# *Дополнение к ТММ*

Далее для облегчения изучения курса необходимо вспомнить некоторые разделы математики, в частности, элементы векторного анализа.

***Скалярные и векторные величины***. Например, масса тела, температура тела и т.д. определяются одним числом-такие величины являются *скалярными.* А, например, сила, скорость перемещения точки и т. д. характеризуются не только числом, но и направлением. Такие величины называются векторными (лат.-несущий, везущий).

*Вектор*- направленный отрезок, для которого заданы:

–длина отрезка, называемая модулем;

–точка приложения вектора;

–прямая, на которой лежит вектор-линия действия вектора;

–направление вектора.

Примеры обозначения вектора:

$\boldsymbol{a}, \bar{a}$ , $\overline{AB}$ . В последнем случае $A$-является начальной, а $B$-конечной точкой. Обозначения модулей упомянутых векторов: *а, АВ или* $|\bar{a}|, |\boldsymbol{a}|, |\overline{AB}|$.

***Классификация векторов:***

–несвободный, приложенный вектор-с фиксированной точкой приложения;

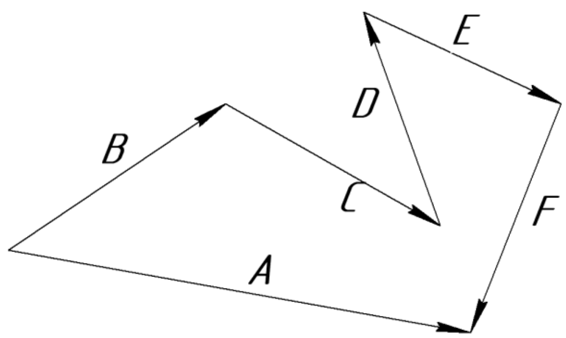
–скользящий вектор-перемещается по линии действия;

–свободный вектор-отсутствуют точка приложения и линия действия (примером является скорость точек твердого тела, совершающего поступательное движение).

*Векторный способ задания.*

***Действия с векторами.***

*Суммирование* векторов. На рисунке показан процесс суммирования век-

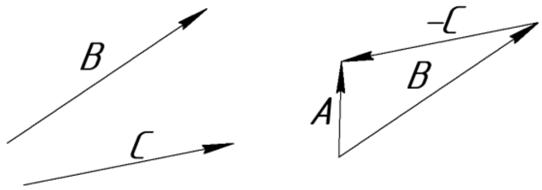


торов:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{E} + \boldsymbol{F}.$$

*Разность* двух векторов $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$.

*Произведение* двух векторов.

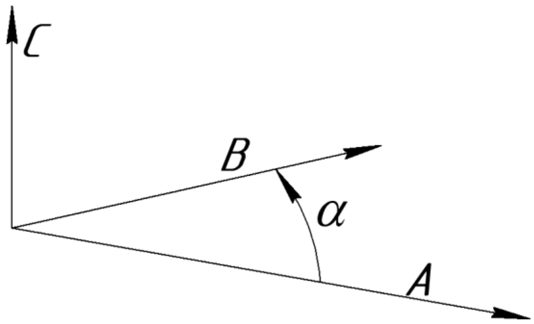



*Скалярное* произведение двух векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ равно

$C = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB\cos(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})$ -величина скалярная.

*Векторное* произведение двух векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ равно вектору

$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ , определенный следующим образом:

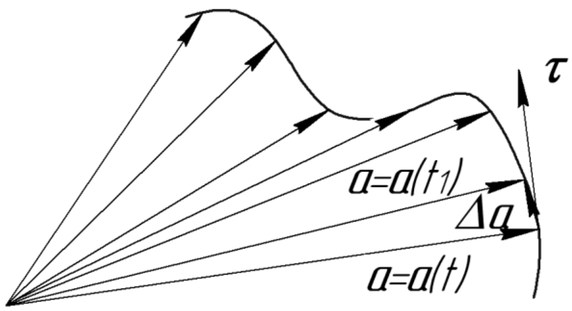



–линия действия вектора-произведения перпендикулярна к обоим векторам-сомножителям;

–вектор-произведение направлен по линии действия в такую сторону, из которой переход вращением от первого вектора-сомножителя ко второму на наименьший угол виден против хода часовой стрелки (для правой системы координат).

