Министерство образования Российской Федерации
Томский политехнический университет
Кафедра теоретической и экспериментальной физики

Макиенко А.В.

АТОМНАЯ ФИЗИКА

Практикум по решению задач

Томск 2003

УДК 53. 075
Макиенко А.В. Атомная физика. Практикум по решению задач. – Томск: Изд-во ТПУ, 2003. – 81 с.

Практикум является результатом многолетней работы по преподаванию курса ″Атомная физика″ студентам физико-технического факультета ТПУ и содержит 9 практических занятий. Задачи сгруппированы по темам и выделены в отдельные практические занятия, каждое из которых содержит контрольные вопросы, необходимые формулы, примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения. Для закрепления навыков, полученных на практических занятиях, студентам предлагаются варианты индивидуальных домашних заданий. В работе имеется справочный материал: сводка фундаментальных констант, справочные таблицы.
В основу практикума положены переработанные задачи из учебного пособия: Иродов И.Е. ″Сборник задач по атомной и ядерной физике″.
Практикум подготовлен на кафедре теоретической и экспериментальной физики ЕНМФ ТПУ и предназначен для студентов, изучающих курс «Атомная физика».

Печатается по постановлению Редакционно-издательского Совета Томского политехнического университета.

Рецензенты:
Горчаков Л.В., проф., д - р ф.-м. н., ТГУ
Чернявский Б.Г., доц., к.. ф.-т. н., ТГПУ

© Томский политехнический университет, 2003
© Макиенко А.В., 2003

Практическое занятие №1

Тема: Электростатическая модель атома по Томсону, ядерная модель атома Резерфорда. Оценка размеров атомов и ядер.

Контрольные вопросы:

1. Какое взаимодействие является основным внутри атома?
2. Что Вы знаете об электромагнитном взаимодействии? Как можно определить электрическое поле неподвижного заряда?
3. Основной результат опытов Резерфорда по рассеянию α-частиц на ядрах атомов.

Основные формулы

● $\mathbf{I} = |\mathbf{A}_{0\text{-}\infty}|_{\min}$ - энергия ионизации атома, равная минимальной работе, затраченной на вырывание электрона из атома.

● $|\mathbf{A}_{0\text{-}\infty}|_{\min} = \int_0^\infty eEdr$, где $\vec{E}$ - напряженность поля, создаваемого положительным зарядом, равномерно распределенным в атоме (модель Томсона).

● $\omega = \dfrac{e}{\sqrt{mR_a^3}}$ - формула Томсона для частоты излучения или поглощения атома.

Примеры решения задач

Пример 1.1. Исходя из томсоновской модели атома, определить радиус атома водорода, энергия ионизации которого равна 13.6 Эв.

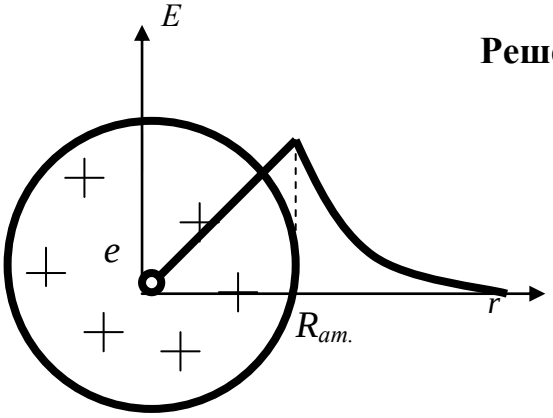


Рис. 1

Решение

По модели Томсона атом представляет собой шар, внутри которого равномерно распределен положительный заряд, а электроны вкраплены в него. Для атома водорода $q = |e|$, электрон находится в центре атома.

Энергия ионизации это энергия, которую необходимо затратить, чтобы вырвать электрон из атома и равна она работе, совершаемой при перемещении электрона в электростатическом поле из центра атома в бесконечность.

$$I_i = |A_{0-\infty}| = \int_0^{R_a} eE_1 dr + \int_{R_a}^{\infty} eE_2 dr,$$

где E_1 – напряженность поля, создаваемого положительным зарядом внутри атома;
E_2 – напряженность поля, создаваемого положительным зарядом вне атома.
E_1 и E_2 можно найти по теореме Гаусса:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = 4\pi \int \rho_q dV.^{*)}$$

Тогда внутри атома по теореме Гаусса получим уравнение:

$$E_1(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \rho_q V,$$

где $\rho_q = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R_a^3}$; $V = 4/3\pi r^3$ – объем, ограниченный Гауссовой поверхностью. Решив это уравнение, найдем $E_1(r)$:

$$E_1(r) = \frac{e}{R_a^3} r.$$

Аналогично найдем $E_2(r)$:

$$E_2(r) = \frac{e}{r^2}.$$

Подставим полученные выражения для E_1 и E_2 в формулу для работы:

$$A_{0\to\infty} = \int_0^{R_a} \frac{e^2}{R_a^3} r dr + \int_{R_a}^{\infty} e^2 \frac{dr}{r^2} = \frac{3}{2}\frac{e^2}{R_a}.$$

Из уравнения $\frac{3}{2}\frac{e^2}{R_a} = I$ получим, что $R_a \approx 1.6 \cdot 10^{-8}$ см.

Пример 1.2 На какое минимальное расстояние приблизится α-частица с кинетической энергией T = 40 кэВ**.** (при лобовом соударении) к покоящемуся ядру атома свинца.

---

*) Все формулы, связанные с кулоновским взаимодействием записаны в Гауссовой системе единиц.

Решение

Так как α-частица и ядро атома свинца положительные частицы, то энергия их взаимодействия будет иметь вид, представленный на рисунке 2 (в пространстве атома преобладает электромагнитное взаимодействие).

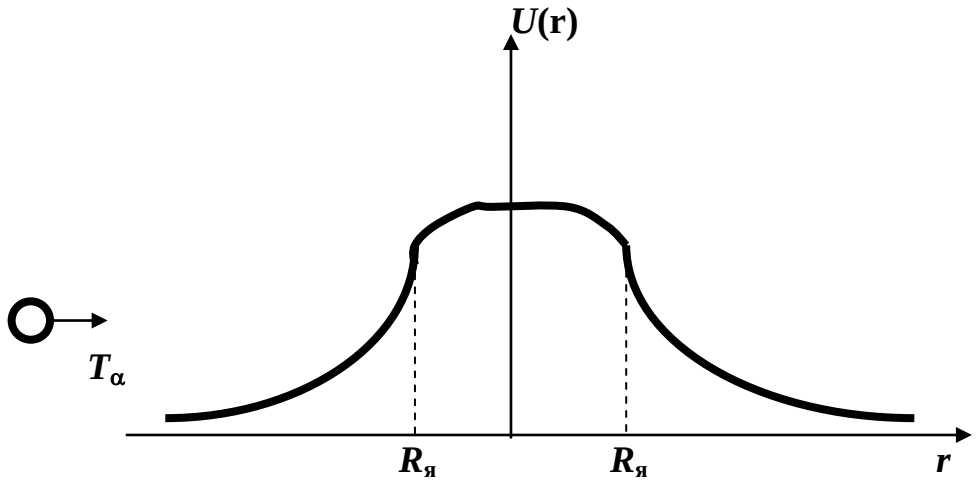


Рис.2

Таким образом для приближения α-частицы к ядру существует потенциальный барьер. Условие отражения α-частицы от ядра атома свинца будет иметь вид:

$$T_\alpha \le U_{\max} \approx \frac{3}{2}\frac{q_1 q_2}{r_{\min}},$$

где $q_1 = 2e$ – заряд α-частицы, $q_2 = 82e$ – заряд ядра свинца.

Из формулы получим: $r_{\min} \approx R_я \approx 9.6 \cdot 10^{-10}$ см.

Задачи для самостоятельного решения

1. Оценить максимальную энергию, которую приобрела бы α-частица, вылетев из атома урана, если бы положительный заряд атома был распределен по всему его объему (модель Томсона). Радиус атома

принять равным 10^{-8} см. Экранирующим действием атомных электронов пренебречь.

2. Исходя из томсоновской модели атома, найти зависимость частоты колебаний электрона в атоме водорода от радиуса атома. При каком значении $R_{ат.}$ длина волны испускаемого света равна 0.6 мкм?

3. Резерфорд наблюдал, что при лобовом соударении α-частиц энергией 15.2 МэВ с ядрами золота они отлетают назад с энергией 13.9 МэВ. Определить отношение масс ядра золота и α-частиц.

Практическое занятие №2

Тема: Классическое резерфордовское рассеяние атомных частиц на ядрах. Импульсная диаграмма рассеяния. Дифференциальное сечение рассеяния.

Контрольные вопросы:

1. Что называется прицельным параметром?
2. В каких случаях формула, связывающая угол рассеяния θ и прицельный параметр b не будет работать?
3. Что Вы можете сказать об импульсах взаимодействующих частиц для резерфордовского рассеяния в системе центра масс (Ц – системе)?
4. Порядок построения импульсной диаграммы для упругого рассеяния частицы массой m_1 на первоначально покоящейся частице массой m_2.
5. Что такое дифференциальное сечение рассеяния?

Основные формулы

- $tg\frac{\tilde{\theta}}{2}=\frac{q_1 q_2}{2b\tilde{T}_{10}}$ - связь между углом рассеяния $\tilde{\theta}$ и прицельным параметром b в Ц – системе, где $\tilde{T}_{10}$ - кинетическая энергия налетающей частицы в Ц – системе (в случае, если вторая частица первоначально покоилась); q_1, q_2 - заряды взаимодействующих частиц.

- $\tilde{T}_{10}=\frac{m_2}{m_1+m_2}T_{10}$ - связь кинетической энергии налетающей частицы в Ц – системе и лабораторной (Л – системе) в случае, если вторая частица первоначально покоилась.

- $\tilde{T}=\frac{\mu\upsilon_{\text{îòí}}^2}{2}$ - суммарная кинетическая энергия взаимодействующих частиц в Ц – системе.

$\mu=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ - приведенная масса частиц;

$\upsilon_{отн.}$ - относительная скорость частиц.

- $\widetilde{P}_{10} = \frac{m_2}{m_1+m_2} P_{10}$ — связь импульса налетающей частицы в Ц - системе и Л – системе в случае, если вторая частица первоначально покоилась.

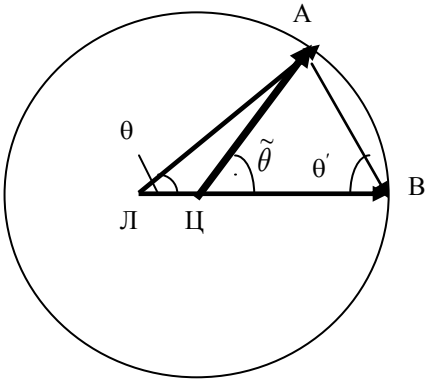
- $d\sigma = (\frac{q_1 q_2}{4T_0})^2 \frac{2\pi \sin\theta \, d\theta}{\sin^4 \theta/2}$ - формула Резерфорда для дифференциального сечения рассеяния в Л – системе.

- $d\widetilde{\sigma} = (\frac{q_1 q_2}{4\widetilde{T}_0})^2 \frac{2\pi \sin\widetilde{\theta} \, d\widetilde{\theta}}{\sin^4 \widetilde{\theta}/2}$ - формула Резерфорда для дифференциального сечения рассеяния в Ц – системе.

Примеры решения задач

Пример 2.1. В результате упругого рассеяния протона с кинетической энергией T = 13 кэВ в кулоновском поле первоначально покоящегося ядра гелия $^4He_2$ последнее испытало отдачу под углом $\theta' = 60^0$ к направлению движения налетающего протона. Вычислить прицельный параметр.

Решение



Импульсная диаграмма рассеяния

$$H_1^1 \rightarrow He_2^4$$

$$ЛВ \rightarrow P_{10}$$

$$ЛА \rightarrow P_{1\infty}$$

$$ЦВ \rightarrow \widetilde{P}_{10}$$

$$ЦА \rightarrow \widetilde{P}_{1\infty}$$

$$АВ \rightarrow \Delta P_1 = \Delta \widetilde{P}_1 = -P_{2\infty}$$

Прицельный параметр b можно найти из формулы

$$tg\frac{\widetilde{\theta}}{2} = \frac{q_1 q_2}{2b\widetilde{T}_{10}},$$

$$b = \frac{q_1 q_2}{2\tilde{T}_{10}} ctg\tilde{\theta}/2 \cdot$$

Так как $\tilde{\theta}$ и $\tilde{T}$ это параметры в Ц - системе, необходимо перейти в Л – систему:

$$\tilde{T}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_{10} = \tfrac{4}{5} T_{10}.$$

Связь угла рассеяния $\tilde{\theta}$ и угла отдачи ядра гелия θ' находится из импульсной диаграммы рассеяния. Из треугольника ЦАВ видно, что

$$\tilde{\theta} = \theta' = 60^0.$$

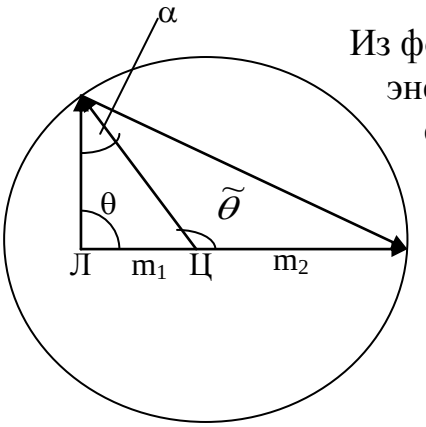
Следовательно

$$b = \frac{2e^2 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot T_{10}} \cdot ctg30^0 \approx 2.4 \cdot 10^{-11} \text{см.}$$

Пример 2.2. Дейтон с прицельным параметром b = 2.5 · 10^{-11} см упруго рассеялся под прямым углом в кулоновском поле первоначально покоившегося ядра гелия He_2^4. Найти относительную скорость частиц после рассеяния.

Решение

$$H_1^2 \rightarrow He_2^4$$



Из формулы для суммарной кинетической энергии взаимодействующих частиц в Ц-системе, получим:

$$\tilde{T} = \frac{\mu \upsilon_{\hat{i}\grave{o}\acute{i}}^2}{2} \Rightarrow \upsilon_{\hat{i}\grave{o}\acute{i}} = \sqrt{\frac{2\tilde{T}}{\mu}},$$

где $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} = \frac{4}{3}$.

Импульсная диаграмма рассеяния.

$\widetilde{T}$ найдем из формулы, связывающей угол рассеяния и прицельный параметр.

$$tg\widetilde{\theta}/2 = \frac{q_1 q_2}{2b\widetilde{T}_{10}} \Rightarrow \widetilde{T}_{10} = \widetilde{T} = \frac{q_1 q_2}{2b} ctg\widetilde{\theta}/2.$$

Угол рассеяния в Ц - системе найдем из импульсной диаграммы. Из геометрии видно, что

$$sin\alpha = \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^0.$$

$$\widetilde{\theta} = 180 - 60 = 120^0.$$

Следовательно

$$\upsilon_{отн} = \sqrt{\frac{2q_1 q_2}{2b\mu} ctg60^0} \approx 0.7 \cdot 10^8 \text{ см/с.}$$

(здесь $q_1 = e$, $q_2 = 2e$, $e = 4.8 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЕ, $\mu = 4/3\ 1.66 \cdot 10^{-24}$ г)

Пример 2.3. Найти вероятность того, что пучок α-частиц с кинетической энергией 1 МэВ при прохождении золотой фольги толщиной 3 мкм рассеится в интервале углов 60^0 - 180^0.

Решение

$$He_2^4 \rightarrow Au_{79}^{197}$$

$$(m_1 = 4a.e.ì\ ; q_1 = 2e; m_2 = 197a.e.ì\ ; q_2 = 79e)$$

Вероятность рассеяния в интервале углов от θ до $\theta + d\theta$ определим по формуле:

$$\frac{dN}{N} = (n \cdot d)d\sigma,$$

где $(n \cdot d) = \frac{\rho dN}{A}$ – поверхностная плотность рассеивающих ядер; $d\sigma$ - дифференциальное сечение рассеяния.

Для золота плотность $\rho = 19.3$ г/см^3; $N = 6.02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ - число Авогадро; A – атомная масса; d – толщина фольги.

