

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
**«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

---

Утверждаю  
Зам. директора ЭЛТИ

\_\_\_\_\_ А.Н. Дудкин

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2009 г.

**Л.И. Аристова, Н.М. Малышенко**

## **ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА «Электрические цепи»**

Варианты заданий, примеры расчета и методические указания  
к выполнению индивидуальных домашних заданий  
для студентов неэлектротехнических специальностей

Издательство  
Томского политехнического университета  
2009

УДК 621.3(075.8)+621.38(075.8)  
ББК 31.2.я73+32.85.я73  
А81

**Аристова Л. И.**  
А81 ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА. «Электрические цепи»: варианты заданий, примеры расчета и методические указания к выполнению индивидуальных домашних заданий для студентов неэлектротехнических специальностей / Л.И. Аристова, Н.М. Малышенко. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 59 с.

УДК 621.3(075.8)+621.38(075.8)  
ББК 31.2.я73+32.85.я73

Методические указания рассмотрены и рекомендованы  
к изданию методическим семинаром кафедры  
теоретической и общей электротехники ЭЛТИ  
«29» сентября 2008 г.

Зав. кафедрой ТОЭ  
кандидат технических наук \_\_\_\_\_ *А.В. Лукутин*

Председатель учебно-методической  
комиссии ЭЛТИ  
кандидат технических наук \_\_\_\_\_ *В. И. Готман*

Рецензент  
Доктор технических наук, профессор кафедры ТОЭ ЭЛТИ  
*Ю.П. Усов*

© ГОУ ВПО «Томский политехнический университет», 2009  
© Аристова Л.И., Малышенко Н.М., 2009  
© Оформление. Издательство Томского политехнического  
университета, 2009

## 1. Методические указания к выполнению и оформлению заданий

Индивидуальные задания по разделам «Линейные электрические цепи постоянного тока», «Однофазные цепи синусоидального тока» и «Трёхфазные цепи» выполняется студентами в форме расчетно-пояснительных записок. Номер варианта выдается преподавателем из числа вариантов задания № 1, № 2, № 3А или задания № 3Б.

Выполненные задания следует представить на листах формата А4 или развернутых тетрадных листах в клеточку. Оформление титульного листа показано в приложении 1. На первом листе записки необходимо привести программу задания, исходные данные и схему электрической цепи, если она задана, на всех остальных листах приводится сделанная студентом работа.

Для успешного выполнения и качественного оформления задания по данной теме можно предложить следующие общие рекомендации:

1. Перед началом выполнения чернового расчета необходимо ознакомиться с теорией цепей постоянного тока, однофазных или трехфазных цепей по лекциям, учебникам [1, 2, 3] или по другой учебной литературе, не приведенной в списке литературы (стр. 59), просмотреть решение типовых задач из сборников задач [4, 5].
2. Разметить схему, т.е. обозначить ее узлы, показать заданные и принятые направления ЭДС, напряжений и токов. Индексы токов в ветвях рекомендуется выбирать такими же как индексы у элементов соответствующих ветвей.
3. Во избежание ошибок при числовых расчетах все значения величин подставлять в формулы в основных единицах системы СИ ( В, А, Ом, Вт, Ф, Гн, и т.д.), для чего все производные единицы следует перевести в основные, например:  $1 \text{ кВ} = 1 \times 10^3 \text{ В}$ ;  $1 \text{ кВт} = 1 \times 10^3 \text{ Вт}$ ;  $1 \text{ мкФ} = 1 \times 10^{-6} \text{ Ф}$  и т.д.
4. При чистовом оформлении задания текст, формулы и числовые расчеты вписывать четко и аккуратно без помарок.
5. На каждой странице оставить поля не менее 2 см слева и 1 см справа, а также не менее 1,5 см сверху и снизу.
6. При числовых расчетах следует придерживаться определенного порядка: искомая величина описывается формулой, затем должны быть подставлены числовые значения входящих в формулу величин, вписан результат расчета (числовое значение искомой величины) и единица измерения. Расчеты выполнить до двух или трех значащих цифр.
7. Обязательно сопровождать представленные расчеты пояснениями, т.е. назвать законы, на основании которых составлены уравнения,

смысл преобразований в схемах и формулах, последовательность действий, комментировать полученные результаты.

8. Электрические схемы чертить с помощью чертежных инструментов с соблюдением ГОСТов на условные графические изображения элементов схем (таблица 1).
9. Векторные диаграммы необходимо строить в масштабе, который указывается таким образом:  $m_U = \dots \text{В/мм}$ ;  $m_I = \dots \text{А/мм}$ . Масштабы рекомендуется выбирать пропорционально  $1 \times 10^n$ ;  $2 \times 10^n$  или  $5 \times 10^n$ , где  $n$  – целое положительное или отрицательное число.

Таблица 1

Наименование	Обозначение
Резистор постоянный	
Катушка индуктивности	
Конденсатор постоянной емкости	
Прибор измерительный а) показывающий	
Для указания назначения прибора в его условное изображение вписывают буквенное обозначение измеряемых величин или их единиц, например,	
а) амперметр	A
б) вольтметр	V
в) ваттметр	W

# 1. Линейные электрические цепи постоянного тока

## 1.1. Основные понятия и формулы

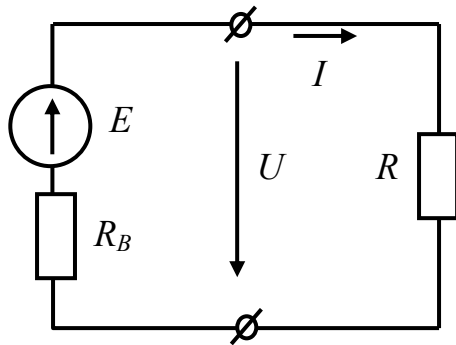


Рис. 1.1.

Простейшая электрическая цепь состоит из источника электрической энергии, пассивного приемника и соединительных проводов, образующих замкнутый контур. На рис. 1.1 представлена схема замещения простейшей цепи постоянного тока, где  $E$  и  $R_B$  – ЭДС и внутреннее сопротивление источника;

$R$  – сопротивление пассивного приемника;  $U$  – напряжение на зажимах источника и

приемника.  $I$  – сила тока в контуре схемы. Закон Ома для схемы простейшей электрической цепи

$$I = \frac{E}{R_B + R}, \quad (1.1.1)$$

для пассивного участка цепи

$$I = \frac{U}{R}, \quad (1.1.2)$$

для активного участка цепи  $I = \frac{E - U}{R_B}$ .

Знаки  $E$  и  $U$  в уравнениях (1.1.2) ставятся положительными, если направления ЭДС и напряжения совпадают с направлением тока.

Уравнение электрического состояния источника:

$$E = U + R_B I. \quad (1.1.3)$$

На основании данного уравнения может быть получено уравнение, описывающее внешнюю характеристику  $U(I)$  реального источника электрической энергии:

$$U = E - R_B I. \quad (1.1.4)$$

Мощность источника определяется по следующему выражению:

$$P_{\text{ист}} = E I. \quad (1.1.5)$$

Мощность пассивного приемника:

$$P_{\text{пр}} = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}. \quad (1.1.6)$$

При решении задач для цепи с одним источником чаще применяют метод эквивалентных преобразований с целью упрощения схемы.

При последовательном соединении пассивных приемников эквивалентное сопротивление равно их сумме:

$$R_{\text{Э}} = R_1 + R_2 + \dots + R_k = \sum_{k=1}^{k=n} R_k. \quad (1.1.7)$$

Если  $n$  последовательно соединенных резисторов имеют одинаковые сопротивления равные  $R$ , то эквивалентное сопротивление будет равно:

$$R_{\text{Э}} = nR. \quad (1.1.8)$$

Эквивалентное сопротивление группы параллельно соединенных пассивных приемников определяется по выражению:

$$\frac{1}{R_{\text{Э}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_k} = \sum_{k=2}^{k=m} \frac{1}{R_k}, \quad (1.1.9)$$

или эквивалентная проводимость соответственно равна:

$$G_{\text{Э}} = \sum_{k=2}^{k=m} G_k. \quad (1.1.10)$$

Если  $n$  параллельно соединенных резисторов имеют одинаковые сопротивления  $R$ , то их эквивалентное сопротивление равно:

$$R_{\text{Э}} = \frac{R}{n}, \quad (1.1.11)$$

если параллельно соединены два элемента, то:

$$R_{\text{Э}} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}. \quad (1.1.12)$$

Во многих случаях целесообразным оказывается преобразование пассивных приемников, соединенных треугольником (Рис. 1.2) на эквивалентное соединение звездой (Рис. 1.3) или наоборот.

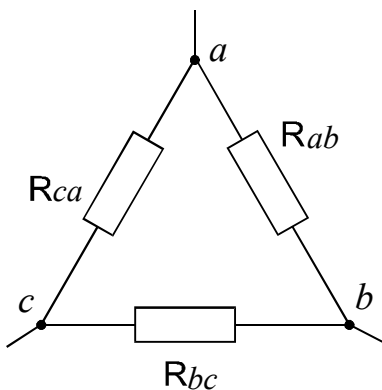


Рис. 1.2

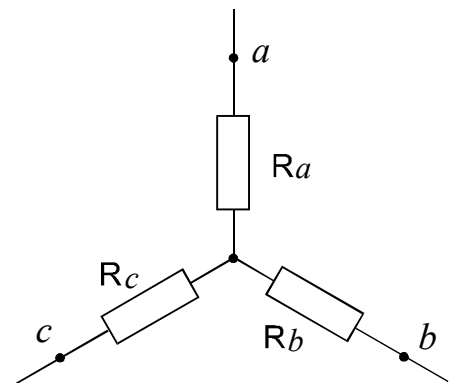
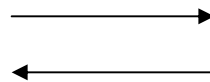


Рис. 1.3

Сопротивления лучей эквивалентной звезды определяются по формулам:

$$R_a = \frac{R_{ab} \times R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \quad R_b = \frac{R_{bc} \times R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \quad R_c = \frac{R_{ca} \times R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}. \quad (1.1.13)$$

При замене звезды сопротивлений эквивалентным треугольником сопротивлений, сопротивления его сторон рассчитываются по формулам:

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a \times R_b}{R_c}; \quad R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b \times R_c}{R_a}; \\ R_{ca} = R_c + R_a + \frac{R_c \times R_a}{R_b}. \quad (1.1.14)$$

Расчет токов в разветвленных цепях с несколькими источниками питания выполняются с применением законов Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа применяется к узлам электрической схемы и формулируется как алгебраическая сумма токов в узле равна нулю, т.е.

$$\sum_{k=3}^{k=n} I_k = 0. \quad (1.1.15)$$

При составлении уравнений токи, направленные к узлу надо записывать с одним знаком, направленные от узла – с противоположным.

Второй закон Кирхгофа применяется к контурам электрической схемы: алгебраическая сумма ЭДС в контуре электрической схемы равна алгебраической сумме напряжений, т.е.

$$\sum_{k=1}^{k=m} E_k = \sum_{k=1}^{k=p} U_k = \sum_{k=1}^{k=p} R_k I_k, \quad (1.1.16)$$

где  $E_k$  – ЭДС  $k$ -ого активного элемента, входящего в контур;

$U_k = R_k I_k$  – напряжение на  $k$ -том пассивном участке контура;

$m$  – число ЭДС в контуре;

$p$  – число пассивных элементов контура.

Напряжения и ЭДС в уравнении записываются с положительным знаком, если они совпадают по направлению с предварительно выбранным направлением обхода контура.

## 1.2. Варианты индивидуальных заданий

### Задание № 1

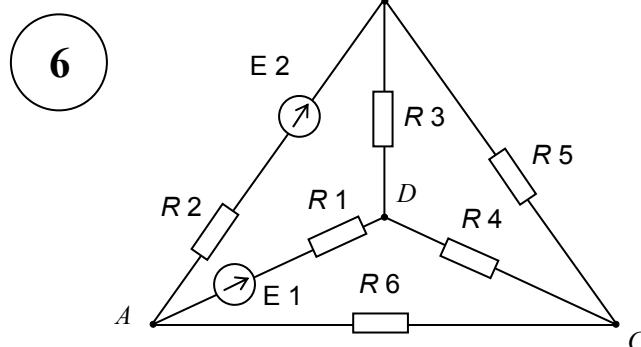
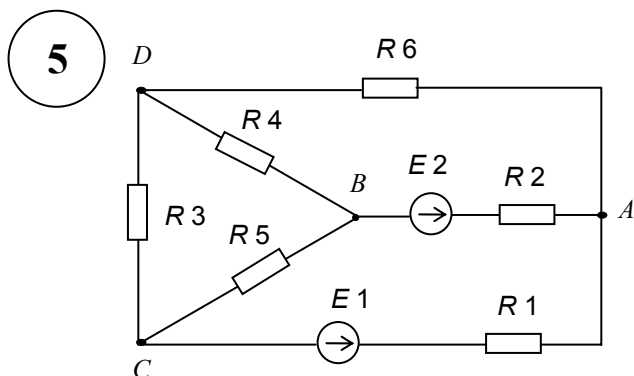
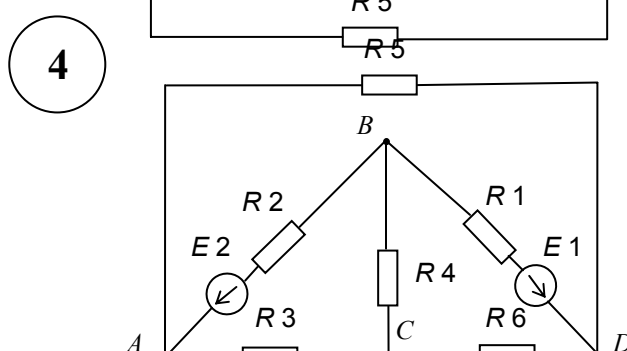
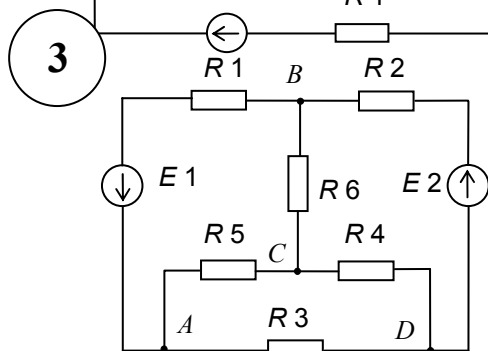
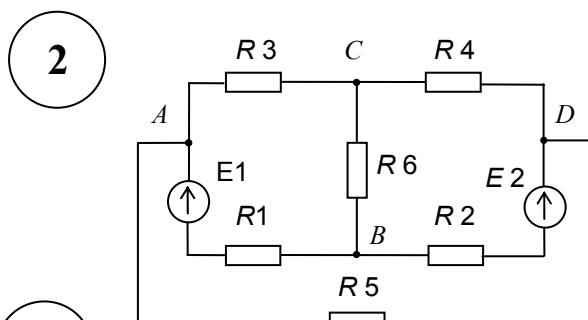
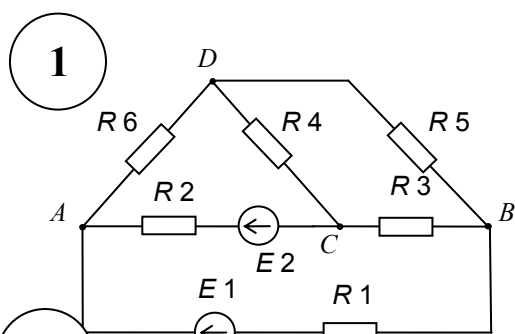
#### РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1. Рассчитать токи во всех ветвях схемы методом контурных токов. Правильность расчета проверить составлением баланса мощностей.
2. Рассчитать ток в ветви « $AB$ » методом наложения.
3. Рассчитать ток в ветви « $CD$ » методом эквивалентного генератора.
4. Построить потенциальную диаграмму для контура « $ABCD$ ».
5. Преобразовать схему к двум узлам. Рассчитать токи во всех ветвях преобразованной схемы методом напряжения между двумя узлами.
6. Привести таблицу результатов.

