Теория игр

Лекция 3.

Решение игр в смешанных стратегиях.

18.09.2014

План лекции

3.1 Нахождение смешанных стратегий в играх 2×2
3.2 Упрощение матричных игр
3.3 Решение матричных игр в смешанных стратегиях 2xn и mx2

3.1 Нахождение смешанных стратегий в играх 2×2

Аналитический метод

Графический метод

Аналитический метод решения игры 2x2

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

1) **оптимальное решение в смешанных стратегиях: $S_A = |p_1, p_2|$ и $S_B = |q_1, q_2|$**
2) **вероятности применения (*относительные частоты применения*) чистых стратегий удовлетворяют соотношениям**

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$q_1 + q_2 = 1$$

Аналитический метод решения игры 2x2

В соответствии с теоремой ***об активных стратегиях***, оптимальная смешанная стратегия обладает тем свойством, что обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш, равный цене игры ν, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

Аналитический метод решения игры 2x2

1) **Если игрок A использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок B - свою чистую активную стратегию B_1, то цена игры ν равна**

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v$$

2) **Если игрок A использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок B - свою чистую активную стратегию B_2, то цена игры ν равна**

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v$$

Аналитический метод решения игры 2x2

Необходимо найти, чему равны p_1, p_2, v, если

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v$$

Смешанная стратегия первого игрока

.

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

Смешанная стратегия второго игрока

Вычислив оптимальное значение v, можно вычислить и оптимальную смешанную стратегию второго игрока из условия

$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v, \quad a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v$

$$\boxed{q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}}$$

$$\boxed{q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{a_{11} - v}{a_{11} - a_{12}}}$$

Пример

Платежная матрица имеет следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

<u>Найти</u> **решение игры аналитическим методом**

Решение

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \qquad \beta = \min_j \max_i \beta_j$$

$$\begin{array}{ccc} & & \textit{min} \\ A = & \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \boldsymbol{3} \\ \\ \boldsymbol{4} \end{matrix} \\ \textit{max} & \begin{matrix} \boldsymbol{7} & \quad \boldsymbol{8} \end{matrix} & \end{array} \longrightarrow \begin{matrix} \alpha = 4 \\ \beta = 7 \end{matrix}$$

α < β, при этом цена игры v ∈ [4; 7]

Игра не имеет седловой точки, следовательно не решается в чистых стратегиях

Решение (продолжение)

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4-7}{3+4-8-7} = \frac{-3}{-8} = 0{,}375$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = \frac{4-8}{(3+4)-(8+7)} = \frac{-4}{-8} = 0{,}5$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = 1 - q_1 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

Решение (продолжение)

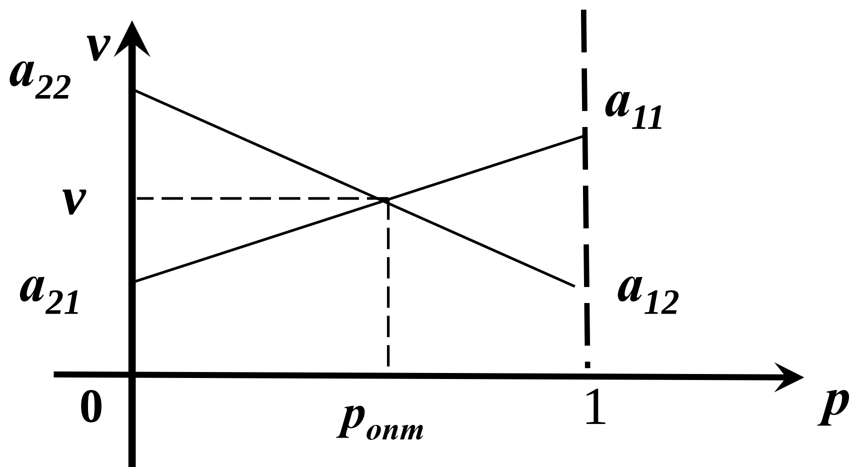
$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{(3 \cdot 4) - (8 \cdot 7)}{3 + 4 - 7 - 8} = \frac{-44}{-8} = 5{,}5$$

