

$$\text{Corr}(x, y) = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{\text{Var}(x) \cdot \text{Var}(y)}}$$

## Эконометрическое моделирование

### Лабораторная работа № 10

Анализ временных рядов с периодической компонентой



## **Оглавление**

<b>Анализ модели с аддитивной компонентой.....</b>	<b>3</b>
Задание 1. Анализ модели с аддитивной компонентой. ....	7
<b>Анализ модели с мультипликативной компонентой .....</b>	<b>7</b>
Задание 2. Прогнозирование на основе моделей с периодической компонентой	
11	

Для анализа временных рядов с периодической компонентой в экономических исследованиях применяются различные методы и модели. Модели с аддитивной компонентой применяются в том случае, когда амплитуду колебаний уровней ряда относительно тренда можно считать постоянной. Если амплитуда, например, возрастает, то применяется модель с мультипликативной компонентой.

### **Анализ модели с аддитивной компонентой.**

#### **Общие этапы построения модели с аддитивной компонентой**

##### *Этап 1. Анализ данных*

Построение графика на основе исходных данных.

Визуальный анализ данных и вывод о необходимости использовать модель с аддитивной компонентой.

##### *Этап 2. Расчет сезонной компоненты*

Расчет скользящей средней с поквартальным шагом 4.

Центрирование скользящей средней.

Определение сезонной компоненты путем вычитания из уровней ряда значений центрированной скользящей средней за соответствующий момент времени.

Расчет средних значений сезонных компонент по кварталам.

Корректировка средних значений сезонной компоненты (сумма средних значений сезонных компонент должна быть равна 0).

##### *Этап 3. Определение тренда*

Десезонализация данных путем вычитания из фактических значений уровней ряда скорректированных средних значений сезонной компоненты за соответствующий квартал.

Построение модели тренда на основе десезонализированных данных методом наименьших квадратов.

##### *Этап 4. Проверка качества модели и расчет ошибок*

##### *Этап 5. Прогнозирование с учетом сезонной компоненты*

Расчет прогнозных значений на основе модели тренда.

Корректировка прогнозных значений с использованием скорректированных значений сезонной компоненты.

#### *Пример.*

В таблице приведены данные по кварталам 2001-2003 гг. по ВВП некоторой страны.

Год	Квартал	ВВП, млн. евро
2001	I	26,453
	II	26,971
	III	27,062
	IV	27,543
2002	I	28,536
	II	28,776
	III	28,915
	IV	29,519

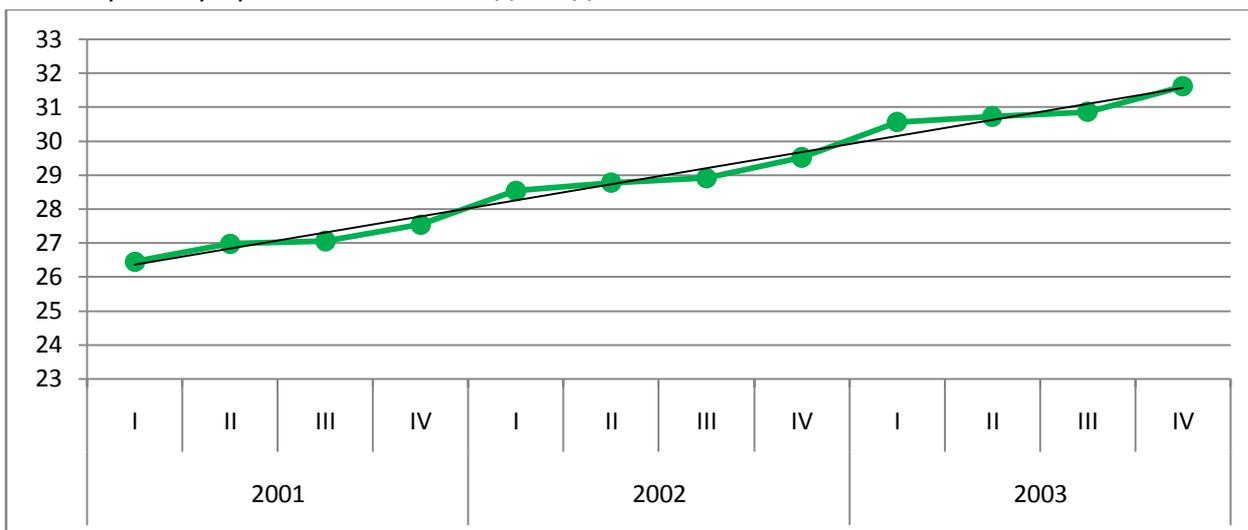
2003	I	30,556
	II	30,722
	III	30,856
	IV	31,612

Требуется построить прогноз объема ВВП на 2004 год.