#### Примечания:

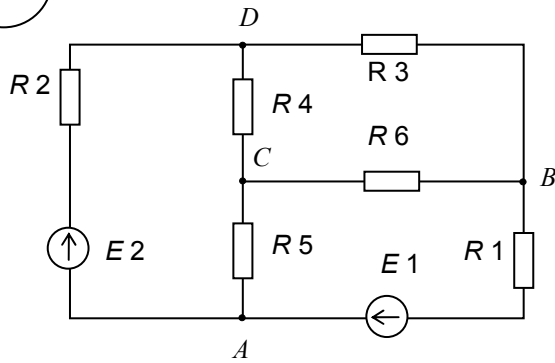
а) пункты 1, 3, 4 выполнять для исходной схемы без преобразования.

б) в пункте 1 относительное максимальное неравенство мощностей генераторов и потребителей не должны превышать 3 %.

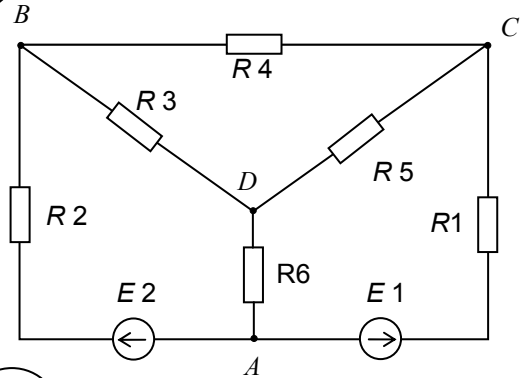




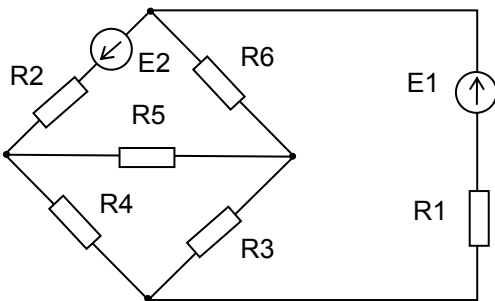
7



8



9



10

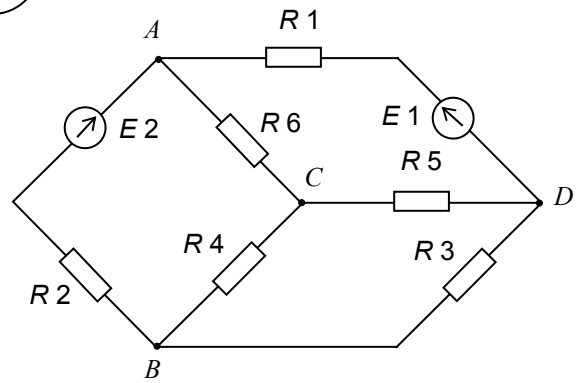


Таблица 1

№	$E_1$	$E_2$
n/n	В	В
1	12	16
2	18	20
3	19	13
4	19	16
5	19	14
6	12	20
7	18	17
8	14	18
9	16	14
0	18	16

Таблица 2

№	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$
n/n	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом
1	6	7	8	6	3	5
2	6	8	10	5	9	7
3	7	8	9	10	5	7
4	7	9	6	10	8	6
5	6	7	10	5	3	2
6	6	8	9	5	7	9
7	7	8	6	9	5	10
8	8	9	10	7	5	6
9	6	7	9	8	10	8
0	6	9	10	5	7	8

### 1.3. Примеры решения задач

#### 1.3.1

В цепи, схема которой изображена на рис. 1.3.1 известны ЭДС активных элементов:  $E_1 = 12$  В,  $E_2 = 15$  В, сопротивления резисторов:  $R_1 = 4$  Ом,  $R_2 = 9$  Ом,  $R_3 = 7$  Ом,  $R_4 = 3$  Ом,  $R_5 = 5$  Ом,  $R_6 = 2$  Ом. Определить токи в ветвях.

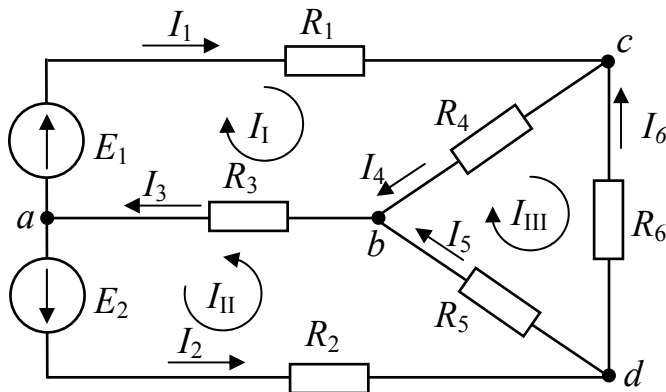


Рис.1.3.1.

применения законов Кирхгофа, для чего надо указать вероятные положительные направления токов в ветвях. Обозначим узлы и токи в ветвях.

Число уравнений в системе, составляемых по законам Кирхгофа должно быть равно числу неизвестных токов, т.е. числу ветвей  $y$ . По первому закону Кирхгофа составляются уравнения для независимых узлов, число которых равно  $(x - 1)$ . По второму закону Кирхгофа уравнения составляются для независимых контуров в количестве равном  $y - (x - 1)$ .

Таким образом, для данной схемы надо составить 6 уравнений из них 3 уравнения по первому закону Кирхгофа и 3 уравнения по второму закону Кирхгофа. Составим уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и по второму – для контуров I, II, III соответственно:

$$\begin{aligned} -I_1 - I_2 + I_3 &= 0; \\ -I_3 + I_4 + I_5 &= 0; \\ I_1 - I_4 + I_6 &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1 &= R_1 I_1 + R_3 I_3 + R_4 I_4; \\ E_2 &= R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_5 I_5; \\ 0 &= R_4 I_4 - R_5 I_5 + R_6 I_6. \end{aligned}$$

Решение задачи этим методом позволяет определить действительные токи в ветвях, установить их правильные направления, но система

#### Решение

Заданная схема представляет собой разветвленное соединение активных элементов и пассивных приемников. В схеме имеется  $x = 4$  узла и  $y = 6$  ветвей.

Расчет токов можно выполнять методом непосредственного

уравнений громоздка, решение ее при отсутствии ЭВМ становится трудоемким. Поэтому чаще пользуются практическими методами. К числу универсальных относится метод контурных токов.

В методе контурных токов вводятся условные контурные токи, с помощью которых после их расчета определяются действительные токи в ветвях. Число контурных токов равно числу независимых контуров. Уравнения для расчета контурных токов составляются по второму закону Кирхгофа. При составлении уравнений учитываются напряжения на всех пассивных элементах контура от собственного контурного тока и в смежных элементах – от контурных токов соседних контуров. Направление обхода контура лучше выбрать совпадающим с направлением собственного контурного тока.

Составим уравнения для контуров I, II, III схемы на рис. 1.3.1. Направления контурных токов и соответственно направление обхода контура показано на рис. 1.3.1.:

$$\begin{aligned} E_1 &= (R_1 + R_3 + R_4) I_I + R_3 I_{II} - R_4 I_{III}; \\ E_2 &= R_3 I_I + (R_2 + R_3 + R_5) I_{II} + R_5 I_{III}; \\ 0 &= -R_4 I_I + R_5 I_{II} + (R_4 + R_5 + R_6) I_{III}. \end{aligned}$$

Подставив числовые значения надо решить любым математическим методом полученную систему алгебраических уравнений относительно контурных токов  $I_I, I_{II}, I_{III}$ :

$$\begin{aligned} 12 &= 14 I_I + 7 I_{II} - 3 I_{III}; \\ 15 &= 7 I_I + 21 I_{II} + 5 I_{III}; \\ 0 &= -3 I_I + 5 I_{II} + 10 I_{III}. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, можно найти контурные токи, а по ним – искомые токи ветвей:  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ .

Используя метод Крамера, контурные токи можно рассчитать по формулам:

$$I_I = \frac{D_1}{D}; \quad I_{II} = \frac{D_2}{D}; \quad I_{III} = \frac{D_3}{D},$$

где  $D$  – определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных токах,  $D_1, D_2, D_3$  – определители, полученные из  $D$  заменой столбца коэффициентов определяемого тока столбцом ЭДС.

Для рассматриваемой системы уравнений:

$$D = \begin{vmatrix} 14 & 7 & -3 \\ 7 & 21 & 5 \\ -3 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 1701; \quad D_1 = \begin{vmatrix} 12 & 7 & -3 \\ 15 & 21 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 945;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 14 & 12 & -3 \\ 7 & 15 & 5 \\ -3 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 945; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 14 & 7 & 12 \\ 7 & 21 & 15 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -189.$$

Контурные токи:  $I_I = 0,556 \text{ A}$ ;  $I_{II} = 0,556 \text{ A}$ ;  $I_{III} = -0,111 \text{ A}$ . Отрицательные знаки рассчитанных токов указывают на то, что выбранное направление контурного тока не соответствует действительному. Токи в ветвях исследуемой схемы определим по рассчитанным контурным токам:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_I = 0,556 \text{ A}; & I_4 &= I_I - I_{III} = 0,667 \text{ A}; \\ I_2 &= I_{II} = 0,556 \text{ A}; & I_5 &= I_{II} + I_{III} = 0,445 \text{ A}; \\ I_3 &= I_I + I_{II} = 1,112 \text{ A}; & I_6 &= -I_{III} = 0,111 \text{ A}. \end{aligned}$$

Правильность и точность решения задачи можно проверить составлением баланса мощностей:

$$-E_1 I_1 - E_2 I_1 + E_3 I_3 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2.$$

Произведение  $E_k I_k$  записывается с положительным знаком, если ЭДС и ток в активной ветви совпадают по направлению и с отрицательным знаком, если направлены встречно.

После подстановки числовых значений получим мощность активных элементов

$$P_{\text{аэ}} = \sum_{k=3} E_k I_k = 15,012 \text{ Вт}, \quad P_{\text{пр}} = \sum_{j=6} R_j I_j^2 = 15,023 \text{ Вт}.$$

мощность пассивных приемников

Ошибка расчета составит:

$$\Delta = \frac{|P_{\text{аэ}} - P_{\text{пр}}|}{P_{\text{аэ}}} \cdot 100 \% = 0,078 \%$$

### 1.3.2

В цепи, схема и данные которой представлены в задаче 1.3.1, определить токи в ветвях с резисторами  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  методом междуузлового напряжения.

### Решение

Метод междуузлового напряжения применяется при расчете, когда схема имеет два узла и  $n$  параллельно соединенных ветвей или в

случае, когда схема с помощью эквивалентных преобразований может быть приведена к схеме с двумя узлами.

Заданная схема имеет четыре узла, но если пассивный треугольник сопротивлений  $R_4, R_5, R_6$  заменить эквивалентным соединением звездой с сопротивлениями  $R_b, R_c, R_d$ , схема будет состоять из трех ветвей, подключенных к двум узлам.

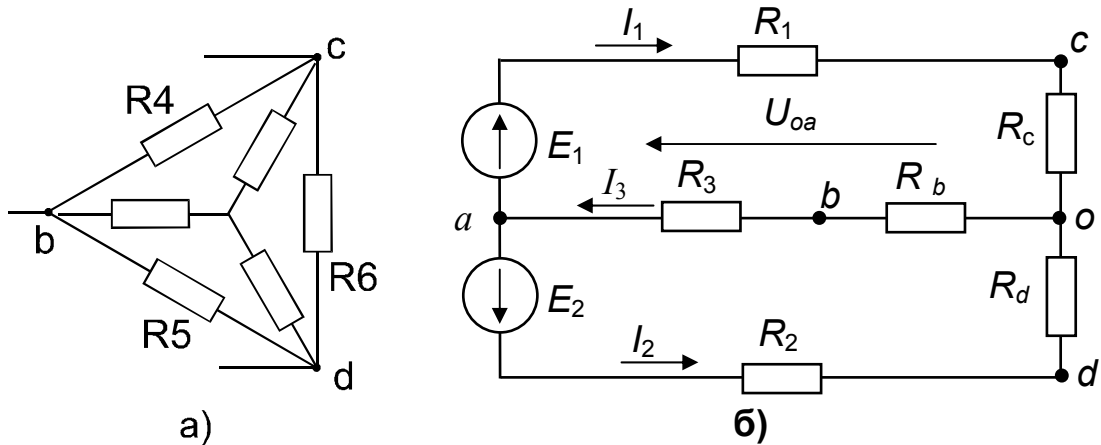


Рис. 1.3.2

$$R_b = \frac{R_4 \times R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = 1,5 \text{ Ом}; \quad R_c = \frac{R_4 \times R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = 0,6 \text{ Ом};$$

$$R_d = \frac{R_5 \times R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = 1 \text{ Ом}.$$

Обозначим напряжение  $U_{oa}$  между узлами полученной схемы (рис.1.3.2 б) ) и рассчитаем по выражению из [1, с. 43; 3, с. 26]

$$U_{oa} = \frac{\sum_{k=2}^{k=2} E_k G_k}{\sum_{k=3}^{k=3} G_k} = \frac{E_1 G_{1c} + E_2 G_{2d}}{G_{1c} + G_{2d} + G_{3b}} = 9,446 \text{ В}.$$

Произведение  $E_k G_k$  записывается с положительным знаком, если  $E_k$  направлено встречно по отношению к выбранному произвольно направлению напряжения  $U_{oa}$ .

Проводимости соответственно равны:

$$G_{1c} = \frac{1}{R_1 + R_c} = 0,2174 \text{ См}; \quad G_{2d} = \frac{1}{R_2 + R_d} = 0,1 \text{ См};$$

$$G_{3b} = \frac{1}{R_3 + R_b} = 0,1176 \text{ См}.$$

Токи в ветвях определяются по закону Ома (1.1.2), ЭДС и напряжение записываются с положительным знаком, если они совпадают с направлением тока.

$$I_1 = (E_1 - U_{oa}) G_{1c} = (12 - 9,446) 0,2174 = 0,555 \text{ A},$$

$$I_2 = (E_2 - U_{oa}) G_{2d} = (15 - 9,446) 0,1 = 0,555 \text{ A},$$

$$I_3 = U_{oa} G_{3b} = 9,446 \cdot 0,1176 = 1,11 \text{ A}.$$

Правильность решения задачи можно проверить составлением уравнения по первому закону Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^3 I_k = 0; \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

### 1.3.3

В цепи, схема и данные которой представлены в задаче 1.3.1, определить токи в ветвях с резисторами  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  методом наложения.