Ответ: оптимальной смешанной стратегией игрока А является стратегия $S_A = |0{,}375;\ 0{,}625|$, а игрока В - $S_B = |0{,}5;\ 0{,}5|$. Цена игры v = 5,5

Графический метод решения игры 2х2

1. Найдем оптимальную стратегию для первого игрока (А):

а) **Построим систему координат**



$=p_1$

б) **По оси абсцисс откладывается вероятность $p_1 \in [0,1]$, равная 1.**

в) **По оси ординат – выигрыши игрока А при стратегии A_2, а на прямой р = 1 – выигрыши при стратегии A_1**

г) **Находим точку пересечения прямых, которая и дает оптимальное решение матричной игры для игрока А ($p_{опт}$, v)**

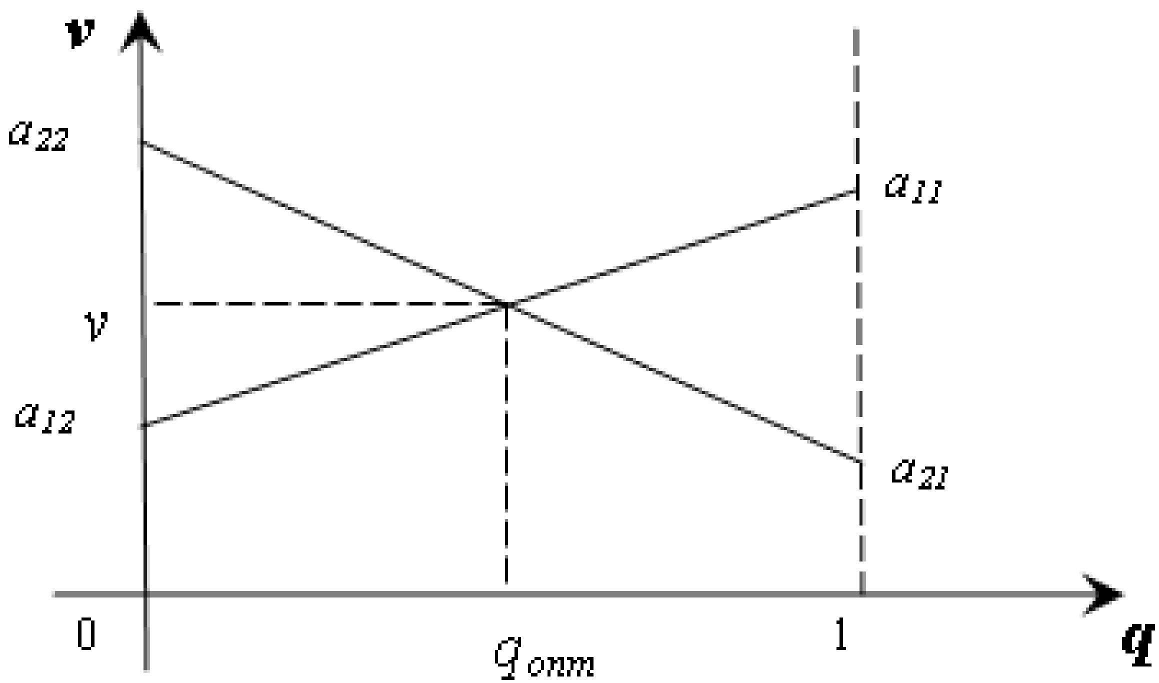
Графический метод решения игры 2x2

2. Найдем оптимальную стратегию для второго игрока (B):

а) **По оси абсцисс откладывается вероятность $q_1 \in [0,1]$, равный 1.**

б) **По оси ординат – выигрыши игрока B при стратегии B_2, а на прямой q = 1 – выигрыши при стратегии B_1**

