Теория игр

Лекция 4.

Решение матричных игр mxn

02.10.2014

План лекции

4.1 Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)
4.2 Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Решения антагонистических матричных игр

5.1 Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Метод Робинсона-Брауна позволяет найти цену и оптимальные стратегии игроков с некоторой степенью точности. Метод основан на следующих интуитивных соображениях:

•Два игрока, участвующие в игре, не знают оптимальной стратегии. Каждый из них решает вести себя так, чтобы максимально увеличить свой выигрыш, предполагая, что другие партии будут похожи на предыдущие.

•Игра будет состоять из последовательности партий. Для каждой партии этой последовательности можно вычислить верхнюю и нижнюю границу цены игры, а также приближенную оптимальную стратегию для каждого игрока.

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Пример

		Стратегии 2-го игрока		
		α	β	γ
Стратегии 1-го игрока	A	1	2	3
	B	4	0	1
	C	2	3	0

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

№	Выбор Стратегии 1-м игроком	Выбор стратеги и 2-м игроком	Суммарный выигрыш 1-го игрока			Суммарный выигрыш 2-го игрока		
			A	B	C	α	β	γ
1	A	α	1	*4*	2	*1*	2	3

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Партии 1-5

			A	B	C	α	β	γ
1	A	α	1	***4***	2	***1***	2	3
2	B	α	2	***8***	4	5	***2***	4
3	B	β	4	***8***	7	9	***2***	5
4	B	β	6	8	***10***	13	***2***	6
5	C	β	8	8	***13***	15	***5***	6

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Партии 6-10

			A	B	C	α	β	γ
6	C	β	10	8	***16***	17	8	***6***
7	C	γ	13	9	***16***	19	11	***6***
8	C	γ	***16***	10	16	21	14	***6***
9	A	γ	***19***	11	16	22	16	***9***
10	A	γ	***22***	12	16	23	18	***12***

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Партии 10-15

			A	B	C	α	β	γ
11	A	γ	***25***	13	16	24	20	***15***
12	A	γ	***28***	14	16	25	22	***18***
13	A	γ	***31***	15	16	26	24	***21***
14	A	γ	***34***	16	16	27	26	***24***
15	A	γ	***37***	17	16	28	28	***27***

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Партии 15-20

			A	B	C	α	β	γ
16	A		***40***	18	16	***29***	30	30
17	A		***41***	22	18	***30***	32	33
18	A		***42***	26	20	***31***	34	36
19	A		***43***	30	22	***32***	36	39
20	A		***44***	34	24	***33***	38	42

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

По результатам находим строки с максимальными суммарными выигрышами 1-го игрока, обозначим их V^1_i , *i=1,2,….20*:

V^1_i = {4, 8, 8, 10, 13, 16, 16, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 41, 42, 43, 44}.

Строки с минимальными суммарными выигрышами 2-го игрока, обозначим их V^2_i , *i=1,2,….20*:

$$V^2_i = \{1,2,2,2,5,6,6,9,12,15,18,21,24,27,29,30,31,32,33\}$$

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Цена игры *V* удовлетворяет неравенству:

$$\max_i \frac{\overline{v^2{}_i}}{i} \le V \le \min_i \frac{\overline{v^1{}_i}}{i}$$

$$\min_i \frac{\overline{v^1{}_i}}{i} = \min_i \left\{ \frac{4}{1}, \frac{8}{2}, \frac{8}{3}, \frac{10}{4}, \frac{13}{5}, \frac{16}{6}, \frac{16}{7}, \frac{16}{8}, \frac{19}{9}, \frac{22}{10}, \frac{25}{11}, \frac{28}{12}, \frac{31}{13}, \frac{34}{14}, \frac{37}{15}, \frac{40}{16}, \frac{41}{17}, \frac{42}{18}, \frac{43}{19}, \frac{44}{20} \right\} = 2$$

$$\min_i \frac{\overline{v^2{}_i}}{i} = 1{,}8125$$

$$1{,}8125 \le V \le 2$$

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Обозначим для каждой партии *i* стратегию 1-го игрока,

$$x^i = \left(x_1^i, x_2^i, x_3^i\right)$$

а второго игрока: $y^i = \left(y_1^i, y_2^i, y_3^i\right)$

Координаты векторов X и Y представляют собой частоты партий - это правильные неотрицательные дроби, у которых числитель – это количество стратегий A,B,C, α,β,γ соответственно, а знаменатель номер партии.

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Для 20-ти партий получаем следующие приближенные стратегии для 1-го и 2-го игроков.

$$x^1 = (1,0,0) \qquad y^1 = (1,0,0,)$$

$$x^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \qquad y^2 = (1,0,0)$$

$$x^3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) \qquad y^3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$$

… … … … … … … …

$$x^{20} = \left(\frac{13}{20}, \frac{3}{20}, \frac{4}{20}\right) \qquad y^{20} = \left(\frac{6}{20}, \frac{4}{20}, \frac{10}{20}\right)$$

Метод приближенного определения решения матричной игры (метод Робинсона-Брауна)

Ответ: 1,8125 ≤ *V* ≤ 2,

$$x^{20} = \left(\frac{13}{20}, \frac{3}{20,} \frac{4}{20} \right)$$ **стратегия 1-го игрока**

$$y^{20} = \left(\frac{6}{20,} \frac{4}{20,} \frac{10}{20} \right)$$ **стратегия 2-го игрока**

4.2 Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Пусть матрица A$_{mxn}$ не содержит седловой точки и имеет вид:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & B_1 & B_2 & \ldots & B_j & \cdots & B_n \\
\hline
A_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
A_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\
A_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\
A_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{array}
\qquad \text{(1)}
$$

Будем считать, что все элементы матрицы A неотрицательны (в противном случае, можно ко всем элементам A добавить некоторое достаточно большое число *L*, при этом цена игры изменится на эту же величину). Будем считать, что V>0.