#### Решение

Расчет сложной цепи с несколькими ЭДС методом наложения сводится к расчету нескольких цепей с одним источником питания. Ток в любой ветви рассматривается как результат наложения токов, рассчитанных от отдельных ЭДС, действующих независимо друг от друга.

Для определения токов в ветвях с резисторами  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  методом наложения схему рис.1.3.1. можно упростить, если пассивный треугольник сопротивлений  $R_4$ ,  $R_5$ ,  $R_6$  заменить эквивалентным соединением звездой с сопротивлениями  $R_b$ ,  $R_c$ ,  $R_d$ , расчет сопротивлений для схемы (рис.1.3.2 б) приведен на стр. 22.

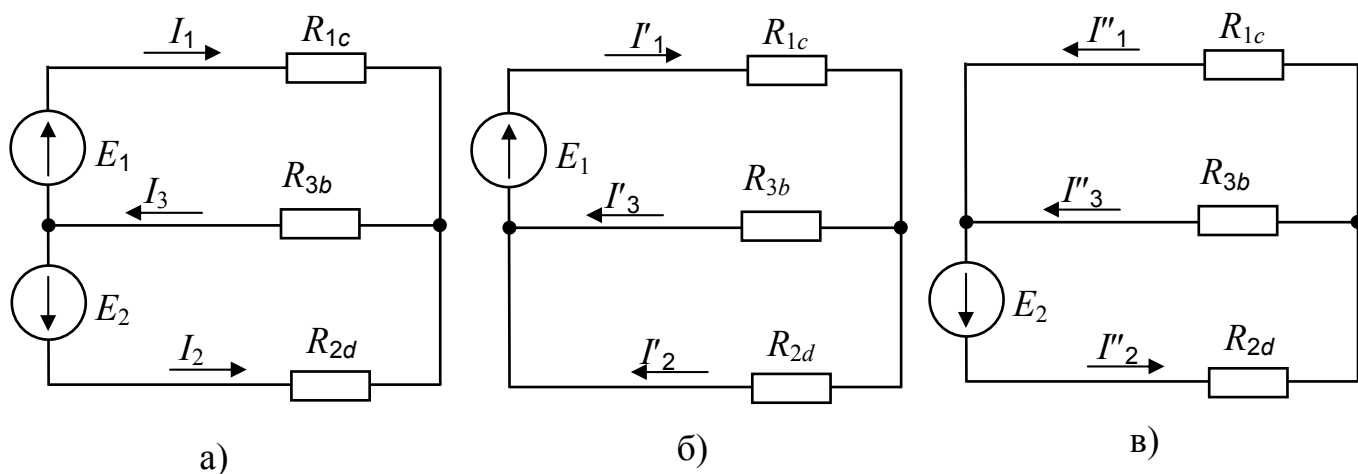


Рис.1.3.3

В схеме замещения, представленной на рис.1.3.3 б) действует только ЭДС  $E_1$ , сопротивления всех резисторов остаются неизменными.

Определение частичных токов  $I'_1$ ,  $I'_2$ ,  $I'_3$  отдельных ветвей от ЭДС  $E_1$  сводят к расчету схемы цепи рис. 1.3.3 б) чаще методом эквивалентных преобразований.

Сопротивления ветвей схемы:

$$R_{1c} = R_1 + R_c = 4,6 \text{ Ом}; \quad R_{2d} = R_2 + R_d = 10 \text{ Ом};$$

$$R_{3b} = R_3 + R_b = 8,5 \text{ Ом}, \text{ где } R_c = 0,6 \text{ Ом}, R_b = 1,5 \text{ Ом}, R_d = 1 \text{ Ом}.$$

Эквивалентное сопротивление относительно источника с ЭДС  $E_1$ :

$$R'_9 = R_{1c} + \frac{R_{3b} \cdot R_{2d}}{R_{3b} + R_{2d}} = 9,195 \text{ Ом}.$$

Теперь рассчитаем токи, создаваемые источником с ЭДС  $E_1$ :

$$I'_1 = \frac{E_1}{R'_9} = 1,305 \text{ А}; \quad I'_2 = I'_1 \cdot \frac{R_{3b}}{R_{3b} + R_{2d}} = 0,6 \text{ А};$$

$$I'_3 = I'_1 \cdot \frac{R_{2d}}{R_{3b} + R_{2d}} = 0,705 \text{ А}.$$

Далее повторяют поочередно расчет всех схем с другими ЭДС. В данной задаче следующим шагом должно быть определение частичных токов  $I''_1$ ,  $I''_2$ ,  $I''_3$  для схемы с ЭДС  $E_2$  (рис. 1.3.3 в).

Определим эквивалентное сопротивление относительно источника с

$$\text{ЭДС } E_2: \quad R''_9 = R_{2d} + \frac{R_{3b} \cdot R_{1c}}{R_{3b} + R_{1c}} = 12,985 \text{ Ом}.$$

Токи, создаваемые источником с ЭДС  $E_2$ :

$$I''_2 = \frac{E_2}{R''_9} = 1,155 \text{ А}; \quad I''_1 = I''_2 \cdot \frac{R_{3b}}{R_{3b} + R_{1c}} = 0,75 \text{ А};$$

$$I''_3 = I''_1 \cdot \frac{R_{1c}}{R_{3b} + R_{1c}} = 0,405 \text{ А}.$$

Алгебраическое суммирование частичных токов дает значение действительных токов ветвей, положительные направления которых нанесены на схемы (рис. 1.3.3). Учитывая направления частичных и результирующих токов, получим:

$$I_1 = I'_1 - I''_1 = 1,305 - 0,75 = 0,555 \text{ А};$$

$$I_2 = -I'_2 + I''_2 = -0,6 + 1,155 = 0,555 \text{ А};$$

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = 0,705 + 0,405 = 1,11 \text{ А}.$$

Число слагаемых в уравнениях равно числу ЭДС исходной схемы.

### 1.3.4

В цепи, схема и данные которой представлены в задаче 1.3.1, определить ток в ветви с резистором  $R_6$  методом эквивалентного генератора.

#### Решение

В исследуемой цепи часть схемы в пунктирном контуре рис. 1.3.4 а) представляет эквивалентный генератор, который можно заменить эквивалентным активным двухполюсником рис. 1.2.4 б) с источни-

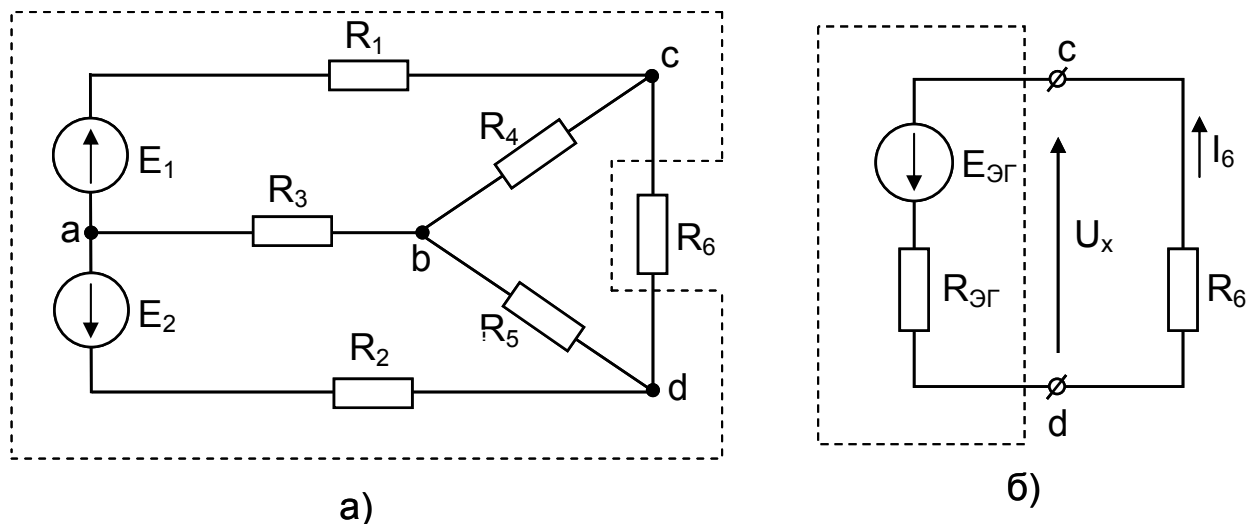


Рис. 1.3.4.

ком ЭДС  $E_{ЭГ}$  и резистивным элементом  $R_{ЭГ}$ . ЭДС источника равна напряжению холостого хода ( $E_{ЭГ} = U_x$ ),  $R_{ЭГ}$  равно входному сопротивлению пассивного двухполюсника ( $R_{ЭГ} = R_{вх}$ ).

По закону Ома ток  $I_6$  в схеме на рис. 1.3.4 б) равен  $I_6 = E_{ЭГ} / (R_{ЭГ} + R_6)$ , следовательно для расчета  $I_6$  надо определить  $E_{ЭГ}$  и  $R_{ЭГ}$ .

Для расчета  $E_{ЭГ}$  воспользуемся схемой, изображенной на рис. 1.3.5 с отключенным резистором  $R_6$ . Определим  $U_x$  между точками  $c$  и  $d$  по второму закону Кирхгофа.

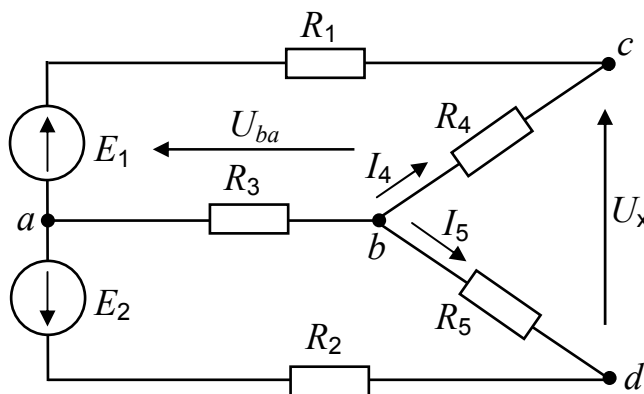


Рис. 1.3.5.

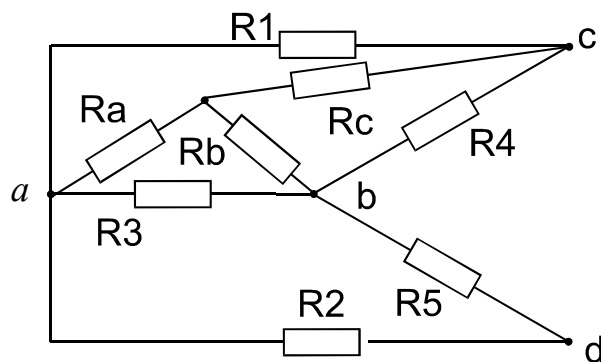


Рис. 1.3.6



$$U_{\underline{x}} = E_{\underline{\text{эГ}}} = R_4 I_4 - R_5 I_5 = -3 \cdot 0,595 + 5 \cdot 0,512 = 0,773 \text{ В.}$$

Токи  $I_4$  и  $I_5$  можно рассчитать любым известным методом. После отключения резистора  $R_6$  в схеме стало два узла  $a$  и  $b$  и три ветви, поэтому проще воспользоваться методом междуузлов напряжения, из которого следует:

$$I_4 = \frac{-E_1 + U_{ba}}{R_1 + R_4} = \frac{-12 + 7,836}{7} = -0,595 \text{ А,}$$

$$I_5 = \frac{-E_2 + U_{ba}}{R_2 + R_5} = \frac{-15 + 7,836}{14} = -0,512 \text{ А,}$$

где

$$U_{ba} = \frac{E_1 G_{14} + E_2 G_{25}}{G_{14} + G_{25} + G_3} = \frac{12 \frac{1}{7} + 15 \frac{1}{14}}{\frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7}} = 7,836 \text{ В.}$$

Определение сопротивления эквивалентного генератора выполнено по схеме, изображенной на рис. 1.3.6, для чего предварительно заменим треугольник сопротивлений  $R_1, R_3, R_4$  эквивалентным соединением звездой с сопротивлениями  $R_a, R_b, R_c$ .

$$R_a = \frac{R_1 \times R_3}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{4 \times 7}{14} = 2 \text{ Ом;}$$

$$R_b = \frac{R_3 \times R_4}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{7 \times 3}{14} = 1,5 \text{ Ом;}$$

$$R_c = \frac{R_1 \times R_4}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{4 \times 3}{14} = 0,857 \text{ Ом;}$$

$$R_{\text{эГ}} = R_{cd} = \frac{(R_2 + R_a) \times (R_4 + R_c)}{(R_2 + R_a) + (R_4 + R_c)} + R_b = \frac{11 \times 3,857}{14,857} + 1,5 = 4,356 \text{ Ом.}$$

Получив величины  $E_{\text{эГ}}$  и  $R_{\text{эГ}}$ , можно определить ток  $I_6$ :

$$I_6 = \frac{E_{\text{эГ}}}{R_{\text{эГ}} + R_6} = \frac{0,773}{4,356 + 2} = 0,121 \text{ А.}$$

### 1.3.5

В цепи, схема и данные которой представлены в задаче 1.2.1, построить потенциальную диаграмму для контура  $abcd$ .

Для построения потенциальной диаграммы примем одну из точек этой цепи, например  $a$  за исходную и ее потенциал будем считать равным нулю  $\varphi_a = 0 \text{ В}$  (Рис. 1.3.7).

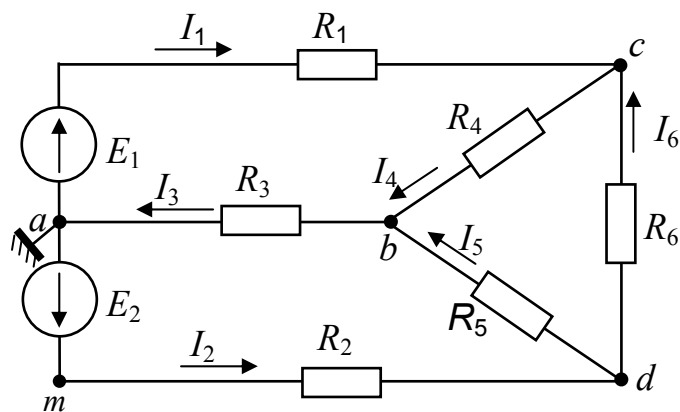


Рис.1.3.7.

