

## Основные положения алгебры логики



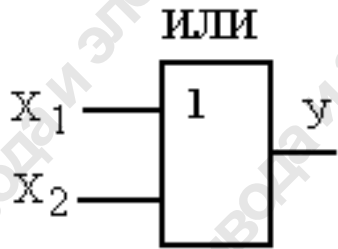
***Джордж Буль***

***Алгебра логики— это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними.***

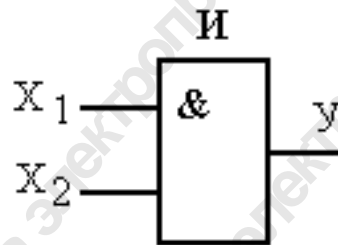


## Логические операции

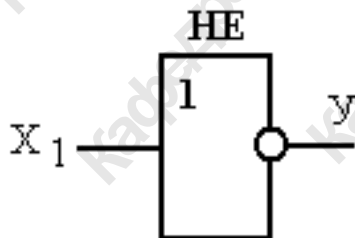
- Логическое сложение (дизъюнкция)
- Логическое умножение (конъюнкция)
- Логическое отрицание (инверсия)



X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	Y
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1



X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	Y
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1



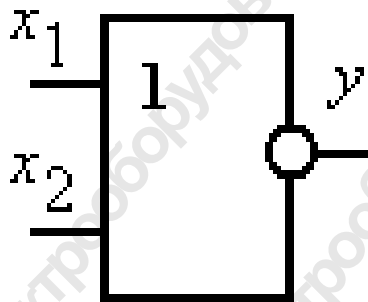
X <sub>1</sub>	Y
0	1
1	0

$$Y = X_1 + X_2 = X_1 \vee X_2$$

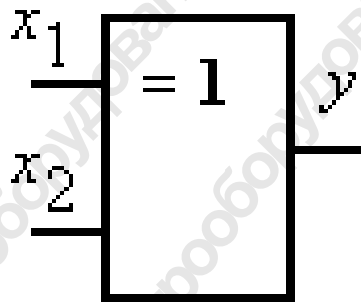
$$Y = X_1 \cdot X_2 = X_1 \wedge X_2$$

$$Y = \overline{X_1}$$

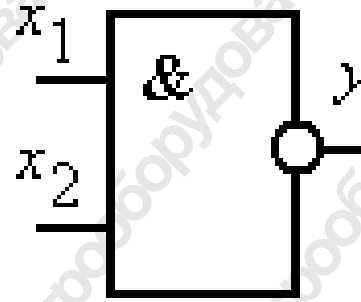
## Логические операции



$$y = x_1 + x_2$$



$$y = x_1 x_2 + \overline{x_1} \overline{x_2}$$



$$y = x_1 \cdot x_2$$

$x_1$	$x_2$	$y$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	0

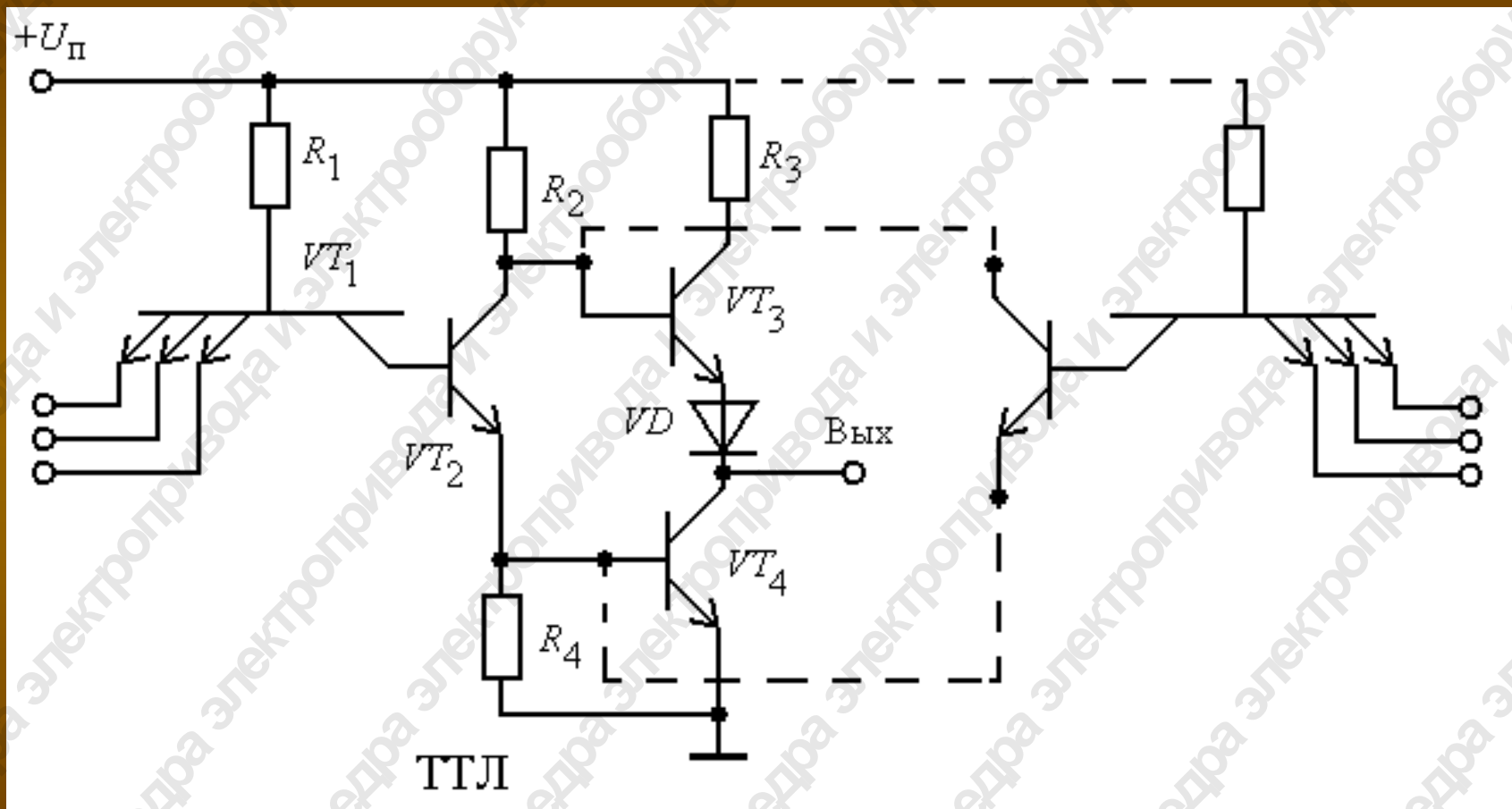
$x_1$	$x_2$	$y$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

$x_1$	$x_2$	$y$
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

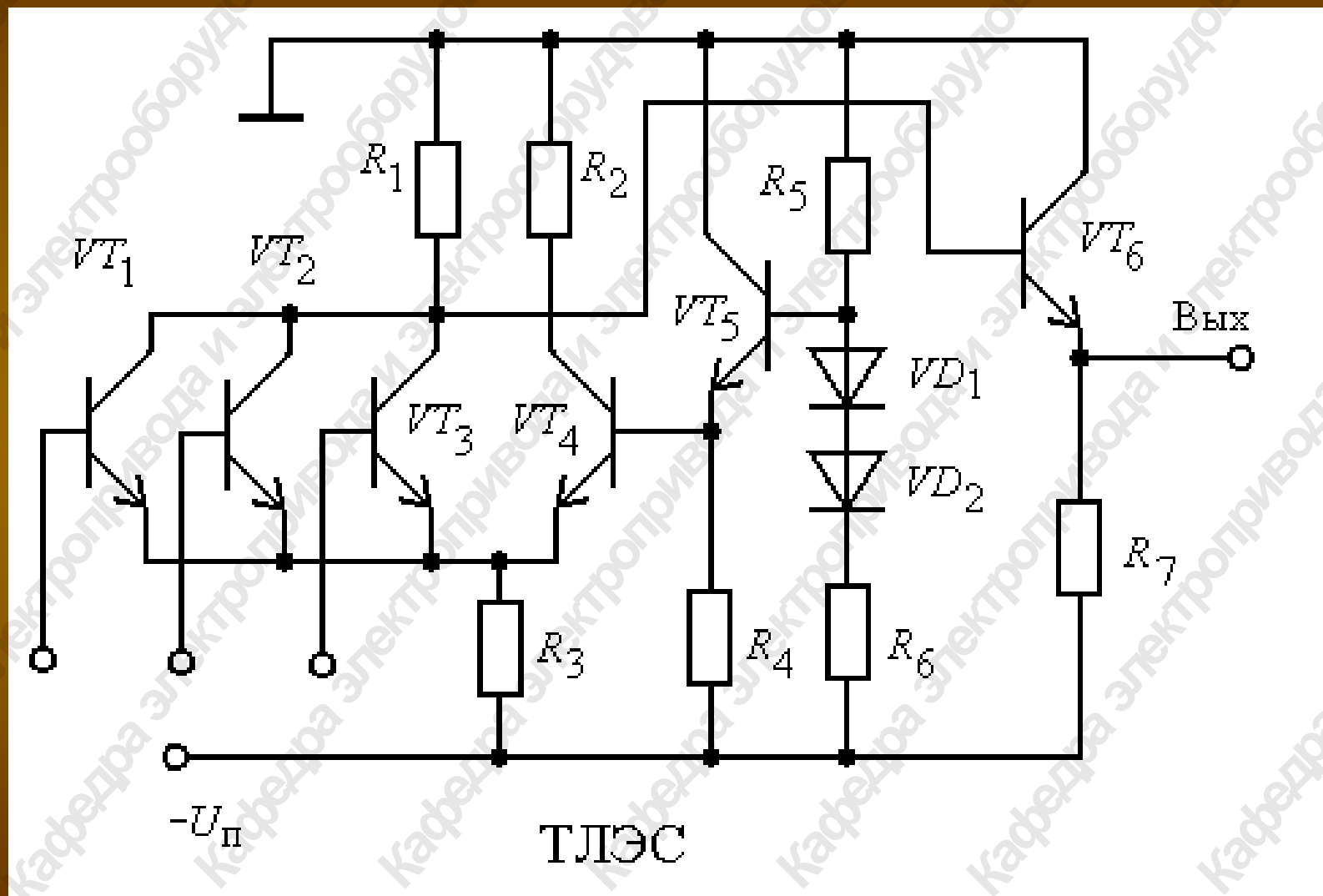
## Законы алгебры логики

<b>ЗАКОНЫ ОДИНАРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ</b>	
Универсального множества	$X + 1 = 1; \quad X \cdot 1 = X$
Нулевого множества	$X + 0 = X; \quad X \cdot 0 = 0$
<b>ЗАКОНЫ ОТРИЦАНИЯ</b>	
Двойного отрицания	$\overline{\overline{X}} = X$
Дополнительности	$X + \overline{X} = 1; \quad X \cdot \overline{X} = 0$
Двойственности	$\overline{X_1 + X_2} = \overline{X_1} \cdot \overline{X_2}$ $\overline{X_1 \cdot X_2} = \overline{X_1} + \overline{X_2}$
<b>КОМБИНАЦИОННЫЕ ЗАКОНЫ</b>	
Тавтологии	$X + X = X; \quad X \cdot X = X$
Коммутативные (переместительные)	$X_1 + X_2 = X_2 + X_1$ $X_1 \cdot X_2 = X_2 \cdot X_1$
Ассоциативные (сочетательные)	$(X_1 + X_2) + X_3 = (X_3 + X_2) + X_1$ $(X_1 \cdot X_2) \cdot X_3 = (X_2 \cdot X_3) \cdot X_1$
Дистрибутивные (распределительные)	$X_1(X_2 + X_3) = X_1X_2 + X_1X_3$ $X_1 + (X_2 \cdot X_3) = (X_1 + X_2)(X_1 + X_3)$
Абсорбции (поглощения)	$X_1 + X_1X_2 = X_1(1 + X_2) = X_1$ $X_1(X_1 + X_2) = X_1 + X_1X_2 = X_1$
Склеивания	$X_1X_2 + X_1\overline{X_2} = X_1$ $(X_1 + X_2)(X_1 + \overline{X_2}) = X_1$

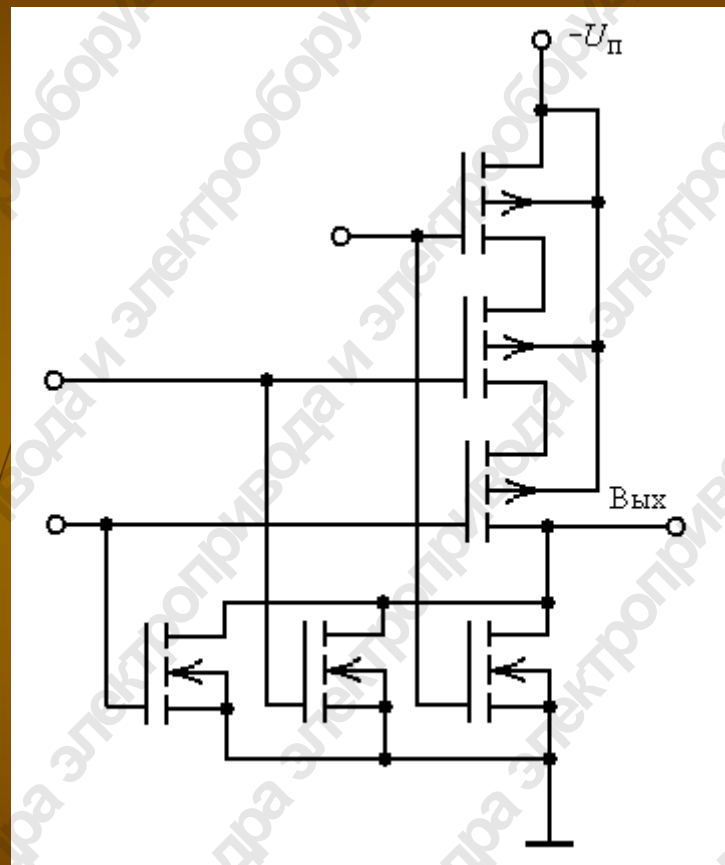
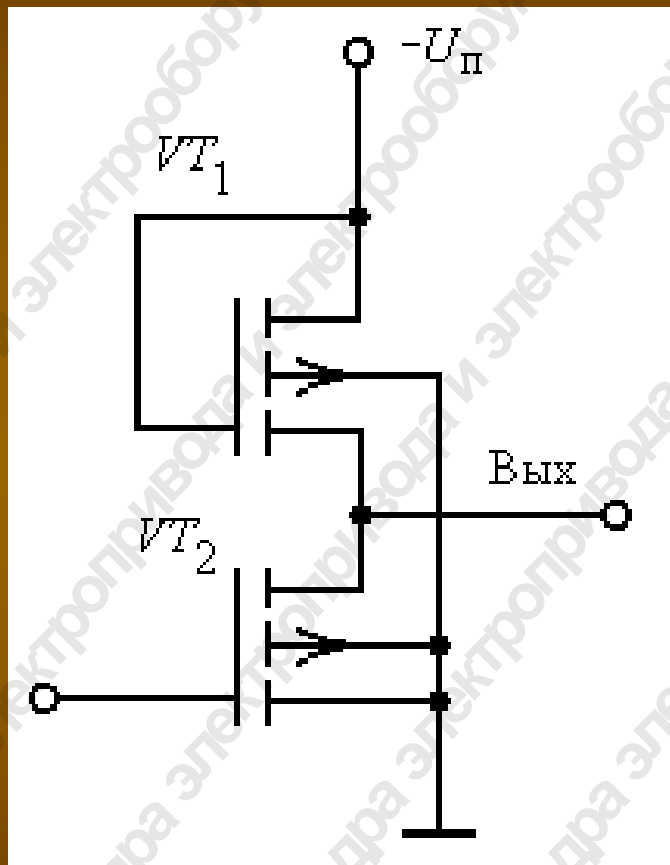
# Транзисторно-транзисторные логические схемы