*Решение*

*Этап 1. Анализ данных*

Строим график на основе исходных данных:



В результате визуального анализа графика делаем вывод о возможности использования аддитивной модели, так как размах вариаций фактических значений относительно линии тренда не меняется, то есть характер периодических колебаний относительно тренда примерно одинаков в течение анализируемого периода времени.

Величину  $Y$  (ВВП) можно представить как  $Y = T + S + E$ . Где  $T$  – тренд,  $S$  – сезонная компонента,  $E$  – случайная компонента.

*Этап 2. Расчет сезонной компоненты*

Рассчитаем скользящую среднюю с шагом 4.

Центрируем скользящую среднюю. (Как это делать мы рассматривали в предыдущей лабораторной работе).

Определяем сезонную компоненту путем вычитания из уровней ряда значений центрированной скользящей средней за соответствующий момент времени.

Результаты расчетов приведены в таблице:

Год	Квартал	ВВП, млн. евро	$\overline{Y}_{N=4}$	$\overline{Y}_{N=4}^*$	S
2001	I	26,453			
	II	26,971			
			27,007		
	III	27,062		27,628	-0,206
			27,528		
	IV	27,543		27,754	-0,211
			27,979		
2002	I	28,536		28,211	0,325
			28,443		

Лабораторная работа № 10. Анализ временных рядов с периодической компонентой

	II	28,776		28,690	0,086
			28,937		
	III	28,915		29,189	-0,274
			29,442		
	IV	29,519		29,685	-0,166
			29,928		
2003	I	30,556		30,171	0,385
			30,413		
	II	30,722		30,675	0,047
			30,937		
	III	30,856			
	IV	31,612			

Производим расчет средних значений сезонных компонент по кварталам.

$$S_I = (0,325 + 0,385)/2 = 0,355$$

$$S_{II} = 0,067$$

$$S_{III} = -0,240$$

$$S_{IV} = -0,188$$

Сумма средних значений сезонной компоненты за 4 квартала должна быть равна 0.

Корректируем средние значения сезонной компоненты, так как сумма их по кварталам не равна 0, а равна -0,006. Поэтому прибавляем к двум отрицательным по 0,03.

	$S_{ср}$		$S_{скорр}$
I квартал	0,355		0,355
II квартал	0,067		0,067
III квартал	-0,240	0,003	-0,237
IV квартал	-0,188	0,003	-0,185
Сумма	-0,006		0

