



Теория игр

Лекция 5.

Игры с природой

09.10.2014

План лекции

5.1. Понятие игры с природой

**5.2. Принятие решений в условиях
неопределенности**

5.1. Понятие игры с природой

**Как вы думаете, что такое
неопределенность и риск в
экономике?**

Неопределенность в теории игр

Неопределенность – это когда противник не имеет противоположных интересов, но выигрыш действующего игрока во многом зависит от неизвестного заранее состояния противника.



Неопределенность зависит от недостатка информации о внешних условиях, в которых будет приниматься решение и не зависит от действий игрока

Неопределенность может быть следствием многих причин:

- ▶ **колебание спроса;**
- ▶ **нестабильность экономической ситуации;**
- ▶ **изменение курса валют;**
- ▶ **колебание уровня инфляции;**
- ▶ **неустойчивая биржевая ситуация;**
- ▶ **погода как природное явление.**



Понятие игры с природой

Игра, в которой осознанно действует только один из игроков, называется *игрой с природой*.



«Природа» – это обобщенное понятие противника, не преследующего собственных целей в данном конфликте, хотя такую ситуацию конфликтом можно назвать лишь условно.

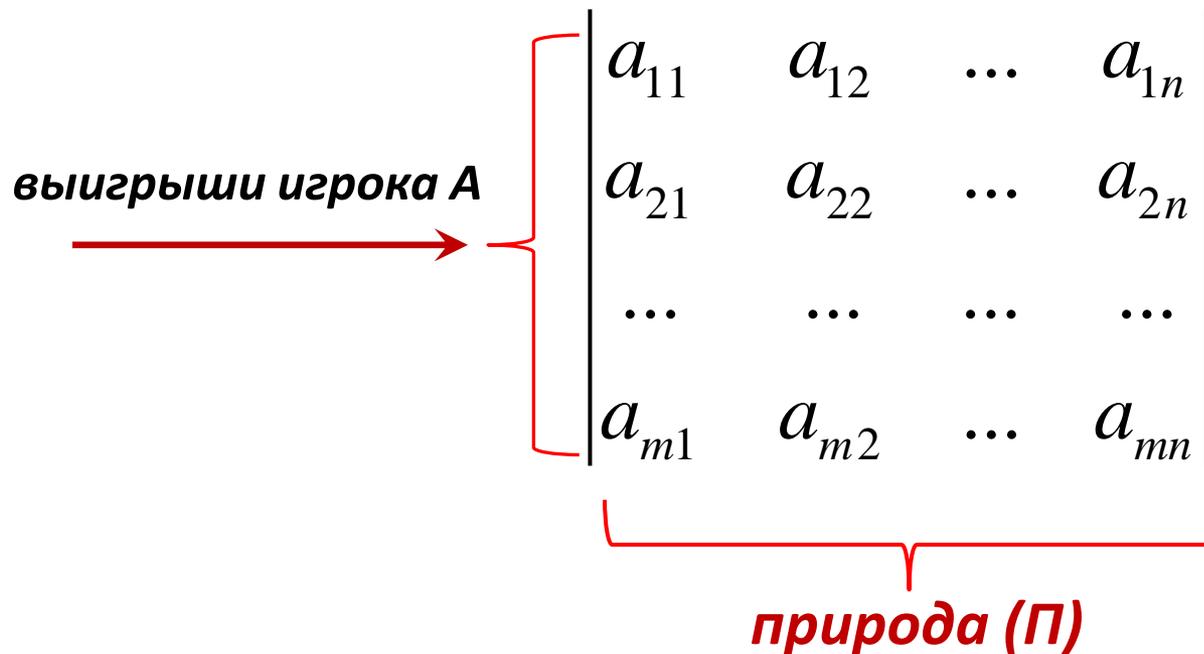
Природа может принимать одно из своих возможных состояний и не имеет целью получение выигрыша

Понятие игры с природой

Игра с природой представляется в виде платежной матрицы, элементы которой – выигрыши игрока A , но **не являются проигрышами природы P .**

Понятие игры с природой

Каждый элемент платежной матрицы a_{ij} – выигрыш игрока A при стратегии A_i в состоянии природы Π_j



Понятие игры с природой

Матрица еще называется **матрицей доходности**, которая агрегирует информацию о возможной доходности вариантов стратегии при различных сценариях развития экономической ситуации.