в) **Находим точку пересечения прямых, которая и дает оптимальное решение матричной игры для игрока B ($q_{опт}$, v)**



Пример

Матричная игра 2x2 задана следующей матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Найти **решение игры графическим методом**

Решение

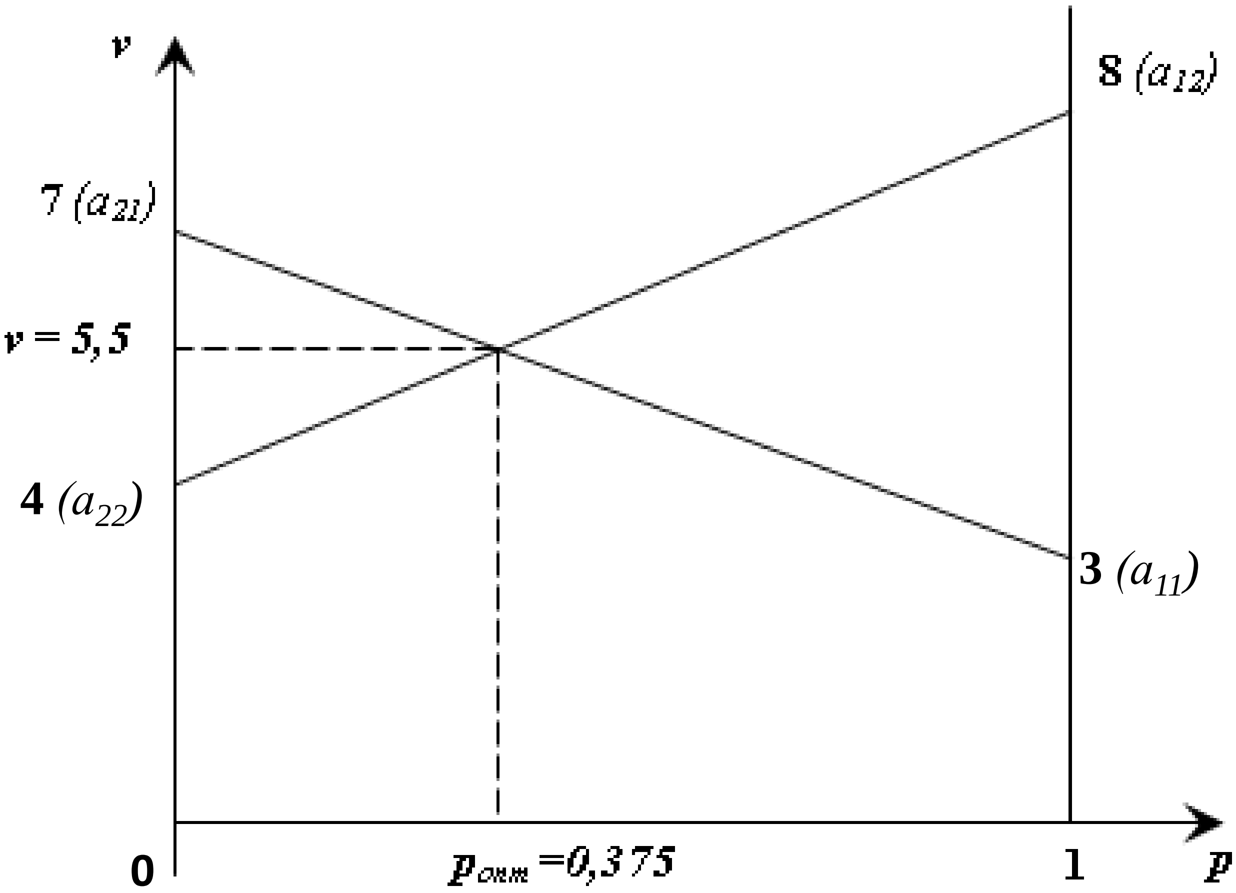
Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\alpha = 4,\ \beta = 7,$$

при этом цена игры $v \in [4, 7]$

$\alpha < \beta$ - игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях.