*Модуль* вектора-произведения равен произведению модулей векторов-сомножителей на синус угла между ними:

$$C = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = A\,B\sin\alpha\,.$$




*Дифференцирование* векторов по скалярному аргументу.

Возьмем вектор-функцию $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$, зависящую от скалярного аргумента *t*.

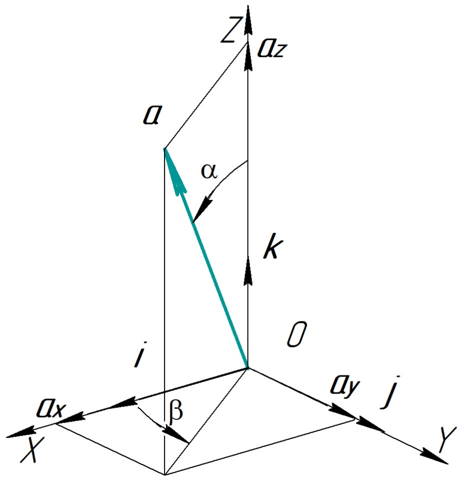
*Производная вектора* равна вектору

$\boldsymbol{\tau} = \dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}$, направленный касательно к траектории перемещения конца вектора. Во многих задачах механики аргументом *t* является время.

*Производная суммы* векторов $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, зависящих от параметра $t$, равна вектору

$$\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}.$$

*Производная скалярного произведения* двух векторов $c=\boldsymbol{ab}$ является скалярной величиной: $\frac{dc}{dt}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{ab})=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}.$




*Производная векторного произведения* двух векторов $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ является вектором:

$$\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}.$$

Производные второго порядка находятся аналогичным образом.

*Задание свободного вектора с помощью его проекций* (координатный способ).

Вектор $\boldsymbol{a}$ разложим его по трем осям в пространственной декартовой системе координат $Oxyz$:

$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ , где $\boldsymbol{a}_x, \boldsymbol{a}_y$ и $\boldsymbol{a}_z$ – составляющие вектора $\boldsymbol{a}$ по $x$, $y$ и $z$ соответственно, а $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$-единичные векторы(орты) осей.

*Сумма* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ запишется:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z+\boldsymbol{b}_x+\boldsymbol{b}_y+\boldsymbol{b}_z=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\ .$$

*Скалярное* произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равно

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\left(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\,,$$

*Векторное* произведение выглядит:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\right)\times\left(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}\right)=$$
$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\boldsymbol{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\boldsymbol{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\boldsymbol{k}.$$

*Производная* вектора, зависящего от скалярного аргумента $t$ :

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{a}_x}{dt}+\frac{d\boldsymbol{a}_y}{dt}+\frac{d\boldsymbol{a}_z}{dt}=\frac{da_x}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{da_y}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{da_z}{dt}\boldsymbol{k}\,.$$

Во всех случаях производные находятся по известным правилам математики.

**Статика** –раздел механики в котором изучаются условия равновесия механических систем под действием сил.

В механике в целях упрощения изучаются не реальные тела , а их модели. Такими моделями являются материальная точка, материальное тело, абсолютно твердое тело.

*Материальная точка*-точка, обладающая массой.

*Материальное тело*-совокупность материальных точек.

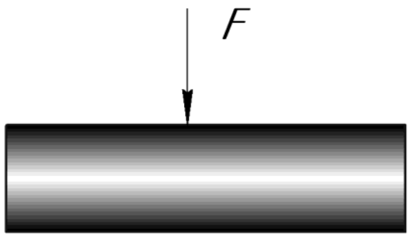
*Абсолютно твердое тело*(твердое тело)-материальное тело, в котором расстояние между двумя точками остается неизменным. Причем тела считаются сплошными.