По формуле Резерфорда:

$$d\sigma = \left(\frac{q_1 q_2}{4T_0}\right)^2 \frac{2\pi \sin\theta d\theta}{\sin^4 \theta/2}.$$

Следовательно вероятность рассеяния α-частиц в интервале углов от 60° до 80° это есть интеграл, то есть

$$\frac{\Delta N}{N} = \int \frac{dN}{N} = \int (n\,d)d\sigma = \left(\frac{\rho\, dN}{A}\right)\left(\frac{q_1 q_2}{4T_0}\right)^2 \int_{60}^{180} \frac{2\pi \sin\theta\, d\theta}{\sin^4 \theta/2} = 4\pi\left(\frac{\rho\, dN}{A}\right)\left(\frac{q_1 q_2}{4T_0}\right)^2\left(\frac{1}{\sin^2 30^0} - \frac{1}{\sin^2 90^0}\right)$$

Подставив в полученное выражение числовые значения в единицах системы СГС, получим, что

$$\frac{\Delta N}{N} \approx 2 \cdot 10^{-3}.$$

Пример 2.4. α-частицы, упруго рассеянные под углом $\theta_1 = 30^0$, регистрируются на сцинтилляционном экране. За 1 час зарегистрировано 7800 рассеянных α-частиц. Сколько α-частиц в час будет зарегистрировано на том же экране при угле рассеяния $\theta_2 = 120^0$?

Решение

Из формулы Резерфорда

$$\Delta N = N(nd)\left(\frac{ze^2}{2T_0}\right)\frac{\Delta\Omega}{\sin^4 \theta/2}$$

видно, что $\Delta N \sin^4\theta/2 = const$ в условиях данного опыта.
Учитывая, что время регистрации одинаковое, получим:

$$I_1 \sin^4\theta_1/2 = I_2 \sin^4\theta/2,$$

где I_1 – число частиц, зарегистрированных за 1 час на экране при угле рассеяния $\theta_1 = 30^0$. I_2 – число частиц, зарегистрированных за 1 час на том же экране при угле рассеяния $\theta_2 = 120^0$. Из уравнения видно, что

$$I_2 = \frac{\sin^4 \theta_1/2}{\sin^4 \theta_2/2} \cdot I_1$$

Подставляя числовые значения, получим, что

$I_2 = 62$ част/час.

Задачи для самостоятельного решения

1. α - частица с кинетической энергией 0.27 МэВ рассеялась золотой фольгой на угол 60^0. Найти соответствующее значение прицельного параметра.

2. Дейтон с кинетической энергией 15 кэВ и прицельным параметром $0.6 \cdot 10^{-10}$ см рассеялся в кулоновском поле покоившегося ядра гелия. Найти угол рассеяния дейтона в Л – системе.

3. α-частица с кинетической энергией T = 60 кэВ упруго рассеялась на первоначально покоящемся ядре дейтона. Найти прицельный параметр, соответствующий максимально возможному углу рассеяния α - частиц в Л – системе.

4. Найти сечение рассеяния свинцовой фольги, содержащей $4.9 \cdot 10^{18}$ ядер/см^2 , если α - частицы с энергией T_0 = 3 МэВ рассеиваются в интервале углов $60^0 \div 90^0$.

5. Узкий пучок протонов с энергией 1 МэВ падает нормально на серебрянную фольгу толщиной 1.2 мг/см^2. Протоны, рассеянные под углом 60^0, регистрирует счетчик с входным отверстием площадью 1 см^2 и отстоящий от рассеивающей фольги на расстоянии 10 см. Какая доля рассеянных протонов попадает в отверстие счетчика?

6. При замене золотой фольги серебряной в опытах по упругому рассеянию α-частиц тонкими фольгами (толщиной ~ 10^{-4}см) число зарегистрированных α-частиц , рассеянных под углом θ, уменьшается в 2.84 раза. Определить заряд ядра серебра, если известен порядковый номер золота (z = 79).

Практическое занятие № 3

Тема: Теория Бора.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте постулаты Бора и поясните, в чем они противоречат классической физике.
2. Как ведут себя энергетические уровни водородоподобного атома с ростом квантового числа *n*. Что означает достижение максимально возможного значения энергии $E = 0$?
3. Основные закономерности спектра излучения (поглощения) водородоподобного атома. Объясните, откуда они следуют.
4. Почему в опыте Франка и Герца вольтамперная характеристика $I_A = f\,(U_{уск})$ представляет собой чередование соответствующих ″пиков″. Что изменится, если в трубке будет вместо ртути другой газ?

Основные формулы

• $\mu V_n r_n = n\hbar$ - условие отбора стационарных орбит. Где $n = 1, 2, 3,\ldots$ - квантовое число;

$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{1+\frac{m}{M}}$ - приведенная масса; m – масса электрона, M – масса ядра.

• $E_n = -\frac{z^2}{n^2}\frac{E_0}{1+\frac{m}{M}}$ - формула Бора для энергии любого водородоподобного атома (здесь z – заряд ядра в единицах e)

$E_0 = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6$ Эв - постоянная Ридберга в энергетических единицах (энергия первого энергетического уровня атома водорода).

Если ядро считать неподвижным или $m \ll M$, то

$$E_n \approx E_0 \frac{z^2}{n^2}.$$

• $(\frac{1}{\lambda})_{n_1,n_2} = \frac{z^2 R_\lambda}{1+\frac{m}{M}}(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2})$ - формула Бальмера – Бора для любого одноэлектронного атома.

λ - длина волны излучения (поглощения), соответствующего переходу с квантовыми числами n_1 и n_2; $R_\lambda = 10^5$ см$^{-1}$ – постоянная Ридберга в единицах обратных длине волны.
Если ядро считать неподвижным, то приближенная формула Бальмера – Бора будет иметь вид:

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{n_1 n_2} \approx R_\lambda z^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right).$$

Примеры решения задач

Пример 3.1. Считая ядро неподвижным, вычислить для ионов He^+ и Li^{++} энергию связи в основном состоянии и длину волны резонансной линии.

Решение

Так как ядро неподвижное, найдем полную энергию электрона в основном состоянии по формуле

$$E_1 \approx -E_0 \frac{z^2}{1^2}.$$

Для основного состояния $n = 1$.
Для гелия $E_1 = -13.6\frac{4}{1^2} = -54.4$ эВ.
Для лития $E_2 = -13.6\frac{9}{1^2} = -122.5$ эВ.
Учитывая, что при $E = 0$ электрон и ядро становятся не связанными, получим:

$$E_{св.}(He^+) = 0 - (-54.4) = 54.4 \text{ эВ}.$$
$$E_{св.}(Li^{++}) = 0 - (-122.5) = 122.5 \text{ эВ}.$$

Резонансная линия это линия, обусловленная переходом атомов из первого возбужденного состояния в основное. По формуле Бальмера – Бора найдем:

$$\frac{1}{\lambda_{21}} = R_\lambda z^2 (\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}) \Rightarrow \lambda_{21} = \frac{1}{R_\lambda z^2 (\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2})}.$$

$$\lambda_{рез.}(He^{+}) = 0.304\cdot10^{-5}\text{ см} \approx 3040\text{ нм}.$$
$$\lambda_{рез.}(Li^{++}) = 0.135\cdot10^{-5}\text{ см} \approx 1350\text{ нм}.$$

Пример 3.2. В спектре некоторых водородоподобных ионов длина волны третьей линии серии Бальмера равна 108.5 нм**.** Найти энергию связи электрона в основном состоянии этих ионов.

Решение

Энергию связи водородоподобного иона в основном состоянии определим по приближенной формуле

$$E_{св.} = 13.6\cdot\frac{z^2}{1^2},$$

так как $m << M$.

В этой формуле не известен порядковый номер z, который найдем из формулы Бальмера – Бора:

$$\frac{1}{\lambda_{25}} = R_{\lambda} z^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right).$$

Для третьей линии серии Бальмера $n_1 = 2$ – базовый уровень, $n_2 = n_1 + 3 = 5$.

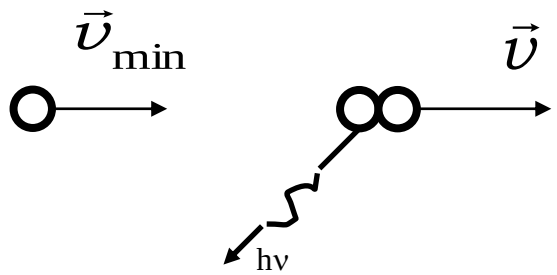
$$z = \sqrt{\frac{100}{21\cdot R_{\lambda}\cdot\lambda_{25}}}.$$

Подставив числовые значения, получим, что $z \approx 2$ (округляем до целого числа) – это ион гелия He^{+}. Следовательно

$$E_{св.} = 54.4\text{ эВ}.$$

Пример 3.3. С какой минимальной скоростью должен двигаться атом водорода, чтобы в результате неупругого лобового соударения с другим, покоящимся, атомом водорода один из них испустил фотон? До соударения оба атома находились в основном состоянии.

Решение



$\vec{\upsilon}_{\min}$ - минимальная скорость первого атома до соударения (до соударения оба атома водорода находились в основном состоянии, энергия основного состояния E_1). $\vec{\upsilon}$ - скорость атомов после неупругого соударения.

После соударения один атом испустил фотон, следовательно он должен был находиться в возбужденном состоянии $n = 2$, так как скорость атома до соударения минимальна. Энергия этого возбужденного состояния E_2. Второй атом после соударения будет находиться в основном состоянии E_1.

Из законов сохранения энергии и импульса для данного неупругого соударения

$$\frac{m\upsilon_{\min}^2}{2} + 2E_1 = E_1 + E_2 + \frac{2m\upsilon^2}{2},$$

$$m\upsilon_{\min} = 2m\upsilon$$

следует:

$$\upsilon = \upsilon_{\min}/2;$$

$$\frac{m\upsilon_{\min}^2}{4} = E_2 - E_1 \Rightarrow \upsilon_{\min} = \sqrt{\frac{(E_2 - E_1)\cdot 4}{m}}.$$

E_2 и E_1 найдем по формуле Бора для энергии, считая что $m << M$

$$E_1 = -\frac{z^2}{1^2}E_0 = -E_0,$$

$$E_2 = -\frac{z^2}{2^2}E_0 = -\frac{E_0}{4}.$$

Подставив эти энергии в формулу для минимальной скорости, получим:

$$\upsilon_{\min} = \sqrt{\frac{3E_0}{m}} \approx 6.2\cdot 10^6 \text{ см/с.}$$

Пример 3.4. Вычислить для мезоатома водорода, в котором вместо электрона движется мезон, имеющий тот же заряд, но массу в 207 раз больше:

1. расстояние между мезоном и ядром в основном состоянии;
2. длину волны резонансной линии.

Решение

Согласно теории Бора движение μ - мезона на стационарной орбите можно описать следующими уравнениями:

$$1)\ \frac{\mu \upsilon_n^2}{r_n} = \frac{ze^2}{r_n^2},$$

$$2)\ \mu \upsilon_n \cdot r_n = n\hbar.$$

(уравнение 1 написано в единицах системы СГСЕ)
n = 1, 2, 3,……

μ - приведенная масса, r_n – радиус n-ой орбиты, υ_n – скорость мезона на стационарной орбите n.
Решив совместно эти два уравнения, получим:

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{ze^2\mu} = \frac{n^2}{z^2} \cdot \frac{\hbar^2}{e^2 m_\mu}\left(1 + \frac{m_\mu}{m_p}\right).$$

Учитывая, что $m_\mu = 207\ m_e$, $\frac{\hbar^2}{m_e \cdot e^2} = r_{Á} = 0.528 \cdot 10^{-8}$ см, $z = 1$, $n = 1$,

найдем r_1:

$$r_1 = \frac{\left(1 + \frac{m_\mu}{m_p}\right)}{207} \cdot à_{Á} \approx 2.85 \cdot 10^{-11} \text{ см}.$$

Длину волны резонансной линии, которая соответствует переходу атома из первого возбужденного состояния в основное, найдем по формуле Бальмера – Бора:

$$\frac{1}{\lambda_{21}} = 207 R_\lambda \frac{z^2}{\left(1 + \frac{m_\mu}{m_p}\right)} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow \lambda_{ðåç} = \frac{1 + \frac{m_\mu}{m_p}}{207 R_\lambda \cdot 3/4} = 6.54 \cdot 10^{-8} \text{см} = 654 \text{пм}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В каких пределах должны лежать длины волн монохроматического света, чтобы при возбуждении атомов водорода квантами этого света радиус орбиты электрона увеличился в 9 раз.

2. Фотон, испущенный ионом He^+ при переходе из первого возбужденного состояния в основное, ионизирует атом водорода, находящийся в основном состоянии. Найти скорость фотоэлектронов.

3. В спектре некоторых водородоподобных ионов длина волны второй линии серии Пашена равна 320 нм**.** Найти энергию связи электрона в основном состоянии этих ионов и длину волны резонансной линии.

4. Возбужденный атом водорода при переходе в основное состояние испустил последовательно два кванта с длинами волн λ_1 = 4057 нм и λ_2 = 97.25 нм. Определить энергию первоначального состояния данного атома и соответствующее ему квантовое число.

5. У какого водородоподобного иона разность длин волн головных линий серии Бальмера и Лаймана равна 58.3 нм?

6. Атом позитрония образован электроном и позитроном (e^-, e^+) ,которые вращаются относительно общего центра инерции. Найти длину третьей линии серии Бальмера.

7. Частица массой m движется по круговой орбите в центрально – симметричном поле $U = \frac{\chi r^2}{2}$. Найти с помощью боровского условия квантования разрешенные радиусы орбит и уровни энергии частицы.

Ответ: $r = \sqrt{\frac{n\hbar}{m\omega}}$, $E_n = n\hbar\omega$, $\omega = \sqrt{\frac{\chi}{m}}$

Практическое занятие № 4

Тема: Квантовые свойства излучения.

Контрольные вопросы:

1. Основные характеристики фотона. Какой массой обладает фотон с длиной волны $\lambda = 6\cdot10^{-5}$ см? Сколько нужно набрать таких фотонов, чтобы их масса сравнялась с массой покоя электрона?
2. Как пользуясь уравнением Эйнштейна для фотоэффекта, найти постоянную Планка?
3. В чем состоит эффект Комптона? Почему при рассеянии в реальном веществе возникают обе компоненты рассеяния λ и λ'?
4. Чем отличается вынужденное излучение атомов от спонтанного?

Основные формулы

• $\hbar\omega = A + \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2}$ — уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта, где A – работа выхода электронов из вещества, $\hbar\omega$ - энергия фотона, $\frac{m\upsilon_{\max}^2}{2} = T_{\max}$ - максимальная кинетическая энергия вылетевших электронов.

• $\Delta\lambda = \Lambda\,(1 - \cos\theta)$ – комптоновское смещение длины волны рассеянного фотона, где $\Lambda = h / mc = 2.42$ пм – комптоновская длина волны.

• $E = \sqrt{p^2c^2 + m_0{}^2c^4}$ - соотношение между полной энергией E, импульсом P релятивистской частицы и массой покоя m_0 , где c – скорость света.

• $T = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ - кинетическая энергия любой релятивистской частицы, где $\beta = \upsilon / c$ – относительная скорость частицы.

Примеры решения задач

Пример 4.1. Лазер излучает в импульсе длительностью $\tau = 0.13$ мс. Узкий пучок света энергией E = 10 Дж. Найти среднее за время τ давление такого пучка света, если его сфокусировать в пятнышко диаметром d = 10 мкм на поверхности, перпендикулярной пучку, с коэффициентом отражения $\rho = 0.5$.

Решение

Среднее давление определяется формулой:

$$\langle P \rangle = F/S,$$

где

$$F = \Delta p/\Delta t,$$

Δp – изменение импульса за время Δt.

Из закона сохранения импульса для одного фотона следует:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \Rightarrow \vec{p}_3 = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$$

- импульс, переданный фотоном за время τ. Учитывая, что импульс отраженного фотона равен $P_2 = \rho P_1$, получим:

$$P_3 = P_1 + \rho P_1 = P_1(1 + \rho).$$

Импульс, переданный всеми фотонами равен изменению импульса ΔP за время τ, то есть

$$\Delta P = n \cdot P_3 = n P_1 (1 + \rho),$$

где n – число фотонов, $P_1 = h\nu/c$ – импульс падающего фотона. Таким образом, сила

$$F = \frac{nh\nu}{c\tau}(1+\rho) = \frac{E}{c\tau}(1+\rho).$$

Среднее давление

$$\langle P \rangle = \frac{4E(1+\rho)}{c\tau\pi d^2} = 5 \text{ Мпа}.$$

Пример 4.2. Определить максимальную скорость электронов, вылетевших из металла под действием γ - излучения длиной волны λ = 0.003 нм.

