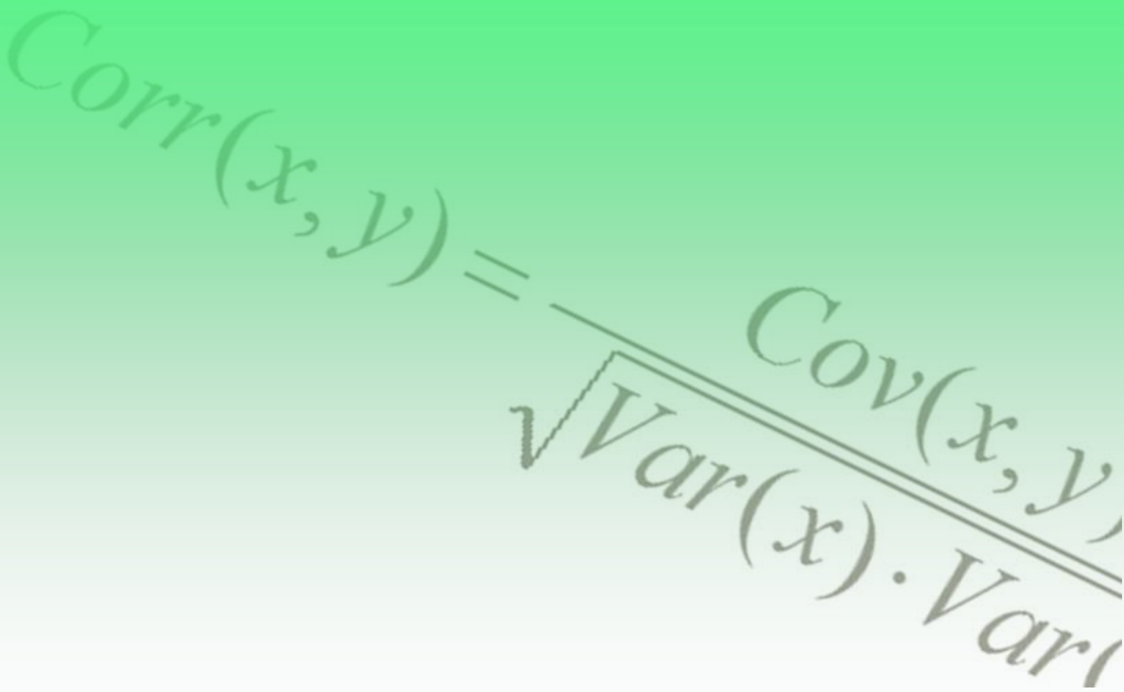

Эконометрическое моделирование

Лабораторная работа № 7

Анализ остатков. Автокорреляция

Оглавление

Свойства остатков

Свойства коэффициентов регрессии существенным образом зависят от свойств случайного члена. Для того, чтобы регрессионный анализ, основанный на обычном методе наименьших квадратов, давал наилучшие из всех возможных результаты, случайный член должен удовлетворять четырем условиям, известным как условия Гаусса-Маркова. Если эти условия не выполнены, исследователь должен это сознавать. Если корректирующие действия возможны, то аналитик должен быть в состоянии их выполнить. Если ситуацию исправить невозможно, исследователь должен быть способен судить, насколько серьезно это может повлиять на результаты.

Вспомним первые два условия Гаусса-Маркова и рассмотрим оставшиеся.

1-е условие Гаусса-Маркова: E(ε_i) = 0 для всех наблюдений

Первое условие состоит в том, что *математическое ожидание* случайного члена (остатков) в любом наблюдении должно быть равно нулю. Иногда случайный член будет положительным, иногда отрицательным, но он не должен иметь систематического смещения ни в каком из двух возможных направлений. Фактически, если уравнение регрессии включает постоянный член, то обычно бывает разумно предположить, что это условие выполняется автоматически, так как роль постоянного члена состоит в отражении любой систематической, но постоянной составляющей в Y, которую не учитывают объясняющие переменные, включенные в уравнение регрессии.

Для того чтобы проверить данную предпосылку достаточно найти математическое ожидание остатков и убедиться, что оно близко к 0.