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

$p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, $\quad q = (q_1, q_2 \ldots, q_n)$ **- оптимальные смешанные стратегии 1-го и 2-го игроков**

Пусть 2-й игрок примет свою чистую стратегию B_j , а 1-й игрок - свою оптимальную стратегию *p*. тогда средний выигрыш 1-го игрока будет удовлетворять неравенствам:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{i\,1}p_i + \ldots + a_{m1}p_m \geq V \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{i\,2}p_i + \ldots + a_{m\,2}p_m \geq V \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1\,j}p_1 + a_{2\,j}p_2 + \ldots + a_{i\,j}p_i + \ldots + a_{m\,j}p_m \geq V \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2\,n}p_2 + \ldots + a_{i\,n}p_i + \ldots + a_{m\,n}p_m \geq V \end{cases}$$

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Разделив левую и правую части неравенств (1) на положительную величину *V*, получим:

$$a_{1j}\frac{p_1}{V}+a_{2j}\frac{p_2}{V}+\ldots+a_{ij}\frac{p_i}{V}+\ldots+a_{mj}\frac{p_m}{V}\geq 1,\quad j=\overline{1,n}$$

Введем обозначения:

$$\frac{p_i}{V}=x_i,\quad i=\overline{1,m}\qquad \mathbf{(2)}$$

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Тогда (1) примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1 \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}$$

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Так как p_i **- вероятности, то** $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$**, тогда:**

$$x_i = \frac{p_i}{V}, \quad p_i = x_i V, \quad i = \overline{1, m}; \quad x_1 V + x_2 V + \ldots + x_m V = 1,$$

$$V(x_1 + x_2 + \ldots + x_m) = 1.$$

Отсюда следует, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \dfrac{1}{V}$.

Так как ***V*** **- гарантированный выигрыш, то 1-й игрок стремится его максимизировать. Следовательно**

$$\frac{1}{V} \to min \to \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_m \to min$$

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Пример. Найти решение игры с платежной матрицей:

	α	β	γ
A	1	2	3
B	4	0	1
C	2	3	0

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Для первого игрока

$$Найти\ \ x_i, i=\overline{1,3}$$

$$f(x)=x_1+x_2+x_3\to min$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3\ge 1 \\ 2x_1+3x_3\ge 1 \\ 3x_1+x_2\ge 1 \end{cases}$$