Решение



= p_1

3.2 Упрощение матричной игры

Для игр с платежными матрицами большой размерности отыскание оптимального решения можно упростить, если уменьшить их размерность путем исключения дублирующих и заведомо невыгодных (доминируемых) стратегий

Упрощение матрицы происходит согласно следующим правилам:

1. **Если в платежной матрице игры все элементы строки (столбца) равны соответствующим элементам другой строки (столбца), то соответствующее этим строкам (столбцам) стратегии называются дублирующими и одна из них исключается из матрицы.**

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \end{array} \begin{bmatrix} \cancel{7} & \cancel{6} & \cancel{0} \\ 7 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Упрощение матрицы происходит согласно следующим правилам:

2. **Если в платежной матрице игры все элементы некоторой строки, определяющей стратегию A_i игрока А, не больше (меньше или некоторые равны) соответствующих элементов другой строки, то стратегия A_i называется доминируемой (заведомо невыгодной) и исключается из матрицы.**

$$\begin{matrix} \\ \longrightarrow \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 0 \\ \cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{0} \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Упрощение матрицы происходит согласно следующим правилам:

3. **Если в платежной матрице игры все элементы некоторого столбца, определяющего стратегию B_i игрока B не меньше (больше или некоторые равны) соответствующих элементов другого столбца, то стратегия B_i называется доминируемой (заведомо невыгодной) и исключается из матрицы.**

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 6 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Упрощение матрицы

Решение матричной игры *не изменится*, если из платежной матрицы исключить строки и столбцы, соответствующие дублирующим и доминируемым стратегиям.

Пример

Платежная матрица имеет следующий вид. Необходимо провести процедуру уменьшения её размерности.

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 6 & 8 & 6 \\ 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ 6 & 7 & 5 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Решение

Сначала найдём верхнюю и нижнюю цену игры и определим, имеет ли игра седловую точку.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \qquad \beta = \min_j \max_i \beta_j$$

Вычисляя, получим:

α = max **(5, 6, 8, 5, 8) = 8**

β = min **(12, 10, 10, 12, 10) = 10**

При этом цена игры v $\in$[8, 10].

Так как *α < β*, то игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях

Решение

Упростим матричную игру.

<u>Стратегии игрока А.</u> **Необходимо сравнить каждую последующую строку с предыдущей поэлементно.**

$$A = \begin{vmatrix} \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{5} & \cancel{7} & \cancel{5} \\ 9 & 8 & 6 & 8 & 6 \\ 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ 6 & 7 & 5 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Все соответствующие элементы первой строки меньше соответствующих элементов второй строки, значит, первую строку исключаем из матрицы

Решение

Соответствующие элементы второй строки меньше или равны соответствующих элементов третьей строки, поэтому исключаем вторую стратегию игрока А как заведомо невыгодную

$$A = \begin{vmatrix} \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{5} & \cancel{7} & \cancel{5} \\ \cancel{9} & \cancel{8} & \cancel{6} & \cancel{8} & \cancel{6} \\ 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ 6 & 7 & 5 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Решение

Все элементы четвертой строки меньше элементов третьей строки, поэтому четвертая строка исключается из матрицы.

$$A = \begin{vmatrix} \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{5} & \cancel{7} & \cancel{5} \\ \cancel{9} & \cancel{8} & \cancel{6} & \cancel{8} & \cancel{6} \\ 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ \cancel{6} & \cancel{7} & \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{5} \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Решение

Сравнивая третью и пятую строку, видим, что соответствующие элементы этих строк не больше друг друга. Следовательно, из них нет заведомо невыгодных стратегий.

$$A = \begin{vmatrix} \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{5} & \cancel{7} & \cancel{5} \\ \cancel{9} & \cancel{8} & \cancel{6} & \cancel{8} & \cancel{6} \\ 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ \cancel{6} & \cancel{7} & \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{5} \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Решение

<u>Стратегии игрока B.</u> **Платежная матрица имеет следующий вид**

$$\begin{vmatrix} 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Решение

Сравнивается каждый последующий столбец с предыдущим поэлементно.

$$\begin{vmatrix} 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Существуют дублирующие стратегий игрока B – это третья и пятая стратегии. Любую из них исключаем из игры.