2-е условие Гаусса-Маркова: теоретическая дисперсия ε_i, постоянна для всех наблюдений

Второе условие состоит в том, что дисперсия случайного члена должна быть постоянна для всех наблюдений. Иногда случайный член будет больше, иногда меньше, однако не должно быть априорной причины для того, чтобы он порождал большую ошибку в одних наблюдениях, чем в других. Такое утверждение может показаться странным и требует пояснение. Случайный член в каждом наблюдении имеет только одно значение, и может возникнуть вопрос о том, что означает его «дисперсия». Имеется в виду его возможное поведение до того, как сделана выборка. Когда мы записываем модель

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

первые два условия Гаусса-Маркова указывают, что случайные члены ε_i в n наблюдениях появляются на основе вероятностных распределений, имеющих нулевое математическое ожидание и одну и ту же дисперсию. Их фактические значения в выборке иногда будут положительными, иногда – отрицательными, иногда – относительно далекими от нуля, иногда – относительно близкими к нему, но у нас нет причин заранее ожидать появления особенно больших отклонений в любом данном наблюдении. Другими словами, вероятность того, что величина ε примет какое-то данное положительное (или отрицательное) значение, будет одинаковой для всех наблюдений. Это условие известно *гомоскедастичность*, что означает «одинаковый разброс».

3-е условие Гаусса-Маркова: ε_i распределено независимо от ε_j ($i \neq j$)

Это условие предполагает отсутствие систематической связи между значениями случайного члена в любых двух наблюдениях. Например, если случайный член велик и положителен в одном наблюдении, это не должно обусловливать систематическую тенденцию к тому, что он будет большим и положительным в следующем наблюдении (или большим и отрицательным, или малым и положительным, или малым и отрицательным). Значения случайного члена должны быть абсолютно независимы друг от друга. Из данного условия следует, что теоретическая ковариация между ε_i и ε_j равна нулю.

Если данное условие не выполняется, то говорят, что случайный член подвержен *автокорреляции*, которую часто называют сериальной корреляцией (эти два термина взаимозаменяемы). Последствия автокорреляции для оценивания с помощью обычного МНК в некоторой степени сходны с последствиями гетероскедастичности. Вообще говоря, коэффициенты регрессии остаются несмещенными, но становятся неэффективными, поскольку можно найти альтернативные несмещенные оценки с меньшей дисперсией. Другим важным последствием, которое не нужно смешивать с первым, является то, что стандартные ошибки оцениваются неправильно (чаще всего они смещаются вниз, т. е. занижаются). Наконец, хотя в общем случае наличие автокорреляции не делает МНК-оценки смещенными, существует важный частный случай, когда это происходит.

Возможные причины автокорреляции

Автокорреляция обычно встречается только в регрессионном анализе при использовании данных временных рядов. Случайный член в уравнении регрессии подвергается воздействию тех переменных, влияющих на зависимую переменную, которые не включены в уравнение регрессии. Если значение ε в любом наблюдении должно быть независимым от его значения в предыдущем наблюдении, то и значение любой переменной, «скрытой» в ε, должно быть некоррелированным с ее значением в предыдущем наблюдении.

Постоянная направленность воздействия невключенных в уравнение переменных является наиболее частой причиной *положительной автокорреляции* – ее обычного для экономического анализа типа. На рис. 1 Y зависит от X, а также от ряда менее важных переменных, не включенных в уравнение в явном виде. Случайный член в модели формируется в результате взаимодействия этих невключенных переменных. В первом наблюдении невключенные переменные имеют положительный совокупный эффект, и случайный член положителен. Если невключенные переменные меняются медленно, то их положительный эффект будет сохраняться, и случайный член будет оставаться положительным. В конечном счете баланс изменится, и чистый эффект невключенных переменных станет отрицательным. Теперь эффект устойчивости будет «работать» в противоположном направлении, и случайный член будет оставаться отрицательным для нескольких наблюдений. Продолжительность и амплитуда каждой положительной и отрицательной последовательности случайны, но в целом будет наблюдаться тенденция к сохранению положительных значений случайного члена после положительных и отрицательных – после отрицательных.