$$x_i\ge 0, i=\overline{1,3}$$

Для второго игрока

$$Найти\ \ y_j, j=\overline{1,3}$$

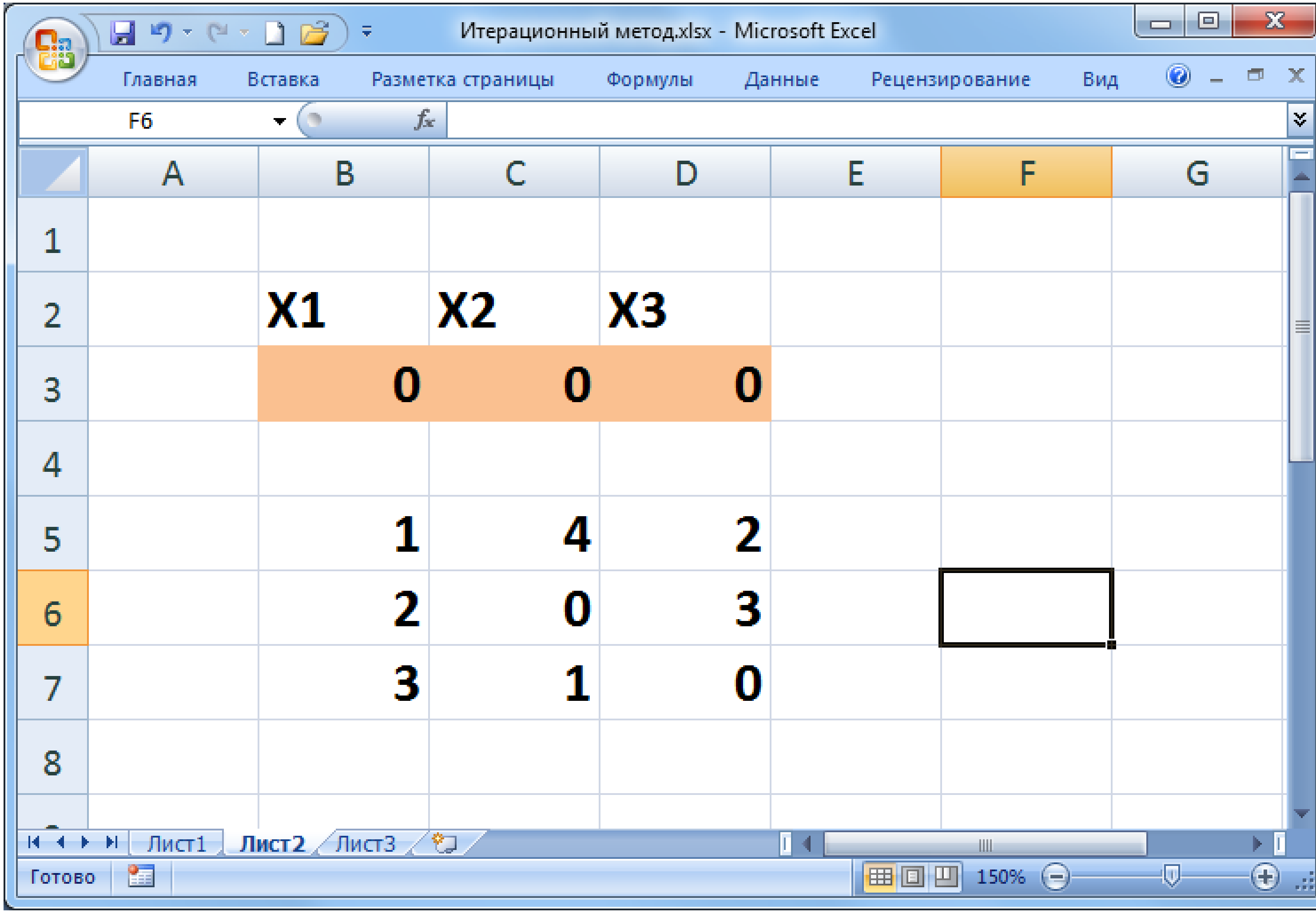
$$f(y)=y_1+y_2+y_3\to max$$

при условиях

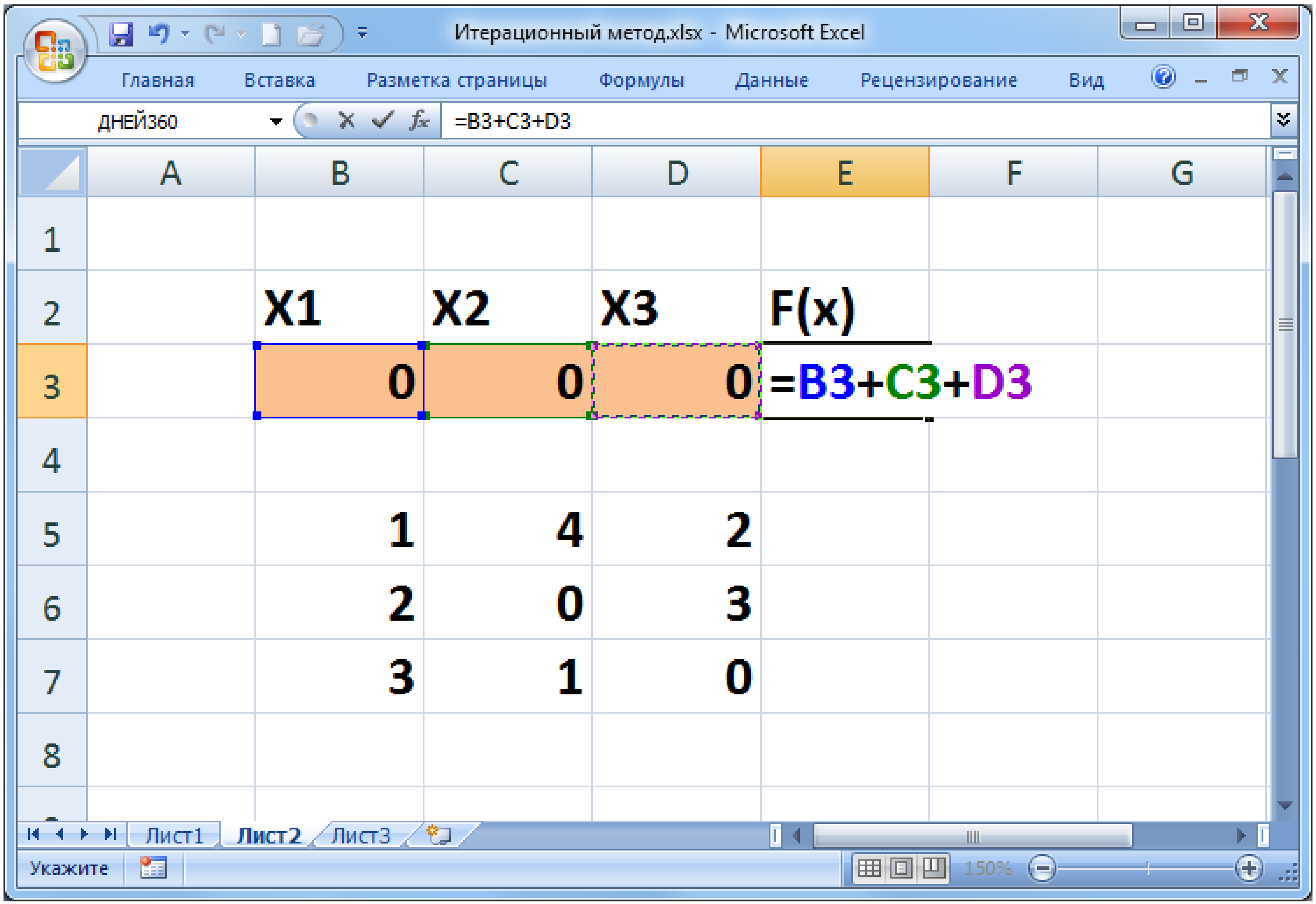
$$\begin{cases} y_1+2y_2+3y_3\le 1 \\ 4y_1+y_3\le 1 \\ 2y_1+3y_2\le 1 \end{cases}$$

$$y_j\ge 0, j=\overline{1,3}$$

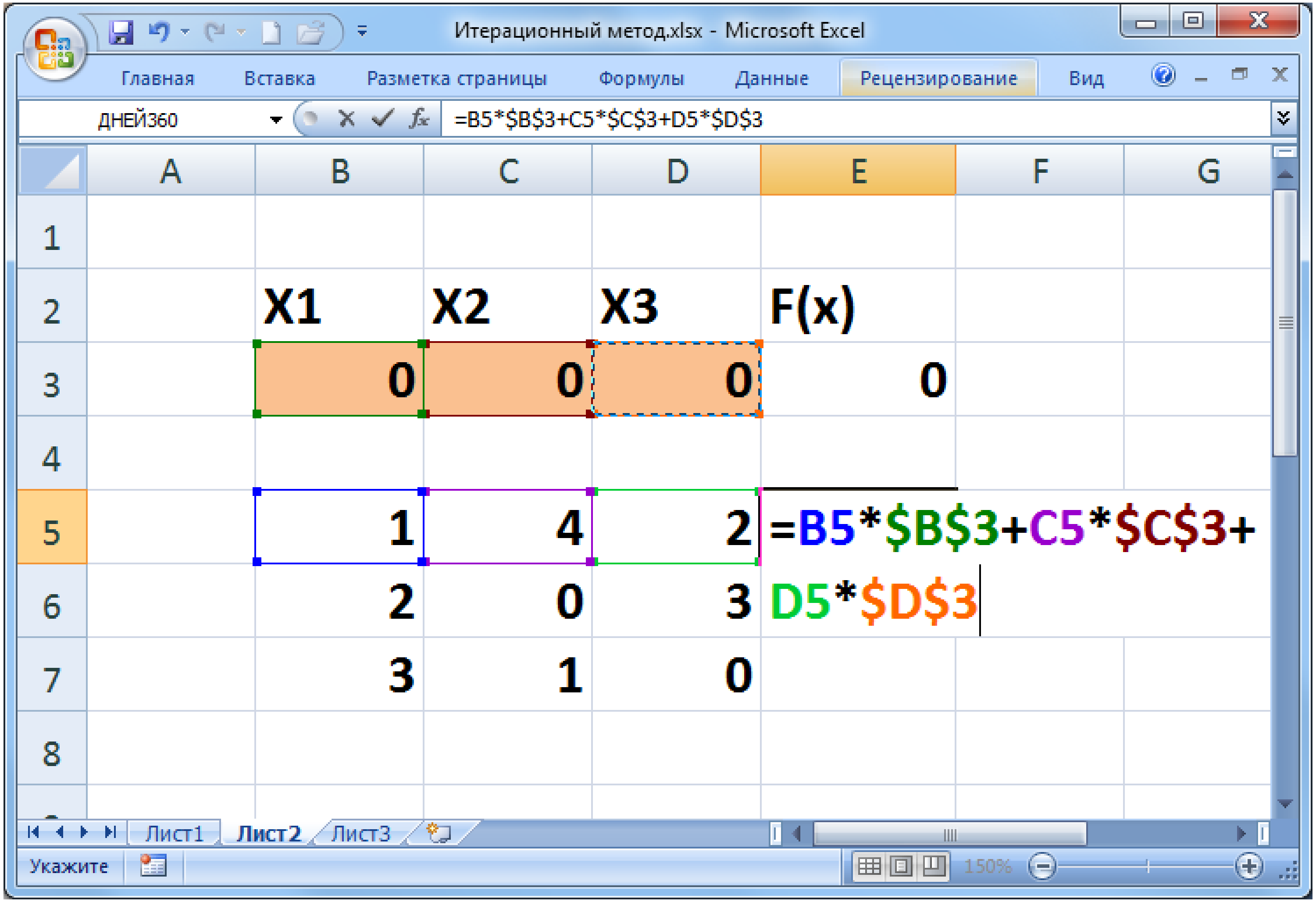
Сведение матричной игры к задаче линейного программирования