Тогда потенциалы остальных точек определятся выражениями:

$$\begin{aligned} \varphi_b &= \varphi_a + I_3 R_3 = 0 + 1,112 \cdot 7 = 7,784 \text{ В}; \\ \varphi_c &= \varphi_b + I_4 R_4 = 7,784 + 0,667 \cdot 3 = 9,785 \text{ В}; \\ \varphi_d &= \varphi_c + I_6 R_6 = 9,785 + 0,111 \cdot 2 = 9,996 \text{ В}; \\ \varphi_m &= \varphi_d + I_2 R_2 = 9,996 + 0,556 \cdot 9 = 15 \text{ В}; \\ \varphi_a &= \varphi_m - E_2 = 15 - 15 = 0 \text{ В}. \end{aligned}$$

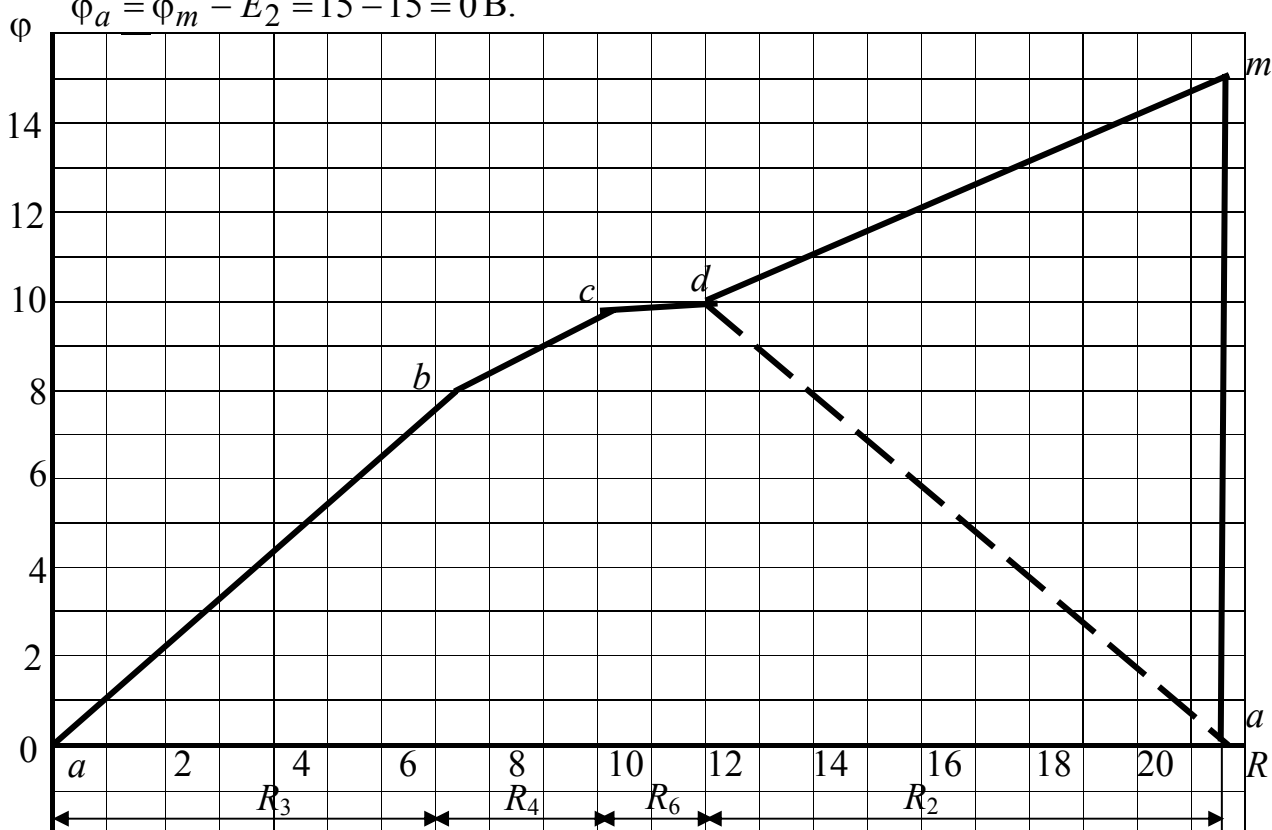


Рис. 1.3.8

График потенциальной диаграммы показан на рис. 1.3.8. Координатами потенциальных точек являются величины их потенциалов и сопротивления элементов контура. Сопротивления элементов согласно

масштабной шкале откладываются вдоль оси абсцисс в виде отрезков, таким образом, что каждый последующий располагается от конца предыдущего. Последовательность расположения отрезков вдоль оси определяется направлением обхода контура. Потенциальные точки соединяются отрезками прямых, поэтому график потенциальной диаграммы представляет собой ломаную линию. По графику потенциальной диаграммы можно определить напряжение между любыми двумя точками контура.

## 2. ОДНОФАЗНЫЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

### 2.1. Основные понятия и формулы

В линейных цепях синусоидального тока напряжения, ЭДС и токи являются синусоидальными функциями времени:

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin(\omega t + \psi_u); \\ e &= E_m \sin(\omega t + \psi_e); \\ i &= I_m \sin(\omega t + \psi_i), \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

где  $u, e, i$  – мгновенные значения синусоидальных напряжения, ЭДС и тока;  $U_m, E_m, I_m$  – амплитудные значения синусоидальных напряжения, ЭДС и тока;  $\omega = 2\pi f$  – угловая частота;  $\psi_u, \psi_e, \psi_i$  – начальные фазы синусоидальных напряжения, ЭДС и тока.

Синусоидально изменяющиеся напряжение, ЭДС и ток могут быть условно представлены в виде комплексных чисел  $\dot{U}, \dot{E}, \dot{I}$ , которые записываются в трех формах:

- Показательной  $\dot{U} = U e^{j\psi_u}; \quad \dot{E} = E e^{j\psi_e}; \quad \dot{I} = I e^{j\psi_i}, \quad (2.1.2)$

- Тригонометрической  $\dot{U} = U(\cos \psi_u + j \sin \psi_u);$   
 $\dot{E} = E(\cos \psi_e + j \sin \psi_e); \quad \dot{I} = I(\cos \psi_i + j \sin \psi_i), \quad (2.1.3)$

- алгебраической  $\dot{U} = U' + jU''; \dot{E} = E' + jE''; \dot{I} = I' + jI'', \quad (2.1.4)$

где  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}; \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  – модули действующих значений напряжения, ЭДС и тока.

Переход от показательной к алгебраической форме записи выполняется по формулам  $U' = U \cos \psi_u, \quad U'' = U \sin \psi_u$ , а обратный переход

– по формулам  $U = \sqrt{(U')^2 + (U'')^2}, \quad \psi_u = \arctg \frac{U''}{U'}$  при  $U' > 0$  и

$\psi_u = \arctg \frac{U''}{U'} + 180^\circ$  при  $U' < 0$ .

Соотношения между напряжениями и токами в цепи переменного тока зависят не только от преобразования электрической энергии в теп-

ловую, но и от изменения энергий магнитного и электрического полей в катушках и конденсаторах.

### Цепь переменного тока с резистивным элементом

Параметром резистивного элемента является активное сопротивление  $R$ . В резисторе происходит процесс преобразования электрической энергии в тепловую. Если к резистору приложено синусоидально изменяющееся напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

то, по закону Ома, мгновенное значение тока в цепи:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u) = I_m \sin(\omega t + \psi_u) \quad (2.1.5)$$

Действующие значения напряжения и тока:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (2.1.6)$$

Так как  $I_m = U_m / R$ , то

$$I = \frac{U_m}{\sqrt{2}R} = \frac{U}{R}. \quad (2.1.7)$$

Полученное выражение (2.1.7) – есть закон Ома для модуля действующего значения тока.

Комплексные действующие значения напряжения и тока

$$\dot{U} = U e^{j\psi_u}; \quad \dot{I} = I e^{j\psi_u}. \quad (2.1.8)$$

Закон Ома в комплексной форме:  $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{U e^{j\psi_u}}{R} = I e^{j\psi_u}$ . (2.1.9)

Напряжение и ток в резисторе совпадают по фазе угол  $\varphi = 0$ .

Средняя за период мощность есть активная мощность данной электрической цепи, измеряемая в ваттах

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (2.1.10)$$

### Цепь переменного тока с индуктивным элементом

Параметром данной электрической цепи является только индуктивность  $L$  (активное сопротивление  $R = 0$ ). Пусть в данной цепи мгновенное значение тока

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Переменный ток возбуждает переменный магнитный поток, который индуцирует ЭДС самоиндукции  $e_L$ . По второму закону Кирхгофа:

$$u = -e_L = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i) = U_m \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}),$$

где  $U_m = \omega L I_m = X_L I_m$  – амплитуда напряжения,

$X_L = \omega L = 2\pi f L$  – индуктивное сопротивление, с единицей измерения Ом.

Напряжение цепи с индуктивным элементом опережает по фазе ток на угол  $\frac{\pi}{2}$ , т.е.  $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ .

Закон Ома для действующих значений напряжения и тока:

$$I = \frac{U}{X_L} \quad \text{или} \quad U = X_L I. \quad (2.1.11)$$

Закон Ома в комплексной форме:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{jX_L}, \quad \text{или} \quad \dot{U} = jX_L \dot{I}. \quad (2.1.12)$$

Комплексное сопротивление индуктивного элемента является положительным мнимым числом, модуль которого равен  $X_L$ .

Векторная диаграмма для этой цепи представлена на рис. 2.1.1.

Активная мощность, характеризующая необратимое преобразование энергии и количественно определяемая средним значением мгновенной мощности за период, для индуктивного элемента равна 0

$$P = UI \cos \varphi = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 90^\circ.$$

$$(2.1.13)$$

Реактивная мощность индуктивного элемента представляет амплитудное значение мгновенной мощности:

$$Q_L = UI \sin \varphi = UI = X_L I^2. \quad (2.1.14)$$

Единице измерения реактивной мощности присвоено название вольт-ампер

реактивный, сокращенно ВАр.

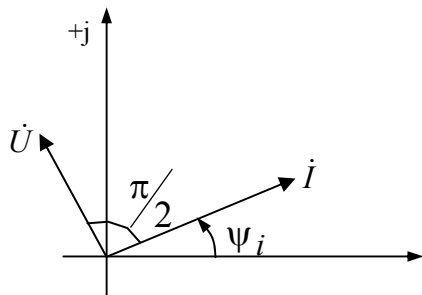


Рис. 2.1.1

### Неразветвленная цепь с активным сопротивлением и индуктивностью

Реальная катушка с параметрами  $R \neq 0$  и  $L \neq 0$  может быть представлена схемой замещения с последовательным соединением резистивного и индуктивного элементов.

Закон Ома для данной цепи может быть записан:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \quad \text{или} \quad U = ZI, \quad (2.1.15)$$

где  $U$  и  $I$  – модули действующих значений напряжения и тока;

$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$  – полное сопротивление, графически изображается

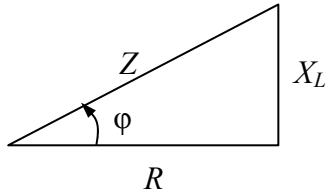


Рис. 2.1.2

гипотенузой прямоугольного треугольника сопротивлений (рис.2.1.2), а катетами его являются активное  $R$  и индуктивное  $X_L = \omega L$  сопротивления.

Закон Ома в комплексной форме описывается следующим выражением:

$$\underline{\dot{I}} = \frac{\underline{\dot{U}}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{\dot{U}}}{R + jX_L} = \frac{\underline{\dot{U}}}{Z e^{j\varphi}} \quad \text{или}$$

$$\underline{\dot{U}} = \underline{Z} \underline{\dot{I}} = (R + jX_L) \underline{\dot{I}},$$

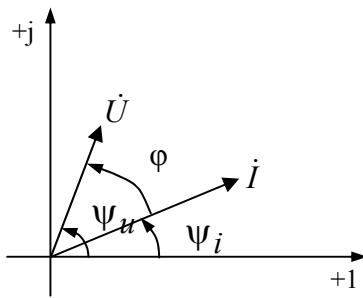


Рис. 2.1.3

где  $\underline{\dot{U}} = U e^{j\psi_u}$ ,  $\underline{\dot{I}} = I e^{j(\psi_u - \varphi)} = I e^{j\psi_i}$  – комплексные действующие значения напряжения и тока.

Векторная диаграмма для цепи с активным сопротивлением и индуктивностью представлена на рис. 2.1.3, вектор тока отстает от вектора напряжения на угол  $\varphi$ .

Полное комплексное сопротивление:

$$\underline{Z} = R + jX_L = Z e^{j\varphi}, \quad (2.1.17)$$

где  $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{X_L}{R}$ .

Полная комплексная мощность:

$$\underline{S} = \underline{\dot{U}} \underline{\dot{I}}^* = U e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i} = UI e^{j\varphi}, \quad (2.1.18)$$

где  $S = UI$  – модуль полной мощности;

$\underline{\dot{I}}^* = I e^{-j\psi_i}$  – сопряженный комплексный ток;

$\varphi = \psi_u - \psi_i$  – угол сдвига по фазе между векторами напряжения и тока.

Полная комплексная мощность в тригонометрической форме:

$$\underline{S} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ_L,$$

$P = UI \cos \varphi$  – активная мощность;

$Q_L = UI \sin \varphi$  – реактивная мощность индуктивного характера;

$\cos \varphi$  – называют коэффициентом мощности.

Мощности  $P$ ,  $Q_L$  и  $S$  графически образуют прямоугольный треугольник, из которого:

$$S = \sqrt{P^2 + Q_L^2}. \quad (2.1.19)$$

Единице полной мощности присвоено название вольт-ампер, сокращенно ВА.

### Цепь с емкостным элементом

Цепь с идеальным конденсатором характеризуется только одним параметром емкостью  $C$ . Если к цепи приложено синусоидальное напряжение:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

то мгновенное значение тока будет равно:

$$i = C \frac{du}{dt} = CU_m \omega \cos(\omega t + \psi_u) = I_m \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.1.20)$$

где  $I_m = \omega CU_m = \frac{U_m}{X_C}$  – амплитудное значение тока в цепи;  $X_C = \frac{1}{\omega C}$

– емкостное сопротивление, Ом;  $C$  – емкость конденсатора, Ф;

$\varphi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}$  – угол сдвига фаз напряжения и тока.

Закон Ома для действующих значений напряжения и тока:

$$I = \frac{U}{X_C} \quad \text{или} \quad U = X_C I. \quad (2.1.21)$$

Закон Ома в комплексной форме:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{-jX_C} \quad \text{или} \quad \dot{U} = -jX_C \dot{I}.$$

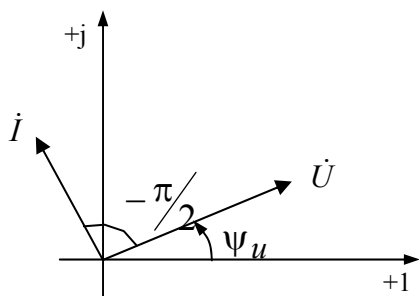


Рис. 2.1.4.

Комплексное сопротивление емкостного элемента является отрицательным мнимым числом, модуль которого равен  $X_C$ .

Векторная диаграмма для емкостного элемента построена на рис. 2.1.4, вектор тока в емкостном элементе опережает вектор напряжения на угол  $\frac{\pi}{2}$ .

Активная мощность, равная среднему значению мгновенной мощности за пе-

риод, для емкостного элемента равна 0:

$$P = UI \cos \varphi = 0 \text{ при } \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Реактивная мощность емкостного элемента представляет амплитудное значение мгновенной мощности:

$$Q_C = UI \sin \varphi = UI = X_C I^2.$$

### Неразветвленная цепь с активным сопротивлением и емкостным элементом

Закон Ома для данной цепи может быть записан:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \text{ или } U = ZI, \quad (2.1.22)$$

где  $U$  и  $I$  – модули действующих значений напряжения и тока;

$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$  – полное сопротивление, графически изображается

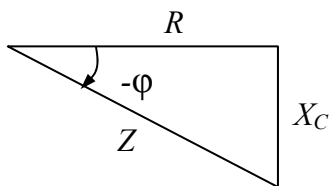


Рис. 2.1.5

гипотенузой прямоугольного треугольника сопротивлений (рис.2.1.5), а катетами его являются активное  $R$  и емкост-

ное  $X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{\omega C}$  сопротивления.