Решение

Максимальную кинетическую энергию фотоэлектронов можно найти из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта

$$\frac{hc}{\lambda} = A + T_e.$$

Учитывая, что длина волны γ - излучения сравнима с комптоновской длиной волны, можно сделать вывод о том, что энергия γ - фотона одного порядка с энергией покоя электрона, так как комптоновская длина волны это длина волны фотона, энергия которого равна энергии покоя электрона. Следовательно, электрон надо рассматривать как релятивистскую частицу, кинетическая энергия которой равна:

$$T_e = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right),$$

где $\beta = \upsilon / c$ – относительная скорость электрона.

Так как работа выхода электрона из любого металла измеряется всего лишь несколькими электронвольтами, то величиной работы выхода A, по сравнению с энергией фотона можно пренебречь. Тогда

$$T_e = \frac{hc}{\lambda} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

Поделив уравнение на $m_0 c^2$:

$$\frac{h}{m_0 c} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1,$$

где $h / m_0 c = \Lambda$, получим:

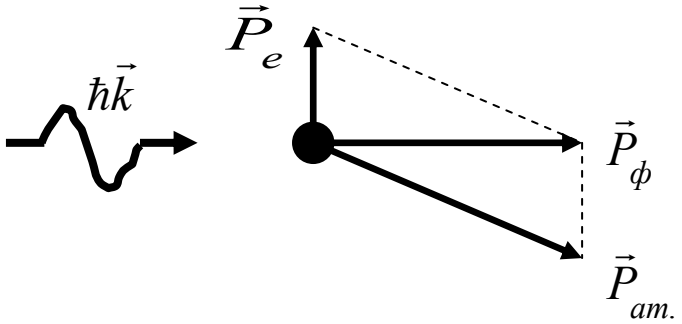
$$\frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{\Lambda(\Lambda + 2\lambda)}}{\Lambda + \lambda} = 0.86.$$

Откуда для скорости υ получим $\upsilon = \beta c = 2.5 \cdot 10^8$ м/с.

Пример 4.3. Фотон с длиной волны λ = 17 пм вырывает из покоящегося атома электрон, энергия связи которого E = 69.3 кэВ. Найти импульс, переданный атому в результате этого процесса, если электрон вылетел под прямым углом к направлению налетающего фотона.

Решение

Импульсная диаграмма, отражающая закон сохранения импульса при данном взаимодействии фотона и атома будет иметь вид:



Из законов сохранения импульса и энергии следует:

$$h\nu = E_{\tilde{n}\hat{a}.} + \frac{m\upsilon_e^2}{2},$$

$$\vec{P}_{\hat{o}} = \vec{P}_e + \vec{P}_{\grave{a}\grave{o}}.$$

Примечание: энергия отдачи атома при взаимодействии такого излучения с атомом составляет ~1÷2 эВ, поэтому ею можно пренебречь по сравнению с энергией фотона и энергией связи.

Переписав второе уравнение в скалярном виде и заменив в первом уравнении скорость через импульс, получим:

$$h\nu = E_{\tilde{n}\hat{a}.} + \frac{P_e^2}{2m},$$

$$P_{am} = \sqrt{P_{\phi}^2 + P_e^2}.$$

Решив систему этих двух уравнений, найдем:

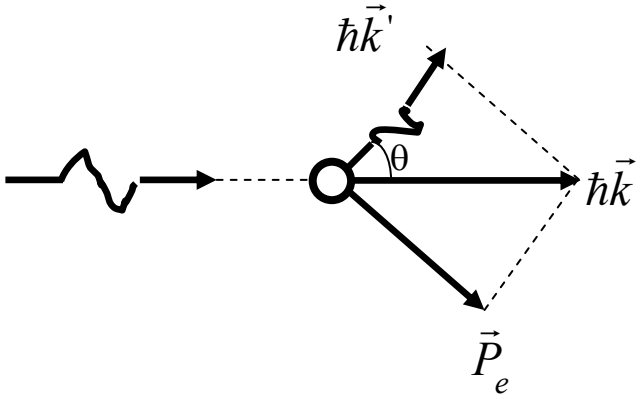
$$P_{am} = \frac{\sqrt{(h\nu)^2 + 2mc^2(h\nu - E_{св.})}}{c} = 96 \text{ кэВ/с},$$

где c – скорость света.

Пример 4.4. Фотон с длиной волны λ = 3.64 пм рассеялся на покоящемся свободном электроне так, что кинетическая энергия отдачи составила η - 25% от энергии налетевшего фотона. Найти комптоновское смещение длины волны рассеянного фотона и угол, под которым рассеялся фотон.

Решение

Импульсная диаграмма рассеяния фотона на электроне:



Комптоновское смещение длины волны рассеянного фотона определяется формулой:

$$\Delta\lambda = \Lambda(1 - \cos\theta),$$

где $\Lambda = 2.42$ пм – комптоновская длина волны.

Учитывая, что $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$, а $E = hc / \lambda$:

$$E' = hc / \lambda',$$

получим:

$$\Delta\lambda = hc(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E}) = hc(\frac{E - E'}{EE'}),$$

По условию задачи кинетическая энергия отдачи электрона $T_e = 0.25\ E$, следовательно, по закону сохранения энергии:

$$E - E' = T_e = 0.25E \Rightarrow E' = E\ (1 - 0.25).$$

Комптоновское смещение длины волны будет теперь равно:

$$\Delta\lambda = hc(\frac{E - E + 0.25E}{E^2(1 - 0.25)}) = \lambda\frac{0.25}{0.75} = 1.2 \text{ пс.}$$

Угол рассеяния θ найдем из формулы:

$$\Delta\lambda = \Lambda(1 - \cos\theta) \Rightarrow \cos\theta = 1 - \frac{\Delta\lambda}{\Lambda} = \frac{1}{2},$$

$$\theta = 60^0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Излучение с энергией 15 Дж освещает площадку 2 см^2 в течение 61 с. Определить световое давление в случаях:
   а) полного отражения излучения;
   б) полного поглощения.

2. Найти работу выхода с поверхности некоторого металла, если при поочередном освещении его электромагнитным излучением с длинами волн λ_1 = 0.35 мкм и λ_2 = 0.54 мкм максимальные скорости фотоэлектронов отличаются в 2 раза.

3. На поверхность металла падает поток излучения с длиной волны 360 мкм и мощностью 5 мкВт. Определить силу тока насыщения, если 5% всех падающих фотонов выбивают из металла электроны.

4. Рентгеновский фотон с энергией 20 кэВ претерпевает комптоновское рассеяние на электроне. Чему равна длина волны падающего фотона и

фотона, рассеянного на угол 90^0? Чему равны энергия рассеянного фотона и кинетическая энергия электрона отдачи?

5. Фотон с энергией 350 кэВ испытал рассеяние на покоившемся свободном электроне. Определить угол между направлениями разлета электрона отдачи и рассеянного фотона, комптоновское смещение длины волны которого составляет 1.2 пм.

6. Фотон с импульсом P = 60 кэВ/с (c – скорость света), испытав комптоновское рассеяние под углом θ =120^0 на покоившемся свободном электроне, вырвал затем из атома молибдена электрон, энергия связи которого $E_{св}$ = 20 кэВ. Найти кинетическую энергию фотоэлектрона.

Практическое занятие №5

Тема: Волновые свойства атомных частиц: соотношение де Бройля, принцип неопределенности Гейзенберга, волновая функция. Операторы физических величин.

Контрольные вопросы:

1. Покажите, что на стационарной орбите в атоме водорода укладывается целое число длин волн де Бройля.
2. Почему микроскопы, использующие вместо электронных пучков ионные, имеют большую разрешающую способность?
3. Какую физическую информацию о частице содержит волновая функция?
4. Что такое оператор физической величины?
5. На что накладывает ограничение принцип неопределенности Гейзенберга?

Основные формулы

- $\vec{P} = \hbar\vec{k}$ - соотношение де Бройля, связывающее корпускулярные и волновые свойства частиц, где $\left|\vec{k}\right| = \frac{2\pi}{\lambda}$ - модуль волнового вектора;

$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{P} = \frac{h}{P}$ - длина волны де Бройля, P – импульс частицы.

- $\Delta x \Delta P_x \geq \hbar$ - соотношение неопределенности Гейзенберга для координаты x и проекции импульса на это направление.

- $\frac{dW}{dV} = \left|\psi\right|^2 = \psi^*\psi$ - плотность вероятности обнаружить частицу в данной точке пространства в данный момент времени, где dV – элемент объема, ψ^* - комплексно сопряженная волновая функция.

- $\int_V \left|\psi\right|^2 dV = \int_V \psi^*\psi dV = 1$ — условие нормирования волновой функции на единицу.

Таблица основных квантовомеханических операторов

Динамические переменные классической механики	Соответствующие операторы в квантовой механике	Вид оператора
1. **Координата** x	$\hat{x}$	$\hat{x} = x$
2. **Проекция импульса** P_x	$\hat{P}_x$	$\hat{P}_x = -\imath\hbar\frac{\partial}{\partial x}$
3. **Вектор импульса** $\vec{P} = \vec{\ell}_x P_x + \vec{\ell}_y P_y + \vec{\ell}_z P_z$	$\hat{\vec{P}} = \vec{\ell}_x \hat{P}_x + \vec{\ell}_y \hat{P}_y + \vec{\ell}_z \hat{P}_z$	$\hat{\vec{P}} = -\imath\hbar\vec{\nabla}$
4. **Квадрат модуля импульса** $P^2 = \vec{P}\vec{P}$	$\hat{P}^2 = \hat{\vec{P}}\hat{\vec{P}}$	$\hat{P}^2 = -\hbar^2\vec{\nabla}^2 = -\hbar^2\Delta$
5. **Кинетическая энергия** $T = \frac{P^2}{2m}$	$\hat{T} = \frac{\hat{P}^2}{2m}$	$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$
6. **Потенциальная нергия** $U = -\frac{ze^2}{r}$	$\hat{U} = -\frac{ze^2}{\hat{r}}$	$\hat{U} = -\frac{ze^2}{r}$
7. **Полная энергия** $E = T + U$	$\hat{E} = \hat{H} = \hat{T} + \hat{U}$	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U$
8. **Момент импульса** $\vec{L} = \left[\vec{r}\vec{P}\right]$	$\hat{\vec{L}} = \left[\hat{\vec{r}}\hat{\vec{P}}\right]$	$\hat{L} = \begin{vmatrix} \vec{\ell}_x & \vec{\ell}_y & \vec{\ell}_z \\ x & y & z \\ \hat{P}_x & \hat{P}_y & \hat{P}_z \end{vmatrix}$
9. **Проекция момента импульса на ось** z $L_z = xP_y - yP_x$	$\hat{L}_z = x\hat{P}_y - y\hat{P}_x$	$\hat{L}_z = -\imath\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{dx})$ $\hat{L}_z = -\imath\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$ (в сферической системе)

Примеры решения задач

Пример 5.1. Найти длину волны электрона, имевшего начальную скорость 10^6м/с и ускоренного разностью потенциалов 4 В.

Решение

Для определения длины волны электрона воспользуемся формулой де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{P},$$

где h – постоянная Планка, P – импульс электрона.
Электрон в данной задаче можно рассматривать как нерелятивистский, т.к. $\beta = \upsilon / c \approx 0.003$, а $eU = 4$ эВ.
Поэтому импульс электрона в конце ускорения можно найти по формуле:

$$P = \sqrt{2mT},$$

где

$$T = T_0 + eU = m\upsilon^2/2 + eU \approx 6.84 \text{ эВ}.$$

Соответственно, длина волны ускоренного электрона будет равна:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mT}} \approx 1.18 \cdot 10^{-9} \text{ì} \approx 1.2 \text{ нм}.$$

Пример 5.2. Две одинаковые нерелятивистские частицы движутся перпендикулярно друг другу с дебройлевскими длинами волн λ_1 и λ_2. Найти дебройлевскую длину волны каждой частицы в системе их центра инерции.

Решение

В Ц – системе (системе центра инерции) импульсы частиц равны:

$$\widetilde{P}_1 = \widetilde{P}_2 = \mu \upsilon_{отн},$$

где μ - приведенная масса, $\upsilon_{отн.}$ – относительная скорость частиц.
Для двух одинаковых частиц

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2};$$

$$\vec{\upsilon}_{\text{îòí}} = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2,$$

$$\left|\vec{\upsilon}_{отн}\right| = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2},$$

т.к. частицы движутся перпендикулярно друг другу ($\alpha = 90^0$). Учитывая, что

$$\lambda = h / p,$$

получим в Ц – системе:

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = \frac{h}{\tilde{P}} = \frac{h}{\mu \upsilon_{\text{îò í}}} = \frac{2h}{m\sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2}},$$

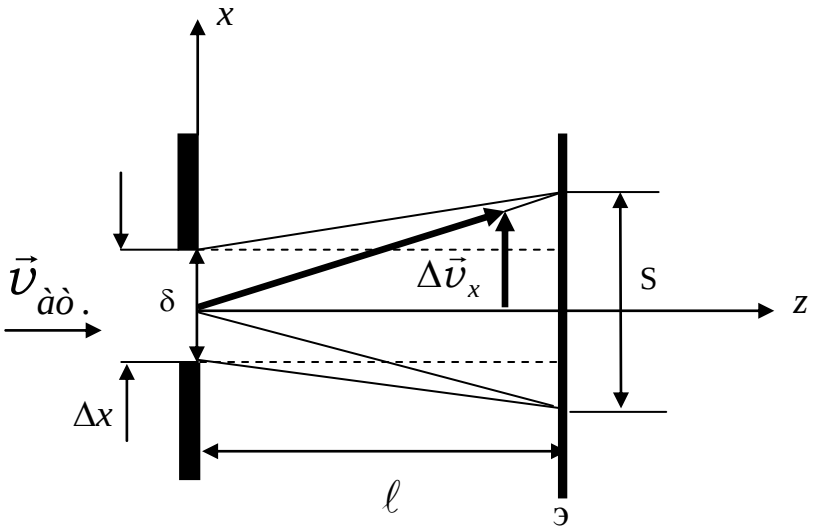
где $\upsilon_1 = \frac{h}{m\lambda_1}; \upsilon_2 = \frac{h}{m\lambda_2}$ - скорости частиц в лабораторной системе отсчета.

Подставив υ_1 и υ_2 в формулу для $\tilde{\lambda}$, получим, что дебройлевская длина волны каждой частицы в Ц – системе будет равна:

$$\tilde{\lambda} = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}.$$

Пример 5.3. Параллельный пучок атомов водорода со скоростью υ = 1.2 км/ с падает нормально на диафрагму с узкой щелью, за которой на расстоянии ℓ = 1м расположен экран. Исходя из соотношения неопределенностей, оценить ширину щели, при которой эффективная ширина изображения на экране будет минимальной.

Решение



δ - ширина щели , S – ширина изображения , $\Delta x = \delta$ - неопределенность координаты пучка в направлении x при прохождении диафрагмы.

Из рисунка видно, что ширина изображения

$$S = \delta + \delta',$$

где δ – дополнительное уширение, связанное с неопределенностью скорости (импульса) в направлении x при прохождении диафрагмы.

$$\delta'/2 = t \cdot \Delta\upsilon_x ,$$

где $t = \frac{\ell}{\upsilon}$ - время, за которое пучок доходит до экрана.

Из соотношения неопределенности

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \hbar \text{ или } \Delta x \cdot m\Delta\upsilon_x \geq \hbar$$

найдем, что

$$\Delta V_x = \frac{\hbar}{m\Delta x} = \frac{\hbar}{m\delta}$$

тогда

$$\delta' = 2t \cdot \Delta\upsilon_x = \frac{2\ell\hbar}{\upsilon m\delta}.$$

В результате зависимость ширины пучка S от ширины щели δ будит иметь вид:

$$S = \delta + \frac{2\ell\hbar}{\upsilon m\delta}.$$

Чтобы найти ширину щели при которой эффективная ширина изображения S будет минимальной, исследуем функцию $S = f(\delta)$ на экстремум. Для этого возьмем производную от S по δ и приравняем нулю.

$$\frac{dS}{d\delta} = 1 - \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{2\hbar\ell}{m\upsilon}\right) = 0.$$

Откуда получим, что

$$\delta_{\min} = \sqrt{\frac{2\hbar\ell}{m\upsilon}} \approx 10^{-2} \text{см}.$$

Пример 5.4. Состояние частицы, находящейся в одномерной бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме шириной ℓ, описывается волновой функцией $\psi(x) = Ax(\ell - x)$, где A – некоторая постоянная. Найдите постоянную A из условия нормировки.