Здесь важно отметить, в частности, что автокорреляция в целом представляет тем более существенную проблему, чем меньше интервал между наблюдениями. Очевидно, что чем больше этот интервал, тем менее правдоподобно, что при переходе от одного наблюдения к другому характер влияния неучтенных переменных будет сохраняться.

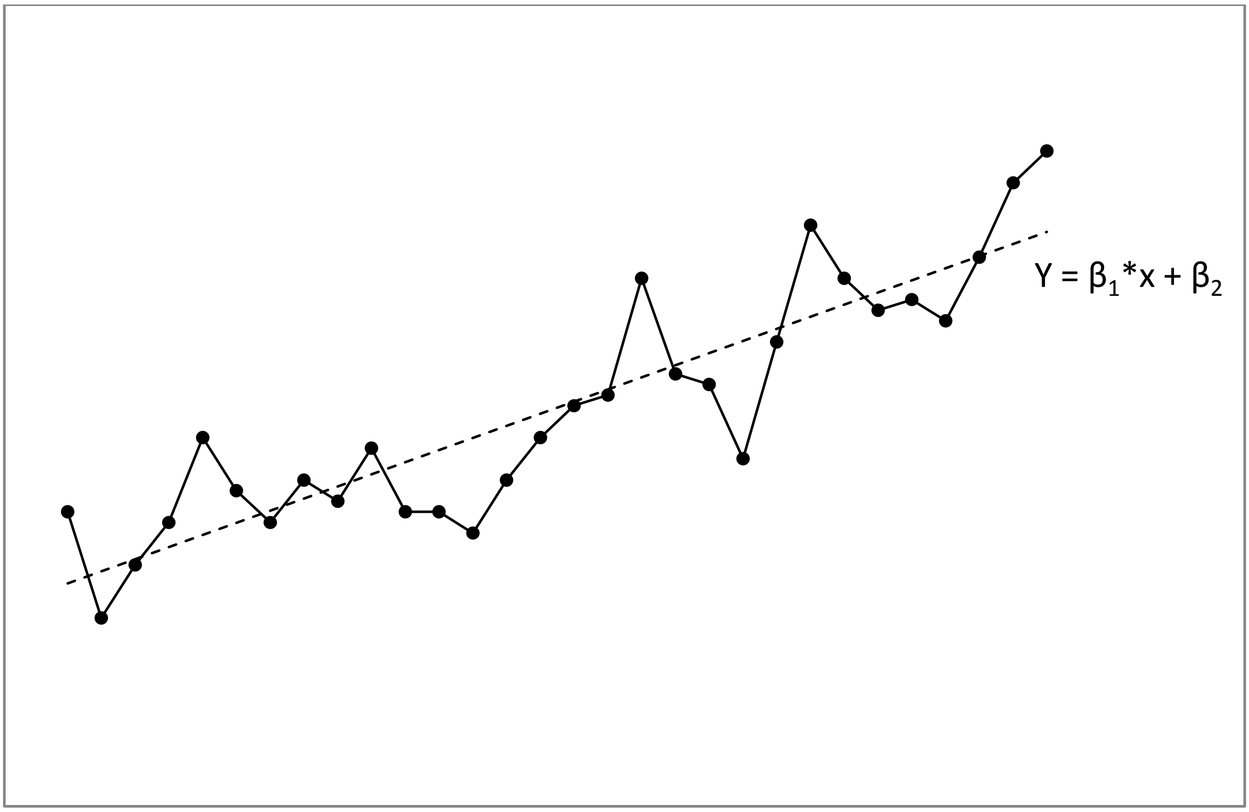

Рисунок 1 – Положительная автокорреляция

Автокорреляция может также быть *отрицательной.* Это означает, что корреляция между последовательными значениями случайного члена отрицательна. В этом случае, скорее всего, за положительным значением в одном наблюдении идет отрицательное значение в следующем, и наоборот; диаграмма рассеяния при этом имеет вид, как на рис.2. Линия, соединяющая последовательные наблюдения друг с другом, будет пересекать линию, показывающую зависимость между *Y* и *X,* чаще, чем можно было бы ожидать, если бы значения случайного члена не зависели друг от друга. В экономике отрицательная автокорреляция встречается относительно редко, но иногда она появляется при преобразовании первоначальной спецификации модели в форму, подходящую для регрессионного анализа.

