Теория игр

Лекция 2.
Антагонистические игры.

11.09.2014

План лекции

2.1 Определение антагонистической игры
2.2 Понятие матричной игры
2.3 Выбор оптимальной стратегии в матричной игре
2.4 Ситуация равновесия в матричной игре
2.5 Решение игры в смешанных стратегиях

Антагонистическая игра в нормальной форме

Определение. Система Г = (X, Y, K), где X и Y непустые множества, и функция K : X×Y* →R, называется антагонистической игрой в нормальной форме.

Прямое или декартово произведение двух множеств — это множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары элементов исходных множеств.

Антагонистическая игра в нормальной форме

Элементы $x \in X$ и $y \in Y$ называются стратегиями игроков 1 и 2 соответственно в игре Г, элементы декартового произведения X×Y – ситуациями, а функция К - функцией выигрыша игрока 1. Выигрыш игрока 2 в ситуации (x, y) полагается равным [–К(x, y,)]; поэтому функция К называется функцией выигрыша самой игры Г, а игра Г – игрой с нулевой суммой.

Матричная игра

Определение. Антагонистические игры, в которых оба игрока имеют конечные множества стратегий, называются **матричными**.

Пусть **игрок 1** в матричной игре имеет m стратегий, а игрок **2** - **n** стратегий. Тогда игра **Г** полностью определяется заданием матрицы $A = \{a_{ij}\}$,

где $a_{ij} = K(x_i, y_j)$, $i \in [1...m]$, $j \in [1...n]$.

Матрица выигрышей или платежная матрица

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} y_1 & y_2 & \dots & y_j & \dots & y_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

2.3

Выбор оптимальной стратегии

Оптимальной стратегией игрока в матричной игре называется такая, которая обеспечивает ему максимальный выигрыш.

Задача каждого из игроков – найти наилучшую стратегию игры

Выбор оптимальной стратегии

Пример. Платежная матрица 1 игрока:

$$A = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & \boxed{4} & 2 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ x_3 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ x_4 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ x_5 & 0 & 1 & 2 & \boxed{4} \end{array}$$

Выбор оптимальной стратегии

Игрок 1 может гарантировать себе лучший выигрыш среди худших выигрышей для каждой из своих стратегий.

Или гарантированный выигрыш =

$$\max_i \left(\min_j (a_{ij})\right) = \alpha$$

- это нижняя цена игры (максимин)

Нижняя цена игры

$$A = \begin{array}{c|cccc|c} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \min \\ \hline x_1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \quad \max \\ x_2 & 1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ x_3 & -1 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ x_4 & -1 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}$$

Нижняя цена игры $\alpha = 0$

Оптимальная стратегия 2 игрока

$$A = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ x_3 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ x_4 & -1 & 0 & 5 & 1 \\ \hline \max & 4 & 3 & 5 & 1 \end{array}$$

Оптимальная стратегия 2 игрока

Игрок 2 может гарантировать себе минимальный проигрыш среди максимальных проигрышей для каждой из своих стратегий.

Или гарантированный минимальный проигрыш $= \min_{j} (\max_{i}(a_{ij})) = \beta$

- это верхняя цена игры (минимакс)

Задание

Платежная матрица имеет следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Найти нижнюю и верхнюю цену игры

Пример. Определение нижней цены игры

$$\begin{array}{cc} & \textbf{min} \\ A = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{7} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{5} \end{array} \end{array}$$