Решение

Условие нормировки для данной задачи запишется в виде:

$$\int_0^{\ell} |\psi|^2 dx = 1$$

или

$$A^2 \int_0^{\ell} x^2 (\ell - x)^2 dx = 1.$$

Взяв этот интеграл, получим, что

$$A^2 \cdot \frac{\ell^5}{30} = 1 \Rightarrow A = \frac{\sqrt{30}}{\ell^{5/2}}.$$

Пример 5.5. Проверить операторное равенство $\frac{d}{dx}x = 1 + x\frac{d}{dx}$.

Решение

Для этого подействуем произведением операторов $\frac{d}{dx}x$ на волновую функцию $\Psi(x, y, z)$:

$$(\frac{d}{dx}x)\psi = \frac{d}{dx}(x\psi) = x\frac{d\psi}{dx} + \psi\frac{dx}{dx} = (x\frac{d}{dx} + 1)\psi.$$

Из этого равенства видно, что

$$-\frac{d}{dx}x = x\frac{d}{dx} + 1.$$

Пример 5.6. Найти результат действия оператора $\frac{d^2}{dx^2}x^2$ на функцию *cos x*.

Решение

$$\frac{d^2}{dx^2}x^2(\cos x) = \frac{d^2}{dx^2}(x^2\cos x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(x^2\cos x)\right] = \frac{d}{dx}\left[-x^2\sin x + \cos x 2x\right] =$$
$$\cos x(2 - x^2) - 4x\sin x.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Релятивистская частица с массой покоя **m** имеет кинетическую энергию *T***.** Найти дебройлевскую длину волны частицы.

2. Два атома H_1^1 и He_2^4 движутся в одном направлении, причем дебройлевская длина волны каждого атома λ = 60 пм. Найти длины волн обоих атомов в их Ц – системе.

3. Свободный электрон в начальный момент был локализован в области размером L = 10^{-8}см. Оценить промежуток времени, за который ширина соответствующего волнового пакета увеличится в 10^2 раз.

4. Параллельный пучок электронов с энергией 40 кэВ дифрагирует на щели шириной 0.6 мкм. Под каким углом обнаружится первый минимум дифракционной картины?

5. Плоская волна де Бройля описывается функцией $\psi(\vec{r},t) = Ae^{-i/\hbar(\vec{P}\vec{r}-Et)}$. Показать, что вероятность обнаружить частицу в любом месте одинакова.

6. Собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в атоме, имеет вид: $\psi(r) = C \cdot e^{-r/a}$, где C – некоторая постоянная, a – радиус Бора. Найти из условия нормировки постоянную C.

7. Найти результат действия оператора $(\frac{d}{dx}x)^2$ на функции $\cos x$ и e^x.

8. Проверить операторное равенство: $x^2 \frac{d}{dx}\frac{1}{x} = x\frac{d}{dx} - 1$.

Практическое занятие № 6

Тема: Уровни энергии и орбитали стационарных состояний.

Контрольные вопросы:

1. Какие состояния называются стационарными?
2. Почему квадрат модуля волновой функции $|\Psi(r)|^2$ называют плотностью электронного облака?
3. Что Вы можете сказать об энергетическом спектре стационарных состояний локализованных частиц (движущихся в ограниченной области пространства, сравнимой с длиной волны де Бройля)?
4. В чем состоит явление туннельного эффекта?

Основные формулы

- $\imath\hbar\frac{\partial\psi(x,y,z,t)}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+U\right)\psi(x,y,z,t)$ - уравнение Шредингера,

описывающее основной динамический закон квантовой механики,
где $\psi(x, y, z, t)$ – волновая функция, зависящая от координат и времени,
U – потенциальная энергия.
$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+U\right)=\hat{H}$ - оператор Гамильтона (оператор полной энергии).
$\Delta = \nabla^2$ – оператор Лапласса.

- $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+U\right)\psi(x,y,z)=E\psi(x,y,z)$ - стационарное уравнение Шредингера.

Для стационарных состояний полная волновая функция будет иметь вид:

$$\psi(x,y,z,t)=\psi(r)\cdot e^{-\frac{\imath}{\hbar}Et}.$$

где $\psi(r)$ – решение стационарного уравнения Шредингера.

- $|\psi(r)|^2=\psi\cdot\psi^*=\frac{dW}{dV}$ - плотность вероятности положения частицы (для стационарных состояний не зависит от времени).

- $\frac{dW}{dx} = D \approx e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}x}$ - коэффициент прозрачности потенциального барьера, если $U = U_0 = const$, не зависит от x (основная формула туннельного эффекта).

- $\frac{dW}{dx} = D \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(U-E)}dx\right]$ - коэффициент прозрачности потенциального барьера произвольной формы; x_1 и x_2 – координаты точек, между которыми $U > E$, $U = f(x)$.

Примеры решения задач

Пример 6.1. Найти вероятность нахождения частицы с наименьшей энергией в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечными стенками в области $a / 3 < x < 2a / 3$, где a – ширина ямы.

Решение

Из решения стационарного уравнения Шредингера, описывающего поведение частицы внутри ямы

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \Rightarrow \psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0,$$

получим:

$$\Psi(x) = A \sin(kx + \alpha),$$

где $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

Вне ямы волновая функция равна нулю, т.е. $\Psi_{вне.}(x) = 0$**,** так как потенциальные стенки бесконечные и частица туда попасть не может. Накладывая на волновую функцию стандартные условия непрерывности:

$$\Psi(0) = 0, \ \Psi(a) = 0,$$

найдем, что

$$\alpha = 0, \quad k = \frac{n\pi}{a};$$

Из условия нормировки

$$\int_0^a \psi\psi^* dx = 1$$

получим, что

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}.$$

Таким образом, волновая функция, описывающая состояние частицы внутри ямы, будет иметь вид:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x,$$

где $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3\ldots$

Вероятность нахождения частицы в заданном интервале определим по формуле:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx.$$

Так как наименьшей энергии соответствует состояние с $n = 1$, получим:

$$W = \frac{2}{a} \int_{a/3}^{2a/3} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.61.$$

Пример 6.2. Найти решение уравнения Шредингера для свободного электрона, движущегося с импульсом P в положительном направлении оси x.

Решение

Для свободной частицы энергия взаимодействия с внешним полем $U = 0$.

Уравнение Шредингера в данном случае запишется в виде:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{dx^2}.$$

Если частица находится в постоянном поле, не зависящем от времени, решение уравнения Шредингера можно искать в виде произведения двух функций:

$$\psi(x) = \psi(x) \cdot \varphi(t).$$

Уравнение Шредингера в этом случае разобьется на два независимых уравнения:

$$\imath\hbar\frac{d\varphi}{dt}=E\varphi\Rightarrow\varphi=Ae^{-\frac{\imath}{\hbar}Et},$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=E\psi(x)\Rightarrow\psi''(x)+k^2\psi(x)=0,$$

где $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$.

Из решения второго уравнения получим, что

$$\psi(x)=C_1e^{\imath kx}+C_2e^{-\imath kx}.$$

Так как отраженной волны нет, C_2 = 0. Следовательно, полная волновая функция свободного электрона будет иметь вид:

$$\psi(x,t)=B\cdot e^{\imath\left(kx-\frac{E}{\hbar}t\right)}.$$

Учитывая, что волновой вектор $k=\frac{P_x}{\hbar}$, окончательно получим:

$$\psi(x,t)=B\cdot e^{-\frac{\imath}{\hbar}\left(Et-P_xx\right)}.$$

Пример 6.3. Найти с помощью уравнения Шредингера энергию гармонического осциллятора с частотой ω в стационарном состоянии $\psi(x)=A\cdot e^{-\alpha^2x^2}$, где A и α - постоянные.

Решение

Уравнение Шредингера для стационарного состояния имеет вид:

$$\hat{H}\psi(x)=E\psi(x),$$

где

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x).$$

В данной задаче $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ - потенциальная энергия гармонического осциллятора (гармоническим осциллятором называют частицу, совершающую одномерное движение под действием квазиупругой силы $F = -k\,x$).

Следовательно, уравнение Шредингера в данном случае запишется:

$$\frac{m\omega^2 x^2}{2}\psi(x) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^{2\psi(x)}}{dx^2} = E\psi(x).$$

Подставив в полученное уравнение функцию

$$\psi(x) = A \cdot e^{-\alpha^2 x^2}$$

и ее вторую производную, получим:

$$\left[\frac{m\omega^2 x^2}{2} - \frac{\hbar^2}{2m}\left(4\alpha^4 x^2 - 2\alpha^2\right)\right]\psi(x) = E\psi(x).$$

Так как по условию задачи $E = const$.(стационарное состояние), то

$$\frac{m\omega^2 x^2}{2} - \frac{\hbar^2}{2m}\left(4\alpha^4 x^2 - 2\alpha^2\right) = const.$$

Это равенство возможно при условии:

$$\frac{m\omega^2 x^2}{2} - \frac{\hbar^2}{2m}4\alpha^4 x^2 = 0,$$

$$E = \frac{\hbar^2\alpha^2}{m} = const.$$

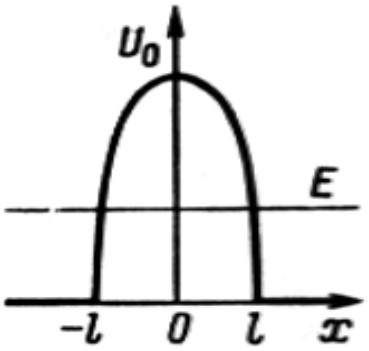
Решив первое уравнение, найдем

$$\alpha^2 = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

и, подставив его во второе уравнение, получим энергию гармонического осциллятора с частотой ω

$$E = \frac{\hbar\omega}{2}.$$

Пример 6.4. Найти вероятность прохождения частицы массой m и энергией E сквозь потенциальный барьер, имеющий вид: $U(x) = U_0\left(1 - \frac{x^2}{\ell^2}\right)$ (см. рисунок).



Решение

Воспользуемся основной формулой туннельного эффекта:

$$D = \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(U(x)-E)}dx\right].$$

Подставив в эту формулу $U(x)$, получим:

$$D = \exp\left[-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{U_0\ell^2 - U_0x^2 - E\ell^2}\,dx\right] = \exp\left[-\frac{2\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}\cdot\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1-\frac{U_0x^2}{\ell^2(U_0-E)}}dx\right]$$

Чтобы взять интеграл, сделаем замену

$$\frac{U_o x^2}{\ell^2(U_0-E)} = \sin^2\varphi,$$

откуда получим, что

$$x = \sqrt{\frac{U_o - E}{U_0}}\ell\cdot\sin\varphi \Rightarrow dx = \sqrt{\frac{U_0-E}{U_0}}\ell\cdot\cos\varphi\, d\varphi.$$

Пределы x_1 и x_2 найдем из равенства $U(x) = E$, то есть

$$U_0\left(1-\frac{x^2}{\ell^2}\right) = E \Rightarrow x_{12} = \pm\ell\sqrt{1-\frac{E}{U_0}}.$$

Учитывая, что

$$\sin\varphi = \frac{x}{\ell}\sqrt{\frac{U_0}{U_0 - E}},$$

найдем пределы φ_1 = - π/2 и φ_2 = π/2.

Теперь коэффициент прозрачности барьера или вероятность прохождения частицы сквозь потенциальный барьер определится по следующей формуле:

$$D = \exp\left[-\frac{2\sqrt{2m\left(U_0 - E\right)}}{\hbar}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\left(1-\sin^2\varphi\right)}\sqrt{\frac{U_0 - E}{U_0}}\ell\cos\varphi d\varphi\right].$$

Взяв интеграл, получим, что

$$D = \exp\left[-\frac{\left(U_0 - E\right)\ell\pi}{\hbar}\cdot\sqrt{\frac{2m}{U_0}}\right].$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В одномерной потенциальной яме с бесконечными стенками шириной ℓ находится электрон. Найти вероятность нахождения электрона на первом
   энергетическом уровне во второй четверти ямы.

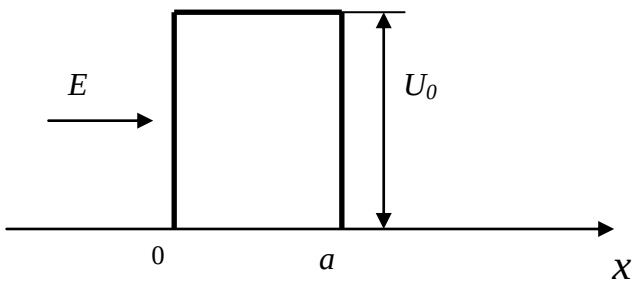
2. Вычислить энергию, которая необходима, чтобы перевести α - частицу, заключенную в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме, с 3-го энергетического уровня на 4-й, если ширина ямы равна 10^{-10} м.
3. Вычислить отношение вероятностей нахождения электрона на 1-ом и 2-ом энергетическом уровнях в интервале 1/4 , равноудаленном от стенок одномерной потенциальной ямы шириной *a* с бесконечными стенками.

4. Частица массой *m* находится в некотором одномерном потенциальном поле *U(x)* в стационарном состоянии, для которого волновая функция имеет вид:

   $$\psi(x) = A\exp(-\alpha x^2),$$

   где *A* и α - некоторые постоянные. Имея в виду, что *U(x)* = 0 при *x* = 0, найти *U(x)* и энергию частицы.

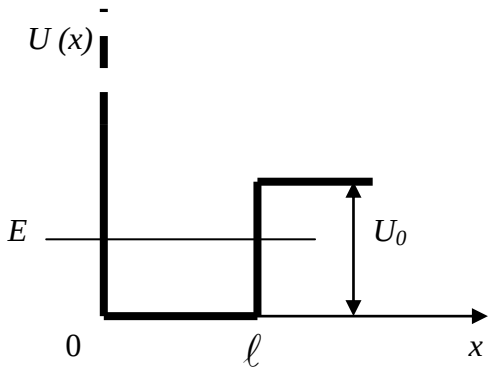
5. Частица с энергией $E < U_0$ подходит слева к потенциальному барьеру, изображенному на рисунке. Найдите отношение амплитуды волновой функции, прошедшей сквозь барьер, к амплитуде волновой функции, падающей на барьер.



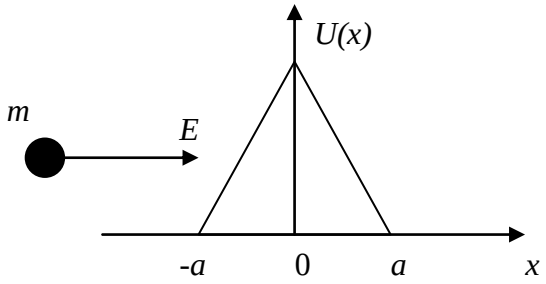
6. Частица массой m находится в одномерном потенциальном поле $U(x)$, показанном на рисунке, где $U(0) = \infty$. Найти уравнение, определяющее возможные значения энергии частицы в области $E < U_0$; привести его к виду:

$$\sin k\ell = \pm\sqrt{\hbar^2 / 2m\ell^2 U_0}\ , \text{ где } k = \sqrt{2mE/\hbar}$$

Показать с помощью графического решения этого уравнения, что возможные значения энергии частицы образуют дискретный спектр.



7. Найти вероятность прохождения частицы массой m и энергией E сквозь потенциальный барьер, показанный на рисунке.



Практическое занятие №7

Тема: Точное измерение одной физической величины, определение спектра физических величин. Одновременное точное измерение двух физических величин, коммутативность операторов.

Контрольные вопросы:

1. Алгоритм нахождения спектра физических величин.
2. Что в квантовой теории является необходимым и достаточным условием того, чтобы две физические величины можно было измерить одновременно точно?
3. Что Вы можете сказать о собственных волновых функциях операторов $\hat{L}^2$ и $\hat{L}_z$?
4. Как ведет себя вектор орбитального момента электрона $\vec{L}$ в пространстве? Каким является движение электрона в атоме?