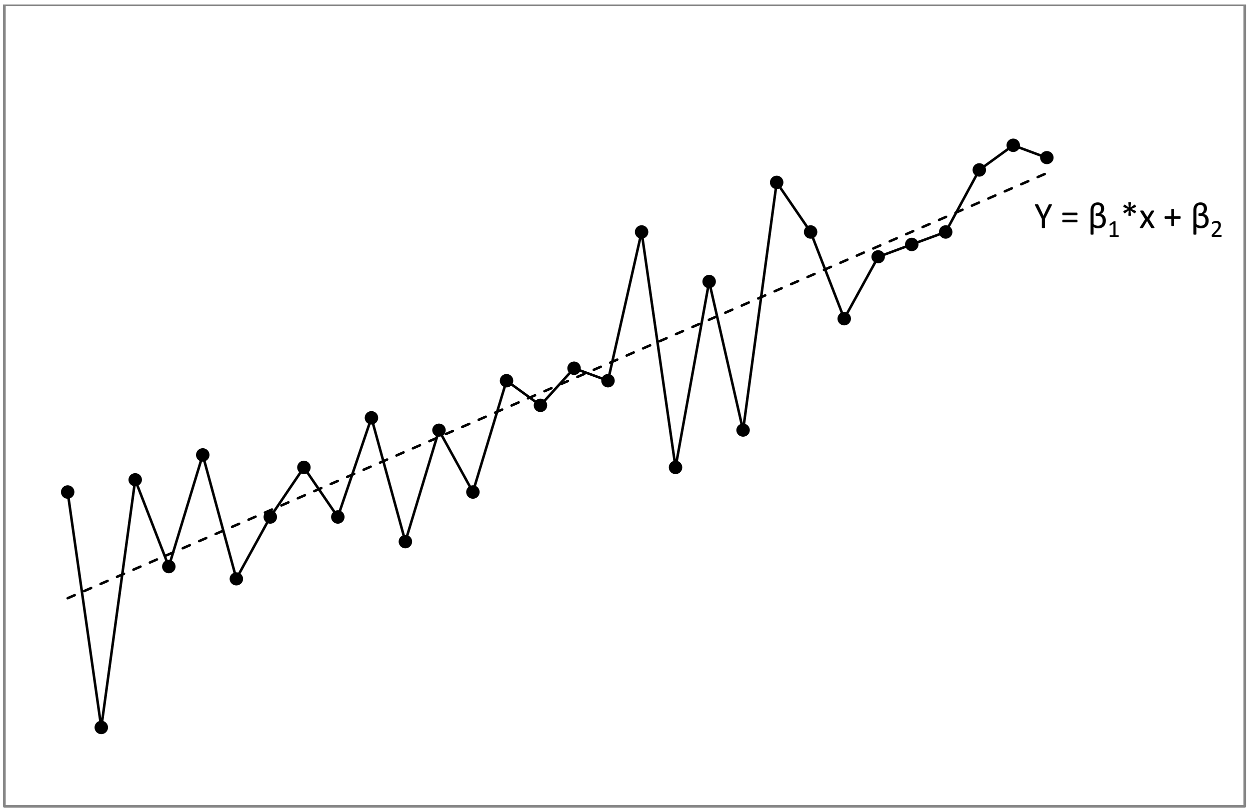

Рисунок 2 – Отрицательная автокорреляция

Обнаружение автокорреляции первого порядка: критерий Дарбина-Уотсона

Рассмотрим случай, в котором автокорреляция подчиняется авторегрессионной схеме первого порядка, часто обозначаемой как AR(1), когда случайный член ε в модели

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \qquad (1)$$

формируется процессом

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t \qquad (2)$$

Данный тип автокорреляции называется *авторегрессионным*, поскольку ε_t определяется значениями этой же самой величины с запаздыванием, с добавлением нового элемента случайности (иногда называемого инновацией) в виде u_t. Эта схема называется схемой первого порядка, потому что здесь ε_t зависит только ε_{t-1} и от инновации.