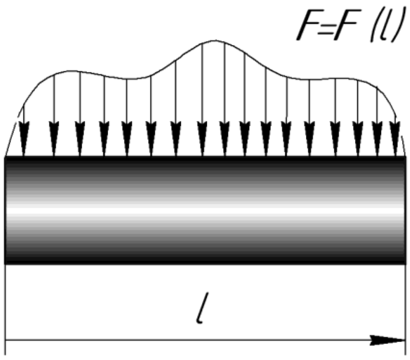
***Сила***-векторная величина, являющаяся мерой механического действия одного материального тела на другое.

Силы делятся на внешние и внутренние.

*Внешняя сила*-сила, действующая на материальную точку тела со стороны другого тела.

*Внутренняя сила*-сила, приложенная от одной материальной точки к другой точке одного материального тела.




*Сосредоточенная сила*-сила, приложенная в точке.

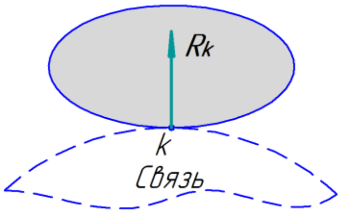
*Распределенные силы*- силы, действующие на поверхности тела.

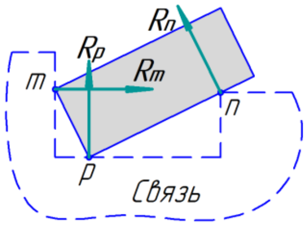
Твердое тело на перемещение которого наложены ограничения, т.е. наложены *связи,* называют несвободным твердым телом.

*Реакция связей*-сила, действующая на материальную точку со стороны материального тела, осуществляющего связь, наложенную на материальное тело.

***Виды связей и их реакции.***

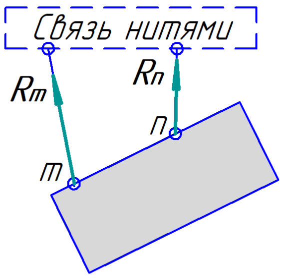
*Вид связи-гладкая поверхность.*



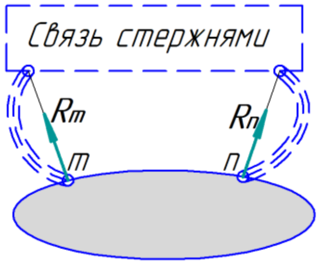




Реакция ***R*** направлена по общей нормали к поверхностям тел в точке их касания и приложена в той же точке.

Если одна из соприкасающихся поверхностей является точкой, то реакция направлена по нормали к другой поверхности.




*Вид связи-нерастяжимая нить.*

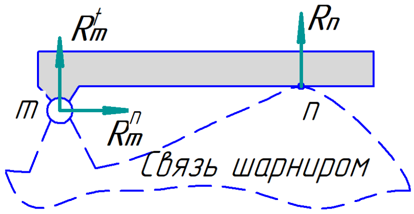



В этом случае реакция ***R*** направлена вдоль нити к точке закрепления.

*Вид связи-стержень, концы которого закреплены шарнирно.*

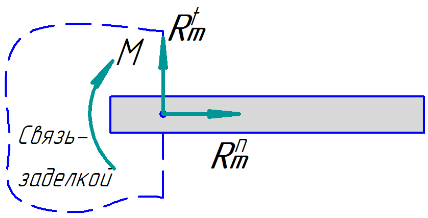
Реакция ***R*** направлена вдоль прямой, соединяющей центры шарниров.

*Вид связи-неподвижный шарнир.*

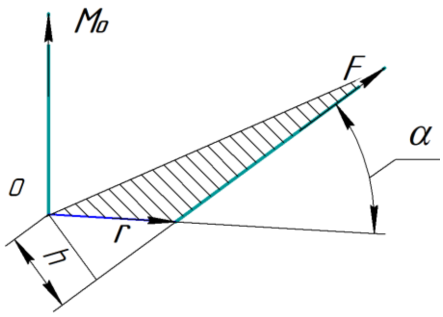



Направление реакции ***R*** заранее неизвестно. Поэтому для упрощения задачи ее заменяют двумя составляющими: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^n + \boldsymbol{R}^t$ .