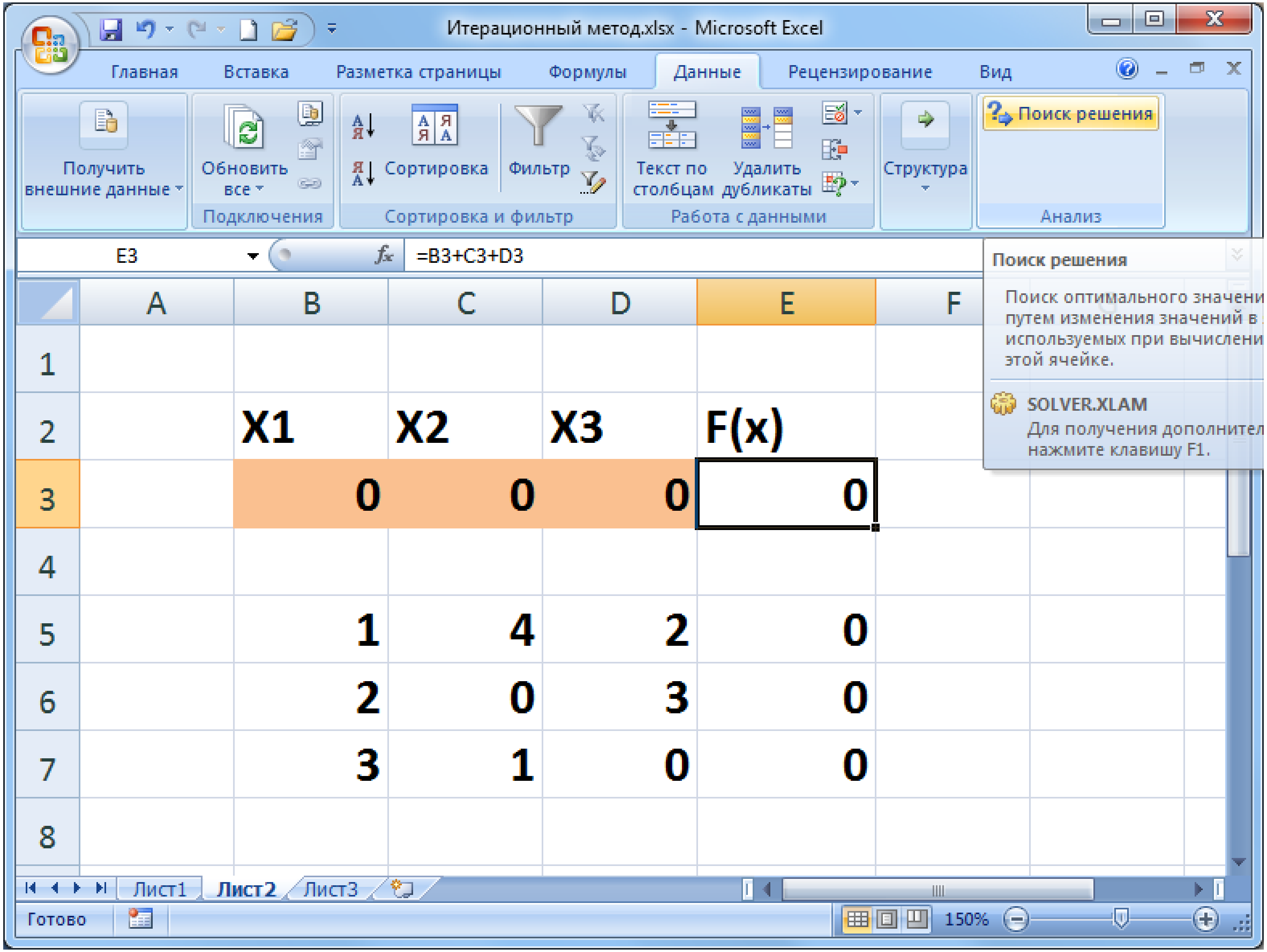
Сведение матричной игры к задаче линейного программирования



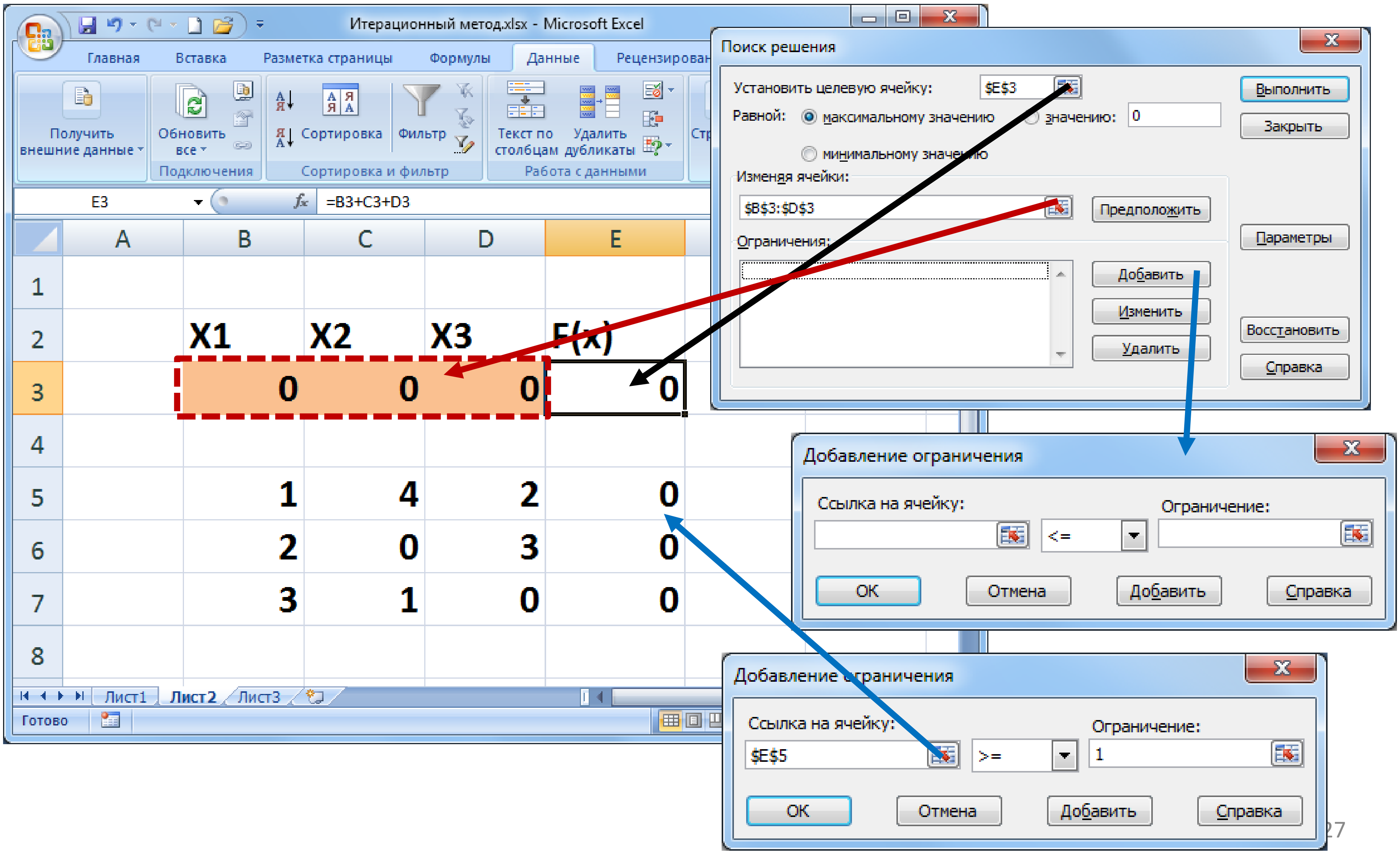
Сведение матричной игры к задаче линейного программирования