# Транзисторные логические схемы с эмиттерными связями



## Логические схемы на основе МОП и КМОП транзисторах

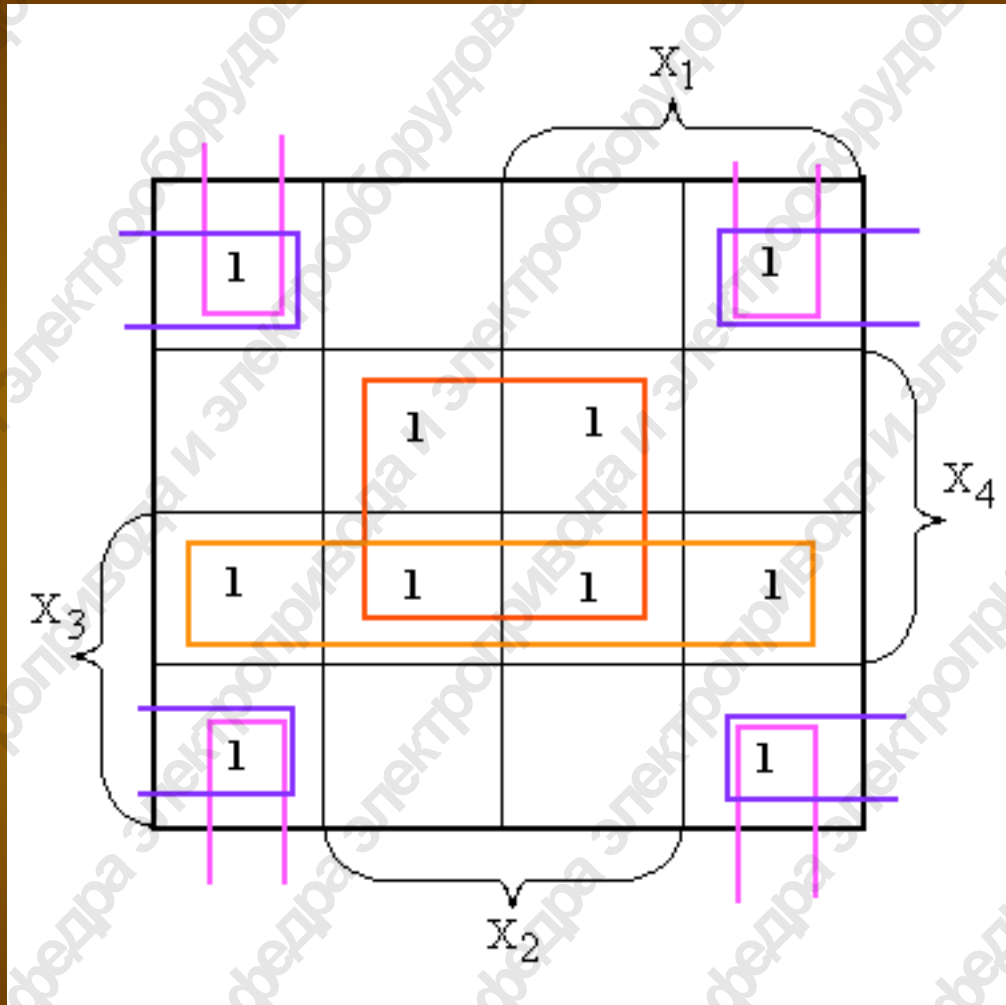


## Параметры логических схем

ПАРАМЕТРЫ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ	ТТЛ	ТЛЭС	МОП	КМОП
Быстродействие $t_{cp}$ , нс	5 - 50	1-10	100 -1000	1-100
Потребляемая мощность $P_{cp}$ , мВт	2 - 40	20 - 80	10 - 80	$(1-100)^{-3}$
Помехоустойчивость $U_{ст}$ , В	0.4 -1.1	0.1 - 0.3	2 - 3	2 - 3



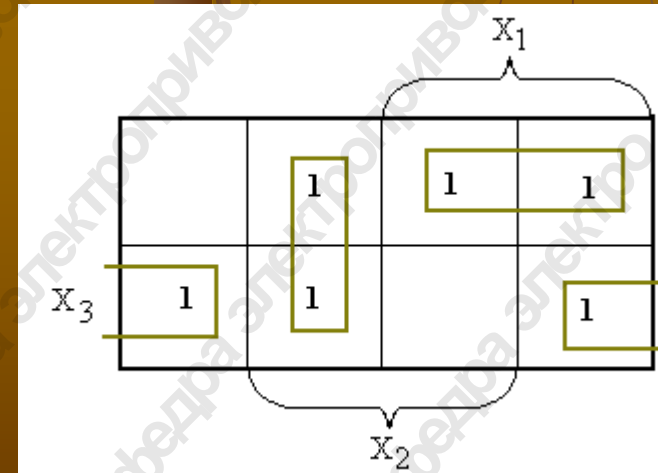
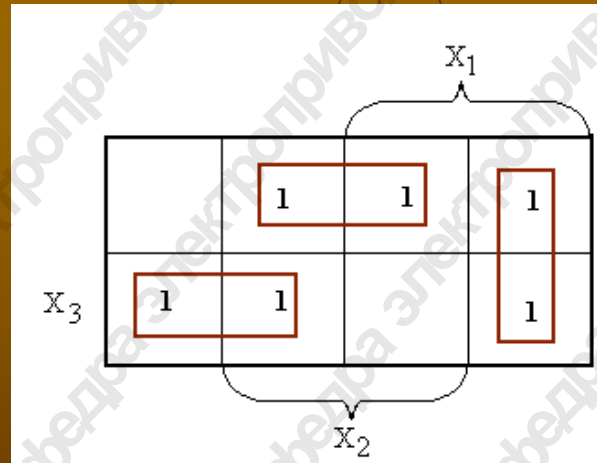
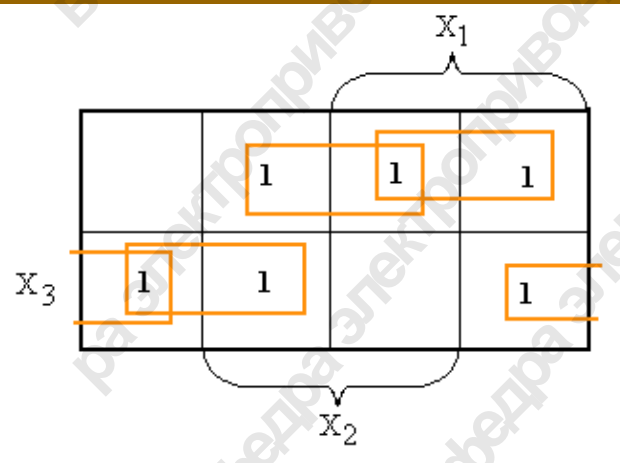
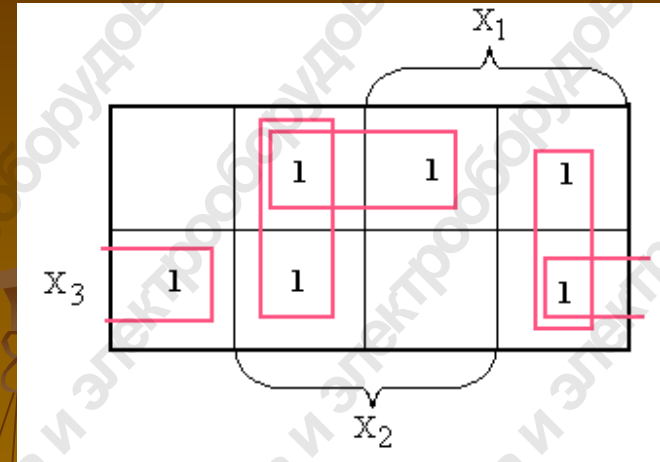
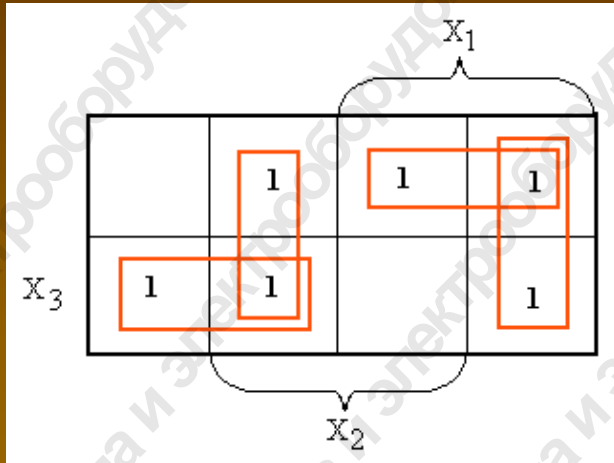
## Метод Вейча-Карно



$$Y = x_2 x_4 + x_3 x_4 + \overline{x_2} x_4$$

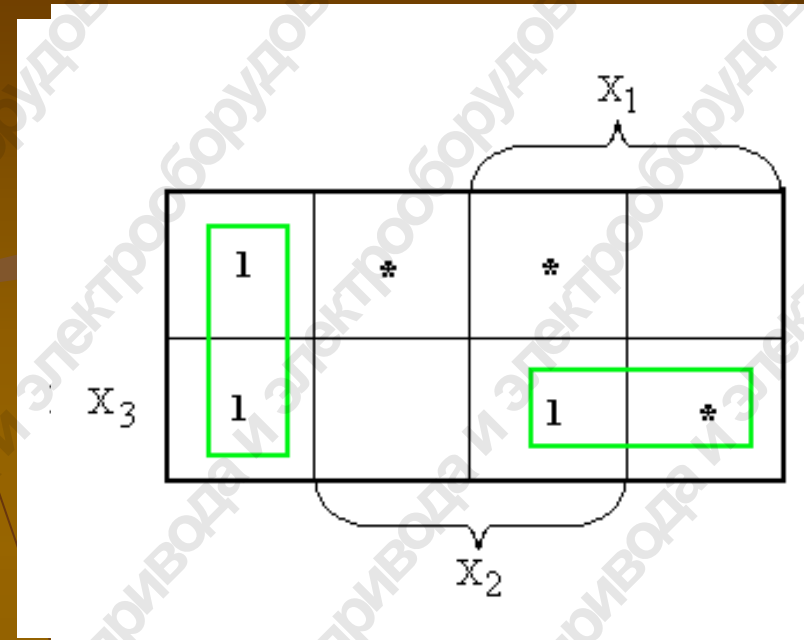
# Минимизация двоичных функций

$$Y = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} + \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} + x_1 \overline{x_2} x_3$$