α = max (7, 3, 5) = 7

Определение верхней цены игры

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

max 7 9 10

β = min (7, 9, 10) = 7

Соотношение нижней и верхней цены игры

Лемма. В матричной игре всегда $\alpha \leq \beta$ или

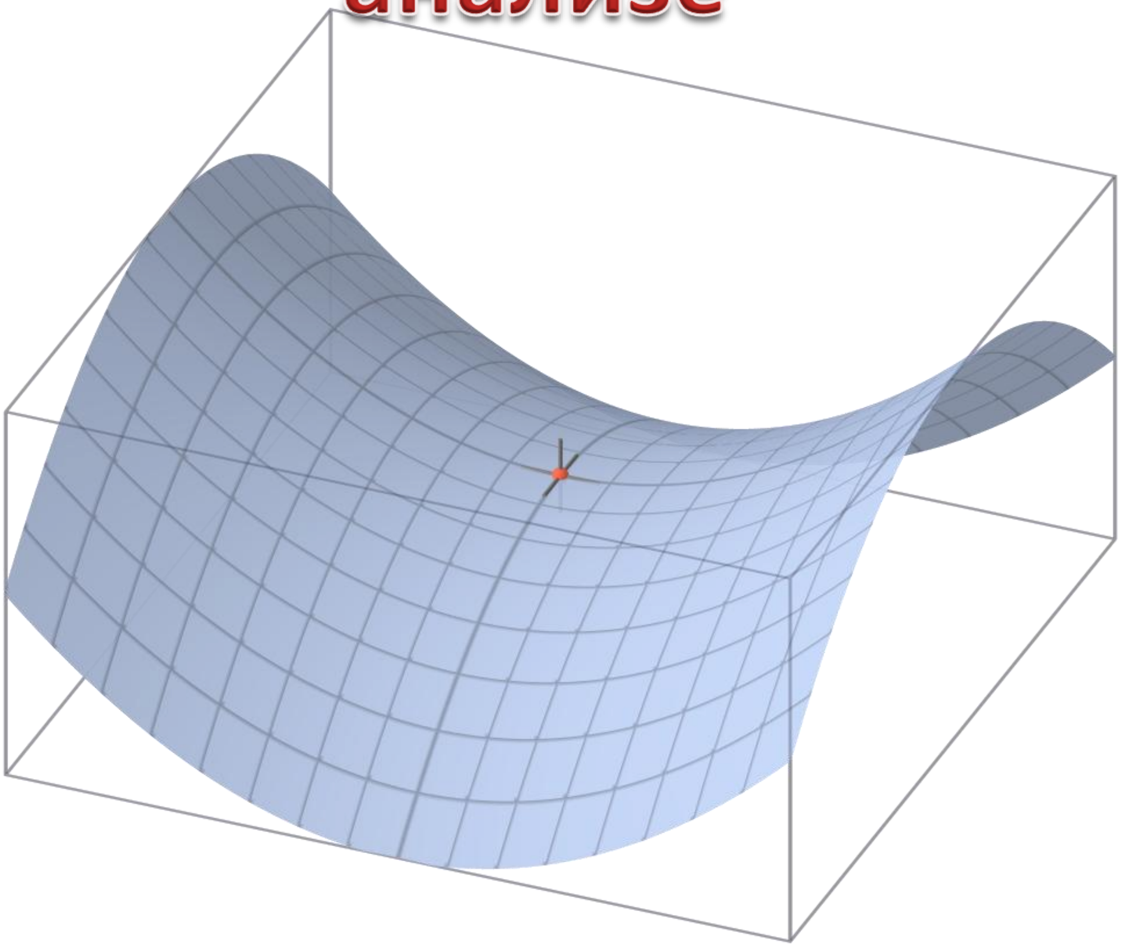
$$\max_{1<i<m}\min_{1<j<n} a_{ij} \leq \min_{1<j<n}\max_{1<i>m} a_{ij}$$