Автокорреляция первого порядка бывает положительная или отрицательная в соответствии со знаком ρ в уравнении (2). Отметим, что если ρ равно нулю, то нет и автокорреляции. Поскольку авторегрессионная схема AR(1) представляет общую форму автокорреляции, стандартная тестовая статистика для нее – статистика Дарбина-Уотсона *(d)* (Durbin, Watson, 1950) рассчитывается по величинам отклонений с помощью выражения

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{T}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2}$$

На больших выборках d→2–2ρ.

Если автокорреляция отсутствует, то ρ = 0, и, таким образом, *d* должна быть близкой к двум. Если имеется положительная автокорреляция, то *d* в тенденции будет меньше двух. Если есть отрицательная автокорреляция, то она в тенденции будет больше двух. При выполнении теста предполагается, что ρ лежит в интервале –1 > ρ > 1 и, следовательно, *d* лежит между 4 и 0. Нулевая гипотеза для данного теста заключается в том, что ρ = 0. Конечно, даже если гипотеза H_0 истинна, то величина *d* не будет в точности равняться 2, исключая практически невероятную возможность. Однако получение значения *d* намного меньше, чем 2, дает нам выбор из двух возможностей. Одна состоит в том, чтобы считать, что гипотеза H_0 истинна и что низкое значение *d* получено в результате случайности. Другой возможный вывод состоит в том, что случайный член подвержен положительной автокорреляции. Как обычно, выбор делается на основе установления критического значения ($d_{крит}$), ниже которого *d* может оказаться с вероятностью не более 5%. Если *d* оказывается меньшим, чем $d_{крит}$, то гипотеза H_0 отвергается при уровне значимости 5%.

Критическое значение *d* при любом данном уровне значимости зависит, как можно предполагать, от числа объясняющих переменных в уравнении регрессии и от числа наблюдений в выборке. Оно также зависит от конкретных значений, принимаемых объясняющими переменными. Поэтому невозможно составить таблицу с указанием точных критических значений для всех возможных выборок, как это можно сделать для t- и F-статистик. Но можно вычислить верхнюю и нижнюю *границы* для критического значения *d.* Для положительной автокорреляции они обычно обозначаются как d_U и d_L. На рис. 3 данная ситуация представлена в виде схемы. Стрелка указывает критический уровень *d,* который обозначается как $d_{крит}$. Если бы мы знали значение $d_{крит}$, то могли бы сравнить с ним значение *d,* рассчитанное для нашей регрессии. Если бы оказалось, что $d > d_{крит}$ то мы не смогли бы отклонить нулевую гипотезу отсутствия автокорреляции. В случае $d < d_{крит}$ мы бы отклонили нулевую гипотезу и сделали вывод о наличии положительной автокорреляции.

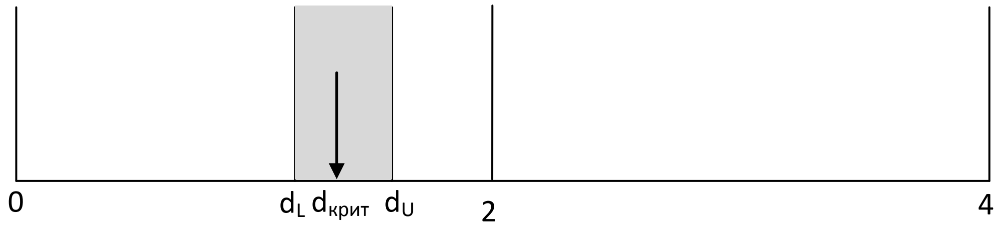

Рисунок 3 – Тест Дарбина-Уотсона на автокорреляцию: показана зона неопределенности в случае предполагаемой положительной автокорреляции

Вместе с тем известно только, что *d* лежит где-то между d_L и d_U. Это предполагает три возможных исхода для теста.