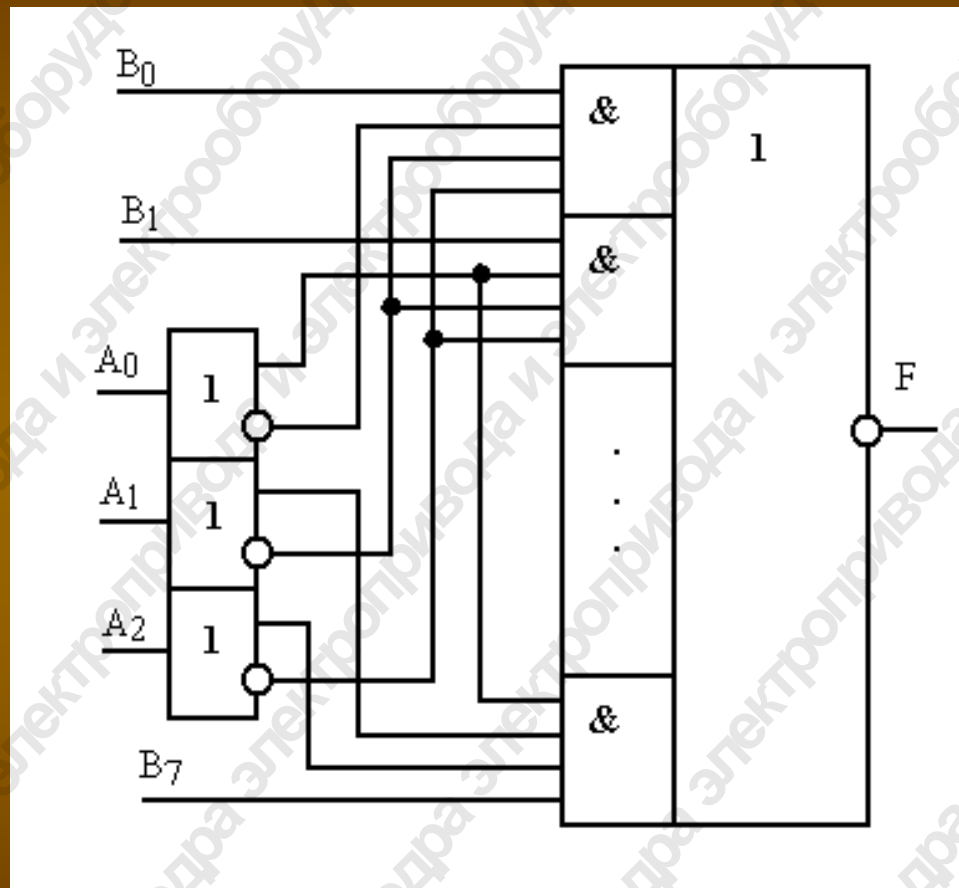
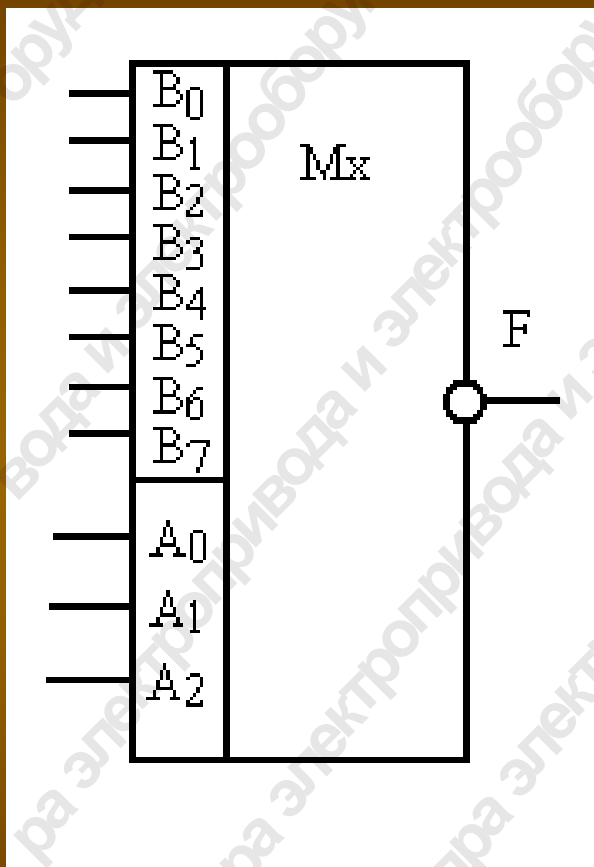
## Минимизация частично-определенных двоичных функций

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	*
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	*
1	1	0	*
1	1	1	1



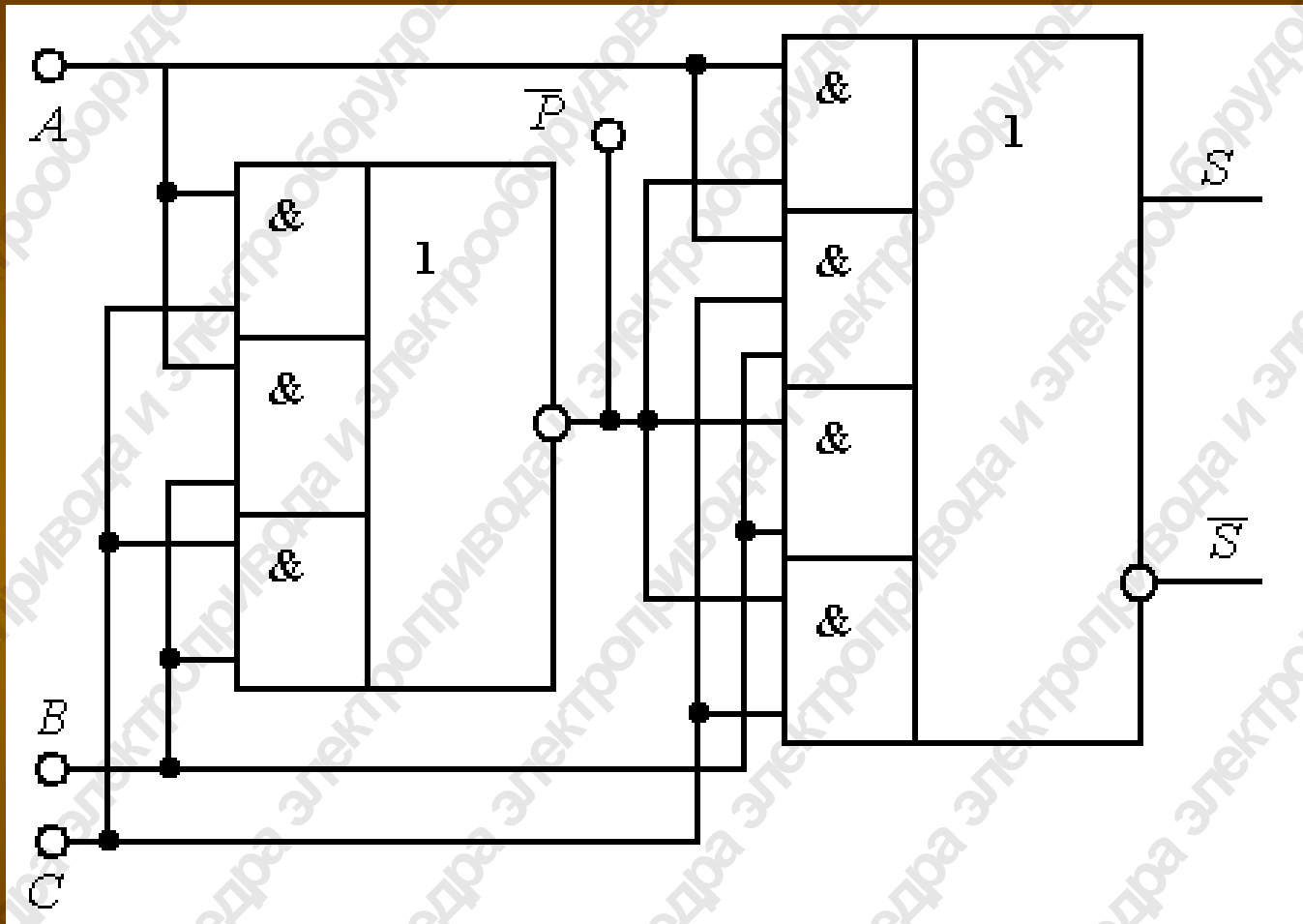
$$Y = \overline{x_1} \overline{x_2} + x_1 x_3$$

## Мультиплексор



$$F = \overline{A_0} \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot B_0 + \overline{A_0} \cdot \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot B_1 \cdots \overline{A_0} \cdot A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot B_7$$

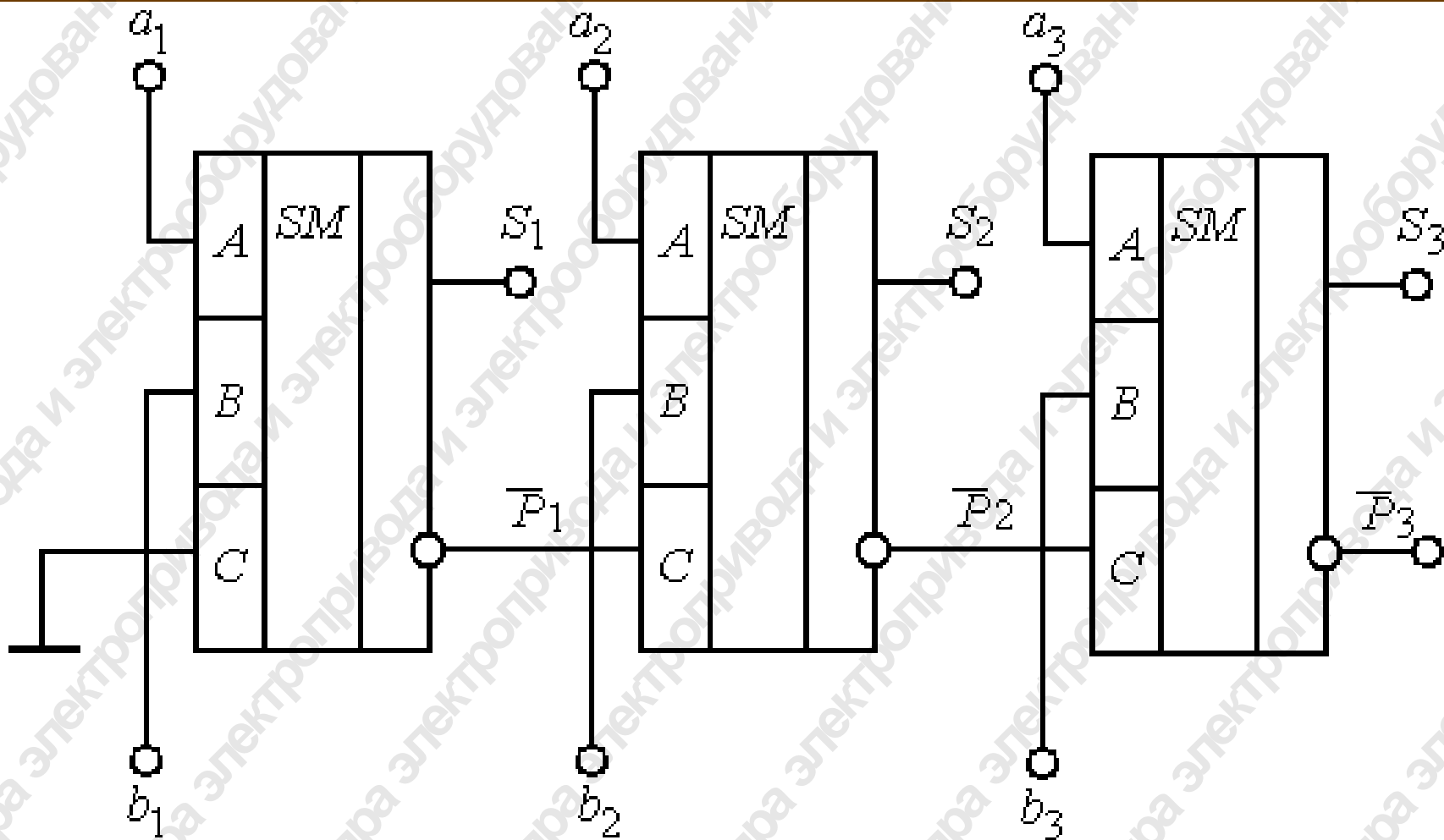
## Сумматоры



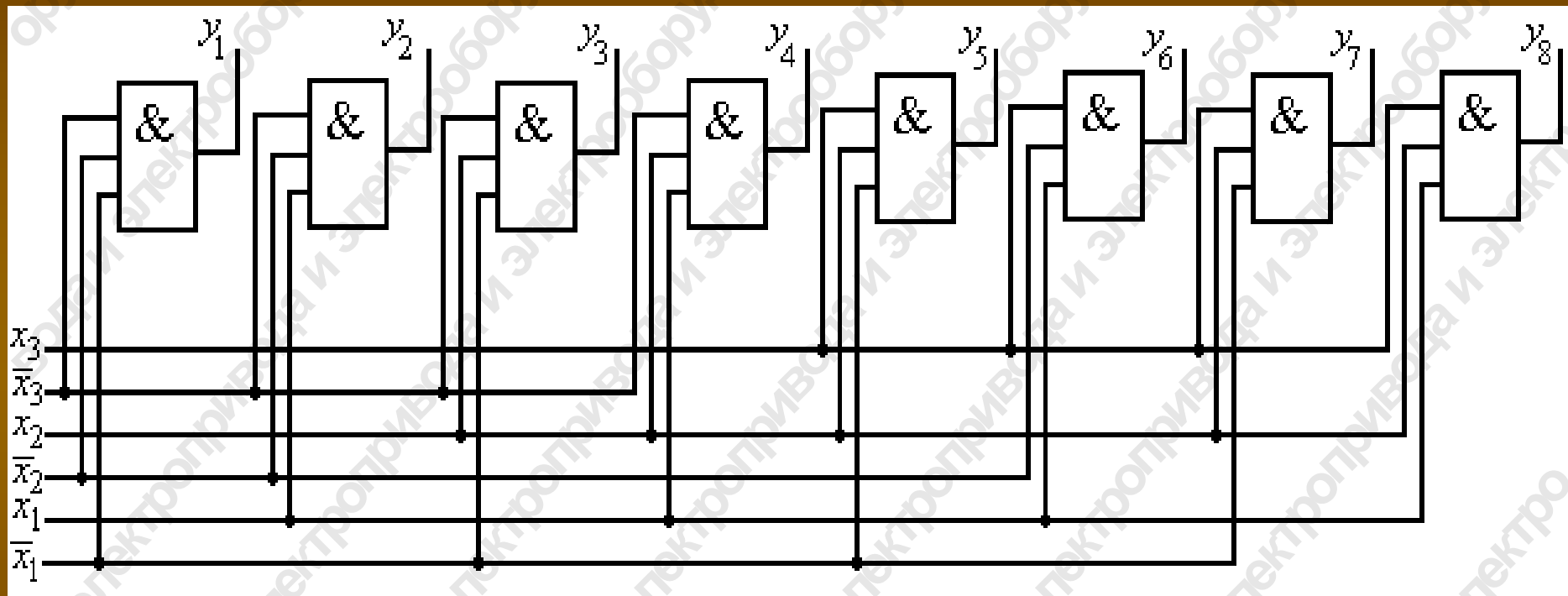
$$P = AB + AC + BC$$

$$S = A\bar{P} + ABC + B\bar{P} + C\bar{P}$$

# Сумматоры

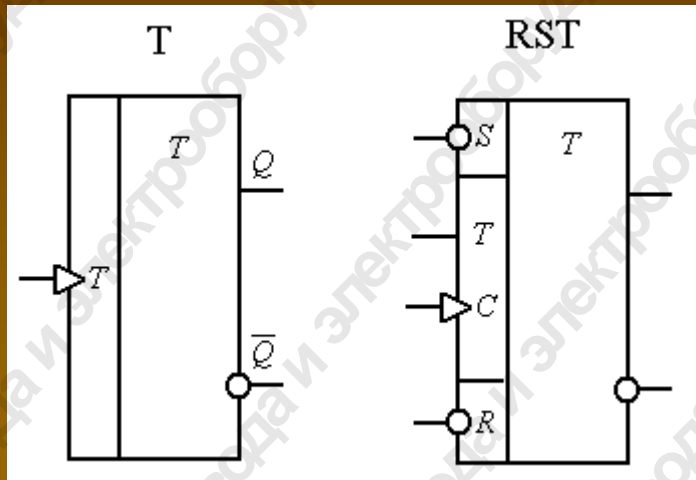








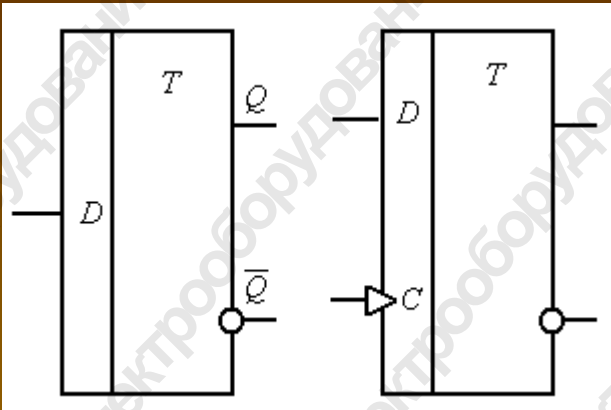
## Триггеры



ТАКТ, T		$Q^{T+1}$
$T^t$	$Q^t$	
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