Закон Ома в комплексной форме описывается следующим выражением:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{\dot{U}}{R - jX_C} = \frac{\dot{U}}{Z e^{-j\varphi}} \text{ или } \dot{U} = \underline{Z} \dot{i} = (R - jX_C) \dot{i}, \quad (2.1.23)$$

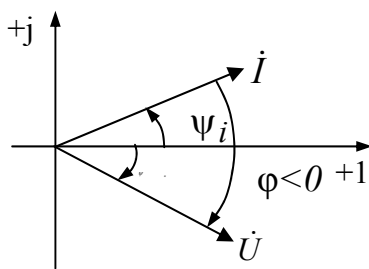


Рис. 2.1.6

где  $\dot{U} = U e^{j\psi_u}$ ,  $\dot{i} = I e^{j(\psi_u + \varphi)} = I e^{j\psi_i}$  – комплексные действующие значения напряжения и тока.

Векторная диаграмма для цепи с активным сопротивлением и емкостью представлена на рис. 2.1.6, вектор напряжения отстает от вектора тока на угол  $\varphi$ .

Полное комплексное сопротивление:

$$\underline{Z} = R - jX_C = Z e^{-j\varphi}, \quad (2.1.24)$$

где  $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{X_C}{R}$ .

Полная комплексная мощность:



$$\underline{S} = \dot{U} I^* = U e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i} = UI e^{-j\varphi}, \quad (2.1.25)$$

где  $S = UI$  – модуль полной мощности;

$I^* = I e^{-j\psi_i}$  – сопряженный комплексный ток;

$\varphi = \psi_u - \psi_i$  – угол сдвига по фазе между векторами напряжения и тока.

Полная комплексная мощность в тригонометрической форме:

$$\underline{S} = UI \cos \varphi - jUI \sin \varphi = P - jQ_C,$$

$P = UI \cos \varphi$  – активная мощность;

$Q_C = UI \sin \varphi$  – реактивная мощность емкостного характера.

Мощности  $P$ ,  $Q_C$  и  $S$  графически образуют прямоугольный треугольник, из которого:

$$S = \sqrt{P^2 + Q_C^2}. \quad (2.1.26)$$

### Неразветвленная цепь с активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью

Закон Ома для модуля действующего значения тока такой цепи может быть записан:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}}, \quad (2.1.27)$$

где  $X = X_L - X_C$  – реактивное сопротивление цепи,  $U$  – модуль действующего значения напряжения.

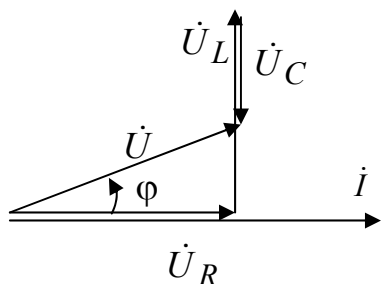


Рис. 2.1.7

Закон Ома в комплексной форме описывается следующим выражением:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{\dot{U}}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{\dot{U}}{R + jX}, \quad (2.1.28)$$

Построение векторной диаграммы для электрической цепи с последовательным соединением  $R$ ,  $L$  и  $C$  элементов следует начать

с построения в соответствии с масштабом ( $m_i = n$ ,  $\frac{\text{А}}{\text{см}}$ ) вектора тока

$\dot{i}$ , затем в принятом масштабе ( $m_u = k$ ,  $\frac{\text{В}}{\text{см}}$ ) следует построить векто-

ры напряжений на соответствующих сопротивлениях в последовательности их расположения в схеме при обходе контура в направлении противоположном направлению тока, при этом  $\dot{U}_R$  строится совпадающим

по фазе с током,  $\dot{U}_L$  опережающим вектор тока на угол  $90^\circ$ ,  $\dot{U}_C$  отстающим от вектора тока на угол  $90^\circ$ . Напряжение, приложенное к цепи, определяется как сумма:  $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$ . Векторная диаграмма цепи с последовательным соединением элементов  $R, L, C$  показана на рис. 2.1.7. При равенстве индуктивного и емкостного сопротивлений  $X_L = X_C$  наступает явление резонанса напряжений

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad (2.1.29)$$

откуда может быть получена угловая резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (2.1.30)$$

резонансная частота изменения тока

$$f_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (2.1.31)$$

Полное сопротивление цепи при резонансе напряжений равно активному сопротивлению и приобретает минимальное значение  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R$ , поэтому ток в цепи имеет наибольшее значение  $I = U/R$  и совпадает по фазе с напряжением, т.е.  $\varphi = 0$  и коэффициент мощности  $\cos \varphi = 1$ , активная мощность имеет наибольшее значение  $P = UI \cos \varphi = UI$ , реактивная мощность  $Q = UI \sin \varphi = 0$ .

### Цепь с параллельным соединением ветвей

Схема замещения электрической цепи с параллельным соединением двух ветвей представлена на рис. 2.1.8. Модули действующих значений токов в ветвях, согласно закону Ома, равны:

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}}; \quad I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + X_C^2}}, \quad (2.1.32)$$

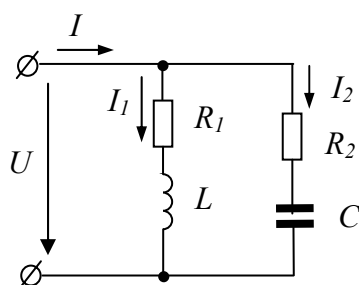


Рис. 2.1.8

или в комплексной форме

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{\dot{U}}{R_1 + jX_L} = \dot{U} \underline{Y}_{-1} \\ \dot{I}_2 &= \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{\dot{U}}{R_2 - jX_C} = \dot{U} \underline{Y}_2, \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

где  $\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1}$ ;  $\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2}$  – эквивалентные комплексные проводимости ветвей.

Общий ток цепи, согласно первому закону Кирхгофа, равен сумме токов ветвей:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)\dot{U} = \underline{Y}_{\text{экв}}\dot{U}, \quad (2.1.34)$$

Комплексные проводимости можно представить следующими выражениями:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R_1 + jX_L} = \frac{R_1 - jX_L}{R_1^2 + X_L^2} = \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} - j\frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} = G_1 - jB_L, \quad (2.1.35)$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_2 - jX_C} = \frac{R_2 + jX_C}{R_2^2 + X_C^2} = \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2} + j\frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} = G_2 + jB_C,$$

$$\underline{Y}_{\text{экв}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = (G_1 - jB_L) + (G_2 + jB_C) = G + jB = Y_{\text{экв}} e^{\pm j\varphi},$$

где  $G = G_1 + G_2$ ,  $G_1$  и  $G_2$  – активные проводимости неразветвленной части цепи, первой и второй ветвей соответственно;

$B = B_1 + B_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$  – реактивные проводимости неразветвленной части цепи, первой и второй ветвей соответственно.

При этом полная проводимость каждой ветви определяется формулами:

$$Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_L^2}, \quad Y_2 = \sqrt{G_2^2 + B_C^2}, \quad (2.1.36)$$

полная проводимость всей цепи равна

$$Y_{\text{экв}} = \sqrt{G^2 + B^2}. \quad (2.1.37)$$

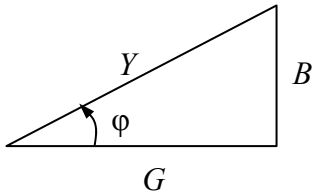


Рис. 2.1.9

Полная проводимость графически изображается гипотенузой прямоугольного треугольника проводимостей (рис. 2.1.9), а катетами его являются активная  $G$  и реактивная  $B$  проводимости. Из треугольника проводимостей

следует:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{G}; \quad \cos \varphi = \frac{G}{Y}; \quad \sin \varphi = \frac{B}{Y}.$$

Ток каждой ветви можно представить двумя составляющими: активной  $I_a$  и реактивной  $I_p$ . Активная составляющая тока совпадает по фазе с приложенным напряжением

$$I_a = I \cos \varphi = U \frac{R}{Z^2} = UG, \quad (2.1.38)$$

реактивная составляющая тока сдвинута относительно приложенного напряжения на угол  $\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$   $I_p = I \sin \varphi = U \frac{X}{Z^2} = UB$ . (2.1.39)

При этом  $I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}$ .

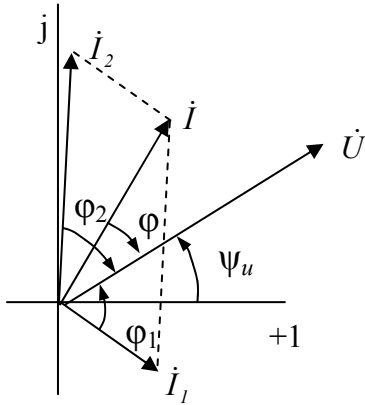


Рис. 2.1.10

Построение векторной диаграммы для электрической цепи с параллельным соединением ветвей следует начать с построения в соответствующем масштабе ( $m_u = k, \frac{В}{см}$ ) вектора напряжения  $\dot{U}$ , затем в принятом масштабе ( $m_i = n, \frac{А}{см}$ ) построить векторы токов в параллельных ветвях, при этом  $\dot{I}_1$  должен быть отстающим по фазе от приложенного напряжения  $\dot{U}$ , а вектор тока  $\dot{I}_2$  должен опережать по фазе вектор приложенного напряжения  $\dot{U}$ . Ток в неразветвленной части цепи, согласно первому закону Кирхгофа, определяется как сумма  $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ . Векторная диаграмма такой цепи показана на рис. 2.1.10.

Мощности цепи:

активная  $P = UI \cos \varphi = U^2 G$ ; (2.1.40)

реактивная  $Q = UI \sin \varphi = U^2 B$ ; (2.1.41)

полная  $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} = U^2 Y$ . (2.1.42)

В цепи с параллельным соединением ветвей (рис. 2.1.8) можно получить резонанс токов при условии равенства реактивных проводимостей  $B_L = B_C$  или при

$$\frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2}, \quad (2.1.43)$$

тогда полная проводимость цепи  $Y_{эКВ} = \sqrt{G^2 + B^2} = G$  (так как  $B = -B_L + B_C = 0$ ), равна активной проводимости. Угол сдвига фаз между током в неразветвленной части цепи и входным напряжением равен нулю. Реактивные составляющие токов ветвей равны между собой  $I_{1p} = I_{2p}$  или  $I_L = I_C$  и находятся в противофазе. Ток в неразветвленной

части цепи является активным:  $I = I_a = U(G_1 + G_2) = UG$ . При резонансе токов цепь обладает только активной мощностью  $P = UI \cos \varphi = UI$ .

## 2.2. Варианты индивидуальных заданий Задание №2

### РАСЧЕТ ОДНОФАЗНОЙ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

1. Рассчитать комплексные действующие значения токов в ветвях схемы методом эквивалентных преобразований.

2. Составить баланс активных и реактивных мощностей.

3. Рассчитать комплексные действующие напряжения на всех элементах схемы.

4. Построить векторную диаграмму (топографическую для векторов напряжений и лучевую для векторов токов в одной координатной плоскости).

5. Показать на заданной схеме включение однофазного ваттметра для измерения активной мощности, потребляемой всеми приемниками схемы. Определить показание ваттметра.

6. Записать выражения для мгновенных значений входных величин напряжения и тока.

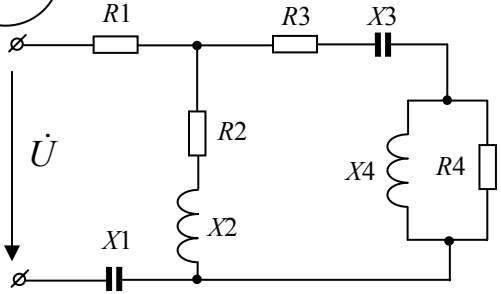
Таблица 1

№	X1	X2	X3	X4
	Ом	Ом	Ом	Ом
1	10	10	15	20
2	30	30	10	15
3	6	8	12	10
4	15	20	20	10
5	40	5	30	20
6	10	15	20	30
7	10	15	5	20
8	20	30	10	5
9	30	25	15	20
0	10	30	20	5

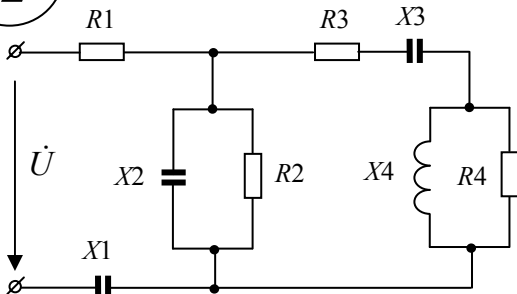
Таблица 2

№	U	R1	R2	R3	R4	$\Psi_U$
	В	Ом	Ом	Ом	Ом	град
1	127	30	10	20	10	45
2	220	40	15	20	15	30
3	380	8	6	4	4	20
4	110	10	5	8	12	-30
5	100	20	25	10	15	60
6	200	30	15	8	20	-45
7	127	50	20	6	10	-90
8	380	60	10	10	25	20
9	220	20	15	10	10	30
0	200	60	15	20	12	-60