1. Величина *d* меньше, чем d_L. В этом случае она будет также меньше, чем $d_{крит}$, тогда отвергаем нулевую гипотезу и делаем *вывод о наличии положительной автокорреляции*.

2. Величина *d* больше, чем d_U. В этом случае она также больше критического уровня, и поэтому мы не можем отклонить нулевую гипотезу.

3. Величина *d* находится между d_L *и* d_U. В этом случае она может быть больше или меньше критического уровня $d_{крит}$. Поскольку нельзя определить, которая из двух возможностей имеет место, мы не можем ни отклонить, ни принять нулевую гипотезу.

В случаях *1* и *2* тест Дарбина-Уотсона дает определенный ответ, но случай 3 относится к зоне неопределенности, и изменить создавшееся положение нельзя.

В значения d_L и d_U, соответствующие количеству наблюдений и числу объясняющих переменных в модели для уровней значимости 5% и 1 % представлены в таблице со статистикой Дарбина-Уотсона. В таблице показаны критические значения в случае положительной автокорреляции первого порядка. Можно видеть, что чем больше число наблюдений, тем уже зона неопределенности, представленная отрезком между d_L и d_U. Проверка на отрицательную автокорреляцию проводится по аналогичной схеме, причем зона, содержащая критический уровень, расположена симметрично справа от значения 2. Так как отрицательная автокорреляция встречается относительно редко, предполагается, что при необходимости границы зоны вычисляются на основе соответствующих значений для положительной автокорреляции при данном числе наблюдений и объясняющих переменных. Как показано на рис. 4, величина 4 –есть нижний предел, ниже которого признается отсутствие автокорреляции, а 4–d_L – верхний предел, выше которого делается вывод о наличии отрицательной автокорреляции.

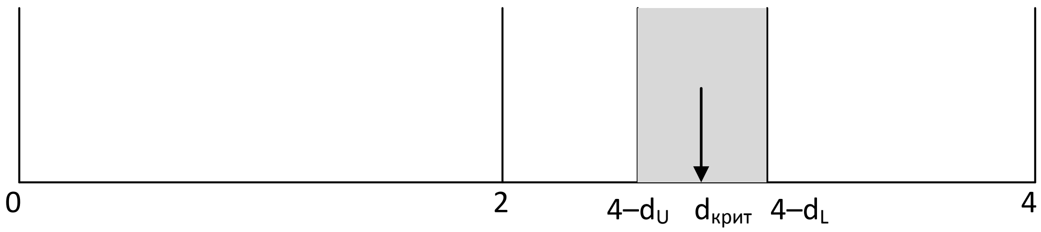

Рисунок 4 – Тест Дарбина-Уотсона на автокорреляцию: показана зона неопределенности в случае предполагаемой отрицательной автокорреляции

Нужно заметить, что низкое значение *d*-статистики не обязательно означает, что в модели присутствует автокорреляция первого порядка. Оно будет низким в любой ситуации, когда положительные отклонения чаще следуют за положительными, а отрицательные – за отрицательными, а это может быть вызвано ошибочной спецификацией модели. В частности, это часто случается, если в модели пропущена важная объясняющая переменная, либо если оценивается регрессия для неверной математической функции.

Задание 1. Обнаружение автокорреляции первого порядка

Проверьте остатки, полученные вами в модели на лабораторной работе №5, на автокорреляцию.

4-е условие Гаусса-Маркова: случайный член должен быть распределен независимо от объясняющих переменных

Заключительное условие Гаусса-Маркова может быть рассмотрено в двух формах – слабой и сильной. Сильная форма заключается в том, что объясняющая переменная должна быть нестохастической, т. е. не содержать случайных составляющих. Это в действительности весьма нереалистично для экономических переменных, и можно, в конечном счете, перейти к слабой форме этого условия, согласно которому объясняющие переменные могут содержать случайные компоненты, но они должны быть распределены независимо от случайного члена.

Если данное условие выполнено, теоретическая ковариация между объясняющей переменной и случайным членом равна нулю.

Задание 2. Проверка выполнения 4-го условия Гаусса-Маркова

Проверьте, выполняется ли данное условие. Постройте графики зависимости между случайным членом и объясняющими переменными.