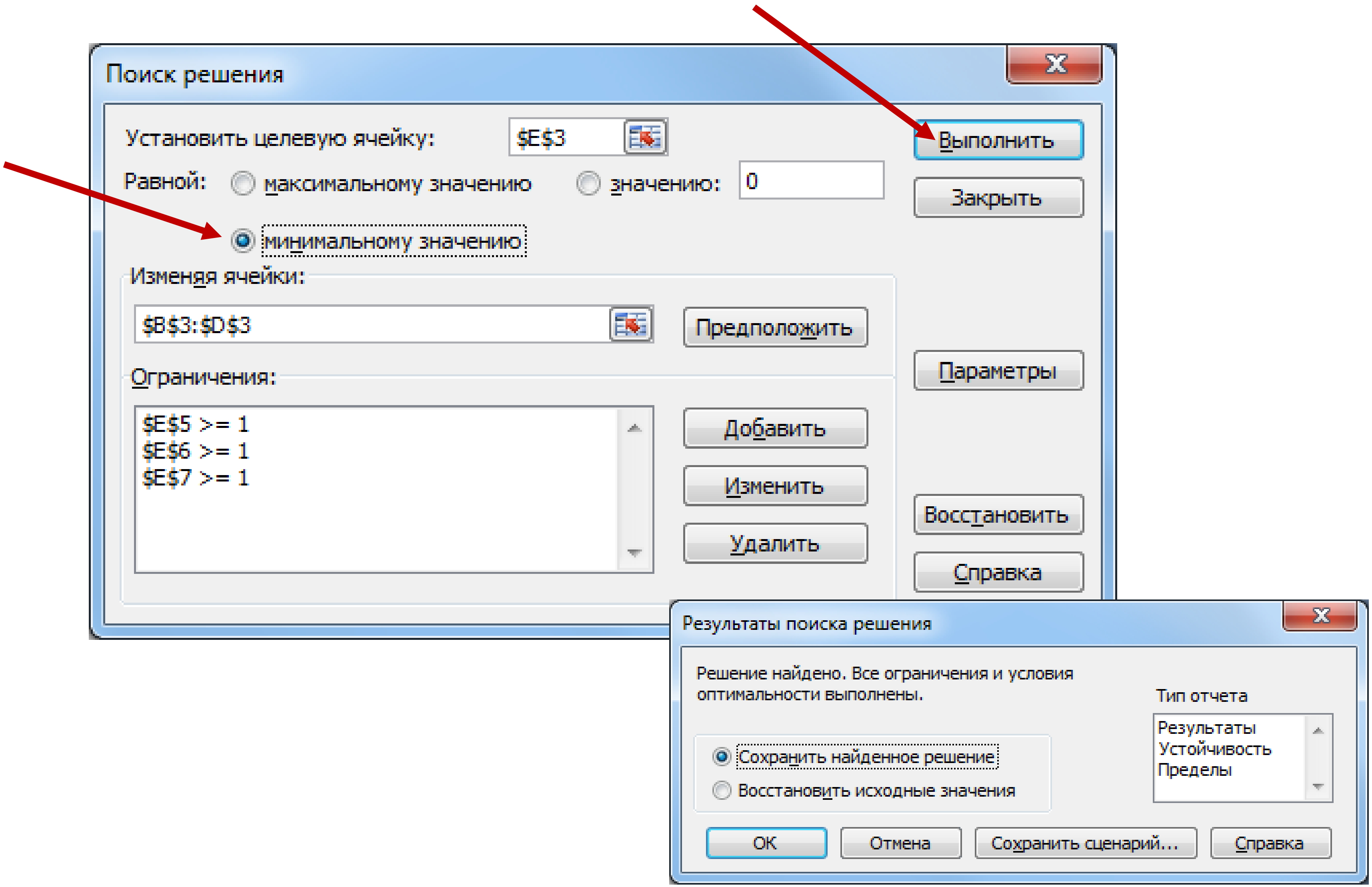
Сведение матричной игры к задаче линейного программирования