Решение

При сравнении первого и второго столбца - заведомо невыгодных стратегий нет.

$$\begin{vmatrix} 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Решение

При сравнении первого и четвертого столбца видно, что соответствующие элементы первого столбца больше и равны соответствующих элементов четвертого столбца, следовательно, первая стратегия заведомо невыгодна.

$$\begin{vmatrix} 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Решение

При сравнении второго столбца с четвертым - доминируемых стратегий нет.

$$\begin{vmatrix} 12 & 8 & 10 & 12 & 10 \\ 9 & 10 & 10 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

При сравнении соответствующих элементов второго столбца с пятым - пятая стратегия является доминируемой

Решение

Получается платежная матрица игры 2x2:

$$A = \begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$$

Верхняя и нижняя цена игры осталась неизменной.

Ответ: ***α*** **= 8,** ***β*** **= 10, цена игры** ***v*** **$\in$[8, 10].**

3.3 Решение матричных игр в смешанных стратегиях 2xn и mx2

Любая конечная игра mxn имеет решение, в котором число активных стратегий каждого игрока не превосходит *L*, где *L = min (m, n)*

У игры 2xn или mx2 всегда имеется решение, содержащее не более двух активных стратегий у каждого из игроков (min (2, n) = min (m, 2) = 2)

Решение матричных игр в смешенных стратегиях 2xn и mx2

Пусть платежная матрица игры имеет вид:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

Согласно теореме об активных стратегиях, решение находится из уравнения:

$$\boxed{v = \min_j (a_{1j} p_{опт} + a_{2j}(1 - p_{опт})) = \max_{0 \le p \le 1} \min_j (a_{1j} p + a_{2j}(1 - p)),\ j = \overline{1, n}}$$