*Вид связи-заделка.*




Связь исключает любые перемещения тела. В заделка возникает пара сил с моментом ***M*** и реакция ***R*** с неизвестным направлением, которую заменяют составляющими: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^n + \boldsymbol{R}^t$.




***Момент силы.***

*Момент силы относительно точки-* величина, равная векторному произведению радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$, проведенного из выбранной точки $O$ в точку приложения силы, на силу $\boldsymbol{F}$ : $\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$. Расстояние $h$ называется плечом силы. Модуль момента силы равен

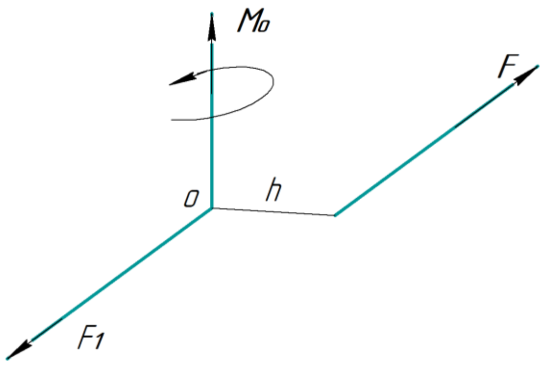
$$M_0(\boldsymbol{F}) = r\,F \sin\alpha = Fh.$$

*Главный момент системы сил*-сумма моментов всех сил относительно одной точки.

*Момент силы относительно оси*-величина, равная проекции вектора момента силы относительно точки на ось, проходящий через данную точку.

*Пара сил*- система двух параллельных сил, равных по модулю и направленных в противоположные стороны.

*Момент пары сил*- свободный вектор, который может быть приложен к любой точке тела. Модуль момента пары сил равен $M$=$F$ $h$. Вектор направлен перпендикулярно к плоскости их действия в сторону, при взгляде с которой поворот тела происходит против хода часовой стрелки.




***Равновесие твердых тел***.

*Условия равновесия тела.*

Для равновесия тела при действии на него любой пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $\boldsymbol{R}$ и главный момент $\boldsymbol{M}$ этой системы сил были равны нулю:

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = 0,\ \ \boldsymbol{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{F}_i) = 0.$$

Здесь $n$-означает количество действующих сил. *Главный вектор системы сил*-сумма всех сил, приложенных к системе.

В проекциях на координатные оси пространственной декартовой системы координат уравнения равновесия твердого тела можно представить в виде шести скалярных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{0x}(\boldsymbol{F}_i) = 0,\ \sum_{i=1}^{n} M_{0y}(\boldsymbol{F}_i) = 0,\ \sum_{i=1}^{n} M_{0z}(\boldsymbol{F}_i) = 0.$$

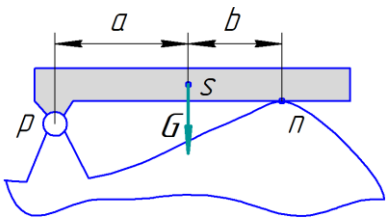
В плоской системе сил из шести уравнений равновесия остаются только три.

***Решение задач статики на равновесие тел.***

*Рекомендуемая последовательность решения задачи:*

–составление расчетной схемы с указанием всех внешних сил включая реакций связей;

–выбор системы координат;




–составление уравнений равновесия исследуемого тела;

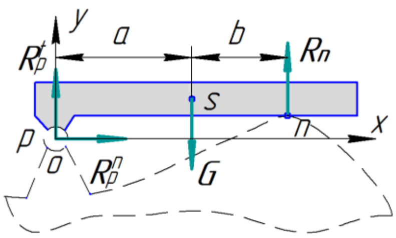
–решение уравнений (вычисление неизвестных величин), проверка правильность полученных результатов.

***Пример1.***

Брус нагружен, как показано на рисунке. Определить реакции связей в точках *p* и *n*, если масса бруса равна *m* =20 кг с центром в точке *s*;

*a* =1 м; *b* =0,8 м.