$$Q^{t+1} = Q^t \bar{T}^t + \bar{Q}^t T^t$$

# Триггер

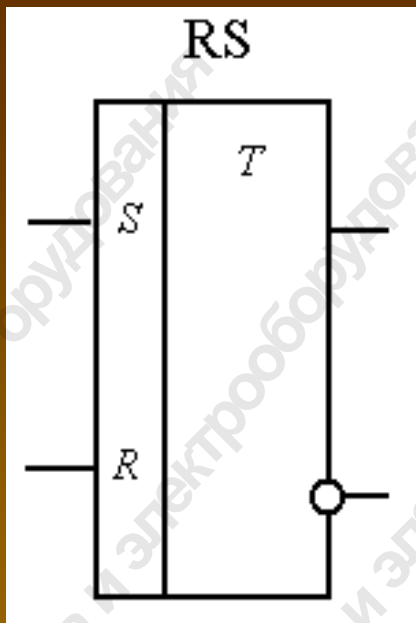


$$Q^{t+1} = D^t$$

ТАКТ, T		$Q^{T+1}$
$D^t$	$Q^t$	
0	0	0
1	0	1
0	1	0
1	1	1

$$Q^{t+1} = Q^t \bar{C}^t + C^t D^t$$

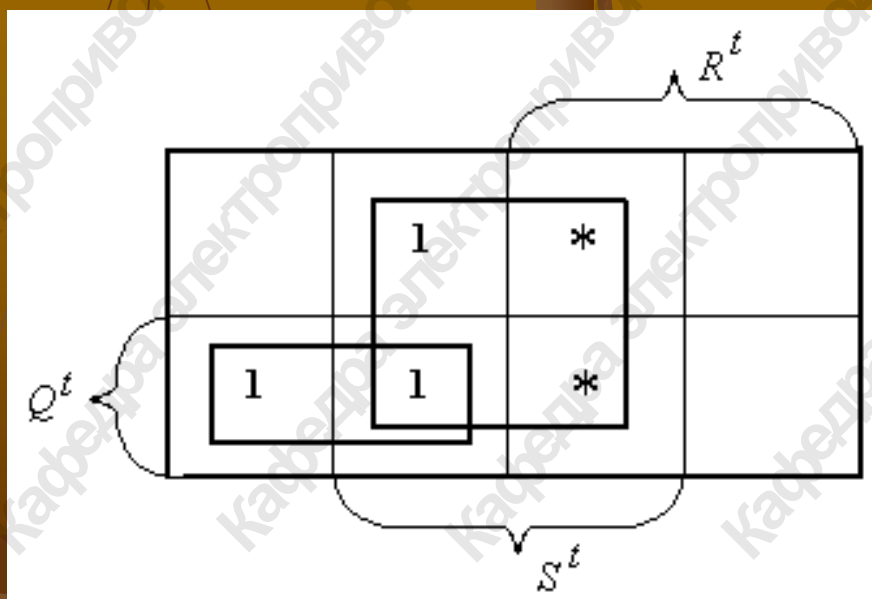
$C^t$	$D^t$	$Q^t$	$Q^{t+1}$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



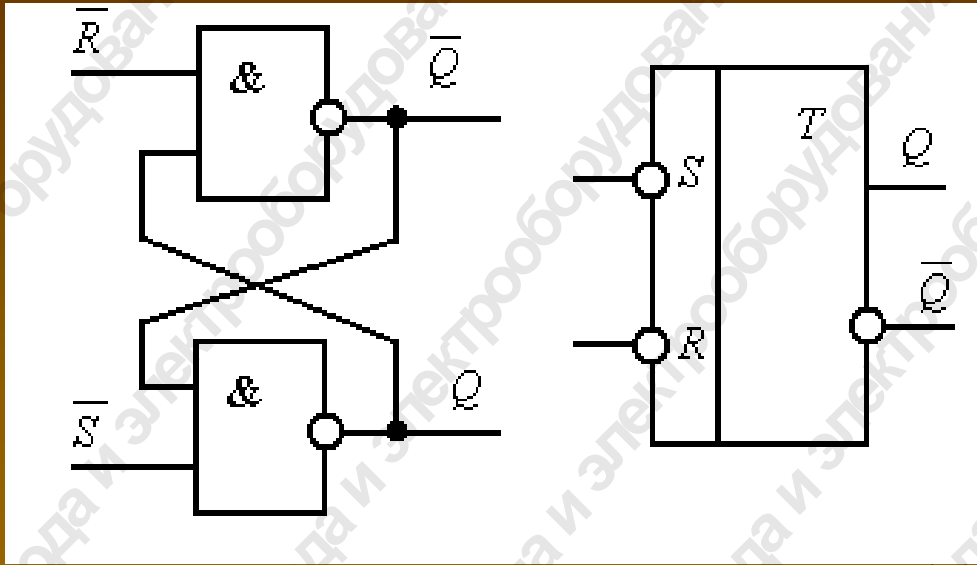
## Триггеры

$R^t$	$S^t$	$Q^t$	$Q^{t+1}$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	*
1	1	1	*

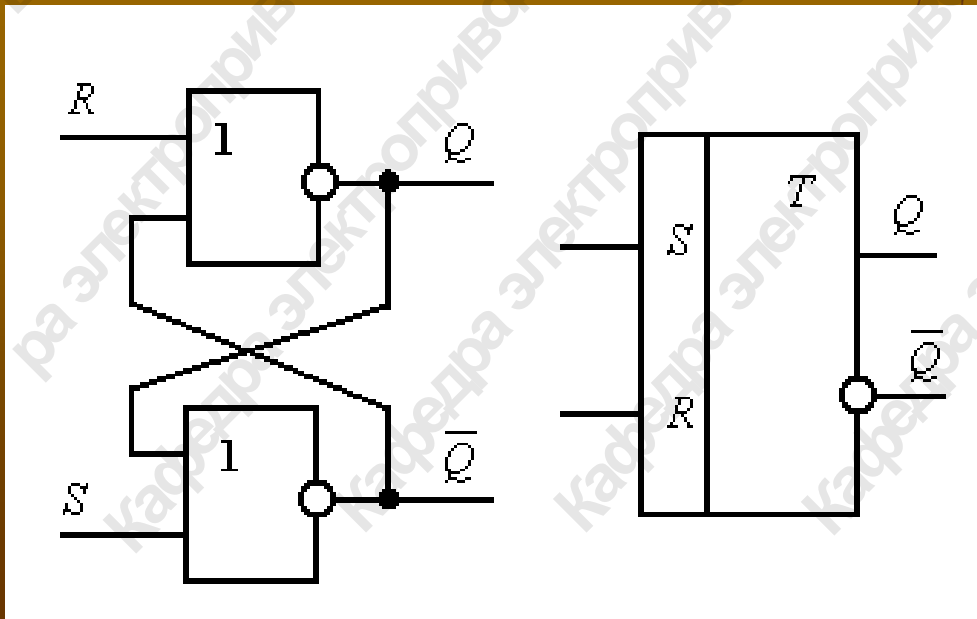
$$Q^{t+1} = S + \overline{R^t} Q^t$$



# Триггер

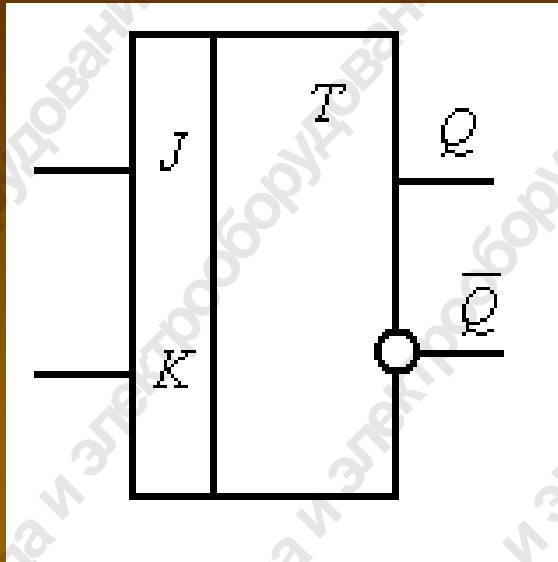


$$Q^{t+1} = \overline{\overline{S} \cdot \overline{RQ}}$$



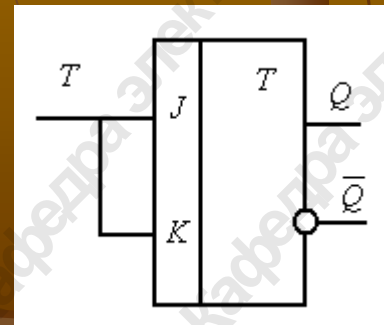
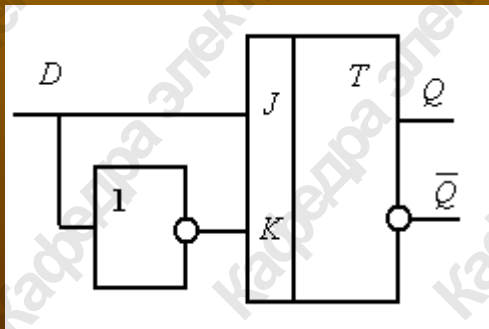
$$\overline{Q}^{t+1} = \overline{S + R + Q}$$

# JK - триггер



$K^t$	$J^t$	$Q^t$	$Q^{t+1}$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$Q^{t+1} = J^t \overline{Q^t} + \overline{K^t} Q^t$$



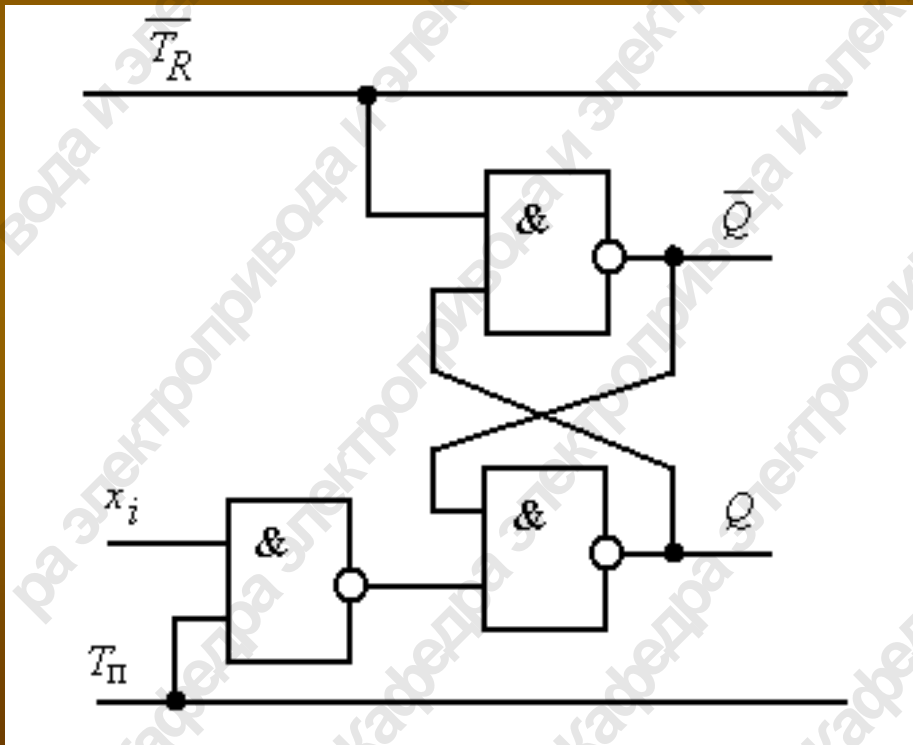
RS-регистр

$$S = x_{2i}T_{\Pi}$$

$$R = T_R$$

$$Q_i^t = x_{1i}$$

$$Q_i^{t+1} = x_{1i}\overline{T_R} + x_{2i}T_{\Pi}$$



$$Q_i^{t+1} = \overline{x_{1i}T_R} \cdot x_{2i}T_{\Pi}$$

$T_{\Pi}$	$T_R$	$Q^{t+1}$	ОПЕРАЦИЯ
0	0	$x_{1i}$	хранение
1	0	$x_{1i} + x_{2i}$	дизъюнкция
0	1	0	обнуление
1	1	$x_{2i}$	ввод