Основные формулы

- $\hat{A}\psi = a\psi$ - уравнение на собственные значения оператора $\hat{A}$ и собственные волновые функции ψ, где $\{a\}$ - собственные значения оператора $\hat{A}$ (спектр точных значений физической величины *a*, которой соответствует оператор $\hat{A}$).

- $\left[\hat{A}\hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ - коммутатор операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

- $\langle\Delta a^2\rangle \langle\Delta b^2\rangle \geq \langle c\rangle^2/4$ - соотношение неопределенности Гейзенберга, если $\left[\hat{A}\hat{B}\right] = i\hat{c}$, где величинам *a, b* и *c* соответствуют операторы $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$.

Таблица спектров механических моментов и их проекций

Момент	Модуль	Проекция на ось *Z*
1.Орбитальный механический момент	$L=\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$, где $\ell = 0,1,2\ldots..(n-1)$ – орбитальное квантовое число.	$L_z = m_\ell \hbar$, где $m_\ell = -\ell\ldots.0\ldots.+\ell$ - магнитное орбитальное квантовое число.
2.Собственный механический момент (спин)	$S=\hbar\sqrt{s(s+1)}$, где s – спиновое квантовое число $s=\begin{cases} 1/2, 3/2.. - \text{ôåðìèîíû} \\ 0,1,2.. - \text{áîçîíû} \end{cases}$	$S_z = m_s \hbar$, где $m_s = -s\ldots 0\ldots +s$ - магнитное спиновое квантовое число.
3. Полный механический момент	$J=\hbar\sqrt{j(j+1)}$, где $j=\lvert\ell-s\rvert..\lvert\ell+s\rvert$ - полное квантовое число	$J_z = m_j \hbar$ где $m_j = -j\ldots 0\ldots +j$ - магнитное полное квантовое число

Примеры решения задач

Пример 7.1. Найти собственные функции ψ и собственные значения следующих операторов:

а) $\hat{F} = -\imath\frac{\partial}{\partial x}$, если $\psi(x) = \psi(x+a)$, где $a = const$.

б) $\hat{F} = -\dfrac{d^2}{dx^2}$, если $\psi(x) = 0$ при $x = 0, l$

Решение

Составим уравнение на собственные функции и собственные значения оператора $\hat{F}$

$$\hat{F}\psi = \lambda\psi,$$

где λ - собственное значение оператора $\hat{F}$.
Решим это уравнение для операторов а) и б):
а)

$$-\imath\frac{\partial\psi}{\partial x} = \lambda\psi.$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое будем решать методом разделения переменных:

$$\frac{d\psi}{\psi} = \imath\lambda dx.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\ln\psi - \ln C = \imath\lambda x,$$

откуда

$$\psi(x) = C\cdot e^{\imath\lambda x}$$

- собственная волновая функция оператора

$$\hat{F} = -\imath\frac{\partial}{\partial x},$$

const C находится из условия нормировки.
Чтобы найти λ, накладываем на найденную волновую функцию заданное условие непрерывности

$$\psi(x) = \psi(x + a),$$

$$Ce^{\imath\lambda x} = Ce^{\imath\lambda(x+a)} = Ce^{\imath\lambda x}\cdot e^{\imath\lambda a}.$$

из этого уравнения получим, что

$$e^{\imath\lambda a} = 1,$$

или по теореме Эйлера

$$\cos\lambda a + \imath\cdot\sin\lambda a = 1$$

Из полученного уравнения следует:

$$\begin{cases}\cos\lambda a = 1\\ \sin\lambda a = 0\end{cases}$$

Из решения системы уравнений найдем, что

$$\lambda a = 2\pi n \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi n}{a}$$

- собственное значение оператора, где n = 0, 1, 2…

$$\hat{F} = -\imath \frac{\partial}{\partial x}.$$

б)

$$-\frac{d^{2\psi}}{dx^2} = \lambda\psi$$

или

$$\psi'' + \lambda\psi = 0$$

– линейное дифференциальное уравнение второго порядка.
Составим характеристическое уравнение:

$$Z^2 + k^2 = 0, \text{ где } k^2 = \lambda.$$

Так как корни этого характеристического уравнения мнимые $z_{12} = \pm\imath k$, решение дифференциального уравнения можно записать в виде:

$$\psi(x) = C_1 \sin\hat{e}x + C_2 \cos\hat{e}x = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x,$$

где C_1 и C_2 – *const.*

Для нахождения λ накладываем на полученную волновую функцию

$$\psi(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x,$$

заданные граничные условия, а именно:

$$\psi(0) = C_2 = 0,$$

$$\psi(\ell) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}\ell = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\ell = n\pi,$$

где n = 0, 1, 2……
Следовательно собственное значение оператора

$$\hat{F} = -\frac{d^2}{dx^2},$$

будет иметь вид:

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2.$$

Пример 7.2. Найти собственное значение оператора $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$, принадлежащее собственной волновой функции $\psi_A(x) = exp\ (-x^2/2)$.

Решение

Составим уравнение на собственные волновые функции и собственные значения оператора $\hat{A}$.

$$\hat{A}\psi(x) = \lambda\psi(x),$$

где λ - спектр собственных значений оператора $\hat{A}$ или результат действия оператора $\hat{A}$ на волновую функцию $\psi(x)$.

Так как вид собственной волновой функции известен, подействуем оператором $\hat{A}$ на собственную волновую функцию $\psi_A(x) = exp\ (-x^2/2)$:

$$\hat{A}\psi(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{d}{dx}\left(-xe^{-x^2/2}\right) + x^2e^{-x^2/2} = e^{-x^2/2}$$

.

Таким образом, получили, что

$$\hat{A}\psi(x) = \psi(x).$$

Сравнивая последнее уравнение и первое, видим, что λ =1.

Пример 7.3. Проверить следующие равенства для коммутаторов:

а) $\left[f(x), \hat{P}_x\right] = i\hbar\frac{\partial f}{\partial x}$, где $f(x)$ - произвольная функция координаты x.

б) $\left[\hat{H}x\right] = -\frac{i\hbar}{m}\hat{P}_x$ в потенциальном поле $U(x)$.

Решение

Подействуем коммутаторами на произвольную волновую функцию ψ

а)

$$\left[f(x), \hat{P}_x\right]\psi = \left(f(x)\hat{P}_x\right)\psi - \left(\hat{P}_x f(x)\right)\psi.$$

Учитывая, что оператор

$$\hat{P}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\ ,$$

а *f (x)* – оператор умножения, найдем:

$$f(x)\left(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\left\{-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x)\psi\right)\right\}=i\hbar\frac{\partial f}{\partial x}\psi\ .$$

Таким образом, получили следующее равенство:

$$\left[f(x),\hat{P}_x\right]\psi = i\hbar\frac{\partial f}{\partial x}\psi\ .$$

Откуда видно, что коммутатор

$$\left[f(x),\hat{P}_x\right]=i\hbar\frac{\partial f}{\partial x}.$$

б)

$$\left[\hat{H}x\right]\psi=\left(\hat{H}x-x\hat{H}\right)\psi\ .$$

Так как оператор Гамильтона

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U(x),$$

где *U(x)* – оператор умножения, получим:

$$\left(\hat{H}x\right)\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\left(x\psi\right)+U(x)\cdot x\psi,$$

$$\left(x\hat{H}\right)\psi=x\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+U(x)\right)\psi\ .$$

Проведя несложные математические преобразования, найдем разность:

$$\left(\hat{H}x\right)\psi-\left(x\hat{H}\right)\psi=-\frac{\hbar^2}{m}\frac{d\psi}{dx}\ .$$

Введя в полученное выражение оператор проекции импульса

$$\hat{P}_x=-i\hbar\frac{d}{dx},$$

найдем, что

$$\left[\hat{H}x\right]\psi=\left(\hat{H}x\right)\psi-\left(x\hat{H}\right)\psi=-\frac{i\hbar}{m}\hat{P}_x\ \psi\ .$$

Следовательно

$$\left[\hat{H}x\right]=-\frac{i\hbar}{m}\hat{P}_x\ .$$

Задачи для самостоятельного решения

1 .Найти собственные значения и собственные нормированные функции оператора $\hat{L}_z^2$.

2 Найти собственное значение оператора $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx}$, принадлежащее собственной волновой функции $\psi_A(x) = \frac{\sin \alpha x}{x}$.

3 Проверить следующие равенства для коммутаторов:

а) $\left[x^2, \left[x, \hat{P}_x^2\right]\right] = -4\hbar^2 x$,

б) $\left[\hat{H}, \hat{P}_x\right] = \imath\hbar \frac{\partial U}{\partial x}$.

4 Показать, что операторы $\hat{P}_x$ и $\hat{P}_y$ имеют общую собственную волновую функцию.

5. Доказать следующие правила коммутации:

$$\left[\hat{L}_x, \hat{L}^2\right] = 0; \left[\hat{L}_y \hat{L}_z\right] = \imath\hbar \hat{L}_x; \left[\hat{L}_x \hat{L}_y\right] = \imath\hbar \hat{L}_z.$$

6. Докажите, что $\varphi = \left(\hat{L}_x + \imath \hat{L}_y\right)\psi_{\ell m_\ell}$ является собственной функцией операторов $\hat{L}^2$ и $\hat{L}_z$, где $\psi_{\ell m_\ell}$ - собственная функция операторов $\hat{L}^2$ и $\hat{L}_z$, отвечающая их собственным значениям $\hbar^2 \ell(\ell+1)$ и $m_\ell \hbar$ соответственно.

Практическое занятие № 8

Тема: Атом водорода по Шредингеру. Термы многоэлектронных атомов. Спин – орбитальное взаимодействие, тонкая структура атомных спектров.

Контрольные вопросы:

1. Что называют термом атома, его обозначение в виде символа, принятого в спектроскопии.
2. Квантовые числа, характеризующие квантовомеханическое состояние атома водорода в I-ом электростатическом приближении. Что они определяют, что характеризуют?
3. На основе какого принципа можно объяснить наличие электронных оболочек в атоме?
4. Какие квантовые числа имеет внешний, или валентный, электрон в основном состоянии атома калия?
5. От каких квантовых чисел зависит энергия терма атома с учетом спин – орбитального взаимодействия?
6. Чему равна спин – орбитальная мультиплетность, как она влияет на спектральные линии атомных спектров?

Основные формулы

- $E_n = -\frac{z^2}{n^2}\frac{E_0}{\left(1+\frac{m}{M}\right)}$ - полная энергия терма атома в I – ом электростатическом приближении (без учета спин – орбитального взаимодействия).

n = 1, 2, 3,…(неограниченно) – главное квантовое число;
E_0 = 13.6 эВ; m – масса электрона; M – масса ядра.

-

ℓ =	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**…**
	s	***p***	***d***	***f***	***g***	**…**

Буквенные обозначения орбитального квантового числа ℓ.

- $\psi_{1s}(r,t) = R_{1s}(r)\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ - волновая функция основного состояния атома водорода.

Где

$$R_{1s}(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a_{Á}^{3}}}\cdot e^{-r/a_{Á}},$$

$a_{Á}=0.529\cdot 10^{-8}$см - радиус Бора

• $\langle f\rangle=\int\limits_{V}\psi^{*}\hat{F}\psi dV$ - среднее значение некоторой физической величины *f* в квантовомеханическом состоянии ψ.

ψ - нормированная волновая функция; $\hat{F}$ - оператор, соответствующий величине *f*; dV – элемент объема.

•

$$\left.\begin{array}{c}\Delta n=n_2-n_1\ (\text{ëþáîå})\\ \Delta\ell=\pm 1\\ \Delta j=0,\pm 1\\ \Delta s=0\end{array}\right\}$$

Правила отбора спектральных переходов по изменению квантовых чисел *n*, ℓ, *j*, *s*.

Примеры решения задач

Пример 8.1. Определить возможные значения орбитального момента импульса *L* электрона в возбужденном атоме водорода, если энергия возбуждения ΔE = 12.09 эВ.

Решение

Возможные значения орбитального момента *L* определяются по формуле квантования

$$L=\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}.$$

Число возможных значений орбитального квантового числа ℓ равно главному квантовому числу n. Поэтому необходимо найти главное квантовое число, соответствующее данному возбужденному состоянию.

Учитывая, что энергия возбуждения атома водорода равна:

$$\Delta E = E_n - E_1\,,\ \text{где } E_1 = -13.6 \text{ эВ},$$

найдем энергию возбужденного состояния n:

$$E_n = -13.6 + 12.09 = -1.51 \text{ эВ}.$$

Так как энергия возбужденного состояния n в атоме водорода определяется по формуле:

$$E_n = -\frac{z^2}{n^2}\cdot\frac{E_0}{1+\frac{m}{M}} \approx -\frac{13.6}{n^2},$$

получим, что $-\frac{13.6}{n^2} = -1.51 \Rightarrow n^2 \approx 9 \Rightarrow n = 3$.

Для $n = 3$ ℓ принимает значения 0, 1, 2, следовательно, орбитальный момент импульса L соответствующие значения:

$$L_1 = 0; \qquad L_2 = \hbar\sqrt{2}; \qquad L_3 = \hbar\sqrt{6}.$$

Пример 8.2. Найти средний электростатический потенциал, создаваемый 1*s* – электроном в центре атома водорода.

Решение

1*s* — основное состояние атома водорода, которое описывается следующими квантовыми числами:

$$n = 1,\ \ell = 0,\ m_\ell = 0,\ m_s = \pm 1/2\,.$$

Волновая функция, описывающая электрон в этом состоянии имеет вид:

$$\psi_{1s} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_{Á}}}\cdot e^{-r/a_{Á}}\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\,.$$

Среднее значение потенциала φ найдем по квантовомеханическому рецепту:

$$\left\langle \varphi_{1s} \right\rangle = \int_V \psi_{1s}^* \hat{\varphi}_{1s} \psi dV\,,$$

здесь $dV = 4\pi r^2 dr$ (сферическая симметрия).

Оператор $\widehat{\varphi}_{1s}$ найдем по теореме Эренфеста. В классике потенциал точечного заряда определяется соотношением

$$\varphi = e/r\,,$$

следовательно, в квантовой механике

$$\widehat{\varphi}_{1s} = e/\widehat{r} = \frac{e}{r},$$

так как $\widehat{r} = r$ (оператор умножения).

Подставим волновую функцию ψ_{1s}, элемент объема dV и оператор $\widehat{\varphi}$ в выражение для $\langle \varphi_{1s} \rangle$:

$$\langle \varphi_{1s} \rangle = \frac{4\pi e}{\pi a_Б^3} \int_0^\infty e^{-2r/a_Б} \frac{r^2 dr}{r} = \frac{4e}{a_Б^3} \int_0^\infty e^{-2r/a_Б} \cdot r dr\,.$$

Получили интеграл вида

$$\int_0^\infty x^n e^{\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}\,.$$

Взяв интеграл, найдем, что

$$\langle \varphi_{1s} \rangle = \frac{e}{a_Á}\,.$$

Следовательно, электростатический потенциал, создаваемый 1*s* – электроном в центре атома водорода определяется величиной заряда электрона **e** и наиболее вероятным расстоянием 1*s* – электрона от ядра $a_Б$.

Пример 8.3. Выписать возможные типы термов атома, содержащего кроме заполненных оболочек два электрона, *s* и *p***.**

Решение

Возможные типы термов атома с учетом спин – орбитального взаимодействия определяются возможными значениями полного квантового числа *j*.

Так как для замкнутых оболочек всегда $L = 0$ и $S = 0$, то полный орбитальный момент и полный спиновый моменты атома в целом будут определяться векторной суммой соответствующих моментов *s* и *p* – электронов.

При использовании векторной модели существенно соблюдать следующее правило. При сложении каких – либо двух векторов момента они могут быть либо параллельны (в этом случае модуль их суммы равен сумме модулей отдельных векторов), либо антипараллельны (в этом случае модуль их суммы равен разности их модулей). Остальные значения векторной суммы лежат между этими двумя предельными и отличаются друг от друга на целое кратное $\hbar$. Эти правила могут быть интерпретированы просто как законы сложения квантовых чисел.

s - электрон $\Rightarrow \ell = 0,\ s = 1/2$;

p – электрон $\Rightarrow \ell = 1,\ s = 1/2$.