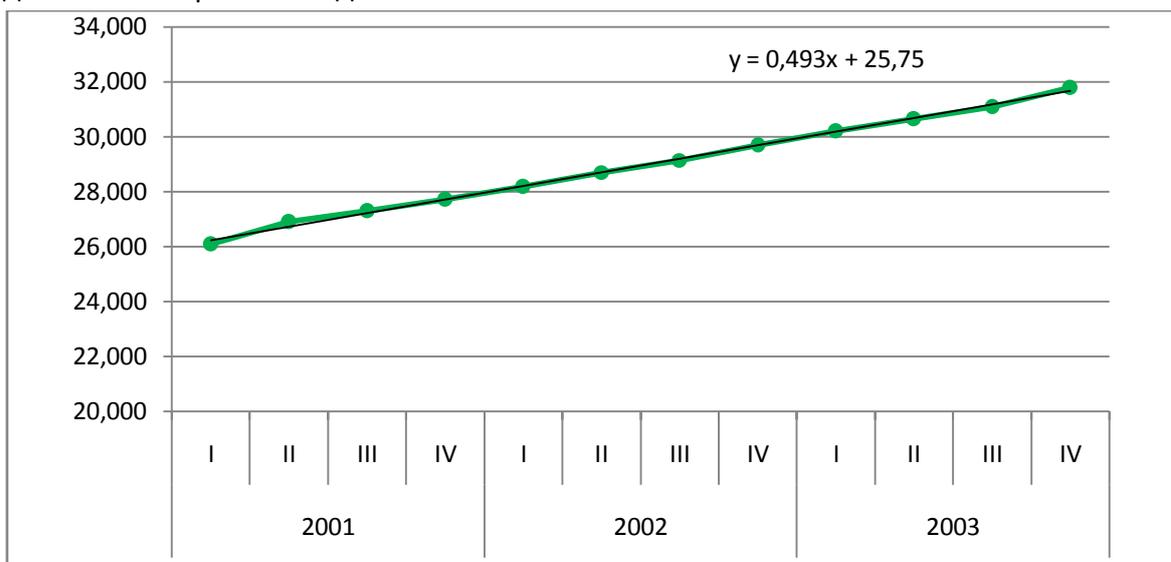
### Этап 3. Определение тренда

#### 3.1 Десезонализация данных

От всех уровней ряда отнимаем соответствующее значение скорректированной сезонной компоненты и получаем значения, содержащие тренд и случайную компоненту.

Год	Квартал	ВВП, млн. евро	$S_{скорр}$	T + E
2001	I	26,453	0,355	26,098
	II	26,971	0,067	26,904
	III	27,062	-0,237	27,299
	IV	27,543	-0,185	27,728
2002	I	28,536	0,355	28,181
	II	28,776	0,067	28,709
	III	28,915	-0,237	29,152
	IV	29,519	-0,185	29,704
2003	I	30,556	0,355	30,201
	II	30,722	0,067	30,655
	III	30,856	-0,237	31,093
	IV	31,612	-0,185	31,797

3.2 Построим модель тренда методом наименьших квадратов на основе десеզонализированных данных объема ВВП.



#### 4 Этап. Определение ошибки

Рассчитаем ошибки по формуле  $E = Y - S - T$ .

Год	Квартал	ВВП, млн. евро	$S_{\text{сюрр}}$	$Y^{\text{п}}$	Ошибка E
2001	I	26,453	0,355	$0,493 \cdot 1 + 25,75 = 26,243$	$26,453 - 26,243 = -0,145$
	II	26,971	0,067	26,736	0,168
	III	27,062	-0,237	27,229	0,070
	IV	27,543	-0,185	27,722	0,006
2002	I	28,536	0,355	28,215	-0,034
	II	28,776	0,067	28,708	0,001
	III	28,915	-0,237	29,201	-0,049
	IV	29,519	-0,185	29,694	0,010
2003	I	30,556	0,355	30,187	0,014
	II	30,722	0,067	30,680	-0,025
	III	30,856	-0,237	31,173	-0,080
	IV	31,612	-0,185	31,666	0,131
	Среднее	28,96		Среднее по модулю	0,06

Среднее значение ошибки по модулю равно 0,06. Это достаточно хороший показатель.

Если сравнить ошибку со средним значением уровня ряда, то она около 0,2%. ( $0,06/28,96 \cdot 100\% = 0,2$ )

Модель пригодна для прогнозирования.

#### Этап 5. Построение прогноза с учетом сезонных колебаний

5.1 Прогнозирование на основе тренда

$$Y^{\text{п}}_{\text{I},2004} = 25,75 + 0,493 \cdot 13 = 32,16$$

$$Y^{\text{п}}_{\text{II},2004} = 25,75 + 0,493 \cdot 14 = 32,65$$

$$Y^{\text{п}}_{\text{III},2004} = 25,75 + 0,493 \cdot 15 = 33,15$$

$$Y^{\text{п}}_{\text{IV},2004} = 25,75 + 0,493 \cdot 16 = 33,64$$

5.2 Скорректируем прогноз  $y$  учетом фактора сезонности:

$$Y^{\text{пр-скор}}_{I,2004} = 32,16 + 0,355 = 32,514$$

$$Y^{\text{пр-скор}}_{II,2004} = 32,65 + 0,067 = 32,719$$

$$Y^{\text{пр-скор}}_{III,2004} = 33,15 - 0,237 = 32,908$$

$$Y^{\text{пр-скор}}_{IV,2004} = 33,64 - 0,185 = 33,453$$

### Задание 1. Анализ модели с аддитивной компонентой.

В таблице приведены данные по кварталам 2009-2013 гг. по ВВП России.

