



Теория игр

Лекция 4.

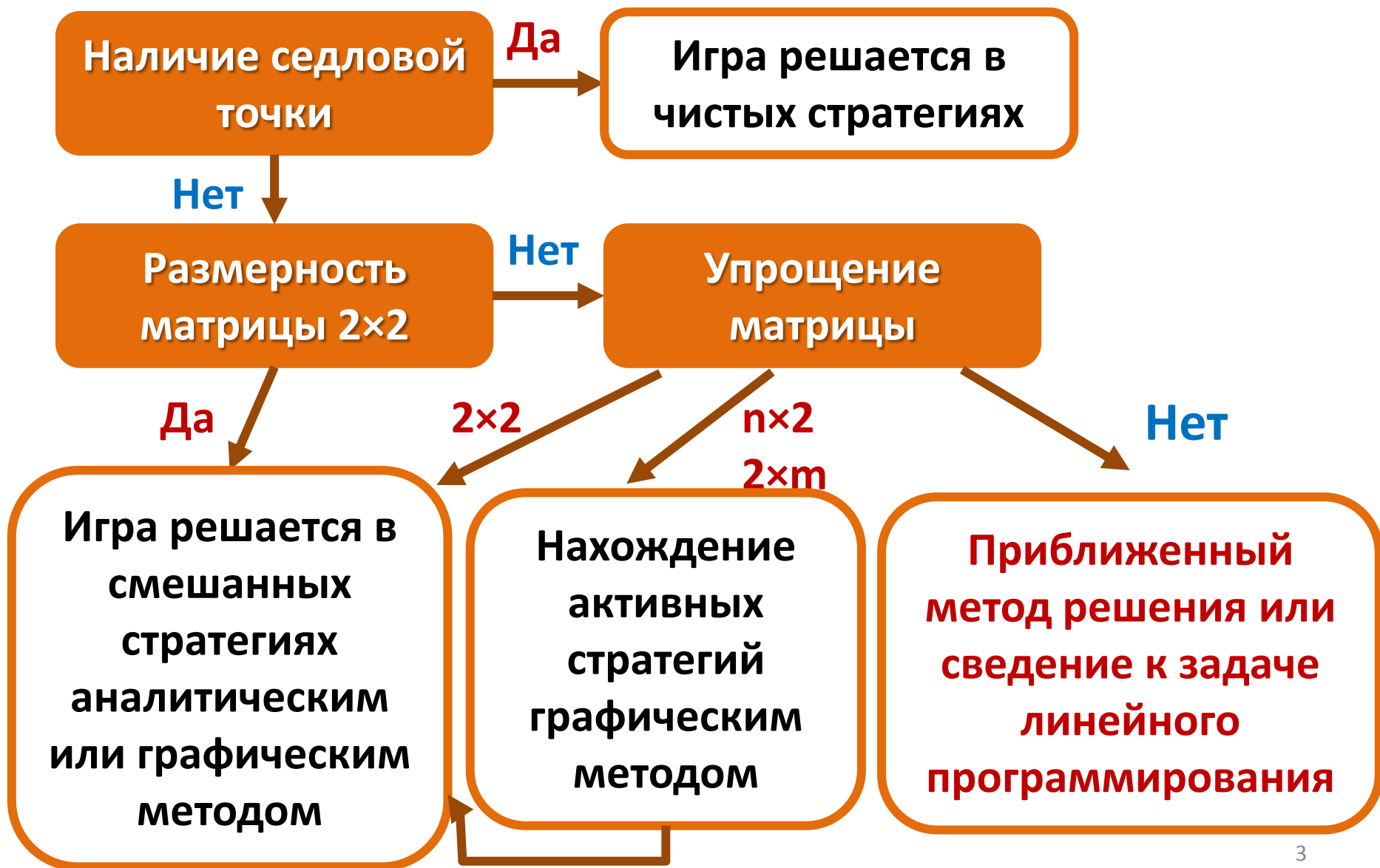
Решение матричных игр $m \times n$

План лекции

4.1 Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

4.2 Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Решения антагонистических матричных игр



5.1 Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Метод Робинсона-Брауна позволяет найти цену и оптимальные стратегии игроков с некоторой степенью точности. Метод основан на следующих интуитивных соображениях:

- Два игрока, участвующие в игре, не знают оптимальной стратегии. Каждый из них решает вести себя так, чтобы максимально увеличить свой выигрыш, предполагая, что другие партии будут похожи на предыдущие.
- Игра будет состоять из последовательности партий. Для каждой партии этой последовательности можно вычислить верхнюю и нижнюю границу цены игры, а также приближенную оптимальную стратегию для каждого игрока.