Суммарное орбитальное квантовое число:

$$\ell = \ell_s + \ell_p = 0 + 1 = 1$$

Суммарное спиновое квантовое число: $\begin{cases} s = s_s + s_p = 1/2 + 1/2 = 1, \\ s = s_s - s_p = 1/2 - 1/2 = 0. \end{cases}$

Теперь найдем возможные значения полного квантового числа *j*:

$$j = |\ell - s| \ldots\ldots |\ell + s| \quad \text{(всего } 2s+1 \text{ значений).}$$

Таким образом, полное квантовое число может принимать три значения:

$j = \{0, 1, 2\}$ с мультиплетностью 2*s*+1=3

и одно значение $j = 1$ с мультиплетностью 2s+1=1.

Так как орбитальному числу ℓ = 1соответствует буквенное обозначение *P*, то возможные типы термов данного атома будут иметь вид:

$$^3P_0, {}^3P_1, {}^3P_2, {}^1P_1$$

Пример 8.4. Заполненный электронный слой характеризуется квантовым числом *n* = 3. Указать число *N* электронов в этом слое, которые имеют одинаковые квантовые числа:

а) $m_s = +1/2$; б) $m_s = -1/2$, $m_\ell = 0$

Решение

Электронный слой, характеризующийся квантовым числом *n* = 3 образует *M* – оболочку, которая содержит 3 подоболочки:

$$3s(\ell=0);\ 3p(\ell=1);\ 3d(\ell=2).$$

Всего по принципу Паули в M – оболочке может содержаться

$$N_{max} = 2n^2 = 18 \text{ электронов},$$

из которых 9 имеют одно направление спина, то есть $m_s = +1/2$, а 9 – другое направление спина, то есть $m_s = -1/2$.0 $m_s = +1/2$ равно 9.

Из 9 электронов, которые имеют $m_s = -1/2$ всего три электрона имеют $m_\ell = 0$, а именно:

3*s* состояние: $\ell = 0, m_\ell = 0$;

3*p* состояние: $\ell = 1, m_\ell = 0, \pm 1$;

3*d* состояние: $\ell = 2, m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны λ = 121.5 нм. Определите возможные значения полного механического момента электрона возбужденного атома водорода (в единицах $\hbar$).

2. Электрон в атоме водорода находится в 1*s* –состоянии, которое описывается нормированной волновой функцией:

$$\psi(r,t) = R(r) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et},$$

где

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_{\acute{A}}^3}} \cdot e^{-r/a_{\acute{A}}}.$$

Найти среднее значение расстояния от ядра и наиболее вероятное расстояние от ядра.

3. Атом водорода находится в *f*-состоянии. Найдите собственный момент электрона.

4. Сколько различных типов термов возможно у двухэлектронной системы, состоящей из *d* и *f* электронов.

5. Определите число компонент тонкой структуры головной линии серии Бальмера атомарного водорода.

6. Определите возможную мультиплетность терма $D_{3/2}$.

Практическое занятие № 9

Тема: Атом во внешнем магнитном поле (эффект Штерна и Герлаха, эффект Зеемана).

Контрольные вопросы:

1. Квантование магнитных моментов (орбитального, спинового, полного)
2. Энергия взаимодействия магнитного момента атома с внешним магнитным полем.
3. Сила, действующая на нейтральный атом серебра, находящийся в неоднородном магнитном поле.
4. Магнитный момент атома серы равен магнитному моменту электронов в $3P^4$ – состоянии. На сколько компонент расщепится пучок атомов серы в неоднородном магнитном поле?
5. С чем связано расщепление спектральных линий, испускаемых атомом, помещенным в однородное магнитное поле?
6. Почему в очень сильных магнитных полях сложный эффект Зеемана вновь превращается в простой?

Основные формулы

- $M_j = g_j M_Б \sqrt{j(j+1)}$ - магнитный момент атома, где

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1)+s(s+1)-\ell(\ell+1)}{2j(j+1)}$$

- множитель Ланде (фактор Ланде); j, ℓ, s – соответствующие квантовые числа (полное, орбитальное, спиновое), $M_Á = \frac{e\hbar}{2mc}$ - магнетон Бора; $g_j M_Á$ - квант магнитного момента.

- $M_{jz} = g_j M_Б m_j$ - проекция магнитного момента атома на направление z, где m_j – полное магнитное квантовое число.

- $\vec{F} = \vec{M}_j grad\vec{B}$ - сила, действующая на атом с магнитным моментом $\vec{M}_j$, помещенным в неоднородное магнитное поле $\vec{B}$.

- $\omega_{21} = \omega_{21}^0 + \frac{M_Б B}{\hbar}\left(m_{j1} g_{j1} - m_{j2} g_{j2}\right)$ - формула Зеемана, определяющая положение спектральных линий в слабом магнитном поле, где ω_{21}^0 - частота излучения в отсутствие поля, m_j g_j - магнитные квантовые числа и множители Ланде соответствующих термов;

$$\Delta\omega = \frac{M_Б B}{\hbar}\left(m_{j1} g_{j1} - m_{j2} g_{j2}\right)$$

- компоненты зеемановского смещения спектральных линий; по правилам отбора квантовых чисел

$$\Delta m_j = 0, \pm 1 .$$

Если, например,

$$m_{j1} = 3/2,\ m_{j2} = -1/2 ,$$

то $\Delta m_j = 2$ - такой переход не разрешен.

Примеры решения задач

Пример 9.1. Найти для атома, находящегося в состояниях ^1F и $^2D_{3/2}$, магнитный момент и возможные значения проекции магнитного момента на направление *z* в единицах магнетона Бора.

Решение

Атом, находящийся в состоянии ^1F описывается следующими квантовыми числами:

$$\ell = 3(F),\ 2s + 1 = 1 \Rightarrow s = 0.$$

Соответственно $j = \ell = 3$.

Магнитный момент атома в состоянии ^1F:

$$M_j = M_\ell = M_Б \cdot g_\ell \sqrt{\ell(\ell+1)} = 2\sqrt{3} M_Б ,$$

где $g_\ell = 1$.

Проекцию магнитного момента на направление *z* определим по формуле:

$$M_{jz} = M_{\ell z} = g_\ell M_Б m_\ell = M_Б m_\ell,$$

где

$$m_\ell = \{-\ell.....+\ell\} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \text{ (всего } (2\ell+1) = 7 \text{ значений)}$$

Таким образом, возможные ориентации вектора M_j на направление z для атома, находящегося в состоянии ^1F, будут иметь вид:

$$M_{jz1} = 0;\ M_{jz_{2,3}} = \pm M_Б;\ M_{jz_{4,5}} = \pm 2M_Б;\ M_{jz_{6,7}} = \pm 3M_Б.$$

Состояние атома $^2D_{3/2}$ описывается следующими квантовыми числами:

$$\ell = 2(D);\quad s = \frac{1}{2};\quad j = \frac{3}{2}.$$

Магнитный момент атома в этом состоянии определится по формуле:

$$M_j = M_Á g_j \sqrt{j(j+1)},$$

где

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)}{2j(j+1)} = 4/5.$$

$$M_j = 4/5 \cdot M_Á \sqrt{\frac{3}{2}\left(3/2 + 1\right)} = 2\sqrt{0.6} M_Á = 1.55 M_Á.$$

Соответствующие этому магнитному моменту проекции на направление z будут иметь вид:

$$M_{jz} = g_j M_Б m_j, \text{ где } m_j = \{-j.....+j\} = \{-3/2, -1/2, +1/2, +3/2\},$$

(всего $2j + 1 = 4$ значений).

То есть

$$M_{jz_{1,2}} = \pm 0.4 M_Á,\quad M_{jz_{3,4}} = \pm 1.2 M_Á.$$

Пример 9.2. В опыте Штерна и Герлаха узкий пучок атомов серебра (в нормальном состоянии) проходит через поперечное резко неоднородное магнитное поле и попадает на экран. При каком значении градиента индукции магнитного поля расщепление пучка на экране $\delta = 2$ мм, если длина магнита $a = 10$ см, расстояние от магнита до экрана $b = 20$ см и скорость атомов $\upsilon = 300$ м/с?

Решение

Атомы серебра в невозбужденном состоянии содержат один валентный электрон в S – состоянии, следовательно, орбитальный момент невозбужденных атомов серебра равен нулю. Таким образом, магнитный момент атомов серебра будет равен спиновому магнитному моменту валентного электрона, а именно:

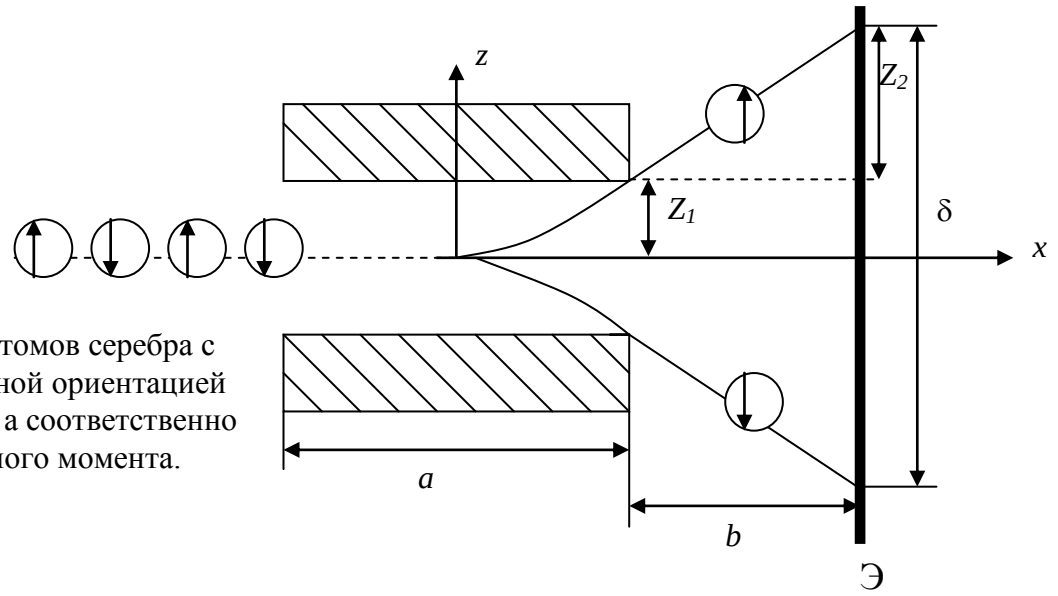
$$M_j = M_s = 2M_Б\sqrt{s(s+1)},$$

где s = 1/2; $g_s = 2$.

Соответствующая проекция магнитного момента на выделенное направление z будет равна:

$$M_{jz} = M_{sz} = 2M_Б m_s,$$

где $m_s = \pm 1/2$.



Пучок атомов серебра с возможной ориентацией спинов, а соответственно магнитного момента.

$$\vec{B} \uparrow\uparrow Z$$

Величина силы, действующей на атом серебра в неоднородном магнитном поле, будет определяться по формуле

$$F_z = M_{jz}\frac{dB_z}{dz} = 2M_Б\frac{dB_z}{dz}\cdot m_s.$$

Из этой формулы можно найти градиент B, то есть $\frac{dB_z}{dz}$:

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{F_z}{2M_Б m_s}.$$

Так как по модулю $m_s = 1/2$, получим:

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{F_z}{M_Б}.$$

Силу F_z найдем из второго закона Ньютона:

$$m\vec{a}_z = \vec{F}_z,$$

где $a_z = \frac{2z_1}{t_a^2}$ (ускорение в направлении z на протяжении магнита).

Из рисунка видно, что

$$z_1 = \delta/2 - z_2,$$

где $z_2 = \upsilon_{0b} \cdot t_b$ - расстояние в направлении z вне поля.

Учитывая, что

$$\upsilon_{0b} = a_z \cdot t_a, \text{ а } t_a = \frac{a}{\upsilon};\ t_b = \frac{b}{\upsilon},$$

где υ – скорость атомов, t_a и t_b – время движения атомов внутри магнита и вне магнита соответственно, получим:

$$z_1 = \delta/2 - (a_z t_a) \cdot t_b.$$

Подставив полученное выражение в формулу для ускорения

$$a_z = \frac{2z_1}{t_a^2}$$

с учетом выражений для t_a и t_b, найдем, что

$$a_z = \frac{\delta\upsilon^2}{a^2 + 2ab}.$$

Соответственно сила

$$F_z = \frac{m\delta\upsilon^2}{a(a+2b)},$$

Тогда

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{m\delta\upsilon^2}{a(a+2b) \cdot M_Á}.$$

Подставив в полученную формулу значения в единицах системы СГС, найдем, что

$$\frac{dB_z}{dz} = 7 \text{ кГс/см.}$$

Пример 9.3. Построить схему возможных переходов в однородном магнитном поле между состояниями $^1D \to {}^1P$. Сколько компонент содержит спектральная линия, соответствующая этому переходу?

Решение

Состояние ^1D описывается квантовыми числами:

$$\ell = 2.2s + 1 = 1 \Rightarrow s = 0,\ j = \ell = 1,$$

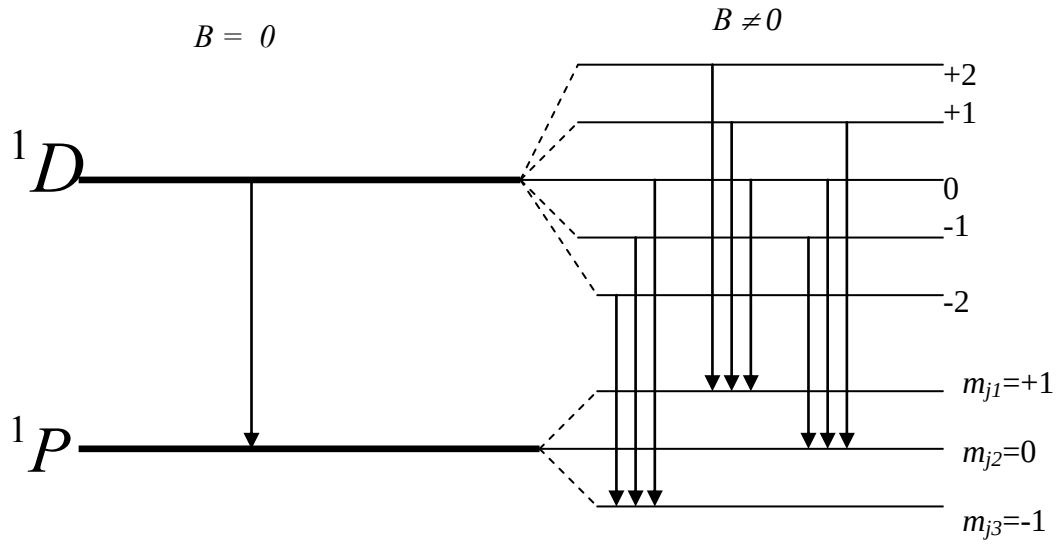
Состояние ^1P описывается квантовыми числами:

$$\ell = 1, s = 0,\ j = \ell = 1.$$

Так как g – факторы в обоих состояниях не равны нулю ($g_{j1} = g_{j2} = g_\ell = 1$),

то каждый терм в магнитном поле расщепится на (2j + 1) подтермов:

$$^1P \to \text{ на три; } {}^1D \to \text{ на пять.}$$



Возможные переходы определяются правилом отбора:

$$\Delta m_j = 0, \pm 1 .$$

По формуле зеемановского смещения:

$$\Delta\omega = \frac{M_Б B}{\hbar}\left(m_1 g_1 - m_2 g_2\right) = \frac{M_Б B}{\hbar} g_\ell \Delta m_j ,$$

так как $g_1 = g_2 = g_\ell$.

Таким образом, спектральная линия, соответствующая переходу $^1D \to {}^1P$ в магнитном поле расщепится на три компоненты.