2009	I квартал	8 547,0
	II квартал	9 090,1
	III квартал	10 020,5
	IV квартал	10 391,0
2010	I квартал	8 894,9
	II квартал	9 544,6
	III квартал	10 403,9
	IV квартал	10 918,8
2011	I квартал	9 186,1
	II квартал	9 859,0
	III квартал	10 930,5
	IV квартал	11 482,2
2012	I квартал	9 633,7
	II квартал	10 278,2
	III квартал	11 260,2
	IV квартал	11 710,0
2013	I квартал	9 714,6
	II квартал	10 376,4
	III квартал	11 410,3
	IV квартал	11 946,2
2014	I квартал	9 797,3
	II квартал	10 458,1
	III квартал	
	IV квартал	

Требуется построить прогноз объема ВВП на 2014 год. Для расчетов используйте данные за 2009-2013. Полученный прогноз сравните с фактическими данными за 2014 год.

### Анализ модели с мультипликативной компонентой

Общие этапы построения этой модели сходны с этапами построения аддитивной модели.

#### Этап 1. Анализ данных

Построение графика на основе исходных данных.

Визуальный анализ данных и вывод о необходимости использовать модель с мультипликативной компонентой.

#### Этап 2. Расчет сезонной компоненты

*Лабораторная работа № 10. Анализ временных рядов с периодической компонентой*

Расчет скользящей средней с поквартальным шагом 4.

Центрирование скользящей средней.

Определение *коэффициентов сезонности* путем *деления* уровней ряда на значение центрированной скользящей средней за соответствующий момент времени.

Расчет средних значений *коэффициентов сезонности* по кварталам.

Корректировка средних значений *коэффициентов сезонности*.

*Этап 3. Определение тренда*

Десезонализация данных путем деления фактических значений уровней ряда на скорректированные *коэффициентов сезонности* за соответствующий квартал.

Построение модели тренда на основе десезонализированных данных методом наименьших квадратов.

*Этап 4. Проверка качества модели и расчет ошибок*

Расчет ошибок можно производить по формуле:

$$E = \frac{Y}{T \cdot S}$$

*Этап 5. Прогнозирование с учетом сезонной компоненты*

Расчет прогнозных значений на основе модели тренда.

Корректировка прогнозных значений с использованием *коэффициентов сезонности*.

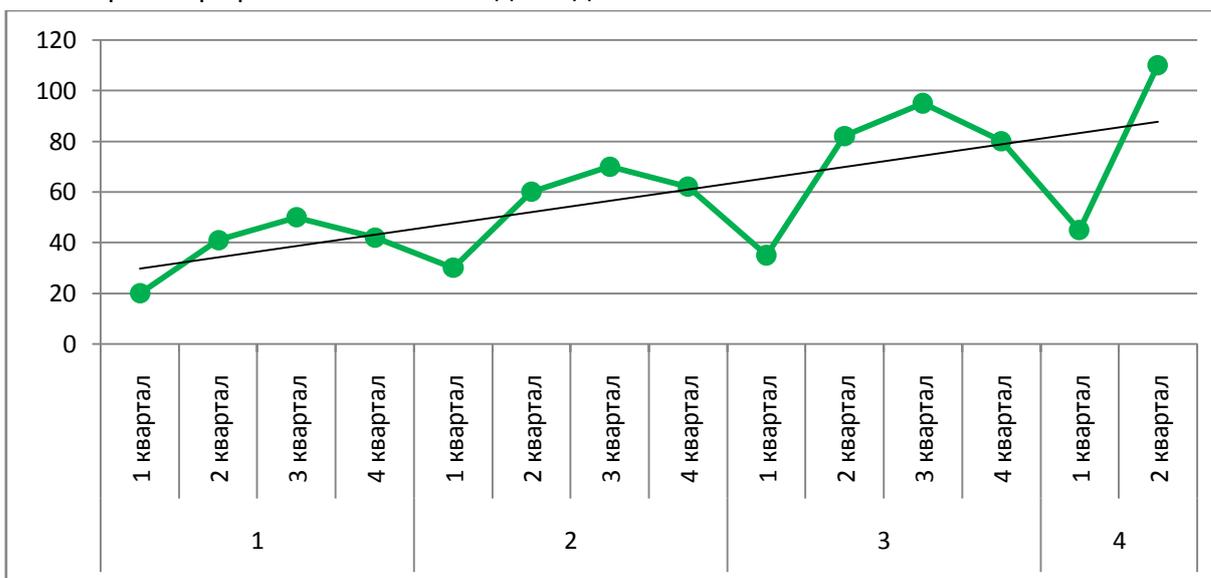
*Пример.*

Получены данные:

Годы	1				2				3				4	
Кварталы	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
Объем продаж	20	41	50	42	30	60	70	62	35	82	95	80	45	110

*Этап 1. Анализ данных*

Строим график на основе исходных данных:



*Лабораторная работа № 10. Анализ временных рядов с периодической компонентой*

В результате визуального анализа графика делаем вывод о возможности использования мультипликативной модели, так как размах вариаций фактических значений относительно линии тренда постоянно возрастает.

Величину  $Y$  (ВВП) можно представить как  $Y = T * S * E$ . Где  $T$  – тренд,  $S$  – коэффициент сезонности,  $E$  – случайная компонента.

*Этап 2. Расчет сезонной компоненты*

Процедура этого этапа включает:

Расчет скользящей средней с поквартальным шагом 4.

Центрирование скользящей средней.

Определение *коэффициентов сезонности* путем *деления* уровней ряда на значение центрированной скользящей средней за соответствующий момент времени.

Расчет средних значений *коэффициентов сезонности* по кварталам.

Корректировка средних значений *коэффициентов сезонности*.

Результаты расчетов приведены в таблице:

Кварталы	Номер квартала	Объем продаж	Скользящая средняя за 4 квартала	Центрированная скользящая средняя	Коэффициент сезонности
1 квартал	1	20			
2 квартал	2	41			
			38,25		
3 квартал	3	50		39,5	1,266
			40,75		
4 квартал	4	42		43,125	0,974
			45,5		
1 квартал	5	30		48	0,625
			50,5		
2 квартал	6	60		53	1,132
			55,5		
3 квартал	7	70		56,125	1,247
			56,75		
4 квартал	8	62		59,5	1,042
			62,25		
1 квартал	9	35		65,375	0,535
			68,5		
2 квартал	10	82		70,75	1,159
			73		
3 квартал	11	95		74,25	1,279
			75,5		
4 квартал	12	80		79	1,013
			82,5		
1 квартал	13	45			
2 квартал	14	110			

Далее определяется среднее значение сезонной компоненты по кварталам и проводится их корректировка. Среднее значение для каждого квартала вычисляется на

*Лабораторная работа № 10. Анализ временных рядов с периодической компонентой*

основе фактически имеющихся данных по одноименным кварталам по рассматриваемым годам.

Сумма оценок сезонной компоненты должна равняться 4.

Если сумма не равна 4, то производится корректировка сезонной компоненты.

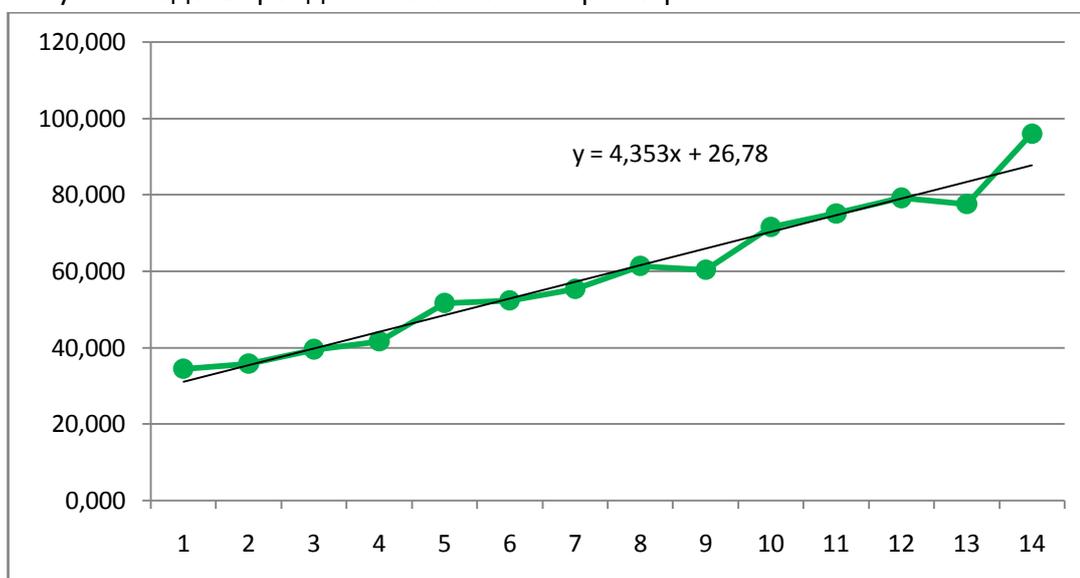
Результаты расчетов приведены в таблице:

Год	Квартал			
	1	2	3	4
1	-	-	1,266	0,974
2	0,625	1,132	1,247	1,042
3	0,535	1,159	1,279	1,013
Итого	1,16	2,291	3,792	3,029
Оценка сезонной компоненты	=1,16/2=0,58	1,146	1,264	1,010
Сумма сезонных компонент	3,999			
Скорректированная сезонная компонента	0,58	1,146	1,264	1,010
Сумма скорректированных сезонных компонент	4			

*Этап 3. Определение тренда*

На этом этапе проводится десезонализация данных путем деления фактических значений уровня ряда на скорректированные коэффициенты сезонности по кварталам. Таким образом, получают значения, содержащие тренд и случайную компоненту:  $Y/S = T * E$ .

Получим модель тренда с численными параметрами.



*Этап 4. Определение качества модели. Расчет ошибок*

О качестве модели можно судить по ошибкам. Рассчитываем их по формуле:  $E = Y/TS$

Номер квартала	Объем продаж	S	Y/S	Трендовое значение	T*S	E
1	20	0,580	34,470	31,1401	18,06775	1,106945
2	41	1,146	35,786	35,4932	40,66486	1,008242
3	50	1,264	39,557	39,8463	50,36572	0,992739
4	42	1,010	41,589	44,1994	44,63587	0,940947

Лабораторная работа № 10. Анализ временных рядов с периодической компонентой

5	30	0,580	51,706	48,5525	28,17057	1,064941
6	60	1,146	52,369	52,9056	60,61439	0,989864
7	70	1,264	55,380	57,2587	72,375	0,967185
8	62	1,010	61,394	61,6118	62,22022	0,996461
9	35	0,580	60,323	65,9649	38,27338	0,914474
10	82	1,146	71,571	70,318	80,56392	1,017825
11	95	1,264	75,158	74,6711	94,38427	1,006524
12	80	1,010	79,218	79,0242	79,80456	1,002449
13	45	0,580	77,558	83,3773	48,3762	0,930209
14	110	1,146	96,010	87,7304	100,5135	1,094381

Значения ошибок относительно невелики и составляют в среднем 2% от объема продаж, это говорит о том, что модель можно использовать для прогнозирования.

**Этап 5. Построение прогноза с учетом сезонных колебаний**

Здесь осуществляется расчет прогноза на 3 квартал по модели тренда с последующей корректировкой прогноза на сезонную компоненту.

Рассчитаем прогноз на 3 квартал по модели тренда. Порядковый номер квартала 3 ан 4 год равен 15, тогда прогноз объема продаж по уравнению тренда будет следующим:

$$T = 26,787 + 4,3531 * 15 = 92,0835.$$

Скорректируем это значение с учетом фактора сезонности:

$$Y_{4 \text{ год } 3 \text{ кв скор}} = 92,0835 * 1,264 = 116,393544.$$

Однако следует помнить, что чем больше период упреждения, тем меньше степень обоснованности прогноза.

**Задание 2. Прогнозирование на основе моделей с периодической компонентой**

На основе данных, соответствующих вашему варианту:

- Проанализируйте имеющиеся данные,
- Выберите модель для расчета прогноза, обосновав свой выбор,
- Сделайте прогноз на указанный период.

**Вариант 1.**

**Задание 2.1**

Год	1				2				3				4	
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
Объем продаж	20	41	50	42	45	60	70	62	68	96	112	122	120	154

Используя модель с периодической компонентой построить прогноз на 3 и 4 кварталы 4 года.

**Задание 2.2**

Год	1				2				3				4	
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
Объем продаж	11	35	47	35	20	59	70	60	30	85	100	80	40	120

Спрогнозировать продажи на следующие два квартала с учетом сезонных колебаний.