Решение матричных игр в смешенных стратегиях 2xn и mx2

Найти максимум (по *p*) функции

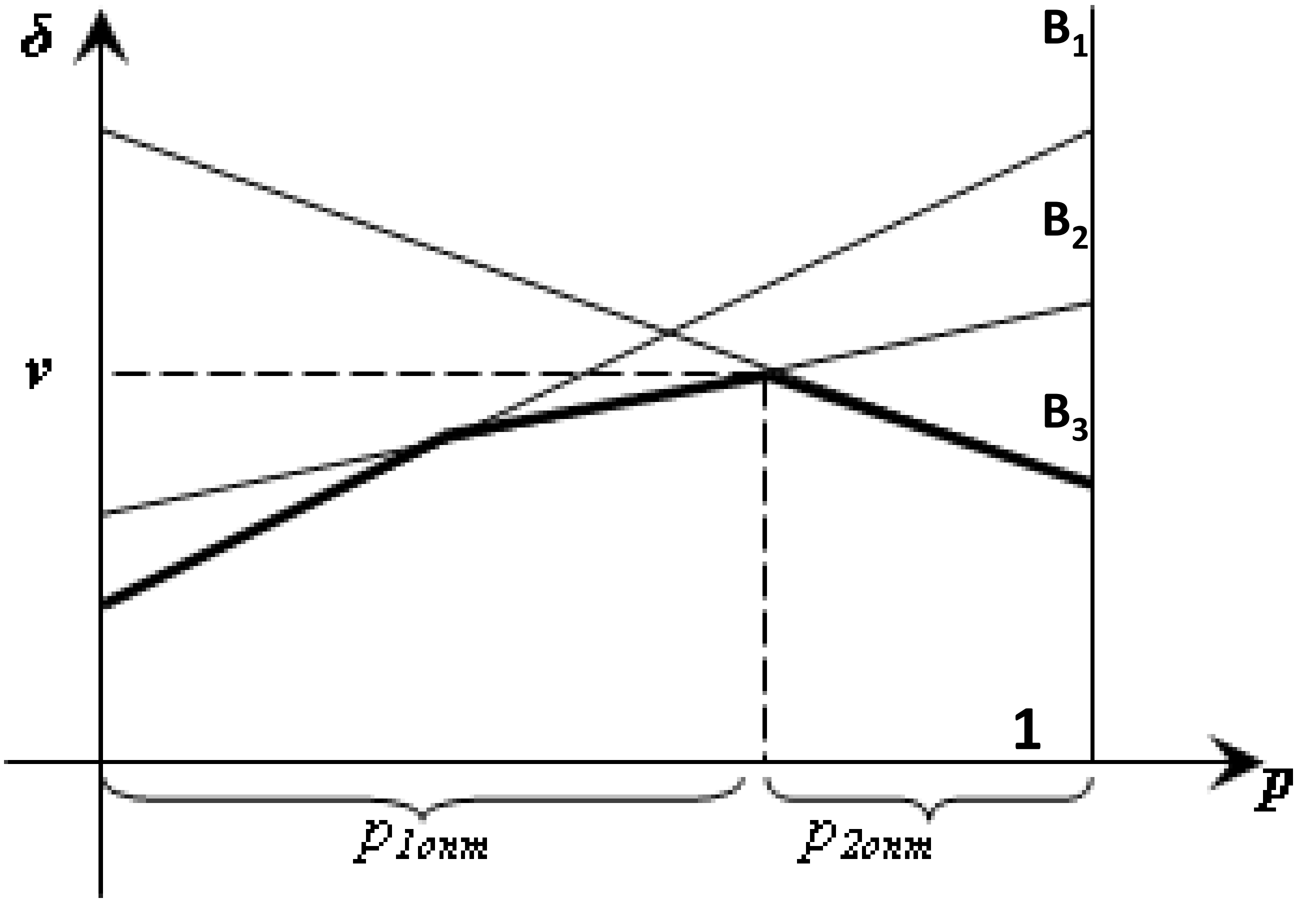
$$\boxed{\min_j (a_{1j}p + a_{2j}(1-p))}$$

Для этого необходимо построить *n* прямых вида

$$\boxed{\delta_j = a_{1j}p + a_{2j}(1-p)}$$

на плоскости (*p*, *δ*), *p*∈[0, 1] и путём визуального сравнения выбрать ломаную, огибающую их снизу