## RS-регистр

$$S = x_{2i}T_{\Pi}$$

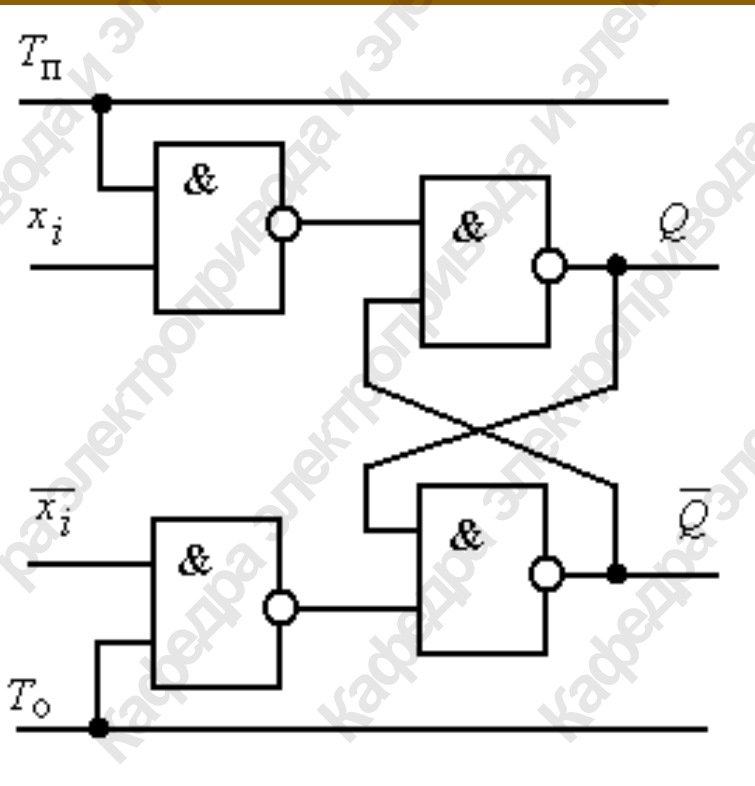
$$R = \overline{x_{2i}}T_0$$

$$Q_i^t = x_{1i}$$

$$Q_i^{t+1} = x_{1i} \overline{x_{2i}}T_0 + x_{2i}T_{\Pi}$$

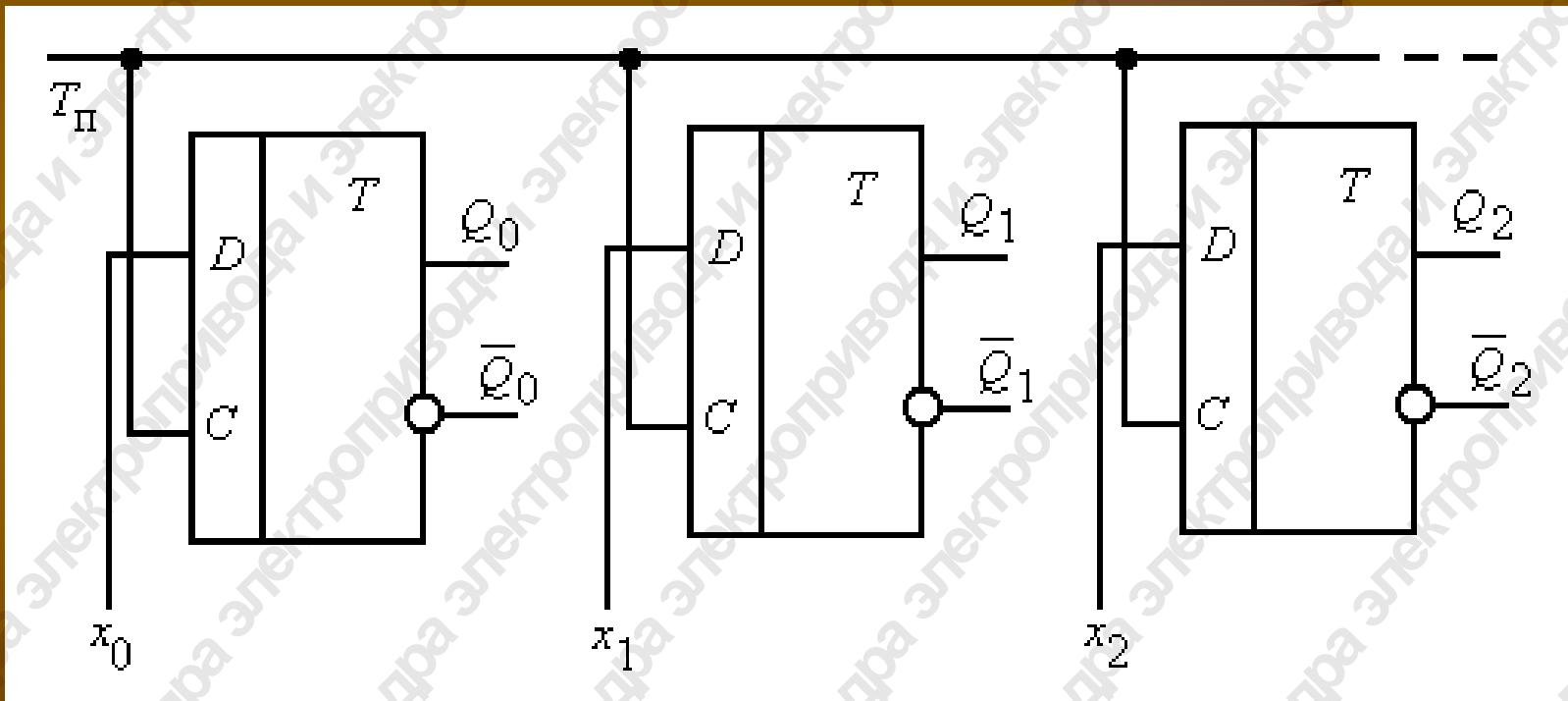
$$Q_i^{t+1} = \overline{x_{2i}}T_0 \cdot x_{2i}T_{\Pi} + x_{1i}$$

$T_{\Pi}$	$T_0$	$Q^{t+1}$	ОПЕРАЦИЯ
0	0	$x_{1i}$	хранение
1	0	$x_{1i} + x_{2i}$	ДИЗЪЮНКЦИЯ
0	1	$x_{1i} \overline{x_{2i}}$	КОНЪЮНКЦИЯ
1	1	$x_{2i}$	ВВОД



## Регистры на D-триггерах

$$Q_i^{t+1} = \overline{x_{1i}} T_{\Pi} + x_{2i} T_{\Pi}$$





# Последовательный регистр на JK-триггерах

		$Q_{i+1}^t$
	<b>00</b>	<b>01</b>
$Q_i^t$	<b>10</b>	<b>11</b>

$Q^t \rightarrow Q^{t+1}$	$J^t$	$K^t$
<b>00</b>	<b>0</b>	<b>*</b>
<b>01</b>	<b>1</b>	<b>*</b>
<b>10</b>	<b>*</b>	<b>1</b>
<b>11</b>	<b>*</b>	<b>0</b>

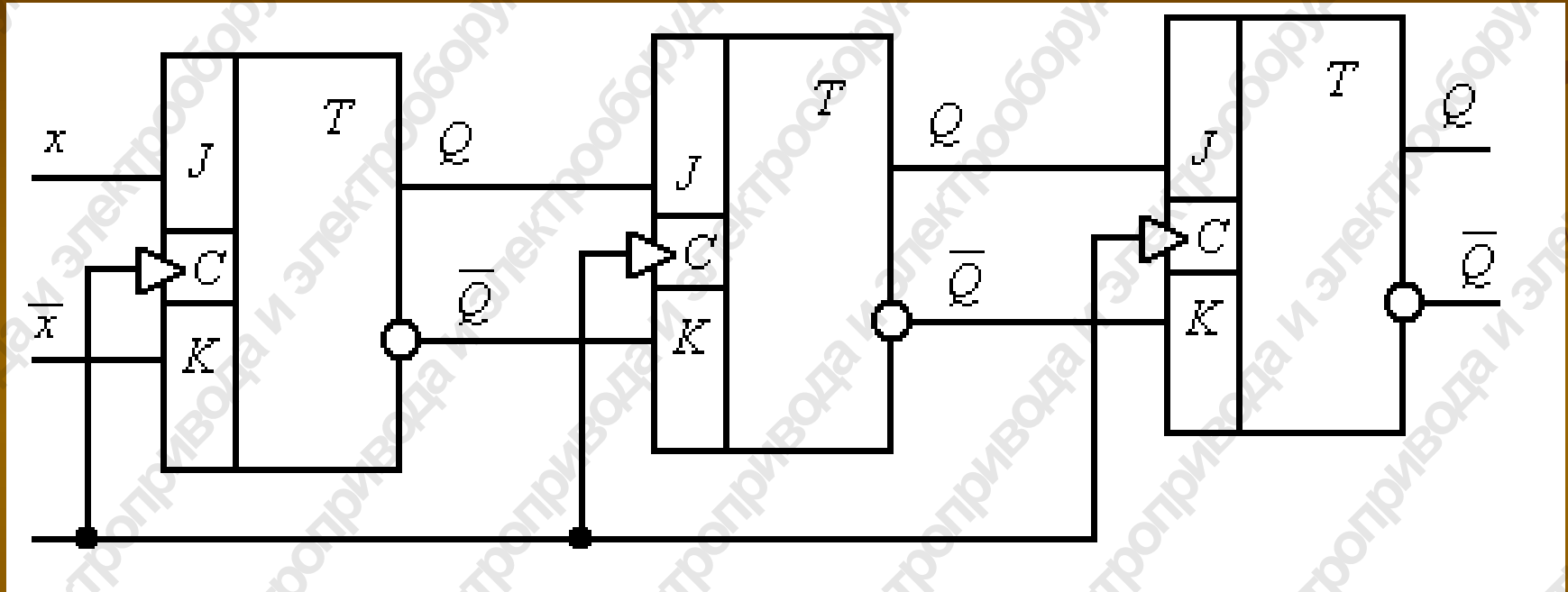
		$Q_{i+1}^t$
$J_i^t$	<b>0</b>	<b>1</b>
$Q_i^t$	<b>*</b>	<b>*</b>

$$J_i^t = Q_{i+1}^t$$

$$K_i^t = \overline{Q_{i+1}^t}$$

		$Q_{i+1}^t$
$K_i^t$	<b>*</b>	<b>*</b>
$Q_i^t$	<b>1</b>	<b>0</b>

# Синтез последовательного регистра

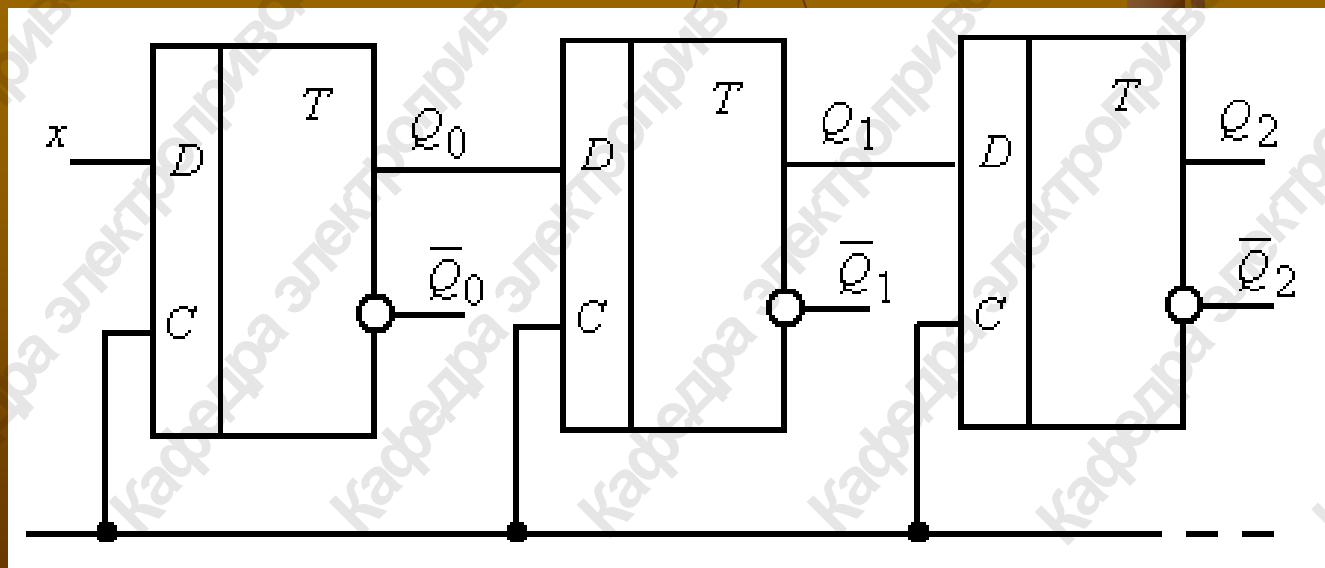


# Регистр на D -триггерах

		$Q_{i+1}^t$
	<b>00</b>	<b>01</b>
$Q_i^t$	<b>10</b>	<b>11</b>

$$D_i^t = Q_{i+1}^t$$

		$Q_{i+1}^t$
$D_i^t$	<b>0</b>	<b>1</b>
$Q_i^t$	<b>0</b>	<b>1</b>



## Счетчики

- Суммирующий счетчик на JK – триггерах

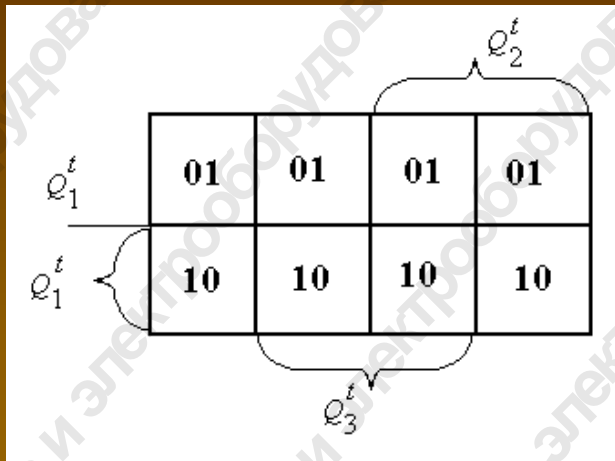
ксч = 8

$$m = \log_2 k_{\text{сч}} = \frac{\ln 8}{\ln 2} = 3$$

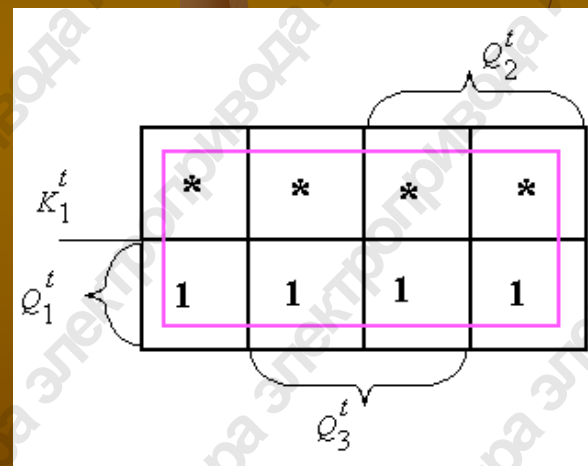
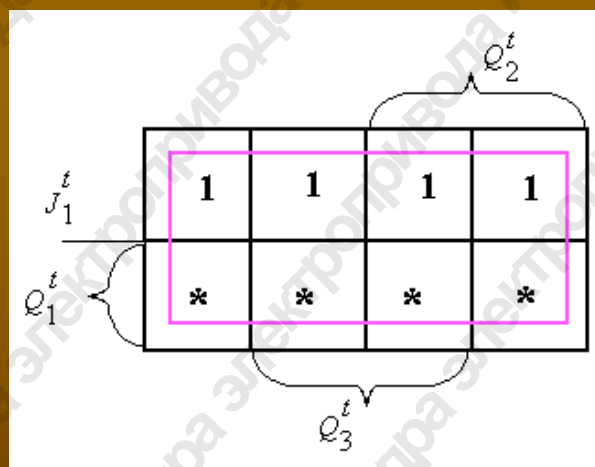
### 1. Таблица функционирования счетчика