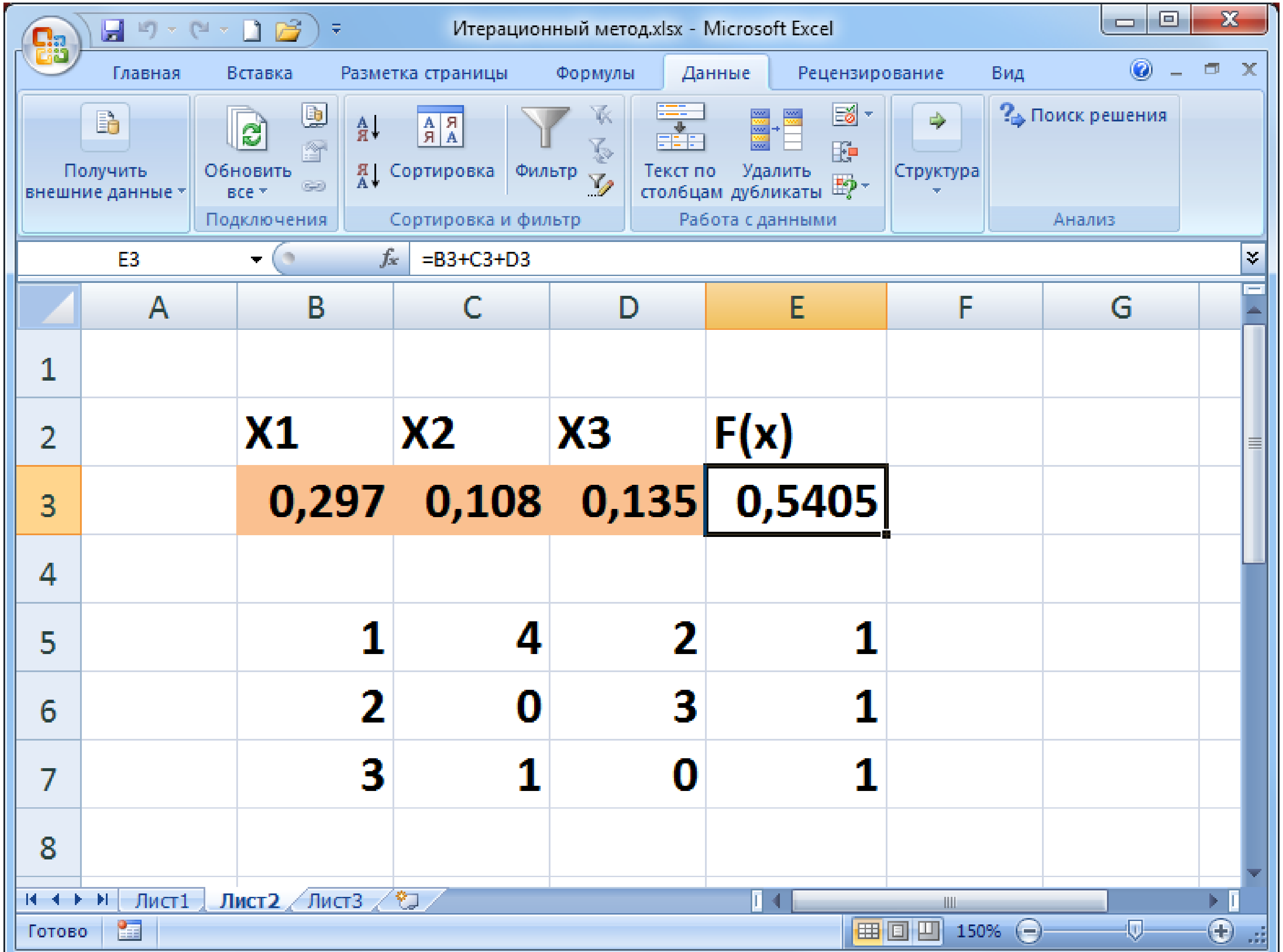
Сведение матричной игры к задаче линейного программирования



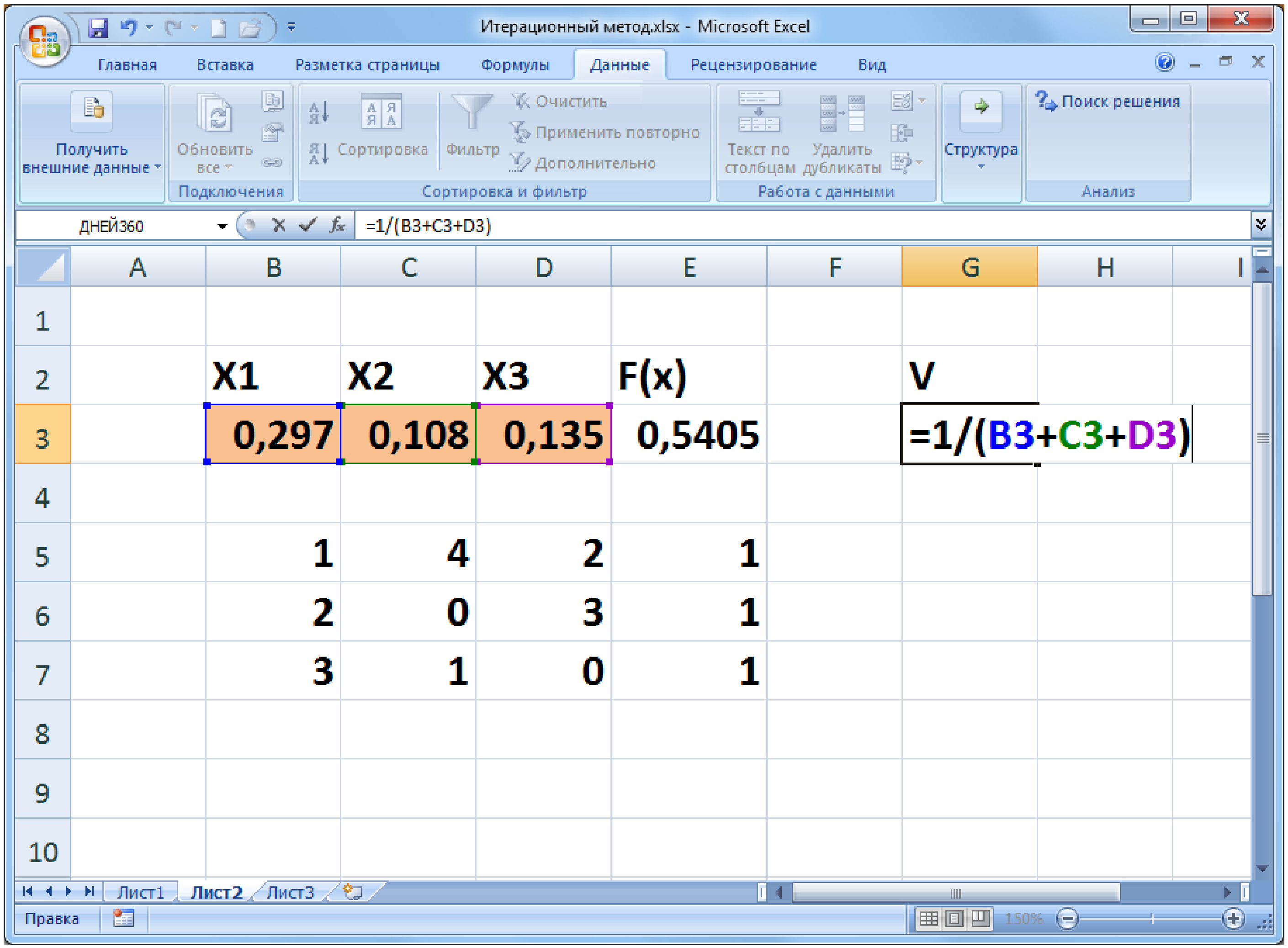
Сведение матричной игры к задаче линейного программирования