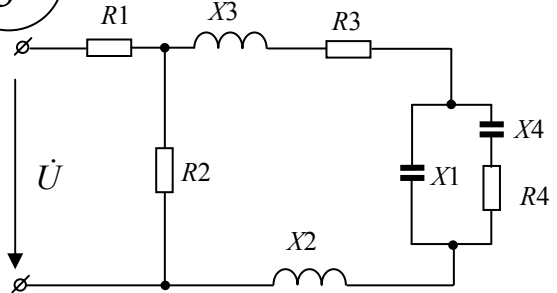
1



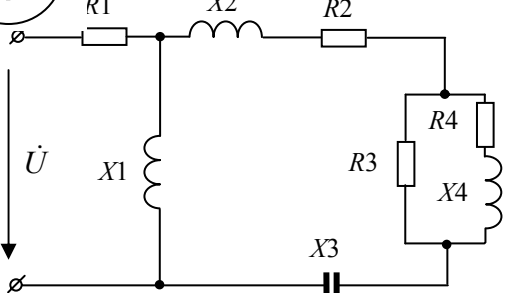
2



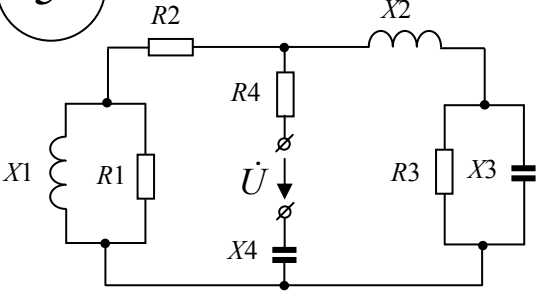
3



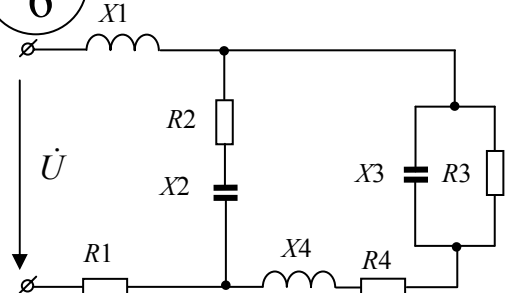
4



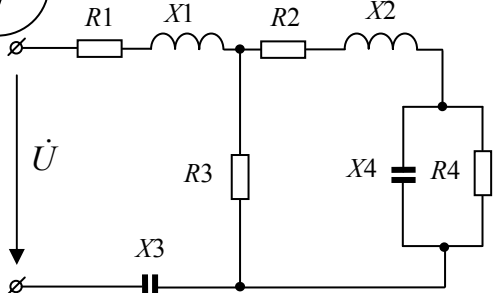
5



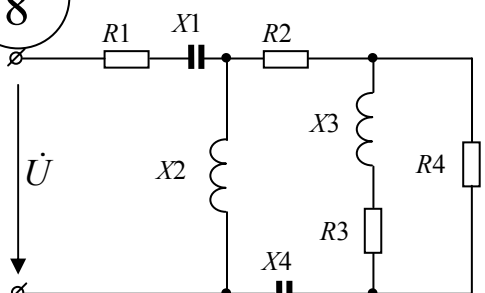
6



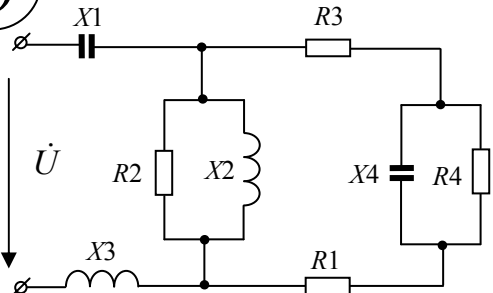
7



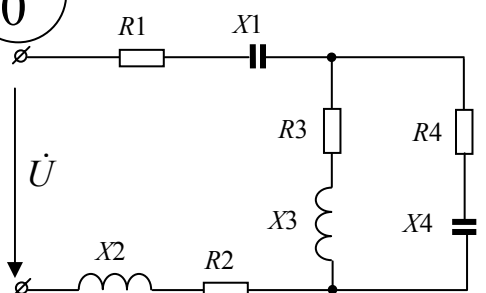
8



9



0



## 2.3. Примеры решения задач

### 2.3.1.

Схема замещения приемника состоит из последовательно соединенных элементов. Определить характер и параметры приемника, если  $u = 200\sin 500t$  В, а  $i = 50\sin(500t + \pi/6)$  А.

#### Решение

Запишем заданные напряжения и ток в комплексной форме:

$$\dot{U} = \frac{200}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} \text{ В}, \quad \dot{I} = \frac{50}{\sqrt{2}} e^{j30^\circ} \text{ А.}$$

Определим комплексное сопротивление всей цепи:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = 4e^{-j30^\circ} = 4\cos 30^\circ - 4j\sin 30^\circ = 3,46 - j2 \text{ Ом.}$$

Характер приемника – активно-емкостной, так как мнимая часть полученного комплексного сопротивления имеет отрицательный знак. Параметры приемника  $R = 3,46$  Ом,  $X_C = 2$  Ом. Тогда

$$C = \frac{1}{X_C \omega} = \frac{10^6}{500 \cdot 2} = 1000 \text{ мкФ.}$$

### 2.3.2.

Конденсатор с сопротивлением  $X_C = 5$  Ом и катушка индуктивности соединены последовательно. Определить индуктивность катушки, если при частоте  $f = 20$  Гц в цепи наступает резонанс напряжений.

#### Решение

Согласно условию возникновения резонанса напряжений  $X_L = X_C = 5$  Ом,

$$X_L = 2\pi f L, \quad \text{отсюда } L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{5}{2 \cdot 3,14 \cdot 20} = 0,04 \text{ Гн.}$$

### 2.3.3.

Определить показания приборов и построить векторную диаграмму токов и напряжений для цепи, принципиальная электрическая схема которой изображена на рис.2.3.3., если  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $L = 0,06$  Гн,  $C = 200$  мкФ,  $u = 200\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ)$  В,  $f = 50$  Гц.

Определить емкость конденсатора, при которой в цепи наступит резонанс токов.

#### Решение

Определим индуктивное и емкостное сопротивления:

$$X_L = 2\pi fL = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,06 = 18,84 \text{ Ом},$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{10^6}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 200} = 15,92 \text{ Ом}.$$

Комплексное сопротивление всей цепи:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_3 &= R_1 + \frac{(R_2 + jX_L) \cdot X_C e^{-j90^\circ}}{R_2 + jX_L - jX_C} = 20 + \frac{(30 + j18,84) \cdot 15,92 e^{-j90^\circ}}{30 + j18,84 - j15,92} = \\ &= 20 + \frac{35,425 e^{j32,13^\circ} \cdot 15,92 e^{-j90^\circ}}{30,14 e^{j5,56^\circ}} = 20 + 18,71 e^{-j63,135^\circ} = 20 + 8,455 - j16,69 = \\ &= 28,455 - j16,69 = 32,99 e^{-j30,39^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

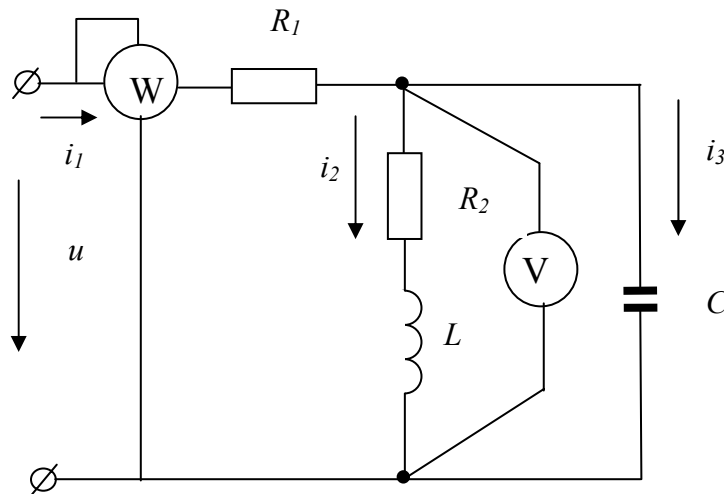


Рис. 2.3.3

Зная  $\underline{Z}_3$ , легко определить комплексный ток в неразветвленной части цепи:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_3} = \frac{200 e^{j30^\circ}}{32,99 e^{-j30,39^\circ}} = 6,062 e^{j60,39^\circ} \text{ А}.$$

Токи в параллельных ветвях:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{I}_1 \cdot X_C e^{-j90^\circ}}{R_2 + jX_L - jX_C} = \frac{6,062 e^{j60,39^\circ} \cdot 15,92 e^{-j90^\circ}}{30,14 e^{j5,56^\circ}} = 3,2 e^{-j35,17^\circ} \text{ А},$$



$$i_3 = \frac{\dot{I}_1 \cdot (R_2 + jX_L)}{R_2 + jX_L - jX_C} = \frac{6,062 e^{j60,39^\circ} \cdot 35,425 e^{j32,13^\circ}}{30,14 e^{j5,56^\circ}} = 7,125 e^{j86,96^\circ} \text{ А.}$$

Правильность расчета проверяем составлением баланса мощностей.  
Мощность источника:

$$\underline{S}_{\text{ист}} = \dot{U} \dot{I}_1^* = 200 e^{j30^\circ} \cdot 6,062 e^{-j60,39^\circ} = 1212,4 e^{-j30,39^\circ} = 1045,81 - j613,33 \text{ ВА.}$$

Действительная часть полной мощности соответствует активной мощности источника  $P_{\text{ист}} = 1045,81$  Вт, а мнимая часть – реактивной мощности источника  $Q_{\text{ист}} = -613,33$  ВАр.

Активная мощность потребителей:

$$P_{\text{пр}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 20 \cdot 6,062^2 + 30 \cdot 3,2^2 = 734,957 + 307,2 = 1042,157 \text{ Вт.}$$

Реактивная мощность потребителей:

$$Q_{\text{пр}} = X_L I_2^2 - X_C I_3^2 = 18,84 \cdot 3,2^2 - 15,92 \cdot 7,125^2 = -615,27 \text{ ВАр.}$$

Погрешности:

$$\Delta P = \frac{P_{\text{ист}} - P_{\text{пр}}}{P_{\text{ист}}} \cdot 100\% = 0,062\% ,$$

$$\Delta Q = \frac{Q_{\text{ист}} - Q_{\text{пр}}}{Q_{\text{ист}}} \cdot 100\% = 0,316\% .$$

Показание ваттметра будет равно активной мощности источника:

$$P = UI_1 \cos \varphi = 200 \cdot 6,062 \cos (30^\circ - 60,39^\circ) = 1045,81 \text{ Вт.}$$

Емкость, при которой наступит резонанс токов, найдем из условия резонанса токов:

$$B_L = B_C \quad \text{или} \quad \frac{X_L}{R_2^2 + X_L^2} = \frac{1}{X_C} . \quad \text{Отсюда} \quad X_C = \frac{R_2^2 + X_L^2}{X_L} = 66,59 \text{ Ом,}$$

$$C = \frac{10^6}{\omega X_C} = 47,83 \text{ мкФ.}$$

Показание вольтметра

$$V = I_2 \sqrt{R_2^2 + X_L^2} = 3,2 \cdot 35,42 = 113,344 \text{ В.}$$

Для построения диаграммы напряжений определяем напряжения на всех элементах заданной схемы:

$$\dot{U}_{R1} = R_1 \cdot \dot{I}_1 = 20 \cdot 6,062 e^{j60,39^\circ} = 121,24 e^{j60,39^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{R2} = R_2 \cdot \dot{I}_2 = 30 \cdot 3,2 e^{-j35,17^\circ} = 96 e^{-j35,17^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_L = X_L e^{j90^\circ} \cdot \dot{I}_2 = 18,84 e^{j90^\circ} \cdot 3,2 e^{-j35,17^\circ} = 60,288 e^{j54,83^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = X_C e^{-j90^\circ} \cdot \dot{I}_3 = 15,92 e^{-j90^\circ} \cdot 7,125 e^{j86,96^\circ} = 113,43 e^{-j3,04^\circ} \text{ В}.$$

Диаграмма токов и напряжений показана на рис. 2.3.4.

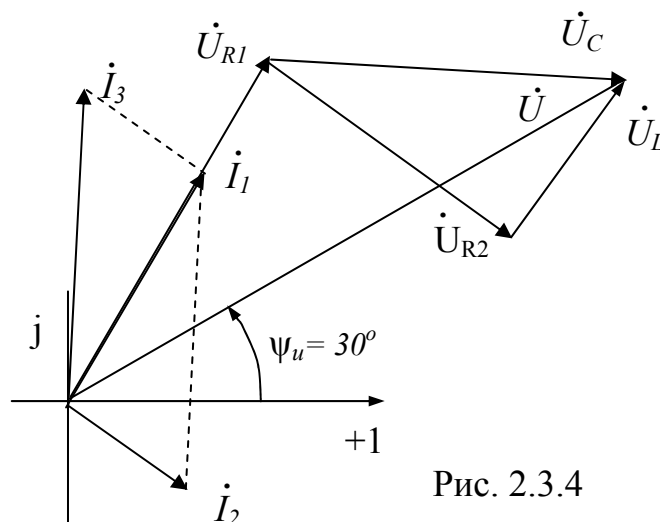


Рис. 2.3.4

### 2.3.4.

К цепи (рис. 2.3.5) с элементами  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $L = 50 \text{ мГн}$ ,  $C = 500 \text{ мкФ}$  приложено напряжение  $u = 283 \sin 400t \text{ В}$ . Определить входной ток  $i$ , построить векторную диаграмму.

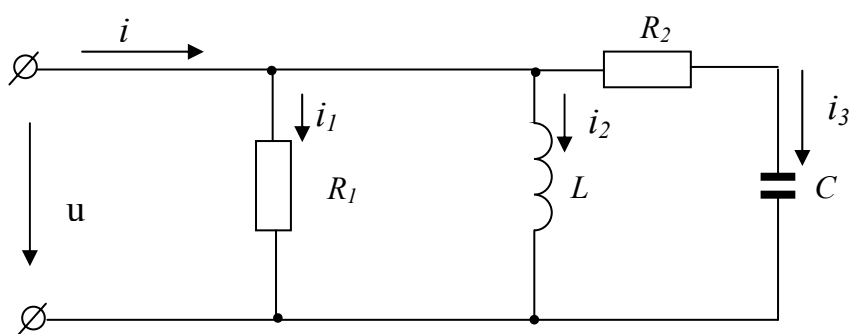


Рис. 2.3.5

### Решение

Запишем действующее значение напряжение в комплексной форме

$$\dot{U} = \frac{283}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 200 \text{ В.}$$

Определим индуктивное и емкостное сопротивления:

$$X_L = \omega L = 400 \cdot 0,05 = 20 \text{ Ом}, \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{400 \cdot 500} = 5 \text{ Ом.}$$

Определим комплексные действующие значения токов в параллельных ветвях схемы:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{R_1} = \frac{200}{10} = 20 \text{ А}, \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{jX_L} = \frac{200}{j20} = 10e^{-j90^\circ} = -j10 \text{ А},$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}}{R_2 - jX_C} = \frac{200}{5 - j5} = \frac{200}{7,05e^{-j45^\circ}} = 28,4e^{j45^\circ} = 20 + j20 \text{ А.}$$

Определим ток на входе по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 20 + 10e^{-j90^\circ} + 28,4e^{j45^\circ} = 20 - j10 + 20 + j20 = 40 + j10 =$$

$$= \sqrt{40^2 + 10^2} e^{j \arctg \frac{10}{40}} = 41,23e^{j14^\circ} \text{ А,}$$

Векторная диаграмма представлена на рис. 2.3.6.

Мгновенное значение входного тока равно:

$$i = 41,23 \cdot \sqrt{2} \sin(400t + 14^\circ) \text{ А.}$$

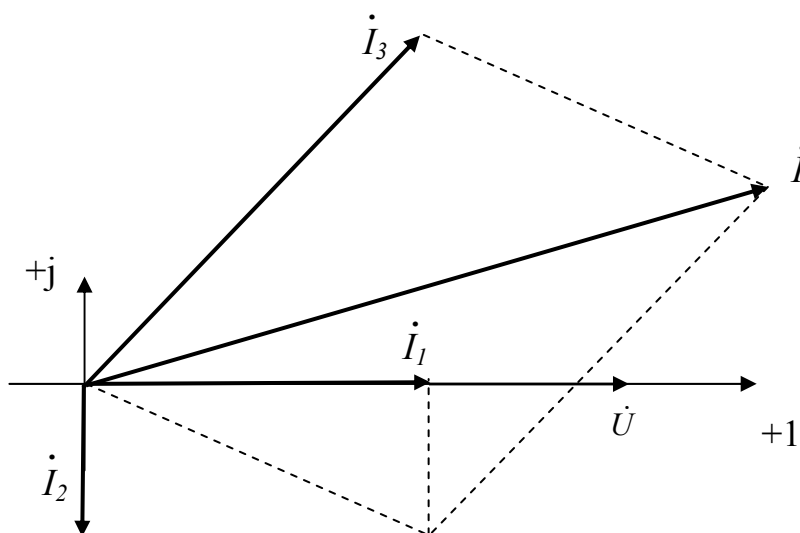


Рис. 2.3.6

### 2.3.5

К цепи (рис. 2.3.7.) приложено напряжение  $\dot{U} = 380 \cdot e^{j50^\circ}$  В. Рассчитать токи во всех ветвях электрической схемы символическим методом, если заданы значения активных и реактивных сопротивлений  $R_1 = 15$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом,  $R_3 = 40$  Ом,  $R_4 = 30$  Ом,  $X_1 = 15$  Ом,  $X_2 = 25$  Ом,  $X_3 = 20$  Ом,  $X_4 = 20$  Ом. Построить топографическую диаграмму для напряжений и лучевую диаграмму для токов. Составить баланс активных и реактивных мощностей.