2.4

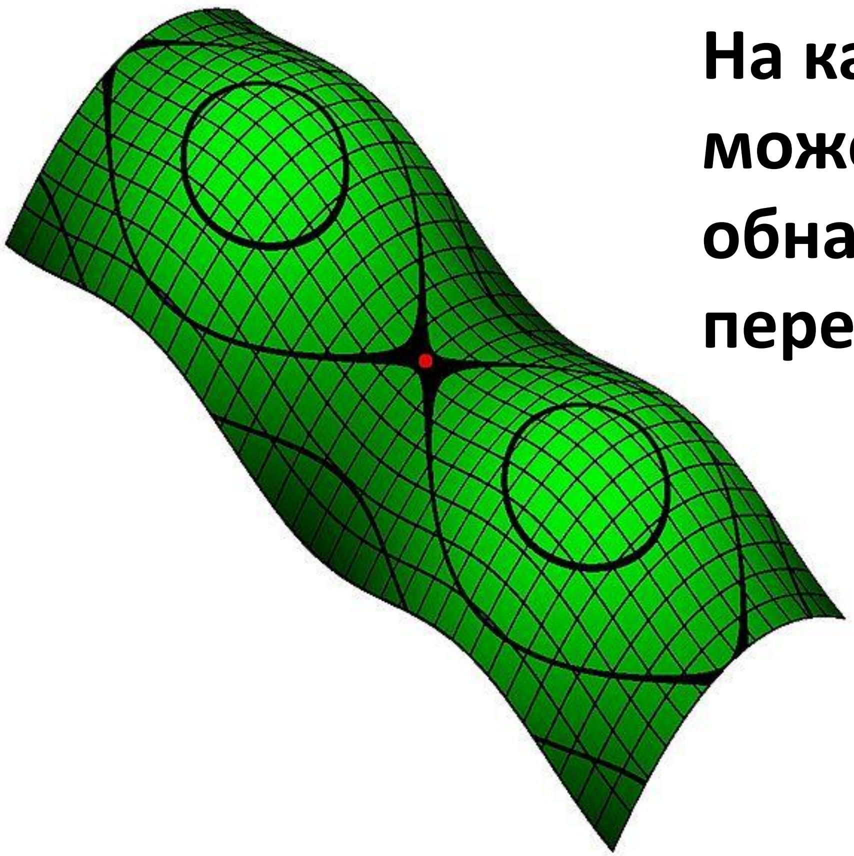
Равновесная ситуация в матричной игре

Если $\alpha = \beta$, то ситуация является равновесной.
И такая игра называется игрой с седловой точкой.
А пара оптимальных стратегий ($A_{iопт}$, $B_{jопт}$) – седловой точкой матрицы.

Седловая точка в математическом анализе



Седловая точка в математическом анализе



На карте высот седловая точка может быть в общем случае обнаружена в месте пересечения изолиний.

Седловая точка матрицы

Седловой точкой (седловым элементом) матрицы называют элемент матрицы, который одновременно является минимальным элементом в соответствующей строке матрицы и максимальным элементом в соответствующем столбце матрицы.

Цена игры

$$a_{ij} = \alpha = \beta = \mathbf{v},$$

где v называется ценой игры и является одновременно минимальным в i-й строке и максимальной в j-м столбце

***v* - решение матричной игры**

Цена игры

В примере получаем α = β = 7

$$\begin{array}{c|ccc|c} & & & & \alpha_i \\ A= & 7 & 9 & 10 & \underline{\mathbf{7}} \\ & 3 & 4 & 8 & \mathbf{3} \\ & 7 & 5 & 8 & \mathbf{5} \\ \beta_j & \underline{\mathbf{7}} & \mathbf{9} & \mathbf{10} & \end{array}$$

Седловая точка матрицы соответствует элементу a_{11}.

Ответ: ***цена игры (v) = 7***

Цена игры

1) Если $\nu > 0$, то игра выгодна для игрока А.

2) Если $\nu < 0$ - для игрока В.

3) Если $\nu = 0$ игра справедлива, *т.е. является одинаково выгодной для обоих участников*

Принцип максимина

Применение максиминного принципа каждым из игроков обеспечивает:

- **игроку А выигрыш не менее α,**
- **игроку В проигрыш не больше β.**

Учитывая что $\alpha \le \beta$, целью игрока А будет в увеличении выигрыша, а для игрока В - уменьшение проигрыша.

Задание №2

Найти седловую точку матрицы

3	6	9	8	2
2	4	3	5	9
1	5	8	9	2
4	5	7	9	6
3	9	8	4	7

Решение

						max
	3	6	9	8	2	2
	2	4	3	5	9	2
	1	5	8	9	2	1
	4	5	7	9	6	4
	3	9	8	4	7	3
min	4	9	8	9	7	

Вывод по решенной задаче

3	6	9	8	2	2
2	4	3	5	9	2
1	5	8	9	2	1
4	5	7	9	6	4
3	9	8	4	7	3
4	9	8	9	7	

Так как верхняя цена игры и нижняя совпадают, то в игре есть седловая точка.

Первому игроку следует выбирать четвертую стратегию, а второму игроку – первую стратегию, при этом цена игры составит 4 единицы.

Задание №3

Найти седловую точку матрицы

7	5	9	8
2	4	3	5
8	3	7	9
4	7	8	2

Решение задания №3

7	5	9	8	5
2	4	3	5	2
8	3	7	9	3
4	7	8	2	2
8	7	9	8	

Вывод. В игре нет седловой точки, поэтому первый игрок может гарантировать себе выигрыш не менее 5 единиц (нижняя цена игры) и может надеяться на выигрыш не более 7 единиц (верхняя цен игры.)

Игра решается в смешанных стратегиях.

2.5 Смешанные стратегии

Смешанной стратегией игрока называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий.

Каждая смешанная стратегия **P** первого игрока полностью определяется вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$, с которыми первый игрок выбирает соответствующие чистые стратегии $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Смешанные стратегии первого и второго игрока

Первый игрок

$P = (p_1, p_2, \ldots, p_m),\ p_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

Второй игрок

$Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n),\ q_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

Использование смешанных стратегий

Смешанные стратегии в теории игр представляют собой модель изменчивой, гибкой тактики, когда ни один из игроков не знает, какую чистую стратегию выберет противник в данной партии.