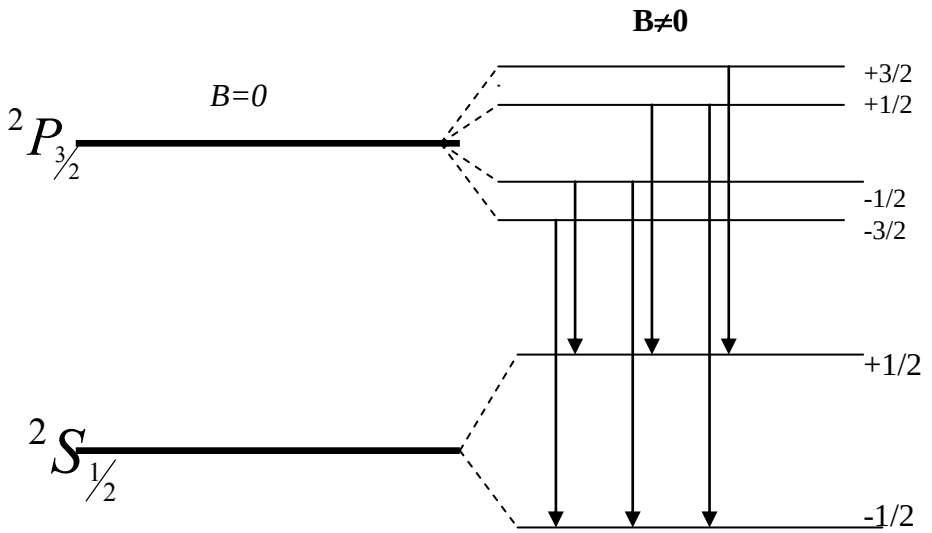
Пример 9.4. Построить схему возможных переходов между термами $^2P_{3/2}$ и $^2S_{1/2}$ в слабом магнитном поле. Вычислить для соответствующей спектральной линии интервал между крайними компонентами в единицах см$^{-1}$, если, если B = 5 кГс.

Решение

$$^2P_{3/2} \Rightarrow \ell = 1, 2s + 1 = 2 \to s = 1/2, j = 3/2, g_1 = 4/3 ,$$

$$^2S_{1/2} \Rightarrow \ell = 0, s = 1/2 , j = 1/2 , g_2 = 2 .$$

Схема возможных переходов



Правилу отбора Δm = 0, ±1 удовлетворяет шесть спектральных линий, частота которых определяется по формуле Зеемана:

$$\nu = \nu_0 \pm \frac{(m_1 g_1 - m_2 g_2) M_{Á} B}{h},$$

$$m_1 g_1 \Rightarrow +6/3, +2/3, -2/3, -6/3,$$

$$m_2 g_2 \Rightarrow +1, -1.$$

Таким образом, по формуле Зеемана получим шесть компонент:

$$\nu_{16} = \nu_0 \pm \frac{5}{3}\frac{M_{Б} B}{h}; \quad \nu_{25} = \nu_0 \pm \frac{3}{3}\frac{M_{Á} B}{h};$$

$$\nu_{34} = \nu_0 \pm \frac{1}{3}\frac{M_{Á} B}{h};$$

Интервал между крайними компонентами в единицах частоты ν равен:

$$\Delta\nu_{16} = \frac{10}{3} \cdot \frac{M_{Á} B}{h};$$

В единицах обратных длине волны он будет иметь вид:

$$\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{\Delta\nu}{c} = \frac{10}{3} \cdot \frac{M_{Á} B}{hc},$$

так как $\lambda = \frac{c}{\nu}$, а $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c}\Delta\nu$.

Подставив в полученную формулу значения в единицах СГС, получим, что

$$\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) \approx 0.78 \text{ см}^{-1}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите в магнетонах Бора возможные значения магнитного момента атома в состоянии с $s = 1$, $\ell = 2$.

2. Узкий пучок атомов пропускают по методу Штерна и Герлаха через резко неоднородное поле. Определите максимальное значение проекции магнитного момента атомов в состоянии ^4F, если известно. Что пучок в этом случае расщепляется на 4 компоненты.

3. Найдите механические моменты атомов в состояниях ^5F и ^7H, если известно, что в этих состояниях магнитные моменты равны нулю.

4. В опыте по расщеплению атомарного пучка по методу Штерна и Герлаха использовали атомы ванадия в состоянии $^4F_{3/2}$. Найти расстояние между крайними компонентами пучка на экране, если длина магнита a = 10 см, расстояние от магнита до экрана b = 20 см, градиент индукции поля $\frac{dB}{dz} = 23$ кГс/см., кинетическая энергия атомов T = 0.04 эВ.

5. Построить схему возможных переходов между термами $^5I_5 \to {}^5H_4$ в слабом магнитном поле. Вычислить для соответствующей спектральной линии смещения зеемановских компонент в единицах $M_{Á}B/\hbar$.

6. На сколько компонент расщепится в магнитном поле уровень энергии электрона с квантовым числом $\ell = 2$ и какова будет разность энергий соседних уровней, если напряженность магнитного поля равна 5000 Э?

7. Найти минимальную разрешающую способность $\lambda/\delta\lambda$ спектрального прибора, который позволит разрешить зеемановскую структуру спектральной линии 589 нм. $\left({}^2P_{3/2} \to {}^2S_{1/2} \right)$ натрия в магнитном поле $B = 2$ кГс.

Варианты индивидуального задания №1

1

1. Найти вероятность того, что альфа – частица с энергией $T = 3$ МэВ. при прохождении свинцовой фольги толщиной 1.5 мкм испытывает рассеяние в интервале углов $60^0 \div 90^0$.

2. Атом позитрония образован электроном и позитроном, вращающимися вокруг общего центра инерции. Найти длину волны третьей линии серии Бальмера.

3. Фотон с энергией 350 кэВ. испытал рассеяние на покоившемся свободном электроне. Определить угол между направлениями разлета электрона отдачи и рассеянного фотона, комптоновское смещение длины волны которого составляет 1.2 пм.

4. Найти длину волны электрона, имевшего начальную скорость 10^6 м/с и ускоренного разностью потенциалов 4 В.

5 Оценить минимальную кинетическую энергию электрона, локализованного в области размером $a = 0.10$ нм.

2

1. Найти эффективное сечение ядра атома урана, соответствующее рассеянию альфа – частиц с кинетической энергией $T = 1.5$ МэВ в интервале углов свыше $\theta = 60^0$.

2. У какого водородоподобного иона разность длин волн головных линий серии Бальмера и Лаймана равна 59.3 нм?

3. Дейтон с длиной волны 2.0 пм упруго рассеялся под углом 90^0 на первоначально покоившемся ядре гелия. Определить длину волны рассеянного дейтона.

4. Найти энергию налетающего фотона, если известно, что при рассеянии под углом $\theta = 60^0$ на покоившемся свободном электроне последний приобрел кинетическую энергию $T = 0.450$ МэВ.

5. Свободный электрон в начальный момент был локализован в области размером $a = 10^{-8}$ см. Оценить промежуток времени, за который ширина соответствующего волнового пакета увеличится в 10^2 раз.

3

---

1. На какое минимальное расстояние приблизится при центральном ударе альфа – частица к ядру олова? Скорость α - частицы равна 10^9 см/с (ядро олова считать неподвижным).

2. Нерелятивистский дейтон с кинетической энергией T = 12 кэВ испытал упругое рассеяние на первоначально покоившемся ядре гелия. Найти в Ц – системе импульс каждой частицы и их суммарную кинетическую энергию.

3. На поверхность металла падает поток излучения с длиной волны 360 мкм и мощностью 5 мкВт. Определить силу тока насыщения, если 5% всех падающих фотонов выбивают из металла электроны.

4. Определить квантовое число n возбужденного состояния атома водорода, если известно, что при переходе в основное состояние атом излучил два фотона, с λ_1 = 656.3 нм и λ_2 = 121.6 нм.

5. Протон с кинетической энергией T = 0.5 эВ испытал упругое соударение с первоначально покоившимся дейтоном. Найти длины волн обеих частиц в Ц – системе до и после соударения.

4

---

1. Узкий пучок протонов с энергией 1 МэВ падает на серебряную фольгу толщиной 1.2 мг/см^2. Протоны, рассеянные под углом 60^0, регистрирует счетчик с входным отверстием площадью 1 см^2 и отстоящий от рассеивающей фольги на расстоянии 10 см. Какая доля рассеянных протонов попадет в отверстие счетчика?

2. В спектре некоторых водородоподобных ионов длина волны второй линии серии Пашена равна 32000 нм. Найти энергию связи электрона в основном состоянии этих ионов.

3. Нерелятивистский протон упруго рассеялся под углом θ на первоначально покоившемся ядре гелия. Найти этот угол, если известно, что соответствующий угол в Ц – системе $\tilde{\theta} = 60^0$.

4. Излучение с энергией 15 Дж освещает площадку 2 см^2 в течение 61 с. Определить световое давление в случаях:

а) полного отражения излучения;

б) полного поглощения излучения.

5. Вычислить длину волны релятивистских электронов, подлетающих к антикатоду рентгеновской трубки, если длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра равна 10 пм.

5

---

1. Дифференциальное сечение рассеяния α - частиц кулоновским полем неподвижного ядра $\frac{d\sigma}{d\Omega} = 7 \cdot 10^{-22}$ см^2/стер. Для угла $\theta_0 = 30^0$. Вычислить сечение рассеяния α - частиц в интервале углов $\theta > \theta_0$.

2. Фотон , испущенный ионом He^+ при переходе из первого возбужденного состояния в основное, ионизирует атом водорода, находящийся в основном состоянии. Найти скорость фотоэлектронов.

3. Найти энергию налетающего фотона, если известно, что при рассеянии под углом $\theta = 60^0$ на покоящемся свободном электроне последний приобрел кинетическую энергию $T = 0.45$ МэВ.

4. Чему равна при комнатной температуре (300^0 К) скорость нейтронов с кинетической энергией, равной ½ kT (типичный "тепловой " нейтрон)? Чему равна для него длина волны де Бройля?

5. Оценить наименьшие погрешности, с которыми можно определить скорость электрона, протона и атома урана, локализованных в области размером 1 мкм.

6

---

1. Альфа – частицы с кинетической энергией T = 1.7 МэВ рассеиваются кулоновским полем ядер атомов свинца. Определить дифференциальные сечения этих ядер $d\sigma/d\theta$ и $d\sigma/d\Omega$, отвечающие рассеянию на угол $\theta = \pi/2$.

2. Найти максимальное значение угла рассеяния α - частицы на первоначально покоящемся дейтоне.

3. В каких пределах должны лежать длины волн монохроматического света, чтобы при возбуждении атомов водорода квантами этого света радиус орбиты электрона увеличился в 9 раз.

4. Рентгеновский фотон с энергией 20 кэВ претерпевает комптоновское рассеяние на электроне. Чему равна длина волны падающего фотона и фотона, рассеянного на угол 90^0? Чему равны энергия рассеянного фотона и кинетическая энергия электрона отдачи?

5. Оценить неопределенность скорости электрона в атоме водорода, пологая размер атома порядка 10^{-8} см**.** Сравнить полученное значение со скоростью электрона на первой боровской орбите.

7

---

1. Узкий пучок альфа – частиц с энергией 3 МэВ падает нормально на свинцовую фольгу толщиной 1.5 мкм. Найти вероятность рассеяния α -частиц в интервале углов:

а) $59^0 \div 61^0$,
б) $60^0 \div 90^0$**.**

2. Альфа – частица с кинетической энергией T = 60 кэВ упруго рассеялась на первоначально покоящемся ядре дейтона. Найти прицельный параметр, соответствующий максимально возможному углу рассеяния α - частиц в Л – системе.

3. Атомарный водород возбуждают на n–й энергетический уровень. Определить:

а) длины волн испускаемых линий, если n = 4; каким сериям принадлежат эти линии?
б) сколько линий испускает водород, если n = 10?

4. Фотон с длиной волны 0.08 нм испытывает комптоновское рассеяние на 90^0. Чему равна энергия рассеянного фотона и какую энергию фотон передал электрону?

5. Чему равна длина волны де Бройля для α - частицы с кинетической энергией 7.7 МэВ? В опытах по резерфордовскому рассеянию существенны расстояния порядка 10^{-13}м, однако при анализе опыта не учитывались волновые свойства α - частицы. Правильно ли это?

8

---

1. Узкий пучок протонов с кинетической энергией T = 1 МэВ падает нормально на медную фольгу толщиной ρd = 1.5 мг/см^2. Найти долю протонов, рассеивающихся на углы свыше $\theta = 30^0$.

2. Протон с прицельным параметром b = $2.5 \cdot 10^{-11}$ см упруго рассеялся под прямым углом в кулоновском поле покоившегося дейтона. Найти относительную скорость частиц после рассеяния.

3. Вычислить скорость электронов, вырываемых светом с длиной волны 18 нм из ионов He^+, находящихся в основном состоянии.

4. Ток, возникающий в цепи вакуумного фотоэлемента при освещении цинкового электрода электромагнитным излучением с длиной волны 0.262 мкм прекращается, когда внешняя задерживающая разность потенциалов достигает значения V_a = 1.5 В. Определить значение и полярность внешней контактной разности потенциалов данного фотоэлемента.

5. Какую дополнительную энергию необходимо сообщить электрону с импульсом 15 кэВ/с (c – скорость света), чтобы его длина волны стала равной 50 пм?

9

---

1. При рассеянии альфа – частицы с кинетической энергией T = 25 кэВ в кулоновском поле покоящегося ядра лития $^6Li_3$ последнее испытало отдачу под углом 45^0 к направлению движения налетающей частицы. Вычислить прицельный параметр.

2. Для полной задержки фотоэлектронов, выбитых из некоторого вещества излучением с длиной волны 210 нм, требуется напряжение 2.7 В. Чему равна работа выхода этого вещества?

3. Считая ядро неподвижным, вычислить для ионов He^+ и Li^{++}:

а) радиусы первых двух боровских орбит и скорости электрона на них;
б) кинетическую энергию электрона и его энергию связи в основном состоянии;
в) первый потенциал возбуждения и длину волны резонансной линии.

4. Два атома $^1H_1$ и $^4He_2$, движутся в одном направлении, причем дебройлевская длина волны каждого атома λ = 60 пм. Найти длины волн обоих атомов в их Ц – системе.

5. Пучок электронов с кинетической энергией T= 180 эВ падает нормально на поверхность монокристалла никеля. В направлении, составляющем угол 55^0 с нормалью к поверхности, наблюдается максимум отражения четвертого порядка. Найти межплоскостное расстояние, соответствующее этому отражению.

10

---

1. Частица с массой m_1 и кинетической энергией T_{10} испытала упругое соударение (лобовое) с первоначально покоившейся частицей с массой m_2. Найти с помощью импульсной диаграммы кинетическую энергию налетающей частицы после соударения.

2. Найти максимальную кинетическую энергию фотоэлектронов, вырываемых с поверхности лития электромагнитным излучением, напряженность электрической составляющей которого изменяется во времени по закону:
$$E = a(1+\cos\omega t)\cos\omega_0 t,$$
где a – постоянная, $\omega = 6.0 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$, $\omega_0 = 3.6 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$.

3. Узкий пучок рентгеновского излучения с длиной волны λ падает на рассеивающее вещество. Найти λ, если длины волн смещенных составляющих излучения, рассеянного под углами $\theta_1 = 60^0$ и $\theta_2 = 120^0$, отличаются друг от друга в 2 раза.

4. С какой минимальной скоростью должны сближаться ион He^+ и атом водорода, чтобы испущенный ионом He^+ фотон, соответствующий головной линии серии Бальмера, смог возбудить атом водорода из основного состояния? (использовать точную формулу доплеровского эффекта).

5. Определить кинетическую энергию протона, длина волны которого такая же, как у α - частицы с $B \cdot \rho$ = 25 кГс·см, где B – магнитная индукция; ρ - радиус кривизны траектории.

Варианты индивидуального задания №2

1

1. Проверить следующее операторное равенство:

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx}.$$

2. Вычислить полную энергию *E*, орбитальный момент импульса *L* и магнитный орбитальный момент M_ℓ электрона, находящегося в 2 *p* – состоянии в атоме водорода.

3. Определить для ионов He^+ число компонент тонкой структуры и интервал (в $см^{-1}$ и длинах волн) между крайними компонентами головной линии серии Бальмера.

4. Вычислить множитель Ланде для атомов с одним валентным электроном в состояниях S, P и D.

5. Какой эффект Зеемана (простой или сложный) обнаруживает в слабом магнитном поле спектральная линия, соответствующая переходу

$$^3D_1 \rightarrow {}^3P_0.$$

2

1. Найти собственное значение оператора $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx}$, принадлежащее собственной функции:

$$\Psi_A = \frac{\sin \alpha x}{x}.$$

2. Найти решение временного уравнения Шредингера для свободной частицы, движущейся с импульсом *P* в положительном направлении оси *x*.

3. Момент импульса *L* орбитального движения электрона в атоме водорода равен $1.83 \cdot 10^{-32}$ Дж·с. Определить магнитный момент, обусловленный орбитальным движением электрона.