*Решение.*




Составим расчетную схему с нагруженными силами и выбранными системами координат. Направление реакции $\boldsymbol{R}_n$ известно заранее, а реакцию $\boldsymbol{R}_p$ разложим на составляющие: $\boldsymbol{R}_p = \boldsymbol{R}_p^t + \boldsymbol{R}_p^n$.

Составим уравнение суммы моментов сил относительно точки *p*:

$$M_p = -G\,a + R_n\,(a+b) = -9{,}8 \cdot 20 \cdot 1 + R_n\,(1+0{,}8) = 0.$$

Из уравнения находим неизвестную величину $R_n = 108{,}8888H$.

Найдем сумму проекций сил на ось *Oy*:

$F_y = -G + R_p^t + R_n = 0 = -9{,}8 \cdot 20 + R_p^t + 108{,}8888 = 0.$ Далее находим

$R_p^t = 87{,}1112H.$ Другая составляющая равна нулю $R_p^n = 0.$

Вопросы для самопроверки.

1. Деревообрабатывающий станок является ли машиной?
2. Как выразить перпендикулярность двух векторов?
3. Как представить параллельность двух векторов?
4. С какой целью реакцию в шарнире раскладывают на составляющие?
5. Укажите количество уравнений статики для плоской системы.

**Кинематика** –это раздел механики, в котором изучаются способы описания положений и движений независимо от причин, вызвавших эти движения. Кратко рассмотрим следующие три вопроса:

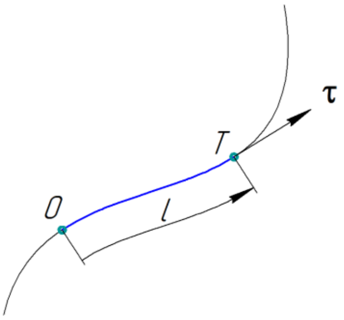
–кинематика точки;

–кинематика твердого тела;

–преобразование положения, скорости и ускорения при переходе от одной системы отсчета к другой.

***Кинематика точки.***

Два способа описания положения и движения: векторный и координатный были рассмотрены в предыдущей лекции в ходе изучения векторов и их свойств. Рассмотрим *естественный(натуральный)* способ.




Этот способ применяют тогда, когда траектория движения точки известна заранее. Положение точки *T* определяют длиной пути(дуги) *l* от начальной точки *O* вдоль кривой. Причем длина пути *l* функцией времени *t*: $l = l(t)$.

*Скорость точки.*

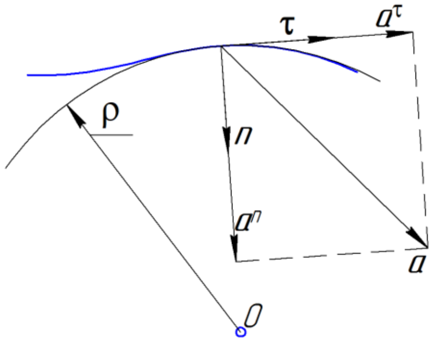
Введем единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$ в точке *T* касательный к кривой(траектории). Вектор $\boldsymbol{\tau}$ является переменной величиной и зависит от *l*. Вектор скорости точки можно представить так: $\boldsymbol{V} = \dfrac{dl}{dt}\boldsymbol{\tau} = V\boldsymbol{\tau}$.

*Ускорение точки.*

Продифференцируем выражение скорости по времени:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\boldsymbol{\tau} + V\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{dV}{dt}\boldsymbol{\tau} + V\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl}\frac{dl}{dt} = \frac{dV}{dt}\boldsymbol{\tau} + V^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl}.$$

Далее введя единичный вектор $\boldsymbol{n}$ нормали к кривой и направленный к центру кривизны кривой *O* с радиусом кривизны ρ (опуская подробности преобразований) получим формулу ускорения с измененным видом второго компонента:




$$\boldsymbol{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}^\tau + \boldsymbol{a}^n.$$

Таким образом, ускорение состоит из двух слагаемых: первое называют тангенциальным, а второе-нормальным.