**Вариант 2.**

**Задание 2.1**

Год	1	2				3				4				5	
Квартал	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
Объем продаж	2	6	7	6,5	9	10,5	13,5	14	13	16	17	16,5	17	19	20

Построить прогноз на 4 квартал 5 года.

**Задание 2.2**

Год	1				2				3				4	
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
Объем продаж	1	3	4	3,2	1,8	5	6	5,2	2,5	7,2	8,5	7	3,5	10

Спрогнозировать продажи на следующие 2 квартала с учетом сезонных колебаний.

**Вариант 3.**

**Задание 2.1**

Год	1				2				3			
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Объем продаж	30	50	60	52	40	70	80	71	45	90	105	80

Используя модель с периодической компонентой построить прогноз все кварталы следующего года.

**Задание 2.2**

Год	1				2				3			
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Объем продаж	45	33	52	60	55	44	60	72	70	60	80	85

Спрогнозировать продажи на следующий год с учетом сезонных колебаний.

**Вариант 4.**

**Задание 2.1**

Год	1				2				3				4	
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
Объем продаж	47	32	45	52	47	40	50	56	54	52	60	64	62	68

Используя модель с периодической компонентой построить прогноз на 3 и 4 кварталы 4 года.

**Задание 2.2**

Год	1				2				3			
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Объем продаж	41	36	46	52	47	41	50	56	54	50	60	65

Спрогнозировать продажи на следующий год с учетом сезонных колебаний.

**Вариант 5.**

**Задание 2.1**

Год	1				2				3				4	
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
Объем продаж	20	41	50	42	30	60	70	62	35	82	95	80	45	110

Используя модель с периодической компонентой построить прогноз на 3 и 4 кварталы 4 года.

**Задание 2.2**

Год	1				2				3			
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Объем продаж	46	30	50	61	56	44	60	72	70	60	80	88

Спрогнозировать продажи на следующий год с учетом сезонных колебаний.

**Вариант 6.**

**Задание 2.1**

Год	1				2				3				4	
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
Объем продаж	20	40	50	45	30	60	70	60	37	85	95	80	45	110

Используя модель с периодической компонентой построить прогноз на 3 и 4 кварталы 4 года.

**Задание 2.2**

Год	1				2				3			
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Объем продаж	42	34	45	51	47	41	51	57	55	51	62	66

Спрогнозировать продажи на следующий год с учетом сезонных колебаний.

**Вариант 7.**

**Задание 2.1**

Год	1				2				3				4	
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
Объем продаж	30	50	60	52	40	70	80	71	45	90	105	80	50	115

Используя модель с периодической компонентой построить прогноз на 3 и 4 кварталы 4 года.

**Задание 2.2**

Год	1				2				3			
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Объем продаж	3	5	5	6	5	7	7	8	7	8	9	11

Спрогнозировать продажи на следующий год с учетом сезонных колебаний.

**Вариант 8.**

**Задание 2.1**

Год	1				2				3				4	
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
Объем продаж	10	30	38	30	15	50	60	47	22	68	80	57	22	90

Используя модель с периодической компонентой построить прогноз на 3 и 4 кварталы 4 года.

**Задание 2.2**

Год	1				2				3			
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Объем продаж	42	34	45	51	47	41	51	57	55	51	62	66

Спрогнозировать продажи на следующий год с учетом сезонных колебаний.

**Вариант 9.**

**Задание 2.1**

Год	1				2				3			
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Объем продаж	95	65	62	62	62	62	40	48	62	56	50	48

Спрогнозировать продажи на следующий год с учетом сезонных колебаний.

**Задание 2.2**

Год	1				2				3			
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Объем продаж	2	4	5	4,2	2,8	6	7	6,2	3,5	8,2	9,5	8

Спрогнозировать продажи на следующий год с учетом сезонных колебаний.

**Вариант 10.**

**Задание 2.1**

Год	1				2				3			
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Объем продаж	3	5	5	6	5	7	7	8	7	8	9	11

Спрогнозировать продажи на следующий год с учетом сезонных колебаний.

**Задание 2.2**

Год	1				2				3				4	
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
Объем продаж	23	40	53	43	30	60	70	62	35	85	95	80	45	110

Используя модель с периодической компонентой построить прогноз на 3 и 4 кварталы 4 года.