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Пример

		Стратегии 2-го игрока		
		α	β	γ
Стратегии 1-го игрока	A	1	2	3
	B	4	0	1
	C	2	3	0

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

№	Выбор Стратегии 1-м игроком	Выбор стратегии и 2-м игроком	Суммарный выигрыш 1-го игрока			Суммарный выигрыш 2-го игрока		
			A	B	C	α	β	γ
1	A	α	1	4	2	1	2	3

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Партии 1-5

			A	B	C	α	β	γ
1	A	α	1	4	2	1	2	3
2	B	α	2	8	4	5	2	4
3	B	β	4	8	7	9	2	5
4	B	β	6	8	10	13	2	6
5	C	β	8	8	13	15	5	6

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Партии 6-10

			A	B	C	α	β	γ
6	C	β	10	8	16	17	8	6
7	C	γ	13	9	16	19	11	6
8	C	γ	16	10	16	21	14	6
9	A	γ	19	11	16	22	16	9
10	A	γ	22	12	16	23	18	12

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Партии 10-15

			A	B	C	α	β	γ
11	A	γ	25	13	16	24	20	15
12	A	γ	28	14	16	25	22	18
13	A	γ	31	15	16	26	24	21
14	A	γ	34	16	16	27	26	24
15	A	γ	37	17	16	28	28	27

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Партии 15-20

			A	B	C	α	β	γ
16	A		40	18	16	29	30	30
17	A		41	22	18	30	32	33
18	A		42	26	20	31	34	36
19	A		43	30	22	32	36	39
20	A		44	34	24	33	38	42

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

По результатам находим строки с максимальными суммарными выигрышами 1-го игрока, обозначим их V^1_i , $i=1,2,\dots,20$:

$$V^1_i = \{4, 8, 8, 10, 13, 16, 16, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 41, 42, 43, 44\}.$$

Строки с минимальными суммарными выигрышами 2-го игрока, обозначим их V^2_i , $i=1,2,\dots,20$:

$$V^2_i = \{1, 2, 2, 2, 5, 6, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 29, 30, 31, 32, 33\}$$

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Цена игры V удовлетворяет неравенству:

$$\max_i \frac{v^2_i}{i} \leq V \leq \min_i \overline{\frac{v^1_i}{i}}$$

$$\min_i \overline{\frac{v^1_i}{i}} = \min_i \left\{ \frac{4}{1}, \frac{8}{2}, \frac{8}{3}, \frac{10}{4}, \frac{13}{5}, \frac{16}{6}, \frac{16}{7}, \frac{16}{8}, \frac{19}{9}, \frac{22}{10}, \frac{25}{11}, \frac{28}{12}, \frac{31}{13}, \frac{34}{14}, \frac{37}{15}, \frac{40}{16}, \frac{41}{17}, \frac{42}{18}, \frac{43}{19}, \frac{44}{20} \right\} = 2$$

$$\min_i \frac{v^2_i}{i} = 1,8125$$

$$1,8125 \leq V \leq 2$$

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Обозначим для каждой партии i стратегию 1-го игрока,

$$x^i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i)$$

а второго игрока:
$$y^i = (y_1^i, y_2^i, y_3^i)$$

Координаты векторов X и Y представляют собой частоты партий - это правильные неотрицательные дроби, у которых числитель – это количество стратегий А,В,С, α, β, γ соответственно, а знаменатель номер партии.

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Для 20-ти партий получаем следующие приближенные стратегии для 1-го и 2-го игроков.

$$x^1 = (1, 0, 0)$$

$$y^1 = (1, 0, 0)$$

$$x^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

$$y^2 = (1, 0, 0)$$

$$x^3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0 \right)$$

$$y^3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right)$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$x^{20} = \left(\frac{13}{20}, \frac{3}{20}, \frac{4}{20} \right)$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$y^{20} = \left(\frac{6}{20}, \frac{4}{20}, \frac{10}{20} \right)$$

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Ответ: $1,8125 \leq V \leq 2,$

$$x^{20} = \left(\frac{13}{20}, \frac{3}{20}, \frac{4}{20} \right) \quad \text{стратегия 1-го игрока}$$

$$y^{20} = \left(\frac{6}{20}, \frac{4}{20}, \frac{10}{20} \right) \quad \text{стратегия 2-го игрока}$$

4.2 Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Пусть матрица $A_{m \times n}$ не содержит седловой точки и имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccc} & B_1 & B_2 & \dots & B_j & \dots & B_n \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_i & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{array} \quad (1)$$

Будем считать, что все элементы матрицы A неотрицательны (в противном случае, можно ко всем элементам A добавить некоторое достаточно большое число L , при этом цена игры изменится на эту же величину). Будем считать, что $V > 0$.