Решение матричных игр в смешенных стратегиях 2xn и mx2



Пример

Матричная игра *2xn* задана следующей матрицей

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

<u>Найти</u> **решение игры графическим и аналитическим методом**

Пример

,

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

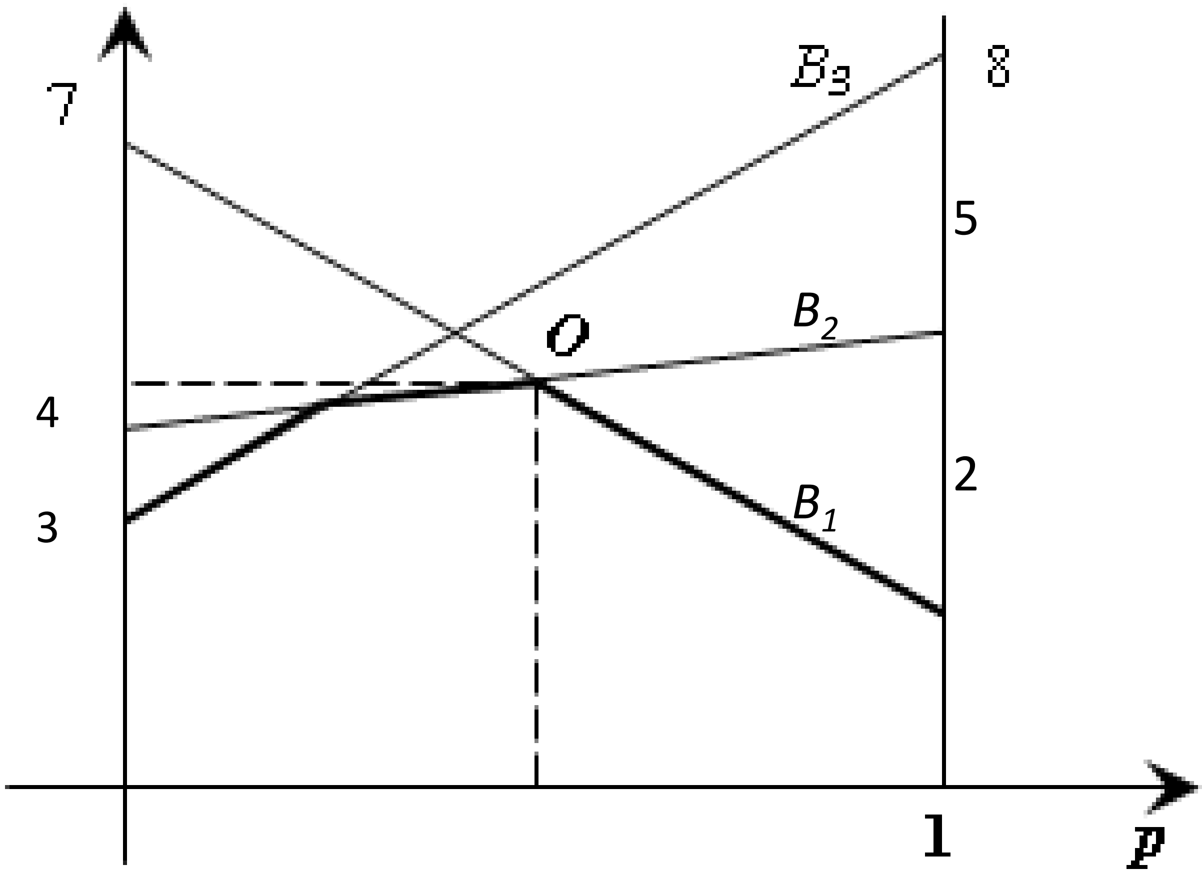
$$\boxed{\alpha = \max_i \min_j a_{ij}} \qquad \boxed{\beta = \min_j \max_i \beta_j}$$

Вычисляя, получим:
***α = max* (2, 3) = 3**
***β = min* (7, 5, 8) = 5**
Цена игры *v* $\in$[3, 5].

Так как *α < β*, то игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях.

Пример

Строим графическое изображение игры



Пример

Находим точку оптимума – *O*. В этой точке пересекаются стратегии B_1 и B_2 игрока B. Таким образом, исключая стратегию B_3, получаем матричную игру 2x2 с платежной матрицей вида

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$$

Пример

Используя алгебраический метод решения этой игры, получаем точное решение

$$p_1 = \frac{4-7}{2+4-7-5} = 0{,}5 \qquad p_2 = 1 - p_1 = 0{,}5$$

$$q_1 = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}} = \frac{4{,}5-5}{2-5} = 0{,}17 \qquad q_2 = 1 - q_1 = 0{,}83$$

$$v = \frac{2\cdot 4 - 7\cdot 5}{2+4-7-5} = 4{,}5$$

Ответ: **оптимальные смешанные стратегии игроков S_A=|0,5; 0,5|, S_B=|0,17; 0,83| при цене игры v=4,5.**

Решение матричных игр в смешенных стратегиях 2xn и mx2

Решение игры ***mx2*** осуществляется аналогично. Но в этом случае строится графическое изображение игры для игрока *В* и выделяется не нижняя, а **верхняя граница выигрыша**, и на ней находится точка оптимума с наименьшей ординатой (минимакс).