***Кинематика твердого тела.***

Различают пять видов движения твердого тела:

–поступательное;

–вращательное относительно неподвижной оси;

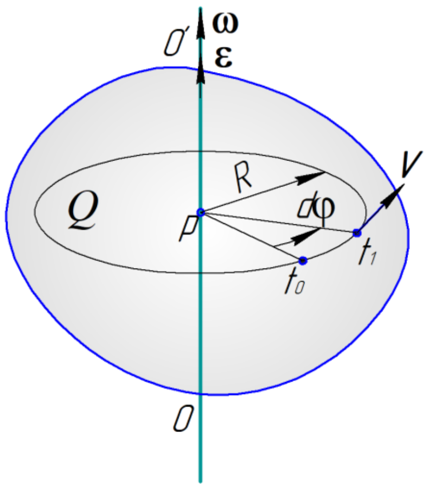
–плоское движение;

–движение относительно неподвижной точки;

–свободное движение.

Рассмотрим первые три *вида движения.*

*Поступательное движение*-любая прямая, связанная с телом, все время остается параллельной своему начальному положению. Поэтому скорости и ускорения всех точек тела в данный момент одинаковы. Таким образом, эту задачу можно свести к задаче кинематики точки.




*Вращательное движение относительно неподвижной оси*-все точки, лежащие на некоторой прямой, связанной с телом, остаются неподвижными. Указанная прямая называется *осью вращения*. Все точки тела перемещаются по окружностям с центрами на оси вращения и в плоскостях, перпендикулярных к этой оси.

Рассмотрим тело, совершающее вращательное движение относительно оси $OO'$. Вращение тела можно рассматривать через перемещение любой точки $t$. Движение точки из положения $t_0$ в $t_1$ связано с приращением $d\varphi$ угла φ. Поэтому закон вращательного движения твердого тела можно представить в виде $\varphi=\varphi\,(t)$. Положительным направлением угла поворота в правой системе координат принято вращение против хода часовой стрелки.

*Угловая скорость* тела равна $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$. Единицей угловой скорости в СИ является $\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{рад}{c}\right)$. Вращательное движение твердого тела в любой момент времени определяется:

–величиной угловой скорости;

–направлением вращения;

–положением оси вращения в пространстве.

Для совокупного описания всех трех характеристик вводят вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, направленный вдоль оси вращения в ту сторону при взгляде с которой поворот тела происходит против хода часовой стрелки.

В технике равномерное вращательное движение твердого тела иногда характеризуют *частотой* вращения. Например, число оборотов в минуту $\left(\dfrac{об}{мин}\right)$.

*Угловое ускорение* твердого тела равно $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$ и измеряется в СИ $\dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{рад}{c^2}\right)$.

Угловое ускорение можно представить вектором $\boldsymbol{\varepsilon} = \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$.

*Скорости точек тела* при вращательном движении.

Если за промежуток времени $dt$ тело поворачивается на угол $d\varphi$ относительно оси $OO'$, то точка $t$ с радиусом вращения $R$ получит по дуге окружности перемещение $t_0t_1=ds=R\,d\varphi$. Следовательно, линейная скорость точки $t$ равна

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{R\,d\varphi}{dt} = R\omega.$$

Вектор скорости $\boldsymbol{V}$ направлен в сторону вращения по касательной к окружности радиуса $R$.

*Ускорения точек тела,* совершающего вращательное движение складывается из двух известных компонентов:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}^{\tau} + \boldsymbol{a}^{n}.$$

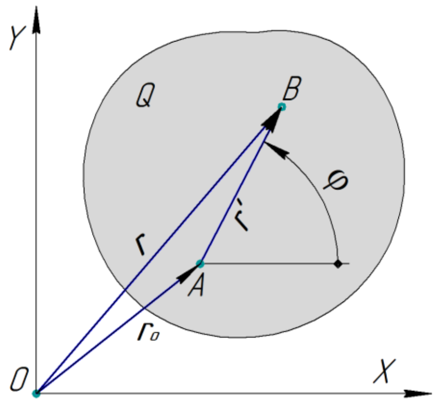
Величина тангенциального ускорения равна $a^{\tau} = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d(R\omega)}{dt} = R\dfrac{d\omega}{dt} = R\varepsilon$ ,

а нормальное ускорение равно $a^{n} = \dfrac{V^2}{R} = \dfrac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2.$

Вектор тангенциального ускорения направлен по касательной к окружности радиуса $R$, а нормальное ускорение –по радиусу к оси вращения.