Различают два вида задач в играх с природой:

1. Задачи о принятии решений **в условиях неопределенности**, когда нет возможности получить информацию о вероятностях появления состояний природы

2. Задачи о принятии решений **в условиях риска**, когда известны вероятности, с которыми природа принимает каждое из возможных состояний

5.2. Принятие решений в условиях неопределенности

Предположим, что лицо, принимающее решение, может выбрать одну из возможных альтернатив, обозначенных номерами $i = 1, 2, \dots, m$



Ситуация является полностью неопределенной, т. е. известен лишь набор возможных вариантов состояний внешней (по отношению к лицу, принимающему решение) среды, обозначенных номерами $j = 1, 2, \dots, n$.

Принятие решений в условиях неопределенности

Если будет принято ***i*-е решение**, а состояние внешней среды соответствует ***j*-й ситуации**, то лицо, принимающее решение, получит доход **a_{ij}**

Принятие решений в условиях неопределенности

Необходимо провести оценку риска в условиях, когда реальная ситуация неизвестна. Если игрок знает, что осуществляется j -е состояние природы, то выбрал бы наилучшее решение, то есть то, которое принесет наибольший выигрыш

$$b_j = \max(a_{ij}), \\ j = 1, 2, \dots, n$$

Принятие решений в условиях неопределенности

Принимая i -е решение, игрок А рискует получить не b_j , а только a_{ij} , то есть, если игрок примет i -е решение, а в природе реализуется j -е состояние, то произойдет недополучение дохода в размере:

$$r_{ij} = b_j - a_{ij} = a_{\max j} - a_{ij}$$

(по сравнению с тем, как если бы игрок знал точно, что реализуется j -е состояние природы, и выбрал бы решение, приносящее наибольший доход

$$b_j = \max(a_{ij}), j = 1, 2, \dots, n)$$

a_{ij} – значение показателя доходности варианта стратегии с максимальной доходностью из имеющихся i -ых вариантов при наступлении j -ого сценария развития событий

$a_{\max j}$ - значение показателя доходности i -ого варианта стратегии при наступлении j -ого сценария развития событий (элемент платежной матрицы).

Матрица рисков (сожалений)

отражает риск реализации вариантов стратегии для каждой альтернативы развития событий (характеризует риск выбора определенного варианта стратегии).

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1j} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{i1} & \dots & r_{ij} & \dots & r_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & & r_{mj} & & r_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{где } r_{ij} = b_j - a_{ij} = a_{\max j} - a_{ij}$$

Решение игр с природой в условиях неопределенности

При решении Задачи о принятии решений в условиях неопределенности для отбора вариантов стратегии применяют так называемые критерии оптимальности (альтернативные критерии оптимальности):

- ▶ критерий Вальда,
- ▶ критерий оптимизма,
- ▶ критерий пессимизма,
- ▶ критерий Сэвиджа,
- ▶ критерий Гурвица

Решение игр с природой в условиях неопределенности

Для выбора наиболее эффективного варианта стратегии ко всем возможным вариантам развития применяются все критерии оптимальности одновременно: каждый из критериев позволяет отобрать только один вариант, оптимальным же будет являться тот из них, на который указало **большинство критериев.**

Решение игр с природой в условиях неопределенности

1) **Критерий Вальда** (критерий гарантированного результата, максиминный критерий) позволяет выбрать наибольший элемент матрицы доходности из её минимально возможных элементов:

$$W = \max_i \min_j a_{ij},$$

a_{ij} – элемент матрицы доходности.