Предположение о нормальности

Наряду с условиями Гаусса-Маркова обычно также предполагается нормальность распределения случайного члена. Дело в том, что если случайный член нормально распределен, то так же будут распределены и коэффициенты регрессии. Это условие необходимо, чтобы проводить проверку гипотез и определять доверительные интервалы для коэффициентов модели.

Проверить гипотезу о нормальном распределении позволяют различные статистические тесты. Один из них является тест Jarque-Bera (Жака-Бера).

Статистика Жака-Бера (JB) рассчитывается для проверки гипотезы о нормальном распределении значений переменной. Она измеряет степень различия между коэффициентами асимметрии и эксцесса полученными по изучаемой выборке и теми, которые соответствуют нормальному распределению. Статистика вычисляется по следующей формуле:

$$JB = \frac{n}{6}\left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4}\right),$$

где S – коэффициент асимметрии,

K – коэффициент эксцесса,

n – длина выборки.

Коэффициент асимметрии (S) показывает меру асимметрии распределения значений случайной величины относительно среднего. Он может быть рассчитан по формуле:

$$S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i - \bar{y}}{\hat{\sigma}}\right)^3,$$

где $\hat{\sigma}$ – стандартное отклонение.

Коэффициент асимметрии для симметричных распределений, в том числе и для нормального, равен нулю. Положительное значение показывает наличие длинного хвоста справа, отрицательное – слева.

Коэффициент эксцесса (K) определяет остроконечность или плоскость распределения. Его рассчитываю по формуле:

$$K = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i - \bar{y}}{\hat{\sigma}}\right)^4,$$

где где $\hat{\sigma}$ – стандартное отклонение.

Для нормального распределения значение этого коэффициента равно 3. Если рассчитанное значение превосходит 3, то распределение имеет более острую вершину относительно нормального, а если меньше 3, то распределение является более пологим.

Для того чтобы с помощью полученного коэффициента (JB) определить является ли закон распределения выбранной случайной величины нормальным принимаются две гипотезы:

H_0: случайная величина имеет нормальное распределение;

H_1: распределение случайной величины не нормальное.

Сама статистика Жака-Бера, рассчитанная по выборке, является случайной величиной распределенной как Хи-квадрат с двумя степенями свободы:

$$\chi^2(2): F\left(J\hat{B}\right) = 1 - e^{-0.5J\hat{B}},$$

где $J\hat{B}$ – значение статистики Жака-Бера, рассчитанное по выборке.

Затем нужно рассчитать вероятность того, что истинное значение статистики Жака-Бера (JB) превосходит (по абсолютному значению) расчетное значение ($J\hat{B}$). Малое значение вероятности приводит к тому, что нулевая гипотеза отвергается.

Значение этой вероятности (*Probability*) можно вычислить, используя функцию распределения Хи-квадрат с двумя степенями свободы:

$$Probability = P\left(JB > J\hat{B}\right) = 1 - F\left(J\hat{B}\right) = 1 - \left(1 - e^{-0.5J\hat{B}}\right) = e^{-0.5J\hat{B}}. \quad (3)$$

После нахождения значения вероятности по формуле (Б.6) нужно воспользоваться следующим правилом:

Если *Probability ≥ 0,05*, то нулевую гипотезу отвергать не следует и можно считать, что случайная величина распределена нормально.

Если *Probability < 0,05*, то нулевая гипотеза отвергается, т.е. рассматриваемая случайная величина не подчиняется нормальному закону распределения.

Задание 3. Проверка предположение о нормальности.

Проверьте, подчиняются ли остатки нормальному закону распределения.

Таблица – Статистика Дарбина-Уотсона: d_L и d_U, уровень значимости 5%

n	k = 1		k = 2		k = 3		k = 4		k = 5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79
39	1,43	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,49	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

n - число наблюдений, k - число объясняющих переменных (без учета постоянного члена).