*Плоское движение* твердого тела-это такое движение, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях.

Рассмотрим движение плоской фигуры $Q$, являющейся сечением тела плоскостью.




Положение фигуры на плоскости можно определить задав радиус-вектор $\boldsymbol{r_0}$ произвольной точки $A$ фигуры и угол φ между радиус-вектором $\boldsymbol{r}$', жестко связанным с фигурой, и осью отсчета. Закон движения фигуры можно представить как:

$$\boldsymbol{r}_o = \boldsymbol{r}_o(t);\ \varphi = \varphi(t).$$

Скорость точки $B$ можно представить как сумму двух движений:

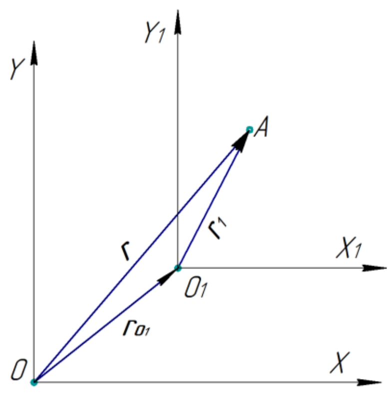
$\boldsymbol{V}_B = \boldsymbol{V}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$, где $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ -угловая скорость фигуры(тела).

Иными словами, плоское движение твердого тела можно представить как совокупность двух движений: поступательного произвольно выбранной точки $A$ и вращательного относительно оси, проходящей через выбранной точки. Причем направление и величина угловой скорости не зависит от выбранной точки.

Плоское движение можно свести к чисто вращательному ели мы найдем такую точку $B$ в которой скорость равна нулю, т.е.

$$\boldsymbol{V}_B = \boldsymbol{V}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' = 0 \text{ или } \boldsymbol{V}_A = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'.$$

Из последнего выражения следует, что радиус-вектор $\boldsymbol{r}$' перпендикулярен векторам $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{V}_A$, а модуль $r' = \dfrac{V_A}{\omega}$. Ось вращения тела, проходящая через такую точку называется мгновенной осью вращения.




***Преобразование скорости и ускорения при переходе к другой системе отсчета.***

Рассмотрим движение точки одновременно относительно двух систем отсчета: $Oxy$-основной и $O_1x_1y_1$ -подвижной. Ограничимся случаем когда система $O_1x_1y_1$ относительно $Oxy$ совершает поступательное движение.

В основной системе начало подвижной системы $O_1$ определяется радиус-вектором $\boldsymbol{r}_{O_1}$, а ее скорость и ускорение –векторами $\boldsymbol{V}_{O_1}$ и $\boldsymbol{a}_{O_1}$. Из рисунка следует равенство $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{O_1} + \boldsymbol{r}_1$. Продифференцировав обе части последнего выражения, получим формулу преобразования скорости: $\boldsymbol{V} = \dfrac{d\boldsymbol{r}_{O_1}}{dt} + \dfrac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} = \boldsymbol{V}_{O_1} + \boldsymbol{V}_1$ . Продифференцировав еще раз, получим формулу преобразования ускорения:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{V}_{O_1}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{V}_1}{dt} = \boldsymbol{a}_{O_1} + \boldsymbol{a}_1.$$

Движение точки относительно основной системы называется *абсолютным* движением. Движение точки относительно подвижной системы отсчета называется *относительным*.

В двух последних формулах первые компоненты $\boldsymbol{V}_{O_1}, \boldsymbol{a}_{O_1}$ называются переносной скоростью и переносным ускорением. А вторые слагаемые $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{a}_1$ – относительными.