Пример

Матричная игра *mx2* задана следующей матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2,5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Найти</u> **решение игры графическим и аналитическим методом**

Пример

,

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\boxed{\alpha = \max_i \min_j a_{ij}}$$

$$\boxed{\beta = \min_j \max_i \beta_j}$$

Вычисляя, получим:

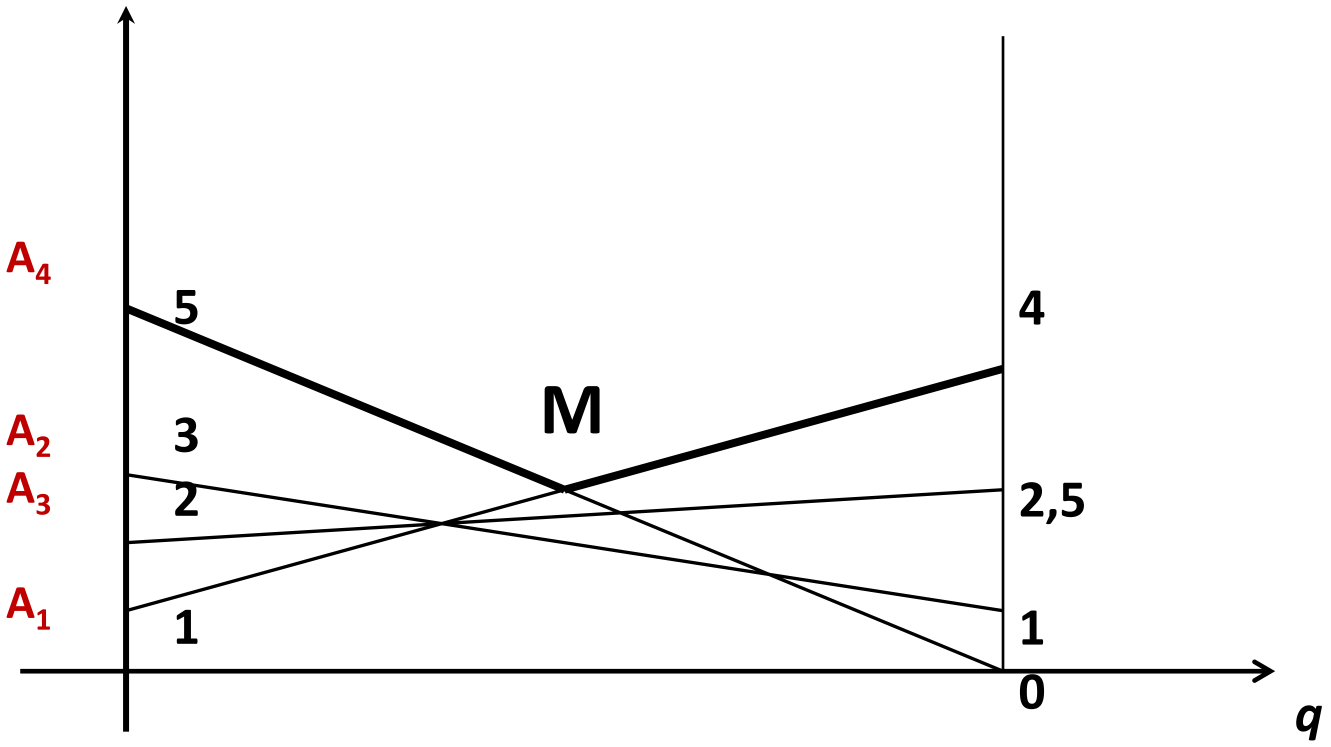
α = *max* (1; 1; 2; 0) = 2

β = *min* (5; 4) = 4

Цена игры $v \in [2, 4]$.

Так как $\alpha < \beta$, то игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях.

Пример



Пример

$p1 = 0{,}625$ $p2 = 0{,}375$

$q1 = 0{,}5$ $q2 = 0{,}5$

$v = 2{,}5$

Ответ: оптимальные смешанные стратегии игроков $S_A=|0{,}625;\ 0{,}375|$, $S_B=|0{,}5;\ 0{,}5|$ при цене игры $v=2{,}5$.