9	12	8	6	14	9	11

(использовать закон равномерного распределения)

2)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	5	17	22	23	13	10	5	3	1	1

(использовать закон распределения Пуассона)

3)

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
n_i	1	1	2	6	26	36	24	4

(использовать закон нормального распределения)

5. Для нормально распределенной случайной величины (табл.3, задача 4) определить доверительный интервал, в который с надежностью $p = 0,95$ попадает истинное значение (математическое ожидание) случайной величины.

6. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью 0.95, зная выборочную среднюю $\overline{x} = 75.15$, объем выборки $n = 64$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma = 8$.

7. По данным корреляционной таблицы значений $x_i; y_i$ случайных величин X и Y

a) нанести точки $(x_i; y_i)$ на координатную плоскость, и соединить их ломаной,

b) подобрать функциональную зависимость $y = f(x)$, наиболее хорошо описывающую данную корреляционную. Линеаризовать, если требуется, эту зависимость, используя новые переменные,

c) составить уравнение линии регрессии и определить коэффициент корреляции. Оценить тесноту связи между величинами X и Y.

1)

x_i	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2
y_i	38,5	31,1	22,5	16,1	10,1	2,15	–5,1	–12,5

2)

x_i	0,3	0,8	1,3	1,8	2,3	2,8	3,3	3,8
y_i	–0,25	–2,12	–6,5	–13,5	–23,1	–35,5	–51,1	–69,0