Средний выигрыш первого игрока

Средний выигрыш первого игрока в матричной игре с матрицей А выражается в виде математического ожидания его выигрышей

Средние выигрыши игроков

Если игрок А применяет смешанную стратегию $S_A = |p_1, p_2, \ldots, p_m|$, а игрок В смешанную стратегию $S_B = |q_1, q_2, \ldots, q_n|$, то средний выигрыш игрока А определяется соотношением

$$\boxed{H_A(P,Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \cdot q_j}$$

Средний проигрыш игрока В равен такой же величине.

Выбор смешанной стратегии для первого игрока

Формируя свою стратегию S_A в антагонистической игре, игрок А в соответствии с принципом максимина должен выбрать такую стратегию, при которой минимально возможный выигрыш был бы максимален, т.е. такую стратегию, которая обеспечивает

$$\boxed{\alpha(P) = \max_{i} \min_{j} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \cdot q_j = v_A}$$

Выбор смешанной стратегии для второго игрока

Для второго игрока необходимо, чтобы максимальный возможный проигрыш был бы минимален

$$\boxed{\beta(Q) = \min_{j} \max_{i} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \cdot q_j = v_B}$$

Основная теорема матричных игр

Для матричной игры с любой матрицей А величины V_A и V_B существуют и равны между собой.

$V_A = V_B = V$ – цена игры

$\alpha \leq V \leq \beta$

Джон фон Нейман

Смешанные стратегии

Оптимальное решение игры в смешанных стратегиях обладает тем свойством, что каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной смешанной стратегии, если его противник применяет свою оптимальную смешанную стратегию, так как это ему невыгодно.

Активные стратегии игроков

Определение. Те из чистых стратегий игроков А и В, которые входят в их оптимальные смешанные стратегии с вероятностями, не равными нулю, называются **активными стратегиями**.

Теорема об активных стратегиях

Если один из участников матричной игры А (mxn), придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то это обеспечивает ему максимальный средний выигрыш, равный цене игры ν, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий, причем число активных стратегий каждого игрока, входящих в их оптимальные смешанные стратегии, не превосходит *L*, где *L = min(m, n)*.

Условия применения смешанных стратегий

1. Игра без седловой точки.
2. Игроки используют случайную смесь чистых стратегий с заданными вероятностями.
3. Игра повторяется многократно в сходных условиях.
4. При любом ходе ни один из игроков не информирован о стратегии другого игрока.
5. Допускается усреднение результатов игр.

Пример

Платежная матрица имеет следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}8 \\ 1 & 0{,}75 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Смешанные стратегии для игроков *A* и *B* соответственно:

P = (0,37; 0,62), Q = (0,25; 0; 0,75)

<u>Определить</u> выигрыши игрока А в ситуации (P; Q), (P; B_1), (P; B_2), (P; B_3)

Решение

Выигрыш игрока А в игровой ситуации *(P; Q)* определяется по формуле

$$\boxed{H_A(P,Q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_i\cdot q_j}$$

При m = 2, n = 3,

$p_1 = 0{,}37$; $p_2 = 0{,}62$;

$q_1 = 0{,}25$; $q_2 = 0$; $q_3 = 0{,}75$

Решение (продолжение)

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \cdot q_j$$

$p_1 = 0,37$; $p_2 = 0,62$;
$q_1 = 0,25$; $q_2 = 0$; $q_3 = 0,75$

$H_A(P, Q) = p_1(a_{11}q_1+a_{12}q_2+a_{13}q_3) + p_2(a_{21}q_1+a_{22}q_2+a_{23}q_3) =$

$$= 0,37 \cdot ((0 \cdot 0,25) + (0,5 \cdot 0) + (0,8 \cdot 0,75)) + 0,62 \cdot ((1 \cdot 0,25) + (0,75 \cdot 0) + (0,5 \cdot 0,75))$$

$= 0,222 + 0,39 = 0,612$

$H_A(P, Q) = 0,612$

Решение (продолжение)

$$H(P;B_1)=\sum_{i=1}^{2} a_{i1}p_i=(0\cdot 0{,}37)+(1\cdot 0{,}62)=0{,}62$$

$$H(P;B_2)=\sum_{i=1}^{2} a_{i2}p_i=(0{,}5\cdot 0{,}37)+(0{,}75\cdot 0{,}62)=0{,}185+0{,}465=0{,}65$$

$$H(P;B_3)=\sum_{i=1}^{2} a_{i3}p_i=(0{,}8\cdot 0{,}37)+(0{,}5\cdot 0{,}62)=0{,}296+0{,}31=0{,}606$$

Ответ: *выигрыш игрока А в ситуациях*

$H(P;Q) = 0{,}612$

$H(P;B_1) = 0{,}62$; $H(P;B_2) = 0{,}65$; $H(P;B_3) = 0{,}606$