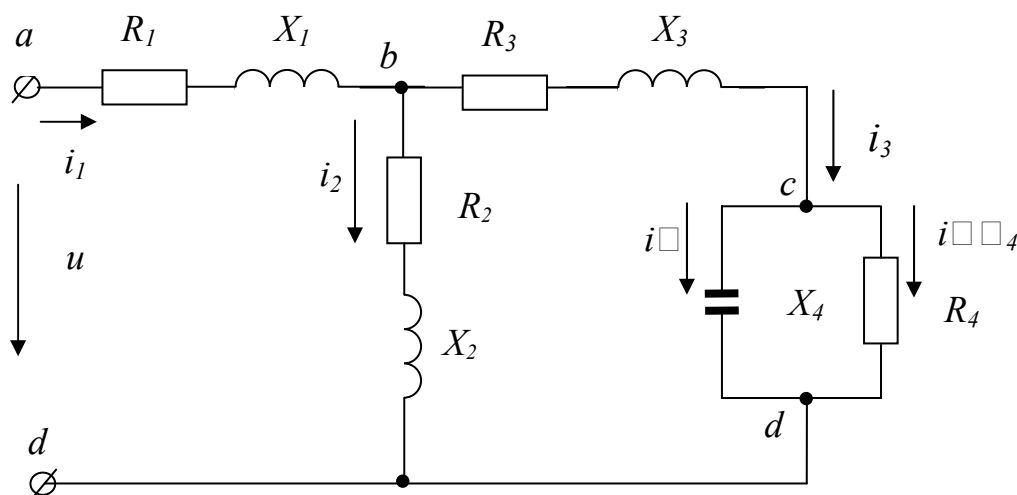


Рис. 2.3.7

Для цепей синусоидального тока справедливы все формулы расчета цепей постоянного тока, но в комплексной форме. Поэтому методика расчета цепей сводится, как и при постоянном токе, к постепенному упрощению схемы путем замены отдельных участков эквивалентными сопротивлениями, в результате определяется эквивалентное сопротивление всей цепи.

Вычислим комплексные сопротивления всех ветвей:

$$\underline{Z}_4 = \frac{R_4 \cdot X_4 e^{-j90^\circ}}{R_4 - jX_4} = \frac{30 \cdot 20 e^{-j90^\circ}}{30 - j20} = \frac{600 e^{-j90^\circ}}{36,06 e^{-j33,69^\circ}} = 16,64 e^{-j56,31^\circ} = 9,23 - j13,85$$

Ом,

$$\underline{Z}_{34} = R_3 + jX_3 + \underline{Z}_4 = 40 + j20 + 9,23 - j13,85 = 49,23 + j6,15 = 49,61 e^{j7,12^\circ}$$

Ом,

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = 20 + j25 = 32,01 e^{j51,34^\circ} \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_{34}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{34}} = \frac{32,01e^{j51,34^\circ} \cdot 49,61e^{j7,12^\circ}}{20 + j25 + 49,23 + j6,15} = \frac{1588,02e^{j58,46^\circ}}{75,92e^{j24,23^\circ}} = 20,91e^{j34,23^\circ} =$$

$$= 17,29 + j11,76 \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_3 = R_1 + jX_1 + \underline{Z}_{23} = 15 + j15 + 17,29 + j11,76 = 41,94e^{j39,65^\circ} \text{ Ом.}$$

Вычислим комплексные значения значений токов в ветвях:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_3} = \frac{380e^{j50^\circ}}{41,94e^{j39,65^\circ}} = 9,06e^{j10,35^\circ} \text{ А,}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_{34}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{34}} = 9,06e^{j10,35^\circ} \cdot \frac{49,61e^{j7,12^\circ}}{75,95e^{j24,23^\circ}} = 5,92e^{-j6,76^\circ} \text{ А,}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{34}} = 9,06e^{j10,35^\circ} \cdot \frac{32,01e^{j51,34^\circ}}{75,95e^{j24,23^\circ}} = 3,82e^{j37,46^\circ} \text{ А,}$$

$$\dot{I}'_4 = \dot{I}_3 \frac{R_4}{R_4 - jX_4} = 3,82e^{j37,46^\circ} \cdot \frac{30}{36,06e^{-j33,69^\circ}} = 3,18e^{j71,15^\circ} \text{ А,}$$

$$\dot{I}''_4 = \dot{I}_3 \frac{X_4 e^{-j90^\circ}}{R_4 - jX_4} = 3,82e^{j37,46^\circ} \cdot \frac{20e^{-j90^\circ}}{36,06e^{-j33,69^\circ}} = 2,12e^{-j18,85^\circ} \text{ А.}$$

Правильность расчета проверяется составлением баланса мощностей.

Из закона сохранения энергии следует, что активная мощность источников равна активной мощности приемников, т.е.

$$\sum P_{\text{ист}} = \sum P_{\text{пр}}.$$

Алгебраическая сумма реактивных мощностей источников равна алгебраической сумме реактивных мощностей приемников, т.е.

$$\sum Q_{\text{ист}} = \sum Q_{\text{пр}}.$$

Так как равны активные и реактивные мощности источников и приемников, то равны и их полные мощности:  $\sum S_{\text{ист}} = \sum S_{\text{пр}}$ .

$\dot{I}_1 = 9,06e^{j10,35^\circ} \text{ А}$  – комплексное действующее значение входного тока,

\*  
 $I_1 = 9,06 e^{-j10,35^\circ}$  А – сопряженное комплексное значение входного тока.

Полная комплексная мощность источника:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{ист}} &= \dot{U} \cdot I_1^* = 380 e^{j50^\circ} \cdot 9,06 e^{-j10,35^\circ} = 3442,8 e^{j39,65^\circ} = \\ &= 3442,8 \cos(39,65^\circ) + j 3442,8 \sin(39,65^\circ) = 2650,81 + j 2196,84 \text{ ВА.} \end{aligned}$$

$P_{\text{ист}} = 2650,81$  Вт – активная мощность источников;

$Q_{\text{ист}} = 2196,84$  ВАр – реактивная мощность источников.

Мощности приемников:

$$\begin{aligned} P_{\text{пр}} &= \sum R_k I_k^2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4'^2 = \\ &= 15 \cdot 9,06^2 + 20 \cdot 5,92^2 + 40 \cdot 3,82^2 + 30 \cdot 2,12^2 = 2650,71 \text{ Вт;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{пр}} &= \sum X_k I_k^2 = X_1 I_1^2 + X_2 I_2^2 + X_3 I_3^2 - X_4 I_4'^2 = \\ &= 15 \cdot 9,06^2 + 25 \cdot 5,92^2 + 20 \cdot 3,82^2 - 20 \cdot 3,18^2 = 2197,014 \text{ ВАр;} \end{aligned}$$

$$\Delta P = \frac{|P_{\text{ист}} - P_{\text{пр}}|}{P_{\text{ист}}} \cdot 100\% = \frac{|2650,81 - 2650,71|}{2650,81} \cdot 100\% = 0,0037\%;$$

$$\Delta Q = \frac{|Q_{\text{ист}} - Q_{\text{пр}}|}{Q_{\text{ист}}} \cdot 100\% = \frac{|2196,84 - 2197,014|}{2196,84} \cdot 100\% = 0,008\%.$$

Баланс мощностей сходится с допускаемой погрешностью.

Расчет комплексных действующих напряжений на всех элементах схемы:

$$\dot{U}_{R1} = R_1 \dot{I}_1 = 15 \cdot 9,06 e^{j10,35^\circ} = 135,9 e^{j10,35^\circ} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{X1} = j X_1 \dot{I}_1 = j 15 \cdot 9,06 e^{j10,35^\circ} = 15 e^{j90^\circ} \cdot 9,06 e^{j10,35^\circ} = 135,9 e^{j100,35^\circ} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{R2} = R_2 \dot{I}_2 = 20 \cdot 5,92 e^{-j6,76^\circ} = 118,4 e^{-j6,76^\circ} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{X2} = j X_2 \dot{I}_2 = j 25 \cdot 5,92 e^{-j6,76^\circ} = 25 e^{j90^\circ} \cdot 5,92 e^{-j6,76^\circ} = 148 e^{j83,24^\circ} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{X3} = j X_3 \dot{I}_{X3} = j 20 \cdot 3,82 e^{j37,46^\circ} = 20 e^{j90^\circ} \cdot 3,82 e^{j37,46^\circ} = 76,4 e^{j127,46^\circ} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{R3} = R_3 \dot{I}_{R3} = 40 \cdot 3,82 e^{j37,46^\circ} = 152,8 e^{j37,46^\circ} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{X4} = -j X_4 \dot{I}'_{X4} = -j 20 \cdot 3,18 e^{j71,15^\circ} = 20 e^{-j90^\circ} \cdot 3,18 e^{j71,15^\circ} = 63,6 e^{-j18,85^\circ} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{R4} = R_4 \dot{I}_{R4} = 30 \cdot 2,12 e^{-j18,85^\circ} = 63,6 e^{-j18,85^\circ} \text{ В;}$$

Построим лучевую диаграмму токов и топографическую диаграмму напряжений (рис. 2.3.8).

Лучевая векторная диаграмма токов представляет совокупность векторов токов, построенных на комплексной плоскости из одной точки, чаще из начала координат. Длины векторов определяются согласно выбранному масштабу. Ориентируют векторы на плоскости относительно оси вещественных значений в соответствии с фазовыми углами. Отсчет положительных фазовых производятся от оси вещественных значений в направлении противоположном движению стрелки часов, поэтому векторы токов ( $I_1, I_3, I_4$ ) построены в первой четверти комплексной плоскости (рис. 2.3.8), векторы токов ( $I_2, I_4$ ), имеющие отрицательные фазовые углы, построены в четвертой четверти.

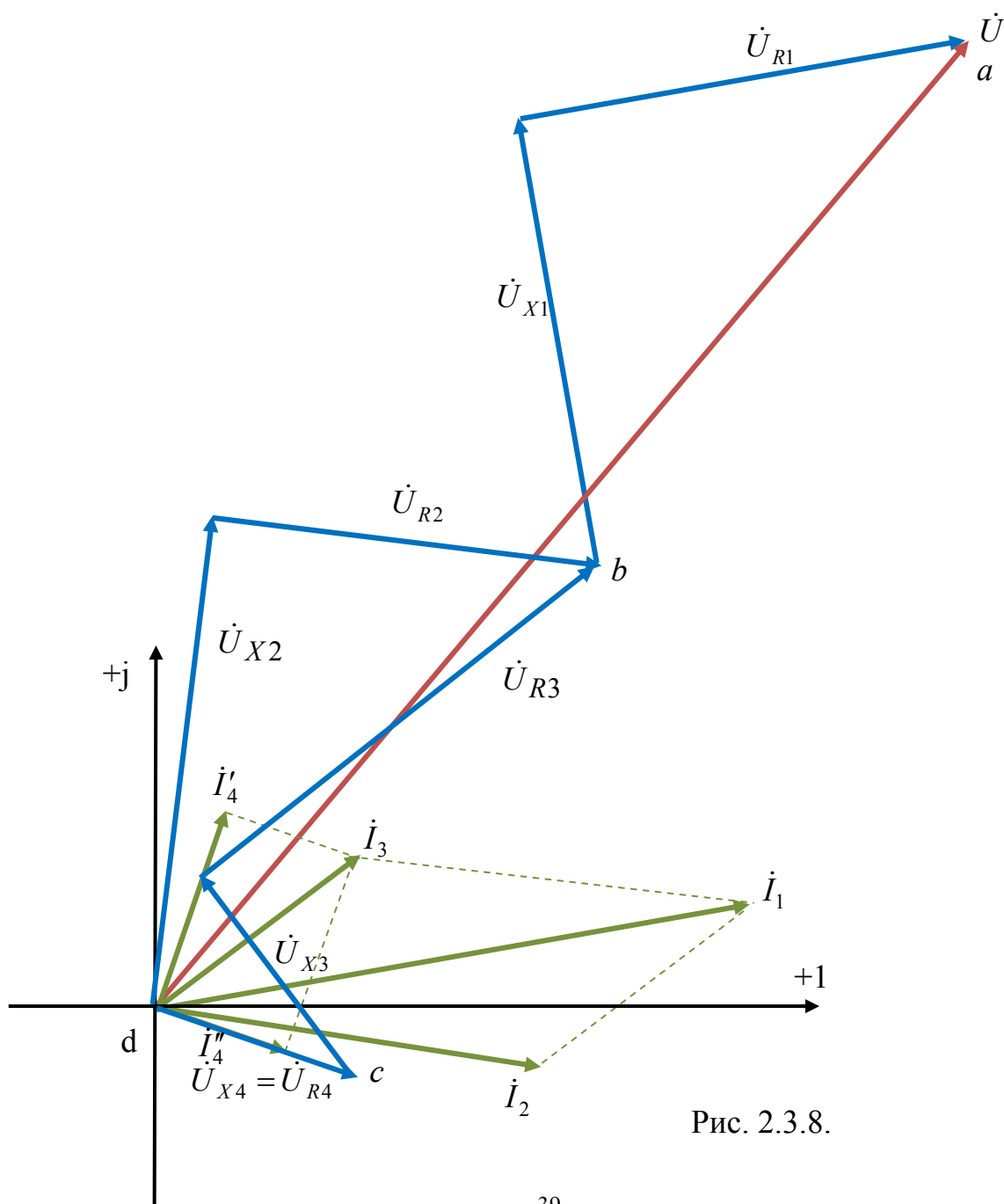


Рис. 2.3.8.

Векторы напряжений топографической диаграммы строят в определенной последовательности таким образом, что каждый последующий вектор строится от конца предыдущего. Вектор напряжения положительно направлен к точке большего потенциала электрической схемы, поэтому последовательность построения векторов определяется топографией контура схемы или её участка при обходе в направлении противоположном направлению тока. В качестве исходной точки с наименьшим потенциалом или равным нулю принимается точка, соответствующая концу источника, к которому ток направлен из внешней части схемы. В исследуемой схеме (рис. 2.3.7) такой точкой является точка  $d$ . Длины векторов напряжений определяются согласно выбранному масштабу  $mu$  как  $lu=Uk/mu$ , ориентируют векторы на плоскости также относительно оси вещественных значений.

Построение топографической диаграммы начинаем с точки  $d$ , потенциал которой показан в начале координат комплексной плоскости.