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

$p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ - оптимальные смешанные стратегии 1-го и 2-го игроков

Пусть 2-й игрок примет свою чистую стратегию B_j , а 1-й игрок - свою оптимальную стратегию p . тогда средний выигрыш 1-го игрока будет удовлетворять неравенствам:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{i1}p_i + \dots + a_{m1}p_m \geq V \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{i2}p_i + \dots + a_{m2}p_m \geq V \\ \dots\dots\dots \\ a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \dots + a_{ij}p_i + \dots + a_{mj}p_m \geq V \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{in}p_i + \dots + a_{mn}p_m \geq V \end{array} \right.$$

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Разделив левую и правую части неравенств (1) на положительную величину V , получим:

$$a_{1j} \frac{p_1}{V} + a_{2j} \frac{p_2}{V} + \dots + a_{ij} \frac{p_i}{V} + \dots + a_{mj} \frac{p_m}{V} \geq 1, \quad j = \overline{1, n}$$

Введем обозначения:

$$\frac{p_i}{V} = x_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (2)$$

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Тогда (1) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq 1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq 1 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}$$

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Так как p_i - вероятности, то $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$, тогда:

$$x_i = \frac{p_i}{V}, \quad p_i = x_i V, \quad i = \overline{1, m}; \quad x_1 V + x_2 V + \dots + x_m V = 1,$$

$$V(x_1 + x_2 + \dots + x_m) = 1.$$

Отсюда следует, что $x_1 + x_2 + \dots + x_m = \frac{1}{V}$.

Так как V - гарантированный выигрыш, то 1-й игрок стремится его максимизировать. Следовательно

$$\frac{1}{V} \rightarrow \min \rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_m \rightarrow \min$$

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Пример. Найти решение игры с платежной матрицей:

	α	β	γ
A	1	2	3
B	4	0	1
C	2	3	0

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Для первого игрока

Найти $x_i, i = \overline{1,3}$

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_3 \geq 1 \\ 3x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,3}$$

Для второго игрока

Найти $y_j, j = \overline{1,3}$

$$f(y) = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max$$

при условиях

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 1 \\ 4y_1 + y_3 \leq 1 \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$y_j \geq 0, j = \overline{1,3}$$

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Итерационный метод.xlsx - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		X1	X2	X3			
3		0	0	0			
4							
5		1	4	2			
6		2	0	3			
7		3	1	0			
8							

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Итерационный метод.xlsx - Microsoft Excel

Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование Вид

ДНЕЙ360 X ✓ fx =B3+C3+D3

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		X1	X2	X3	F(x)		
3		0	0	0	=B3+C3+D3		
4							
5		1	4	2			
6		2	0	3			
7		3	1	0			
8							

Лист1 Лист2 Лист3

Укажите 150%

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Итерационный метод.xlsx - Microsoft Excel

Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование Вид

ДНЕЙ360 X ✓ fx =B5*\$B\$3+C5*\$C\$3+D5*\$D\$3

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		X1	X2	X3	F(x)		
3		0	0	0	0		
4							
5		1	4	2	=B5*\$B\$3+C5*\$C\$3+		
6		2	0	3	D5*\$D\$3		
7		3	1	0			
8							

Лист1 Лист2 Лист3

Укажите 150%

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Итерационный метод.xlsx - Microsoft Excel

Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование Вид

Получить внешние данные Обновить все Подключения Сортировка и фильтр Фильтр Текст по столбцам Удалить дубликаты Работа с данными Структура Поиск решения Анализ

E3 fx =B3+C3+D3

	A	B	C	D	E	F
1						
2		X1	X2	X3	F(x)	
3		0	0	0	0	
4						
5		1	4	2	0	
6		2	0	3	0	
7		3	1	0	0	
8						

Поиск решения

Поиск оптимального значения путем изменения значений в используемых при вычислении этой ячейке.

SOLVER.XLAM
Для получения дополнительной информации нажмите клавишу F1.