$Q$	НОМЕР СОСТОЯНИЯ							
	0	1	2	3	4	5	6	7
$Q_1^{\uparrow}$	0	1	0	1	0	1	0	1
$Q_2^{\uparrow}$	0	0	1	1	0	0	1	1
$Q_3^{\uparrow}$	0	0	0	0	1	1	1	1
$Q_1^{\downarrow}$	1	0	1	0	1	0	1	0
$Q_2^{\downarrow}$	0	1	1	0	0	1	1	0
$Q_3^{\downarrow}$	0	0	0	1	1	1	1	0

# Синтез двоичного счетчика



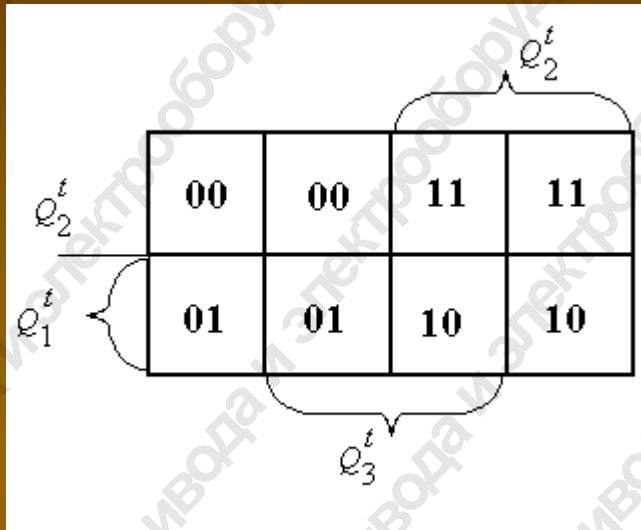
$Q^t \rightarrow Q^{t+1}$	$J^t$	$K^t$
00	0	*
01	1	*
10	*	1
11	*	0



$$J_1^t = 1$$

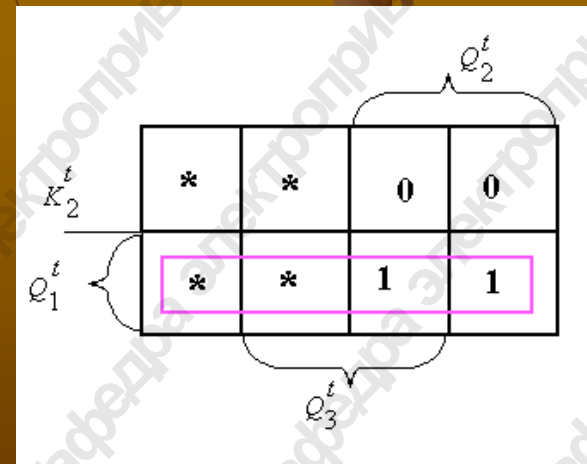
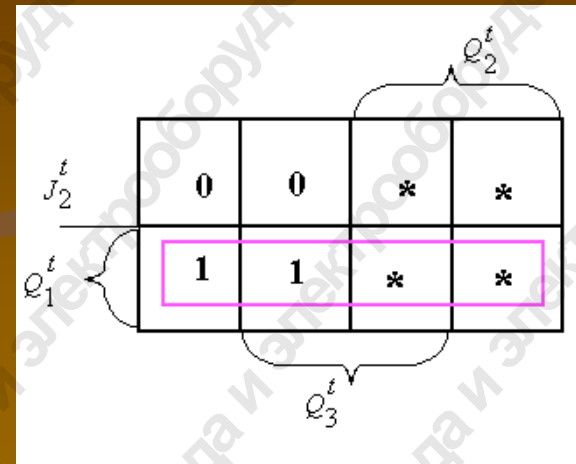
$$K_1^t = 1$$

# Синтез двоичного счетчика

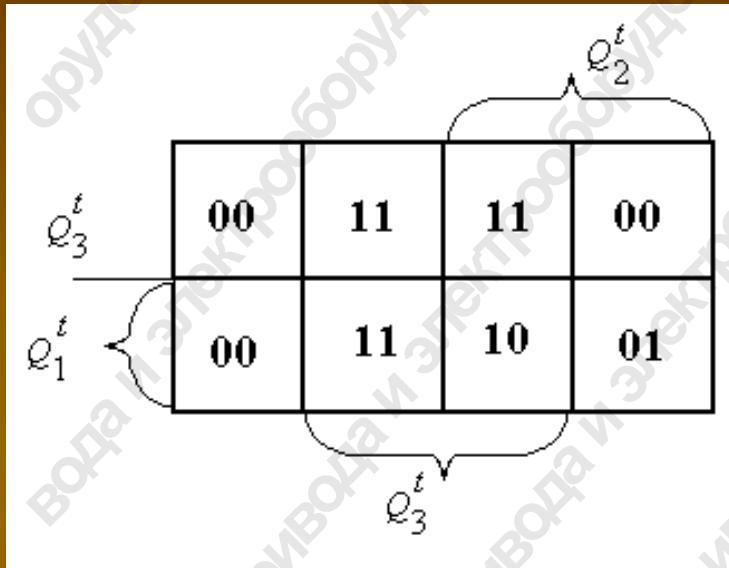


$$J_2^t = Q_1^t$$

$$K_2^t = Q_1^t$$

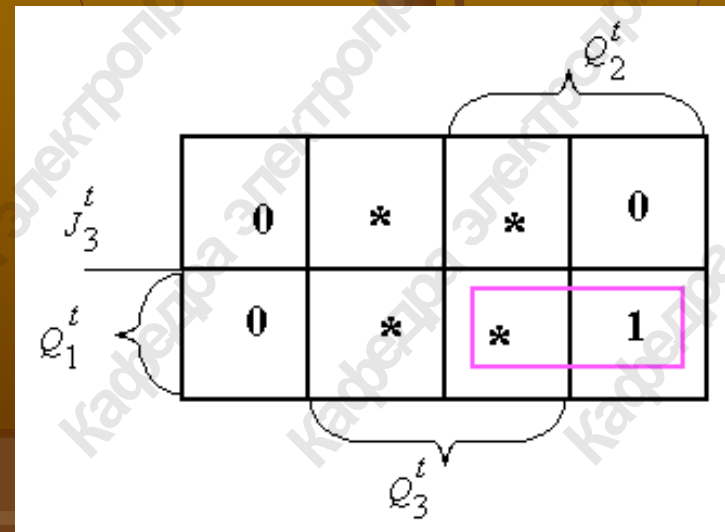
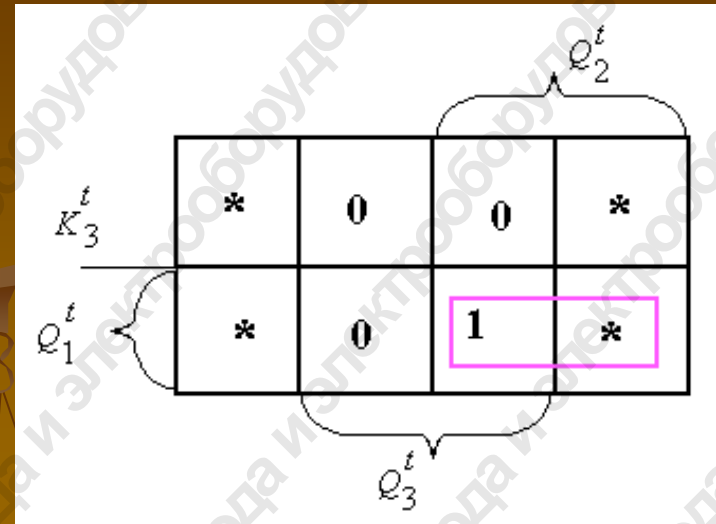


# Синтез двоичного счетчика

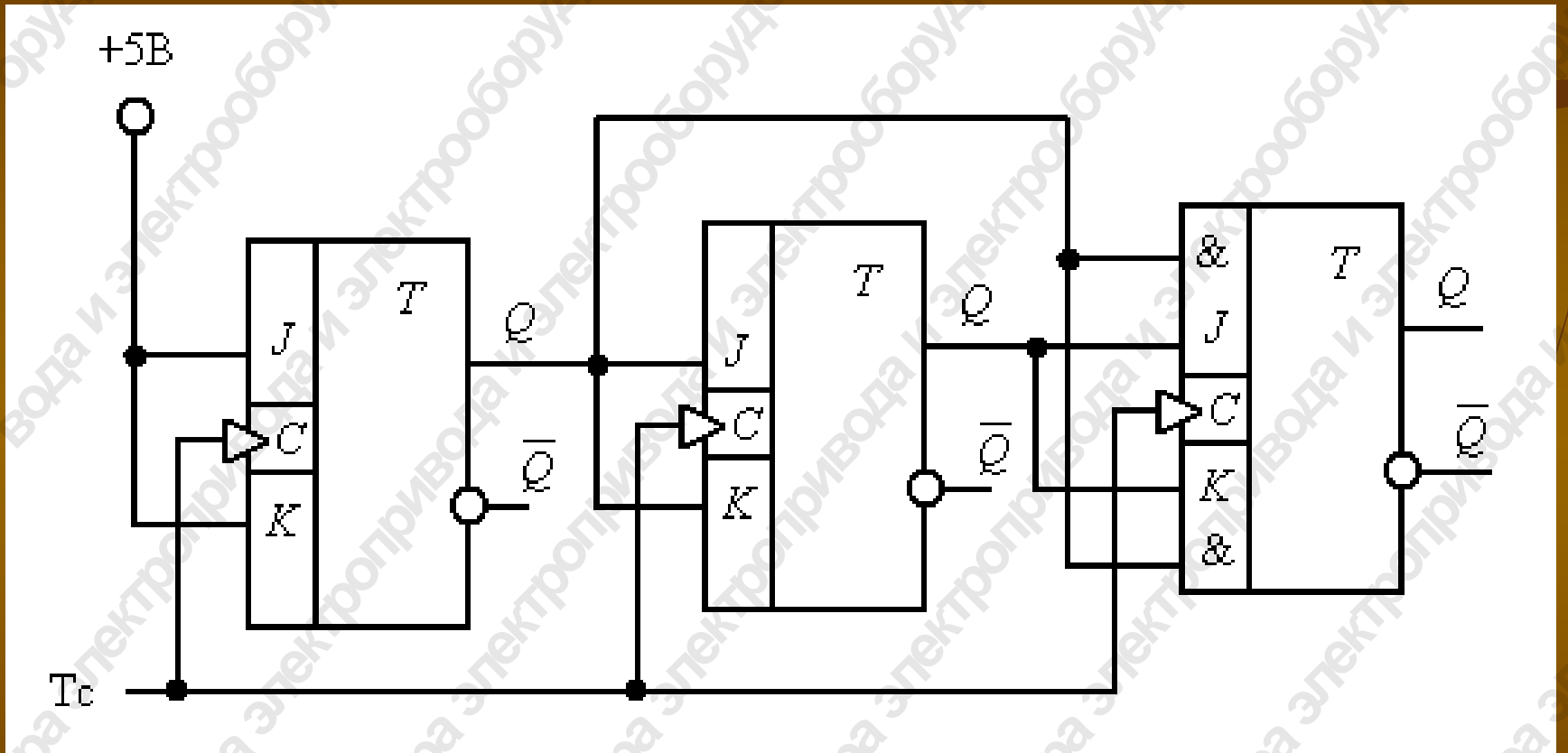


$$J_3^t = Q_1^t Q_2^t$$

$$K_3^t = Q_1^t Q_2^t$$



# Синтез двоичного счетчика





## Синтез не двоичного счетчика

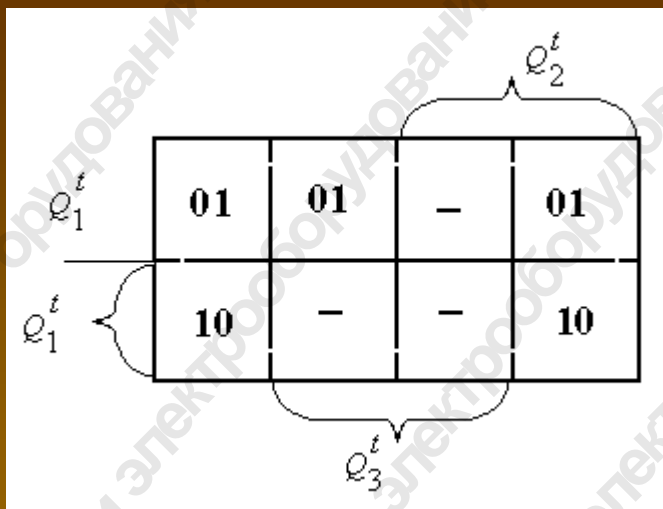
- Суммирующий счетчик на JK – триггерах  $k_{сч} = 5$

$$m = \log_2 k_{сч} = \frac{\ln 5}{\ln 2} = 2.32 \approx 3$$

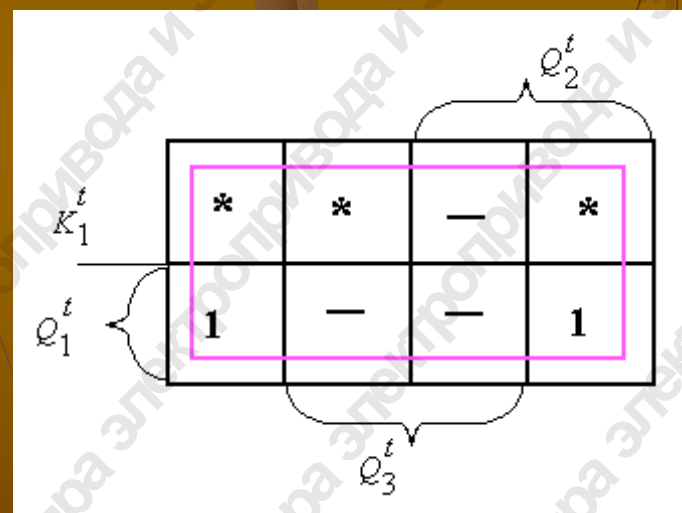
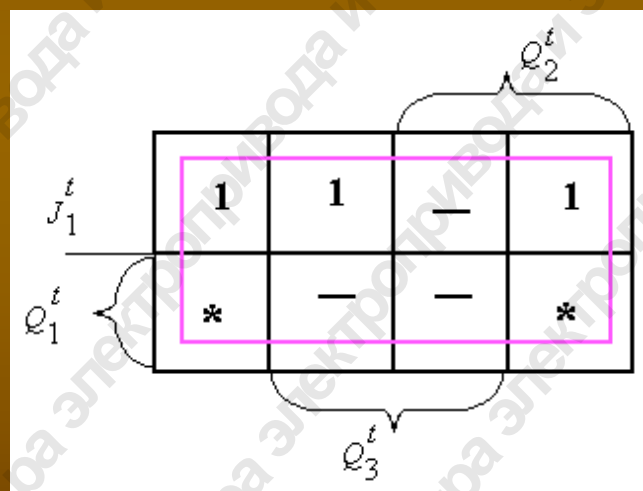
### 1. Таблица функционирования счетчика