4. Выписать возможные термы атома, содержащего кроме заполненных оболочек два электрона, *p* и *d*.

5. Магнитное поле в случае сложного эффекта Зеемана считается слабым, если магнитное расщепление терма значительно меньше естественного мультиплетного расщепления. Выяснить при какой напряженности магнитного поля интервал между соседними компонентами термов $3^2P_{1/2}$ и $3^2P_{3/2}$ атома Na будет составлять 1/10 естественного расщепления 3^2P - состояния (дублет натрия → λ_1 = 589.583 нм, λ_2 = 588.996 нм).

3

---

1. Найти с помощью уравнения Шредингера энергию гармонического осциллятора с частотой ω в стационарном состоянии:

$$\Psi(x) = Bx\exp\left(-a^2x^2\right),$$

где *B* и *a* – постоянные.

2. Зависящая от угла φ угловая функция имеет вид $\Phi(\varphi) = C \cdot e^{im\varphi}$. Используя условие нормировки, определить постоянную *C*.

3. Определить возможные значения проекции орбитального момента импульса электрона в атоме на направление внешнего магнитного поля. Электрон находится в *d* – состоянии.

4. Найти число электронов в атоме, у которого в основном состоянии заполнены К и L – слои, 3 *s* – оболочка и наполовину 3 *p* – оболочка.

5. Построить схему возможных переходов в магнитном поле между следующими состояниями:

$$^1F \rightarrow {}^1D.$$

4

---

1. Проверить следующее операторное равенство:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

2. Найти вероятность прохождения электрона через прямоугольный потенциальный барьер при разности энергий $U - E = 1$ эВ, если ширина барьера 0.5 нм.

3. Электрон в возбужденном атоме водорода находится в $3p$ – состоянии. Определить изменение магнитного момента, обусловленного орбитальным движением электрона, при переходе атома в основное состояние.

4. Определить для ионов He^+ число компонент тонкой структуры головной линии серии Бальмера.

5. Изобразить схему возможных переходов в слабом магнитном поле и вычислить смещение (в единицах $\mu_B \cdot B / \hbar$) зеемановских компонент спектральной линии: $^2D_{5/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$.

5

---

1. Проверить правило коммутации для гамильтониана $\widehat{H}$ в потенциальном поле $U(x)$:

$$\left[\widehat{H},\widehat{P}_x\right]=i\hbar\frac{\partial U}{\partial x}.$$

2. Ширина прямоугольного потенциального барьера равна 0.2 нм. Разность энергий $U - E =$ 1 эВ. Во сколько раз изменится вероятность прохождения электрона через барьер, если разность энергий возрастет в 10 раз?

3. Атом водорода находится в состоянии $1s$. Определить вероятность пребывания электрона в атоме внутри сферы радиусом $r = 0.1a_Б$ (где $a_Б$ – радиус первой боровской орбиты)

$$\Psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_{Á}^{3}}} e^{-r/a_{Á}}.$$

4. Определить основной терм атома, незамкнутая подоболочка которого заполнена ровно наполовину пятью электронами.

5. Найти механические моменты атомов в состояниях ^5F и ^7H если известно, что в этих состояниях магнитные моменты равны нулю.

6

---

1. Найти для 1*s* – электрона в атоме водорода наиболее вероятное расстояние от ядра $r_{вер.}$ И вероятность нахождения электрона в области $r < r_{вер.}$

2. Определить максимально возможный орбитальный механический момент атома, находящегося в состоянии, мультиплетность которого 5 и кратность вырождения по *j* равна 7**.**

3. Определить возможные значения магнитного момента атома в состоянии ^4P.

4. Узкий пучок атомов пропускают по методу Штерна и Герлаха через резко неоднородное магнитное поле. Определить:

а) максимальное значение проекции магнитного момента атома в состоянии ^4F, если известно, что пучок расщепляется на 4 компоненты;
б) на сколько компонент расщепится пучок атомов, находящихся в состояниях $^3D_2$ и $^5F_1$.

5. Используя принцип Паули, указать, какое максимальное число электронов в атоме могут иметь одинаковые квантовые числа: 1) *n, l, m*; 2) *n*.

7

---

1. Частица массой *m* находится в некотором одномерном потенциальном поле *U (x)* в стационарном состоянии, для которого волновая функция имеет вид: $\Psi(x) = Axe^{-\alpha x}$, где *A* и α - заданные постоянные.

Учитывая, что $\psi = 0$ при $x < 0$ и $U(x) \to 0$ при $x \to \infty$, найти $U(x)$ и энергию частицы E.

2. Определить для 1s - электрона в атоме водорода средние значения модуля силы взаимодействия и потенциальной энергии.

3. Выписать возможные типы термов атома, содержащего кроме заполненных оболочек два p – электрона с различными квантовыми числами.

4. Атом в состоянии $^2P_{1/2}$ находится на оси кругового контура с током I = 10 А. Расстояние между атомом и центром контура с током 5 см, радиус контура R = 5 см Вычислить максимальное значение силы взаимодействия между атомом и этим током.

5. Какой эффект Зеемана (простой или сложный) обнаруживают в слабом магнитном поле спектральные линии: $^1P \to {}^1S$, $^2D_{5/2} \to {}^2P_{3/2}$.

8

---

1. При каком отношении высоты потенциального барьера бесконечной ширины и энергии электрона, падающего на барьер, коэффициент отражения равен 0.5?

2. Изобразить графически угловое распределение плотности вероятности нахождения электрона в атоме водорода, если угловая функция в s – состоянии имеет вид: $Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{im_l \varphi}$.

3. Определить кратность вырождения уровня для водородоподобного иона с главным квантовым числом 4, если:
   а) не учитывать спин электрона;
   б) учитывать спин.

4. Определить для 1s – электрона в атоме водорода среднее значение кинетической энергии.

5. На сколько компонент расщепится в магнитном поле уровень энергии электрона с орбитальным квантовым числом $l = 2$ и какова будет разность энергий соседних уровней, если напряженность магнитного поля равна 5000 Э (спин - орбитальное взаимодействие не учитывать).

9

---

1. Найти среднюю кинетическую энергию частицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками ($0 < x < a$, где a – ширина ямы), если частица находится в состоянии:

$$\Psi(x) = A\sin^2\left(\pi x / a\right).$$

2. С помощью правил коммутации показать, что операторы $\widehat{L}_x$ и $\widehat{P}_x^2$ имеют общие собственные функции.

3. Определить возможные значения орбитального магнитного момента электрона в возбужденном атоме водорода, если энергия возбуждения равна 12.09 эВ.

4. Найти число электронов в атоме, у которого в основном состоянии заполнены: K и L – оболочки, 3*s* – подоболочка и наполовину 3*p* – подоболочка. Что это за атом?

5. Найти минимальную разрешающую способность λ/Δλ спектрального прибора, который позволит разрешить зеемановскую структуру спектральной линии 589 нм ($^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$) натрия в магнитном поле $B = 2$ кГс.

10

---

1. Найти собственное значение оператора $\widehat{A} = -\dfrac{d^2}{dx^2} + x^2$, принадлежащее собственной функции $\Psi_A = \exp\left(\dfrac{-x^2}{2}\right)$.

2. Частица массой m находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечными стенками. Определить, при какой ширине ямы энергия электрона на первом энергетическом уровне равна энергии $1s$ – электрона в атоме водорода.

3. Электрон в атоме водорода находится в p – состоянии. Определить возможные значения квантового числа j и возможные значения полного момента импульса электрона (в единицах $\hbar$).

4. Атомы серебра (в основном состоянии), обладающие скоростью υ = 0.6 км/с, пропускаются через узкую щель и направляются перпендикулярно линиям индукции неоднородного магнитного поля (опыт Штерна и Герлаха). В поле протяженностью l = 6 см пучок расщепляется на два. Определить степень неоднородности dB/dz магнитного поля, при которой расстояние между компонентами расщепленного пучка на экране равно 3 мм.

5. Заполненный электронный слой характеризуется квантовым числом n = 3. Укажите число электронов в этом слое, которые имеют одинаковые следующие квантовые числа: m_s = + 1/2 и l = 2.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1. Фундаментальные физические постоянные

Название	***Значения***	
	СИ	**СГСЭ**
Скорость света в вакууме	$C = 2.998\cdot10^{8}$ м/с	$C = 2.998\cdot10^{10}$ см/с
Заряд электрона	$e = 1.0602\cdot10^{-19}$ Кл	$e = 4.803\cdot10^{-10}$ ед. СГСЭ
Число Авогадро	$N_A = 6.023\cdot10^{26}$ кмоль$^{-1}$	$N_A = 6.023\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = 1.3807\cdot10^{-23}$ Дж/К	$k = 1.3807\cdot10^{-16}$ эрг/К
Масса покоя электрона	$m_e = 9.1083\cdot10^{-31}$ кг	$m_e = 9.1083\cdot10^{-28}$ г
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1.6749\cdot10^{-27}$ кг	$m_n = 1.6749\cdot10^{-24}$ г
Масса покоя протона	$m_p = 1.6726\cdot10^{-27}$ кг	$m_p = 1.6726\cdot10^{-24}$ г
Удельный заряд электрона	$e/m_e = 1.76\cdot10^{11}$ Кл/кг	$e/m_e = 5.27\cdot10^{17}$ СГСЭ
Постоянная Планка	$\hbar = 1.054\cdot10^{-34}$ Дж·с $h = 6.63\cdot10^{-34}$ Дж·с	$\hbar = 1.054\cdot10^{-27}$ эрг·с $h = 6.63\cdot10^{-27}$ эрг·с
Радиус Бора	$a_Б = h^2/(2\pi)^2 m_e\cdot e^2 = 0.529\cdot10^{-10}$ м	$a_Б = 0.529\cdot10^{-8}$ см
Постоянная тонкой структуры	$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137$	$\alpha = 1/137$
Постоянная Ридберга	$R_\lambda = 1.097\cdot10^{7}$ м$^{-1}$	$R_\lambda = 1.097\cdot10^{5}$ см$^{-1}$
Комптоновская длина волны электрона	$\Lambda = h/m_e c = 2.426\cdot10^{-12}$ м	$\Lambda = 2.426\cdot10^{-10}$ см
Магнетон Бора	$M_{Á} = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 9.27\cdot10^{-24}$ Дж/Тл	$M_Б = 9.27\cdot10^{-21}$ эрг/Гс

Соотношения между некоторыми внесистемными и системными единицами.

$$1\,\text{Å} = 10^{-10}\ \text{м} = 10^{-8}\ \text{см}$$

$$1\ \text{эВ} = 1.6\cdot10^{-19}\ \text{Дж} = 1.6\cdot10^{-12}\ \text{эрг}$$

$$1\ \text{а. е. м.} = 1.66\cdot10^{-27}\ \text{кг} = 1.66\cdot10^{-24}\ \text{г}$$

Таблица 2. Массы некоторых нейтральных атомов
(в углеродных единицах массы)

ИЗОТОП	МАССА	ИЗОТОП	МАССА
$_{0}n^{1}$	1.00867	$_{7}N^{14}$	14.00307
$_{1}H^{1}$	1.00783	$_{8}O^{16}$	15.99491
$_{1}H^{2}$	2.01410	$_{8}O^{17}$	16.99913
$_{1}H^{3}$	3.01605	$_{8}O^{18}$	17.99916
$_{2}He^{3}$	3.01603	$_{9}F^{19}$	18.99840
$_{2}He^{4}$	4.00260	$_{11}Na^{22}$	21.99444
$_{3}Li^{6}$	6.01513	$_{11}Na^{23}$	22.98977
$_{3}Li^{7}$	7.01601	$_{12}Mg^{23}$	22.99414
$_{4}Be^{7}$	7.01693	$_{13}Al^{30}$	29.99817
$_{4}Be^{9}$	9.01219	$_{15}P^{31}$	30.97376
$_{4}Be^{10}$	10.01354	$_{82}Pb^{206}$	205.97446
$_{5}B^{11}$	11.00931	$_{47}Ag^{107}$	106.90697
$_{6}C^{10}$	10.00168	$_{30}Zn^{65}$	64.929234
$_{6}C^{12}$	12.00000	$_{79}Au^{197}$	196.96655
$_{6}C^{13}$	13.00335	$_{79}Au^{198}$	197.96824
$_{6}C^{14}$	14.00324	$_{92}U^{235}$	235.04253
$_{7}N^{13}$	13.00574	$_{92}U^{238}$	238.04947

Таблица 3. Плотности некоторых металлов и работы выхода электрона с поверхности металла

Металл	А, эВ	Плотность,г/см^3
Алюминий	3.74	2.7
Барий	2.29	3.75
Бериллий	3.92	1.85
Ванадий	3.78	5.87
Висмут	4.62	9.8
Вольфрам	4.50	19.1
Железо	4.36	19.1
Золото	4.58	19.3
Калий	2.15	0.86
Кобальт	4.25	8.9
Литий	2.39	0.53
Магний	3.69	1.74
Медь	4.47	8.9
Молибден	4.27	10.2
Натрий	2.27	0.97
Никель	4.84	8.9
Олово	4.51	7.4
Платина	5.29	21.5
Свинец	4.15	11.3
Серебро	4.28	10.5
Титан	3.92	4.5
Цезий	1.89	1.87
Цинк	3.74	7.0

Значения некоторых интегралов

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha^3}\ ; \qquad \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

$$\int x e^{\alpha x} dx = e^{\alpha x}\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right); \int x^2 e^{\alpha x} dx = e^{\alpha x}\left(\frac{x^2}{\alpha} - \frac{2x}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3}\right)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шпольский Э.В. Атомная физика, т. 1 – М.: Наука, 1984.
2. Шпольский Э.В. Атомная физика, т. 2 – М.: Наука, 1984.
3. Иродов И.Е. Сборник задач по атомной и ядерной физике. – М.: Энергоатомиздат, 1984.
4. Борн М. Атомная физика. – М.: Мир, 1970.
5. Вихман Э. Квантовая физика. – М.: Наука, 1977.
6. Р. Кристи, А. Питти Строение вещества: введение в современную физику. – М.: Наука, 1969.
7. Мигдал А.Б. Квантовая физика для больших и маленьких. – М.: Наука, 1989.
8. Дж. Б. Мэрион. Физика и физический мир. – М.: Мир, 1975.
9. А.Е. Айзенцон. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1996.

СОДЕРЖАНИЕ

Практическое занятие №1……..……..3
Тема: Электростатическая модель атома по Томсону, ядерная модель атома Резерфорда. Оценка размеров атомов и ядер.

Практическое занятие №2…….……7
Тема: Классическое резерфордовское рассеяние атомных частиц на ядрах. Импульсная диаграмма рассеяния. Дифференциальное сечение рассеяния.

Практическое занятие № 3…….……..13
Тема: Теория Бора.

Практическое занятие № 4…….……..19
Тема: Квантовые свойства излучения.

Практическое занятие №5……..25
Тема: Волновые свойства атомных частиц: соотношение де Бройля, принцип неопределенности Гейзенберга, волновая функция. Операторы физических величин.

Практическое занятие № 6…….……..32
Тема: Уровни энергии и орбитали стационарных состояний.

Практическое занятие №7…….……..40
Тема: Точное измерение одной физической величины, определение спектра физических величин. Одновременное точное измерение двух физических величин, коммутативность операторов.

Практическое занятие № 8…….……..47
Тема: Атом водорода по Шредингеру. Термы многоэлектронных атомов. Спин – орбитальное взаимодействие, тонкая структура атомных спектров.

Практическое занятие № 9…….……..54
Тема: Атом во внешнем магнитном поле (эффект Штерна и Герлаха, эффект Зеемана).

Варианты индивидуального задания №1…….……..63

Варианты индивидуального задания №2……..70

ПРИЛОЖЕНИЕ…….……77

ЛИТЕРАТУРА…….……..80

Антонина Васильевна Макиенко

АТОМНАЯ ФИЗИКА

Практикум по решению задач

Под редакцией проф. Д.И. Вайсбурда

Подписано к печати 10.02.2003
Формат 60x84/16. Бумага офсетная
Печать RISO. Усл. печ. л. 4.88 Уч. изд. л. 4.42
Тираж 150 экз. Заказ Цена свободная.
Издательство ТПУ, Лицензия ЛТ №1 от 18. 07.94 г.
Типография ТПУ. 634034, Томск, пр. Ленина, 30.