Лист1 Лист2 Лист3

Готово 150%

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Итерационный метод.xlsx - Microsoft Excel

Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование

Получить внешние данные Обновить все Подключения Сортировка и фильтр Сортировка Фильтр Текст по столбцам Удалить дубликаты Работа с данными

Е3 =B3+C3+D3

	A	B	C	D	E
1					
2		X1	X2	X3	F(x)
3		0	0	0	0
4					
5		1	4	2	0
6		2	0	3	0
7		3	1	0	0
8					

Поиск решения

Установить целевую ячейку: \$E\$3

Равной: максимальному значению значению: 0 минимальному значению

Изменяя ячейки: \$B\$3:\$D\$3

Ограничения:

Добавить Изменить Удалить

Выполнить Закрывать Параметры Восстановить Справка

Добавление ограничения

Ссылка на ячейку: <input type="text"/> Ограничение: <input type="text"/> <input type="text"/>

OK Отмена Добавить Справка


Добавление ограничения

Ссылка на ячейку: \$E\$5 Ограничение: >= 1

OK Отмена Добавить Справка

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования


Поиск решения

Установить целевую ячейку: 

Равной: максимальному значению значению:

минимальному значению

Изменяя ячейки:



Ограничения:

Результаты поиска решения

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Тип отчета

Сохранить найденное решение
 Восстановить исходные значения

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Итерационный метод.xlsx - Microsoft Excel

Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование Вид

Получить внешние данные Обновить все Подключения Сортировка и фильтр Сортировка Фильтр Работа с данными Текст по столбцам Удалить дубликаты Структура Поиск решения Анализ

E3 f_x =B3+C3+D3

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		X1	X2	X3	F(x)		
3		0,297	0,108	0,135	0,5405		
4							
5		1	4	2	1		
6		2	0	3	1		
7		3	1	0	1		
8							

Лист1 Лист2 Лист3

Готово 150%

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Итерационный метод.xlsx - Microsoft Excel

Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование Вид

Получить внешние данные Обновить все Подключения Сортировка и фильтр Сортировка Фильтр Очистить Применить повторно Дополнительно Работа с данными Структура Поиск решения Анализ

ДНЕЙ360 X ✓ fx =1/(B3+C3+D3)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		X1	X2	X3	F(x)		V		
3		0,297	0,108	0,135	0,5405		=1/(B3+C3+D3)		
4									
5		1	4	2	1				
6		2	0	3	1				
7		3	1	0	1				
8									
9									
10									

Лист1 Лист2 Лист3

Правка 150%

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Итерационный метод.xlsx - Microsoft Excel

Формула: $=B3*\$G\3

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		X1	X2	X3	F(x)		V	
3		0,297	0,108	0,135	0,5405		1,8500	
4								
5		1	4	2	1			
6		2	0	3	1			
7		3	1	0	1			
8								
9		P1	P2	P3				
10		$=B3*\$G\3						
11								

Лист2 150%

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Итерационный метод.xlsx - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		X1	X2	X3	F(x)		V	
3		0,297	0,108	0,135	0,5405		1,8500	
4								
5		1	4	2	1			
6		2	0	3	1			
7		3	1	0	1			
8								
9		P1	P2	P3				
10		0,55	0,2	0,25				
11								

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Итерационный метод.xlsx - Microsoft Excel

Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование Вид

Получить внешние данные Обновить все Подключения Сортировка Фильтр Структура Поиск решения Анализ

И11

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Y1	Y2	Y3	F(x)		V	
3		0,216	0,189	0,135	0,5405		1,8500	
4								
5		1	2	3	1			
6		4	0	1	1			
7		2	3	0	1			
8								
9		q1	q2	q3				
10		0,4	0,35	0,25				
11								

Лист1 Лист2 Лист3

Готово 150%

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Ответ: $V=1.85$,

Стратегия 1-го игрока (0,55; 0,2; 0,25)

Стратегия 2-го игрока (0,4; 0,35; 0,25)

Ответ найденный **приближенным** методом (20 партий):

$1,81 \leq V \leq 2$,

Стратегия 1-го игрока (0,65; 0,1; 0,25)

Стратегия 2-го игрока (0,3; 0,2; 0,5)

Ответ найденный **приближенным** методом (100 партий):

$1,828 \leq V \leq 1,88$,

Стратегия 1-го игрока (0,57; 0,26; 0,17)

Стратегия 2-го игрока (0,42; 0,34; 0,24)