$Q$	НОМЕР СОСТОЯНИЯ							
	0	1	2	3	4	5	6	7
$Q_1^{\uparrow}$	0	1	0	1	0			
$Q_2^{\uparrow}$	0	0	1	1	0			
$Q_3^{\uparrow}$	0	0	0	0	1			
$Q_1^{\downarrow}$	1	0	1	0	0			
$Q_2^{\downarrow}$	0	1	1	0	0			
$Q_3^{\downarrow}$	0	0	0	1	0			

# Синтез двоичного счетчика



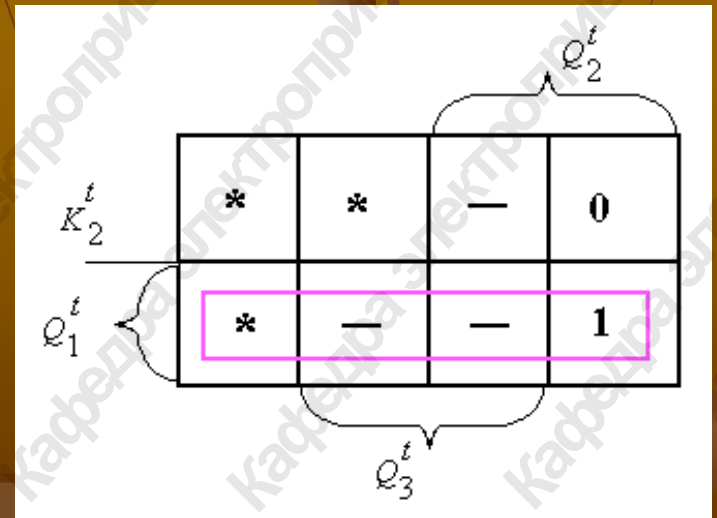
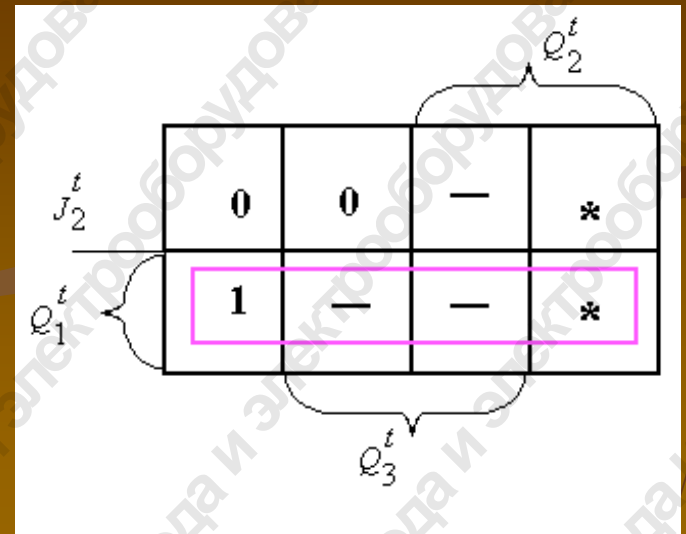
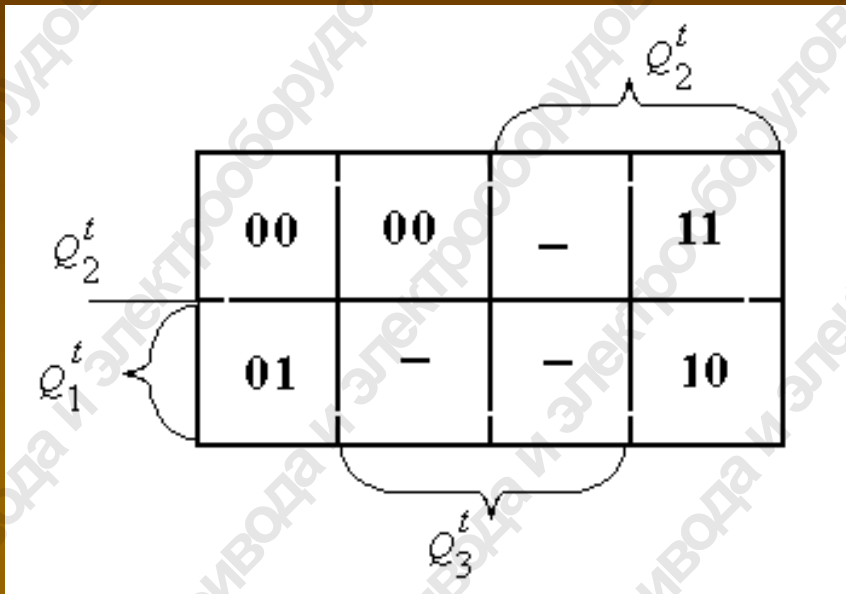
$Q^t \rightarrow Q^{t+1}$	$J^t$	$K^t$
00	0	*
01	1	*
10	*	1
11	*	0



$$J_1^t = 1$$

$$K_1^t = 1$$

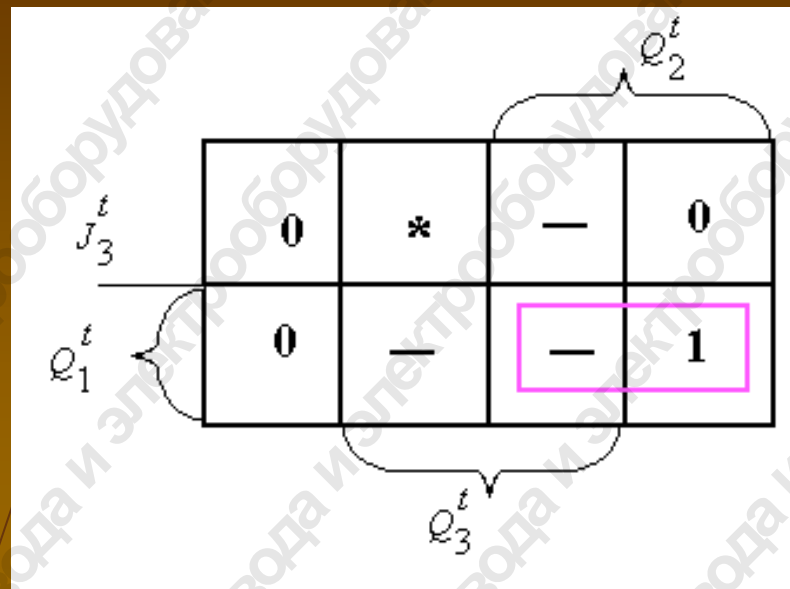
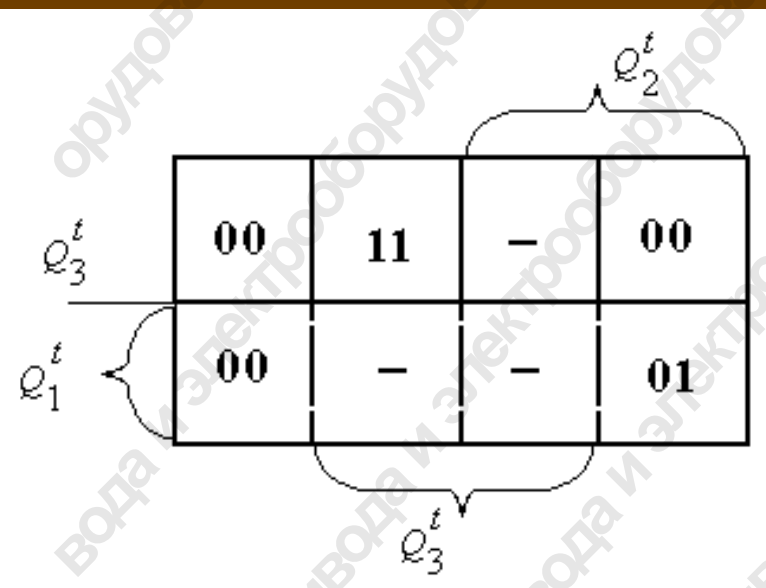
# Синтез двоичного счетчика