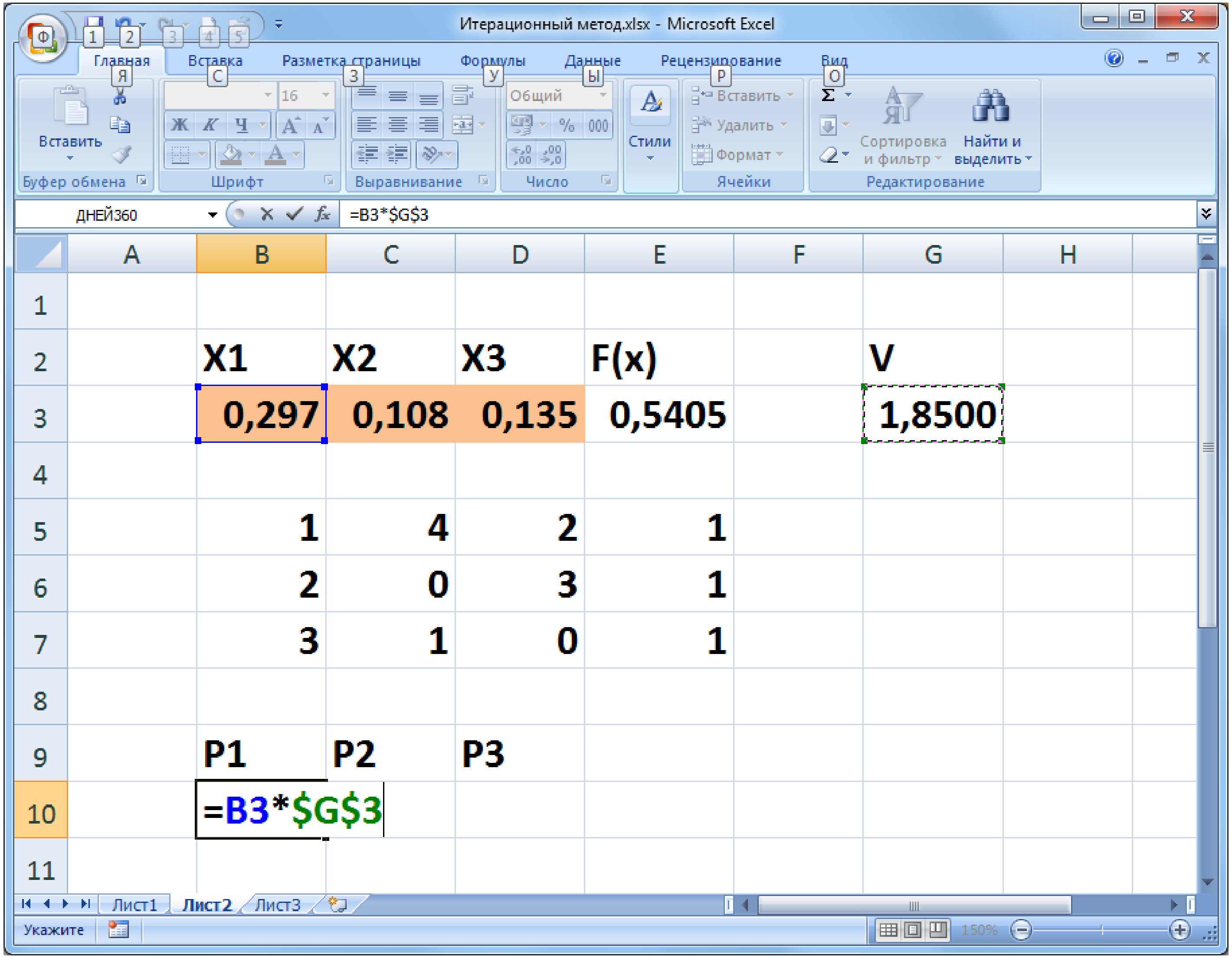
Сведение матричной игры к задаче линейного программирования



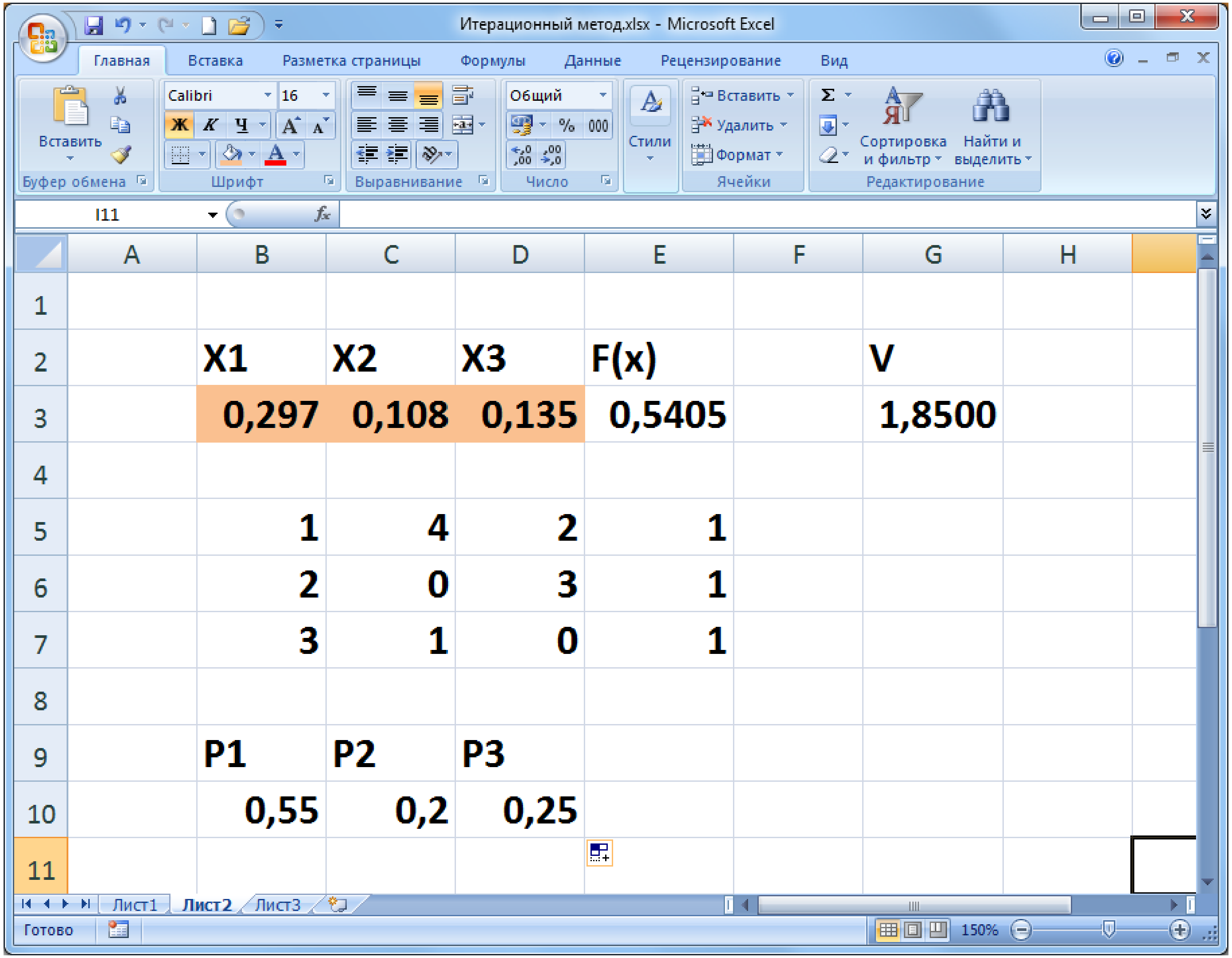
Сведение матричной игры к задаче линейного программирования



Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

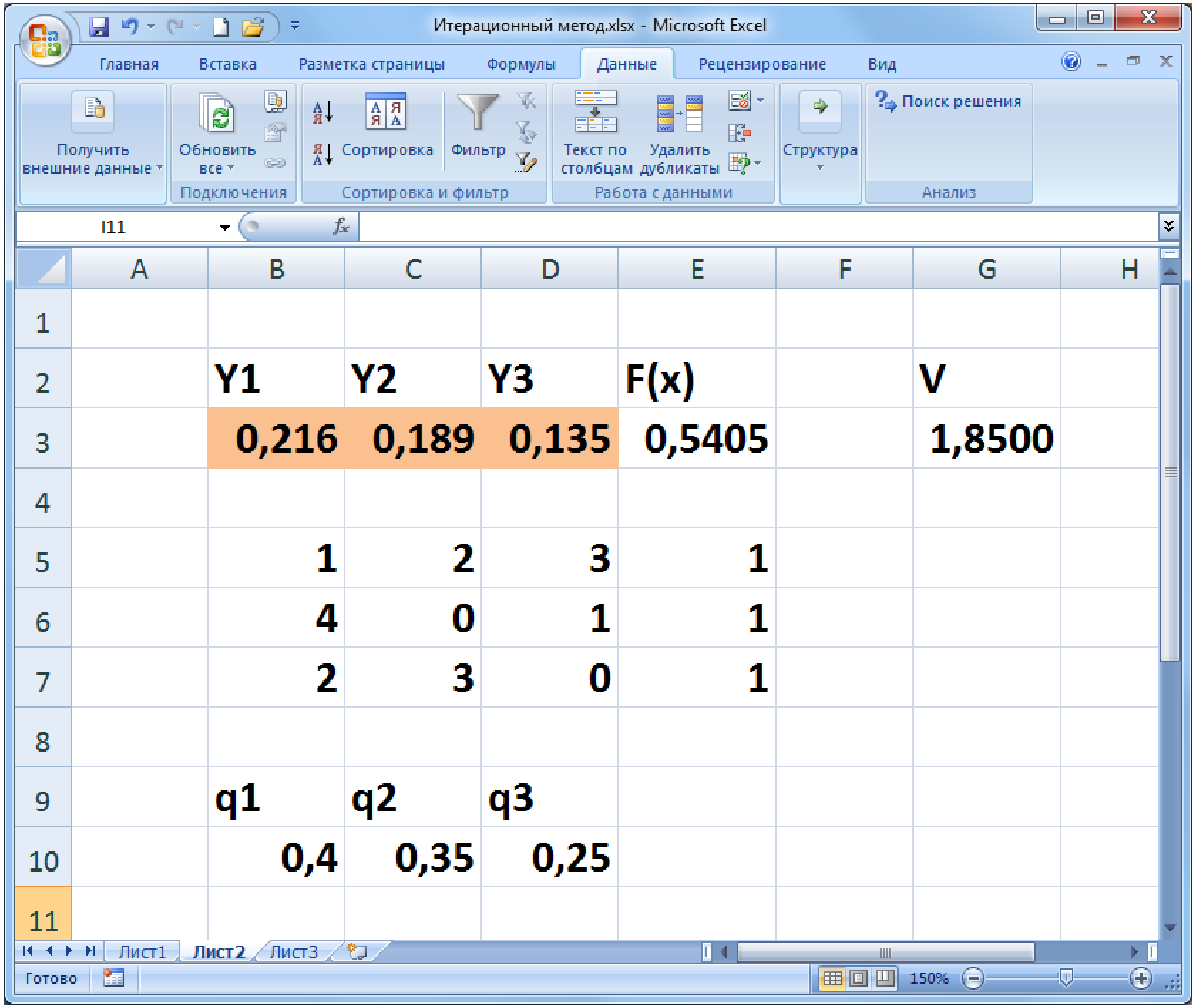


Сведение матричной игры к задаче линейного программирования



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		X1	X2	X3	F(x)		V	
3		0,297	0,108	0,135	0,5405		1,8500	
4								
5		1	4	2	1			
6		2	0	3	1			
7		3	1	0	1			
8								
9		P1	P2	P3				
10		0,55	0,2	0,25				
11								

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования



	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Y1	Y2	Y3	F(x)		V
3		0,216	0,189	0,135	0,5405		1,8500
4							
5		1	2	3	1		
6		4	0	1	1		
7		2	3	0	1		
8							
9		q1	q2	q3			
10		0,4	0,35	0,25			
11							

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Ответ: V=1.85,
Стратегия 1-го игрока (0,55; 0,2; 0,25)
Стратегия 2-го игрока (0,4; 0,35; 0,25)

Ответ найденный приближенным методом (20 партий):
1,81 ≤ V ≤ 2,
Стратегия 1-го игрока (0,65; 0,1; 0,25)
Стратегия 2-го игрока (0,3; 0,2; 0,5)

Ответ найденный приближенным методом (100 партий):
1,828 ≤ V ≤ 1,88,
Стратегия 1-го игрока (0,57; 0,26; 0,17)
Стратегия 2-го игрока (0,42; 0,34; 0,24)