Решение игр с природой в условиях неопределенности

Критерий Вальда предназначен для выбора из рассматриваемых вариантов стратегий варианта с наибольшим показателем эффективности из минимально возможных показателей для каждого из этих вариантов.

*Данный критерий обеспечивает максимизацию минимального выигрыша, который может быть получен при реализации каждого из вариантов стратегий. Критерий ориентирует лицо, принимающее решение, на **осторожную линию поведения**, направленную на получение дохода и минимизацию возможных рисков одновременно.*

Решение игр с природой в условиях неопределенности

Применение критерия Вальда оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- ▶ **о вероятности наступления того или иного состояния природы ничего не известно;**
- ▶ **не допускается никакой риск;**
- ▶ **реализуется лишь малое количество решений.**

Пример:

Тип товара	Спрос		
	P_1	P_2	P_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Вальда.

Решение:

$$W = \max_i \min_j a_{ij} = \max(10;12;13) = 13$$

Полученный результат соответствует стратегии A_3

Решение игр с природой в условиях неопределенности

2) **Критерий оптимизма** (*критерий максима*) предназначен для выбора наибольшего элемента матрицы доходности из её максимально возможных элементов:

$$M = \max_i \max_j a_{ij},$$

Решение игр с природой в условиях неопределенности

Критерий оптимизма используется, когда игрок оказывается в безвыходном положении, когда любой его шаг равновероятно может оказаться как абсолютным выигрышем, так и полным провалом.

Данный критерий предполагает, что развитие ситуации будет благоприятным для лица, принимающего решение. Вследствие этого, оптимальным выбором будет вариант с наибольшим значением показателя эффективности в матрице доходности.

Пример:

Тип товара	Спрос		
	P_1	P_2	P_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Оптимизма.

Решение:

$$M = \max_i \max_j a_{ij} = \max(20; 16; 18) = 20$$

Полученный результат соответствует стратегии A_1

Решение игр с природой в условиях неопределенности

3) **Критерий пессимизма** предназначен для выбора наименьшего элемента матрицы доходности из её минимально возможных элементов:

$$P = \min_i \min_j a_{ij},$$

Решение игр с природой в условиях неопределенности

Критерий пессимизма предполагает, что развитие ситуации будет неблагоприятным для лица, принимающего решение.

*При использовании этого критерия лицо принимающее решение ориентируется на возможную потерю контроля над ситуацией и, поэтому, старается **исключить все потенциальные риски** и выбрать вариант с минимальной доходностью.*

Пример:

Тип товара	Спрос		
	P_1	P_2	P_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Пессимизма.

Решение:

$$P = \min_i \min_j a_{ij} = \min(10;12;13) = 10$$

Полученный результат соответствует стратегии A_1

Решение игр с природой в условиях неопределенности

Миниминный критерий относительно рисков (μ -критерий).

Показателем неэффективности стратегии A_i игрока A считается наименьший риск при выборе этой стратегии и обозначается через μ .

$$\mu_i = \min_{1 \leq j \leq n} r_{ij}, i = 1, 2, \dots, m$$

где r_{ij} – элементы матрицы рисков.

Решение игр с природой в условиях неопределенности

Поскольку риски неотрицательны, то и μ -критерий это величина неотрицательная, т.е. $\mu_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$.

Таким образом:

$$\mu = \min_i \min_j r_{ij}$$

Чистая стратегия относительно рисков является μ -оптимальной, если соответствующая ей строка матрицы рисков содержит хотя бы один ноль.

Решение игр с природой в условиях неопределенности

μ -критерий является критерием крайнего оптимизма по отношению к рискам, так как игрок предполагает, что природа будет к нему благосклонна и будет находиться в благоприятном для него состоянии, при котором риск будет сведен к нулю.