Таблица – Статистика Дарбина-Уотсона: d_L и d_U, уровень значимости 1%

n	k = 1		k = 2		k = 3		k = 4		k = 5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	0,81	1,07	0,70	1,25	0,59	1,46	0,49	1,70	0,39	1,96
16	0,84	1,09	0,74	1,25	0,63	1,44	0,53	1,66	0,44	1,90
17	0,87	1,10	0,77	1,25	0,67	1,43	0,57	1,63	0,48	1,85
18	0,90	1,12	0,80	1,26	0,71	1,42	0,61	1,60	0,52	1,80
19	0,93	1,13	0,83	1,26	0,74	1,41	0,65	1,58	0,56	1,77
20	0,95	1,15	0,86	1,27	0,77	1,41	0,68	1,57	0,60	1,74
21	0,97	1,16	0,89	1,27	0,80	1,41	0,72	1,55	0,63	1,71
22	1,00	1,17	0,91	1,28	0,83	1,40	0,75	1,54	0,66	1,69
23	1,02	1,19	0,94	1,29	0,86	1,40	0,77	1,53	0,70	1,67
24	1,04	1,20	0,96	1,30	0,88	1,41	0,80	1,53	0,72	1,66
25	1,05	1,21	0,98	1,30	0,90	1,41	0,83	1,52	0,75	1,65
26	1,07	1,22	1,00	1,31	0,93	1,41	0,85	1,52	0,78	1,64
27	1,09	1,23	1,02	1,32	0,95	1,41	0,88	1,51	0,81	1,63
28	1,10	1,24	1,04	1,32	0,97	1,41	0,90	1,51	0,83	1,62
29	1,12	1,25	1,05	1,33	0,99	1,42	0,92	1,51	0,85	1,61
30	1,13	1,26	1,07	1,34	1,01	1,42	0,94	1,51	0,88	1,61
31	1,15	1,27	1,08	1,34	1,02	1,42	0,96	1,51	0,90	1,60
32	1,16	1,28	1,10	1,35	1,04	1,43	0,98	1,51	0,92	1,60
33	1,17	1,29	1,11	1,36	1,05	1,43	1,00	1,51	0,94	1,59
34	1,18	1,30	1,13	1,36	1,07	1,43	1,01	1,51	0,95	1,59
35	1,19	1,31	1,14	1,37	1,08	1,44	1,03	1,51	0,97	1,59
36	1,21	1,32	1,15	1,38	1,10	1,44	1,04	1,51	0,99	1,59
37	1,22	1,32	1,16	1,38	1,11	1,45	1,06	1,51	1,00	1,59
38	1,23	1,33	1,18	1,39	1,12	1,45	1,07	1,52	1,02	1,58
39	1,24	1,34	1,19	1,39	1,14	1,45	1,09	1,52	1,03	1,58
40	1,25	1,34	1,20	1,40	1,15	1,46	1,10	1,52	1,05	1,58
45	1,29	1,38	1,24	1,42	1,20	1,48	1,16	1,53	1,11	1,58
50	1,32	1,40	1,28	1,45	1,24	1,49	1,20	1,54	1,16	1,59
55	1,36	1,43	1,32	1,47	1,28	1,51	1,25	1,55	1,21	1,59
60	1,38	1,45	1,35	1,48	1,32	1,52	1,28	1,56	1,25	1,60
65	1,41	1,47	1,38	1,50	1,35	1,53	1,31	1,57	1,28	1,61
70	1,43	1,49	1,40	1,52	1,37	1,55	1,34	1,58	1,31	1,61
75	1,45	1,50	1,42	1,53	1,39	1,56	1,37	1,59	1,34	1,62
80	1,47	1,52	1,44	1,54	1,42	1,57	1,39	1,60	1,36	1,62
85	1,48	1,53	1,46	1,55	1,43	1,58	1,41	1,60	1,39	1,63
90	1,50	1,54	1,47	1,56	1,45	1,59	1,43	1,61	1,41	1,64
95	1,51	1,55	1,49	1,57	1,47	1,60	1,45	1,62	1,42	1,64
100	1,52	1,56	1,50	1,58	1,48	1,60	1,46	1,63	1,44	1,65

n - число наблюдений, k - число объясняющих переменных (без учета постоянного члена).