$$J_2^t = Q_1^t$$

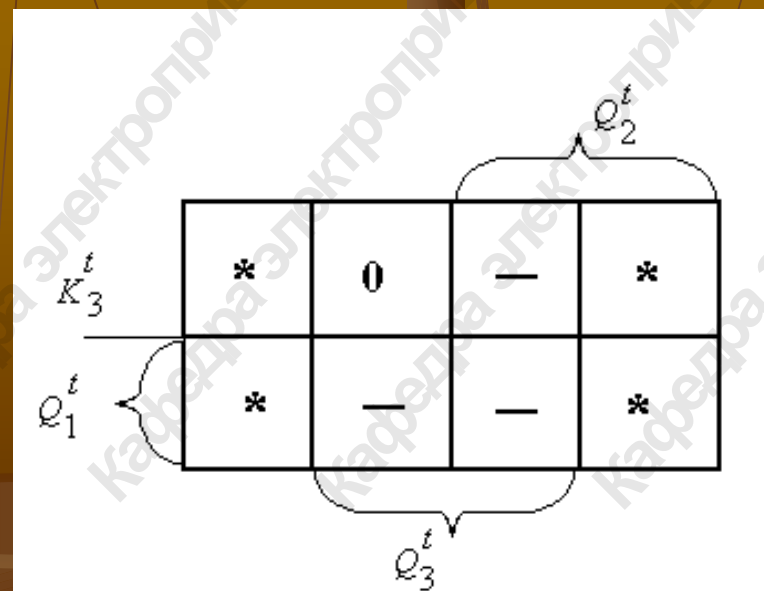
$$K_2^t = Q_1^t$$

# Синтез двоичного счетчика

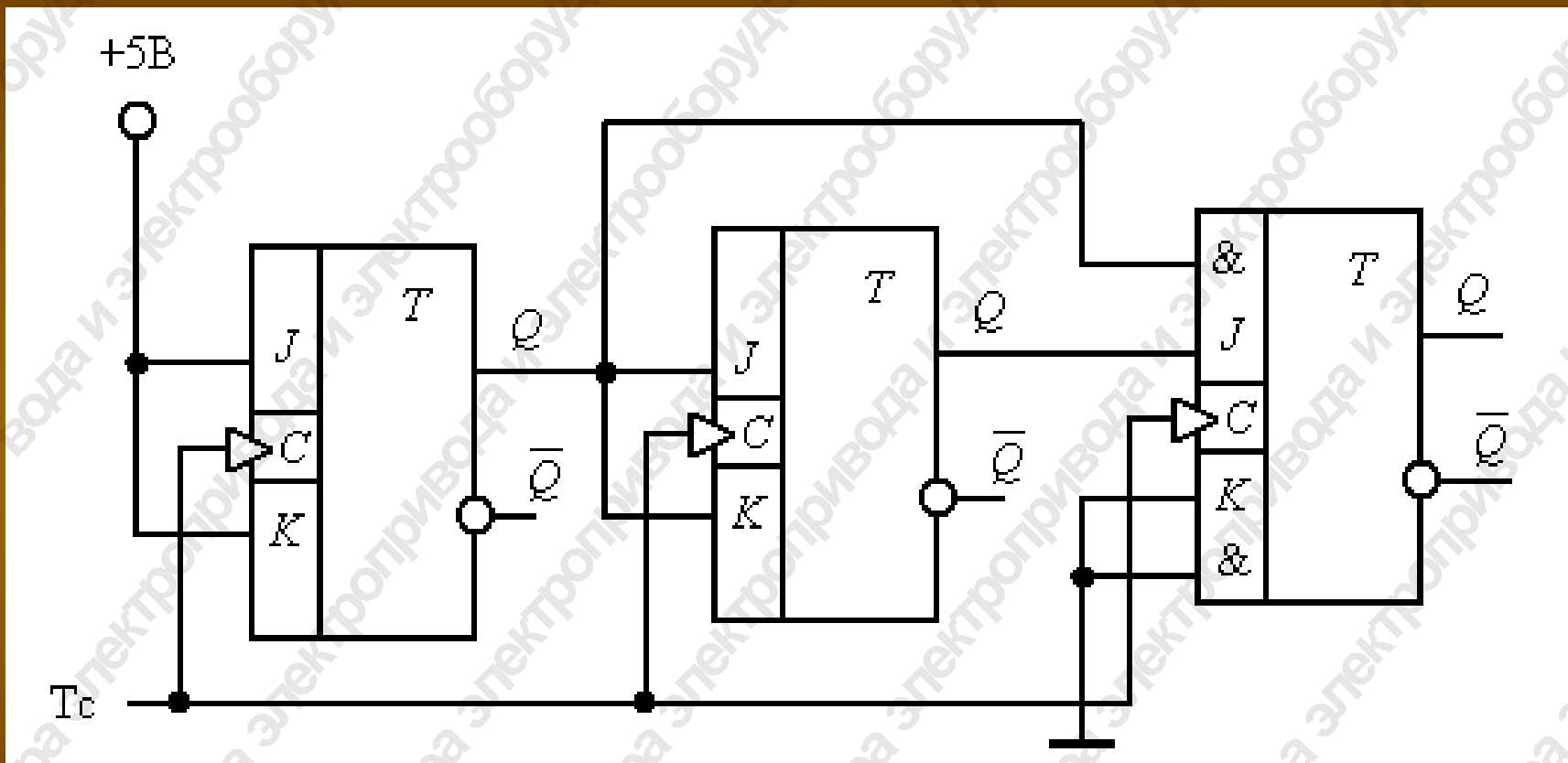


$$J_3^t = Q_1^t Q_2^t$$

$$K_3^t = 0$$



# Синтез не двоичного счетчика



## Синтез счетчика с произвольным порядком счета

- Суммирующий счетчик на JK – триггерах

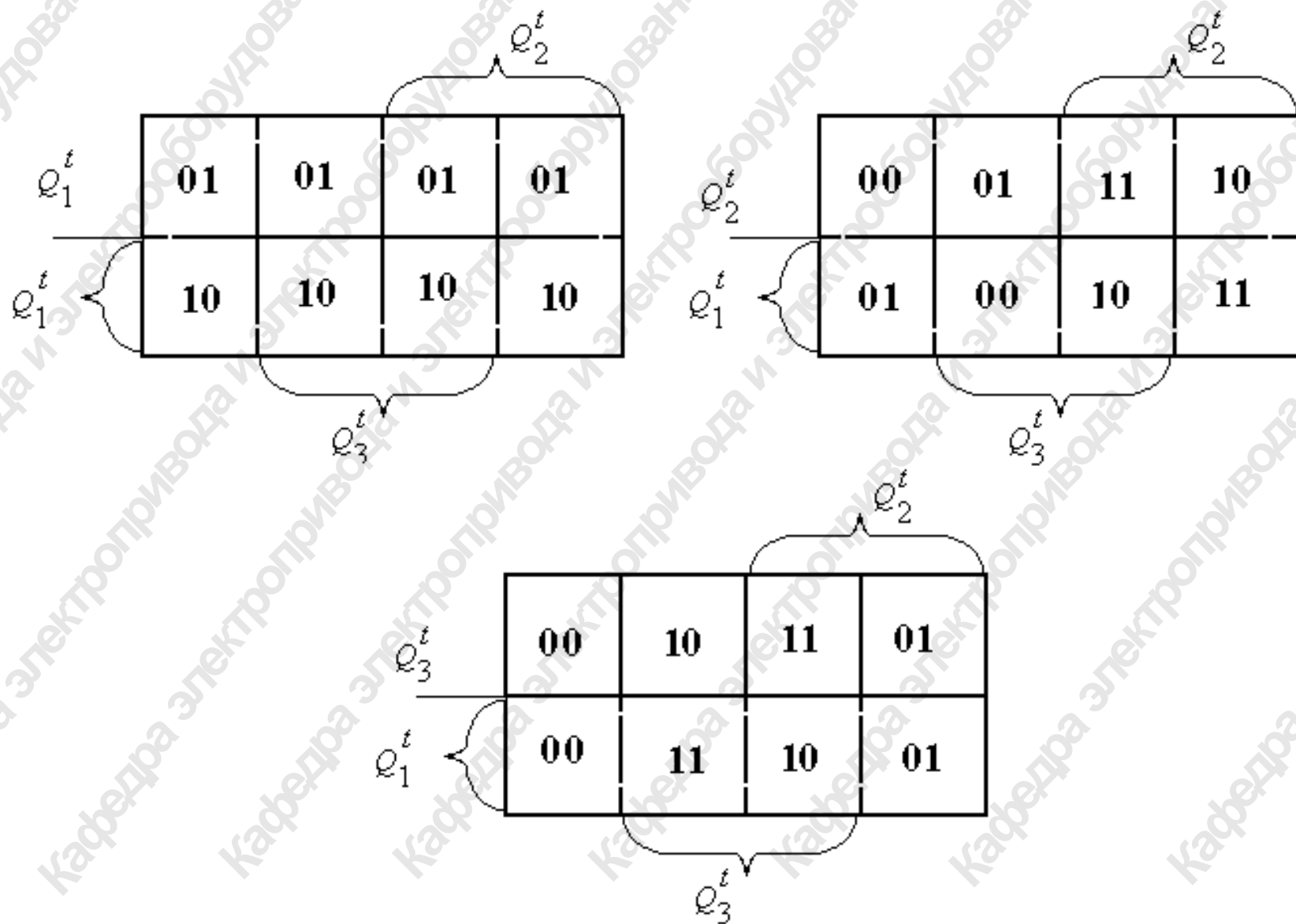
$k_{сч} = 8$

$$m = \log_2 k_{сч} = \frac{\ln 8}{\ln 2} = 3$$

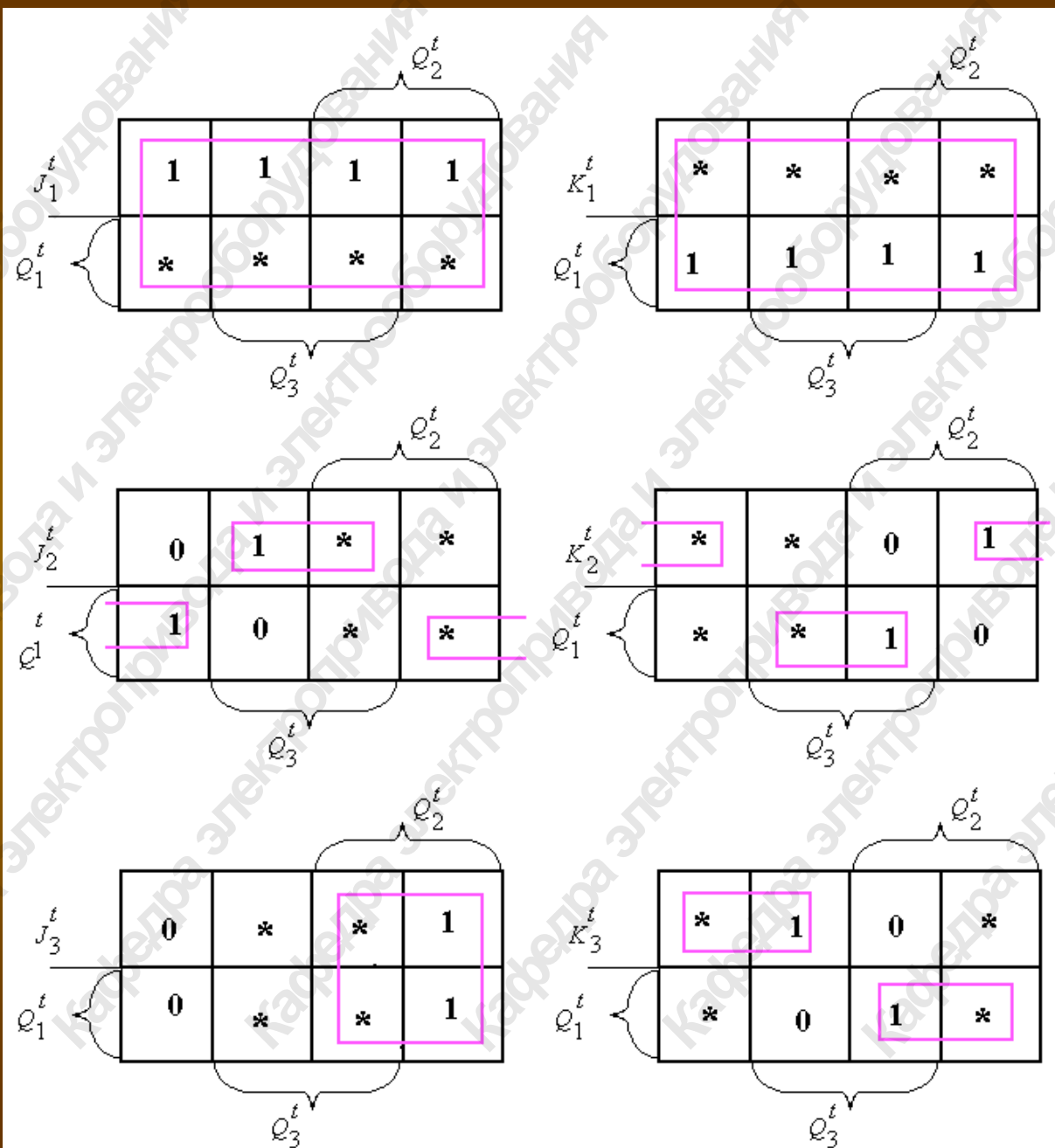
### 1. Таблица функционирования счетчика

$Q$	НОМЕР СОСТОЯНИЯ							
	0	1	2	5	4	3	6	7
$Q_1^I$	0	1	0	1	0	1	0	1
$Q_2^I$	0	0	1	0	0	1	1	1
$Q_3^I$	0	0	0	1	1	0	1	1
$Q_1^{II}$	1	0	1	0	1	0	1	0
$Q_2^{II}$	0	1	0	0	1	1	1	0
$Q_3^{II}$	0	0	1	1	0	1	1	0

# Синтез счетчика с произвольным порядком счета



# Синтез счетчика с произвольным порядком счета





Синтез- счетчика с произвольным порядком счета

$$J_1^t = 1$$

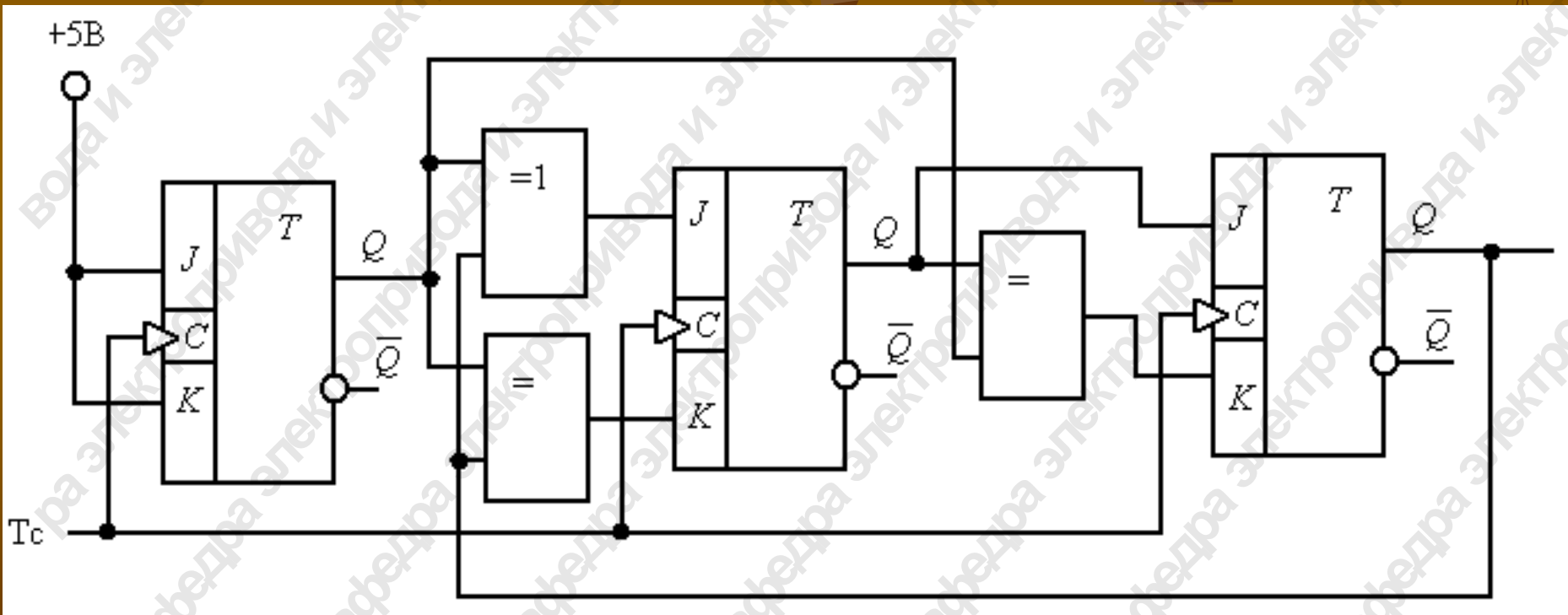
$$J_2^t = Q_1^t Q_3^t + \overline{Q_1^t} \overline{Q_3^t}$$

$$J_3^t = Q_2^t$$

$$K_1^t = 1$$

$$K_2^t = Q_1^t Q_3^t + \overline{Q_1^t} \overline{Q_3^t}$$

$$K_3^t = Q_1^t Q_2^t + \overline{Q_1^t} \overline{Q_2^t}$$



## Двоично-десятичные коды

Дес. число	Двоичный код $Q_3Q_2Q_1Q_0$	Десятичные эквиваленты двоичных чисел в различных двоично-десятичных кодах								
		Не самодополняющиеся						Самодополняющиеся		
		8-4-2-1	2-4-2-1	4-2-2-1	5-2-1-1	5-4-2-1	Не взвешанный	2-4-2-1	С избытком 3	4-2-2-1
0	0000	0	0	0	0	0	0	0	-	0
1	0001	1	1	1	1	1	1	1	-	1
2	0010	2	2	2	-	2	2	2	-	2
3	0011	3	3	3	2	3	3	3	0	-
4	0100	4	4	-	-	4	-	4	1	-
5	0101	5	5	-	3	-	-	-	2	3
6	0110	6	6	4	-	-	4	-	3	4
7	0111	7	7	5	4	-	5	-	4	-
8	1000	8	-	-	5	5	-	-	5	-
9	1001	9	-	-	6	6	-	-	6	5
10	1010	-	-	6	-	7	-	-	7	6
11	1011	-	-	7	7	8	-	5	8	-
12	1100	-	-	-	-	9	8	6	9	-
13	1101	-	-	-	8	-	9	7	-	7
14	1110	-	8	8	-	-	6	8	-	8
15	1111	-	9	9	9	-	7	9	-	9