Решение игр с природой в условиях неопределенности

4) Критерий Сэвиджа (критерий минимаксного риска Сэвиджа) предназначен для выбора максимального элемента матрицы рисков из её минимально возможных элементов:

$$S = \min_i \max_j r_{ij},$$

*Среди элементов матрицы рисков сначала выбирается максимальный риск при каждой стратегии, а затем из них выбирается минимальный. То есть в данном случае **пессимистично настроенный игрок** предполагает, что состояние природы будет таковым, что для любой его стратегии риск будет наибольшим, а стратегию выбирает такую, чтобы этот риск минимизировать.*

Решение игр с природой в условиях неопределенности

Критерий Сэвиджа позволяет выбрать вариант стратегии с меньшей величиной риска по сравнению с более высоким, первоначально ожидаемым уровнем риска.

Данный критерий ориентирует лицо принимающее решение на более благоприятное развитие ситуации по сравнению с наихудшим состоянием, на которое то рассчитывало вначале.

Пример:

Тип товара	Спрос		
	P_1	P_2	P_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Сэвиджа.

Решение:

Применяем формулу $r_{ij} = a_{\max j} - a_{ij}$, построим матрицу рисков.

Матрица рисков

Тип товара	Спрос		
	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	0	3	5
A_2	4	6	1
A_3	7	0	0

$$S = \min_i \max_j r_{ij} = \min(5; 6; 7) = 5$$

Полученный результат соответствует стратегии A_1

Решение игр с природой в условиях неопределенности

5) Критерий Гурвица (*взвешивает пессимистический и оптимистический подходы к анализу неопределенной ситуации*) предназначен для выбора некоторого среднего элемента матрицы доходности, отличающегося от крайних состояний – от минимального и максимального элементов:

$$H = \max_i \left\{ \lambda \cdot \max_j a_{ij} + (1 - \lambda) \cdot \min_j a_{ij} \right\},$$

где λ – коэффициент оптимизма, $0 \leq \lambda \leq 1$

Критерий Гурвица

Коэффициент λ выражает количественно «меру оптимизма» игрока А при выборе стратегии и определяется им из субъективных соображений на основе статистических исследований результатов принятия решений или личного опыта лица принимающего решение в схожих ситуациях.

1. Если $\lambda \rightarrow 1$,
то правило Гурвица приближается к правилу Вальда
2. Если $\lambda \rightarrow 0$,
то правило Гурвица приближается к правилу оптимизма

Если λ коэффициент **оптимизма**, то $(\lambda - 1)$ коэффициент **пессимизма**

Решение игр с природой в условиях неопределенности

Критерий Гурвица позволяет избежать пограничных состояний при принятии решения – неоправданного оптимизма и крайнего пессимизма относительно ожидаемой доходности – и выбрать наиболее вероятный вариант стратегии, обеспечивающий наилучшую эффективность.

Решение игр с природой в условиях неопределенности

Критерий Гурвица ориентирован на установление баланса между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма при выборе стратегии путем взвешивания обоих исходов с помощью коэффициента оптимизма

Пример:

Тип товара	Спрос		
	P_1	P_2	P_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Гурвица.

$$\lambda = 0,5$$

Решение:

$$H = \max_i \left\{ \lambda \cdot \max_j a_{ij} + (1 - \lambda) \cdot \min_j a_{ij} \right\}$$

$$H_1 = (0,5 \cdot 20) + ((1 - 0,5) \cdot 10) = 10 + 5 = 15$$

$$H_2 = (0,5 \cdot 16) + ((1 - 0,5) \cdot 12) = 8 + 6 = 14$$

$$H_3 = (0,5 \cdot 18) + ((1 - 0,5) \cdot 13) = 9 + 6,5 = 15,5$$

$$H = \max_i (15; 14; 15,5) = 15,5$$

Полученный результат соответствует стратегии A_3

Решения полученные с помощью разных критериев:

Критерий Вальда	A3
Критерий оптимизма	A1
Критерий пессимизма	A1
Критерий Сэвиджа	A1
Критерий Гурвица	A3