Из точки  $d$  строим два вектора  $\dot{U}_{X2}$  и  $\dot{U}_{X4}=\dot{U}_{R4}$ , из конца вектора  $\dot{U}_{X2}$  строим вектор  $\dot{U}_{R2}$ , а из конца вектора  $\dot{U}_{X4}=\dot{U}_{R4}$  строим вектор  $\dot{U}_{X3}$ , из конца этого вектора строим  $\dot{U}_{R3}$ . Вектора  $\dot{U}_{R2}$  и  $\dot{U}_{R3}$  сходятся в одной точке  $c$ . Из этой точки строим  $\dot{U}_{X1}$  и далее  $\dot{U}_{R1}$ , получаем точку  $a$ , соединяя точку  $d$  и  $a$  получаем вектор входного напряжения  $\dot{U} = 380 \cdot e^{j50^\circ}$ .



### 3. Трёхфазные цепи

#### 3.1. Основные понятия и формулы

Трёхфазная цепь состоит из трех основных элементов: трехфазного генератора, линии передачи и приемников (рис. 3.1.1).

В трехфазных генераторах происходит процесс преобразования механической энергии в электрическую с трехфазной симметричной системой ЭДС. ЭДС трехфазных генераторов, фазы которых преимущественно соединяются звездой, определяют системы фазных и линейных напряжений сети.

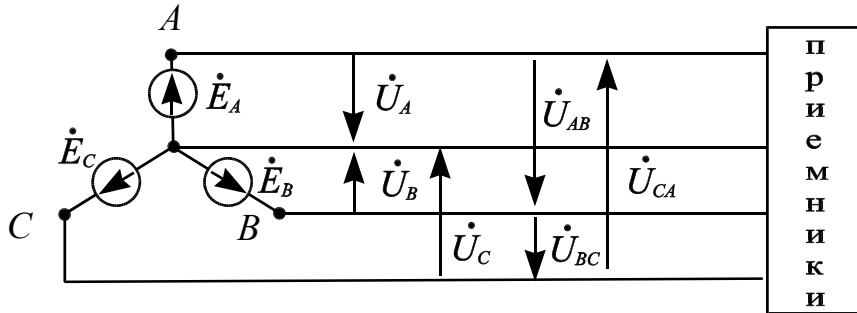


Рис.3.1.1

При симметричной системе ЭДС источника питания системы фазных и линейных напряжений сети являются также симметричными и связанными между собой соотношениями: линейные напряжения по модулю больше фазных в  $\sqrt{3}$ , т.е.  $U_{\text{Л}} = \sqrt{3} U_{\text{Ф}}$  и опережают фазные напряжения на угол  $\pi/6$ .

Трёхфазные системы напряжений могут быть представлены аналитическими выражениями мгновенных значений или комплексными действующими значениями. Например, при начальной фазе напряжения  $\dot{U}_A$  равной нулю эти системы напряжений можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u_A &= U_m \sin \omega t, & \dot{U}_A &= U_{\phi}, & \dot{U}_{AB} &= \sqrt{3} \dot{U}_A e^{j\pi/6}, \\
 u_B &= U_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), & \dot{U}_B &= U_{\phi} e^{-j2\pi/3}, & \dot{U}_{BC} &= \sqrt{3} \dot{U}_B e^{j\pi/6}, \\
 u_C &= U_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right), & \dot{U}_C &= U_{\phi} e^{+j2\pi/3}, & \dot{U}_{CA} &= \sqrt{3} \dot{U}_C e^{j\pi/6},
 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

где  $U_{\phi} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ .

Приемники, подключаемые к трехфазной сети, могут быть однофазными и трехфазными. Трехфазные приемники выполняют с соединением фаз по схеме звезды или по схеме треугольника, они могут быть симметричными и несимметричными. Токи однофазных приемников и фазные токи трехфазных приемников рассчитывают по закону Ома.

### Трехфазная цепь при соединении фаз приемника звездой

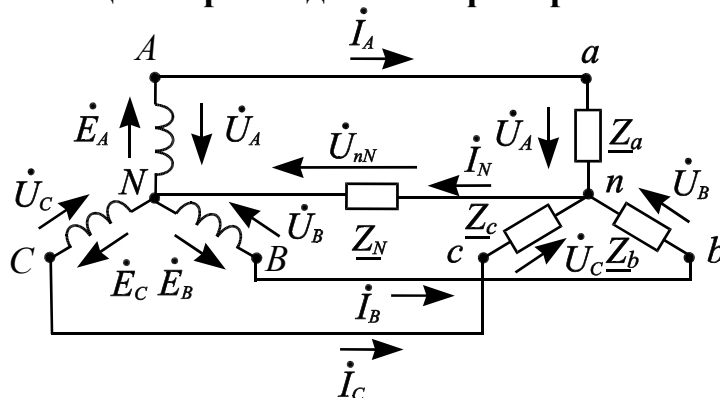


Рис. 3.1.2

На рис. 3.1.2 представлена трехфазная четырехпроводная электрическая цепь. При отсутствии нейтрального провода ( $\underline{Z}_N = \infty$ ,  $\underline{Y}_N = 0$ ) трехфазная цепь становится трехпроводной. Расчет рассматриваемой цепи выполняют с использованием метода междуузлового напряжения.

- напряжение между нейтральными источника и приемника:

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\dot{E}_A \underline{Y}_a + \dot{E}_B \underline{Y}_b + \dot{E}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_N} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_a + \dot{U}_B \underline{Y}_b + \dot{U}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_N}, \quad (3.1.2)$$

где  $\underline{Y}_a = \frac{1}{\underline{Z}_a}$ ;  $\underline{Y}_b = \frac{1}{\underline{Z}_b}$ ;  $\underline{Y}_c = \frac{1}{\underline{Z}_c}$ ;  $\underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}$  – комплексные проводимости фаз приемника и нейтрали;

- фазные напряжения приемника:

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_{nN}; \quad \dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_{nN}; \quad \dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_{nN}, \quad (3.1.3)$$

- фазные токи приемников равны линейным токам сети:

$$\dot{I}_a = \dot{I}_A = \frac{\dot{U}_a}{\underline{Z}_a}; \quad \dot{I}_b = \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_b}; \quad \dot{I}_c = \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_c}{\underline{Z}_c}, \quad (3.1.4)$$

- ток в нейтральном проводе:

$$\dot{I}_N = \frac{\dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_N} = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C. \quad (3.1.5)$$

В трехфазной цепи с симметричным приемником, когда  $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}_\phi = Z_\phi e^{j\varphi}$ , напряжение между нейтральными:  $\dot{U}_{nN} = 0$ ;  $\dot{I}_N = 0$ ;

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A; \quad \dot{U}_b = \dot{U}_B; \quad \dot{U}_c = \dot{U}_C. \quad (3.1.6)$$

□ В трехфазной цепи с несимметричным приемником ( $\underline{Z}_a \neq \underline{Z}_b \neq \underline{Z}_c$ ) и  $\underline{Z}_N = 0$ , напряжение между нейтральными  $\dot{U}_{nN} = 0$ , что сохраняет симметрию фазных напряжений приемника, определяемую фазными напряжениями источника (6), ток в нейтральном проводе:  $\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C \neq 0$ .

Трехфазная цепь при соединении фаз приемника треугольником.

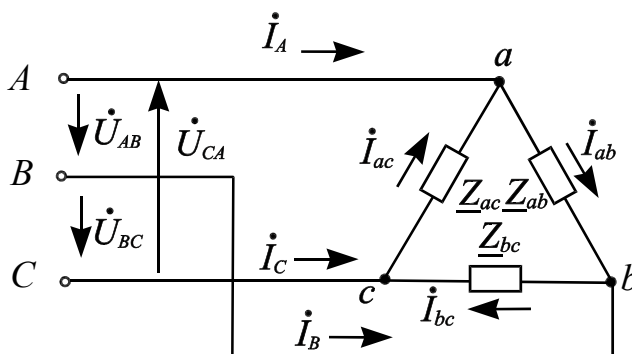


Рис. 3.1.3

Фазные напряжения приемника равны соответствующим линейным напряжениям источника питания (сети):

$$\dot{U}_{av} = \dot{U}_{AB}; \quad \dot{U}_{bc} = \dot{U}_{BC}; \quad \dot{U}_{ca} = \dot{U}_{CA}. \quad (3.1.7)$$

Токи в фазах приемника определяются в соответствии с законом Ома по формулам:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}}; \quad \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}}; \quad \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}}. \quad (3.1.8)$$

Линейные токи рассчитываются по фазным токам из уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для точек  $a, b, c$ :

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}. \quad (3.1.9)$$

Если приемник симметричен ( $\underline{Z}_{av} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z}_\phi = Z_\phi e^{j\varphi}$ ), то векторы фазных токов образуют симметричную систему, соответственно линейные токи также образуют симметричную систему:

модули токов равны 
$$I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = \frac{U_\phi}{Z_\phi} = \frac{U_L}{Z_\phi}; \quad (3.1.10)$$

$$I_A = I_B = I_C = I_\ell = \sqrt{3}I_\phi, \quad (3.1.11)$$

по фазе линейные токи отстают от фазных токов на угол  $\pi/6$ .

При известной симметричной системе фазных токов, система линейных токов может быть описана следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{пусть} \quad \dot{I}_{ab} &= I_\phi e^{j\psi_{ab}}; & \text{тогда} \quad \dot{I}_A &= \sqrt{3}\dot{I}_{ab} e^{-j\frac{\pi}{6}}; \\ \dot{I}_{bc} &= I_\phi e^{j(\psi_{ab} - \frac{2\pi}{3})}; & \dot{I}_B &= \sqrt{3}\dot{I}_{bc} e^{-j\frac{\pi}{6}}; \\ \dot{I}_{ca} &= I_\phi e^{j(\psi_{ab} + \frac{2\pi}{3})}; & \dot{I}_C &= \sqrt{3}\dot{I}_{ca} e^{-j\frac{\pi}{6}}. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

### Мощность трехфазной цепи

Полная комплексная мощность электрической энергии, поступающей от источника рассчитывается по формуле:

$$\underline{S} = \dot{U}_A^* I_A + \dot{U}_B^* I_B + \dot{U}_C^* I_C = U_A I_A e^{j\varphi_A} + U_B I_B e^{j\varphi_B} + U_C I_C e^{j\varphi_C} = P + jQ.$$

Мощность приемников активная, реактивная и полная могут быть определены по формулам с учетом знака реактивных сопротивлений.

Для приемника, соединенного звездой:

$$P = U_a I_A \cos \varphi_a + U_b I_B \cos \varphi_b + U_c I_C \cos \varphi_c = R_a I_A^2 + R_b I_B^2 + R_c I_C^2;$$

$$Q = U_a I_A \sin \varphi_a + U_b I_B \sin \varphi_b + U_c I_C \sin \varphi_c = X_a I_A^2 + X_b I_B^2 + X_c I_C^2;$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad \cos \varphi_a &= R_a / Z_a; & \cos \varphi_b &= R_b / Z_b; & \cos \varphi_c &= R_c / Z_c; \\ \sin \varphi_a &= X_a / Z_a; & \sin \varphi_b &= X_b / Z_b; & \sin \varphi_c &= X_c / Z_c. \end{aligned}$$

Аналогично рассчитываются мощности приемника, соединенного треугольником.

При симметричной нагрузке эти формулы могут быть приведены к виду:

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = \sqrt{3}U_\ell I_\ell \cos \varphi = 3R_\phi I_\phi^2;$$

$$Q = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi = \sqrt{3}U_\ell I_\ell \sin \varphi = 3X_\phi I_\phi^2;$$

$$S = 3U_\phi I_\phi = \sqrt{3}U_\ell I_\ell,$$

$$\text{где} \quad \cos \varphi = R_\phi / Z_\phi; \quad \sin \varphi = X_\phi / Z_\phi.$$

## Измерение активной мощности

Активную мощность в четырехпроводной трехфазной цепи можно измерить с помощью трех однофазных ваттметров (рис. 3.1.4) или одним трехфазным трехэлементным ваттметром, в трехпроводной цепи можно воспользоваться двумя однофазными ваттметрами, включая их по схеме двух ваттметров (рис. 3.1.5).

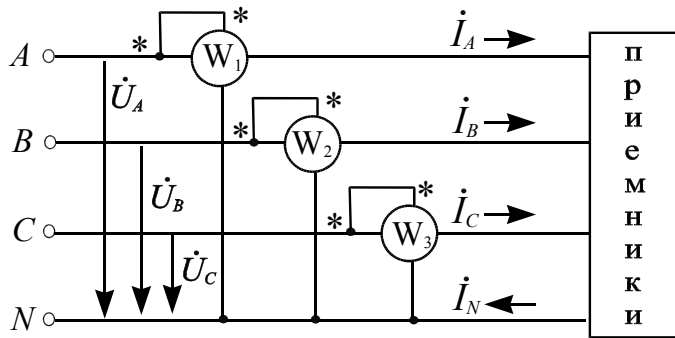


Рис. 3.1.4

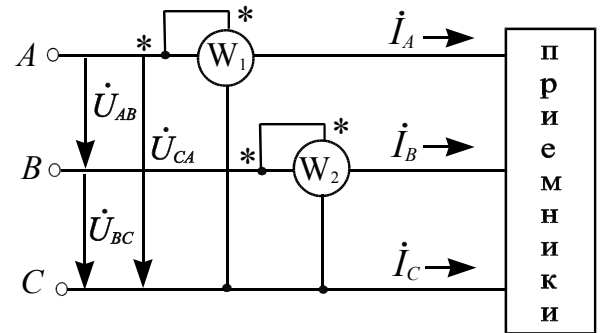


Рис. 3.1.5.

Активная мощность трехфазной цепи равна:

$$P = P_{W1} + P_{W2} + P_{W3} \text{ для схемы на рис. 3.1.4}$$

$$\text{и } P = P_{W1} + P_{W2} \text{ для схемы на рис. 3.1.5.}$$

## 2. Варианты индивидуальных заданий

### Задание № 3А

#### Расчет трехфазной электрической цепи

В трехфазную сеть, характеристика которой и линейное напряжение указаны в табл. 1А, включить трехфазный симметричный приемник, три однофазных приемника и однофазные ваттметры, для измерения активной мощности, потребляемой всеми приемниками. Характеристики приемников приведены в табл. 2А и табл. 3А, номинальное напряжение однофазных приемников – в табл. 1А.

1. Описать симметричные системы фазных и линейных действующих значений напряжений сети в комплексной форме.
2. Составить электрическую схему включения приемников и однофазных ваттметров для измерения суммарной активной мощности всех приемников.
3. Рассчитать комплексные действующие значения фазных токов приемников и линейных токов в проводах сети.

4. Определить сопротивления элементов схемы замещения приемников.
5. Определить показания ваттметров.
6. Составить баланс активных мощностей.
7. Построить векторную диаграмму электрического состояния цепи.

Примечание: однофазные приемники включить на различные фазные ( $U_A, U_B, U_C$ ) или линейные напряжения ( $U_{AB}, U_{BC}, U_{CA}$ ) трехфазной сети.

Таблица №1А

№ варианта	Характеристика сети	Номинальное напряжение однофазных приемников  (В)
		
1	Трехпроводная $u_{AB} = 535 \sin(\omega t + \pi/6)$	380
2	Четырехпроводная $u_{AB} = 535 \sin(\omega t - \pi/6)$	220
3	Трехпроводная $u_{AB} = 310 \sin \omega t$	220
4	Четырехпроводная $u_{AB} = 310 \sin \omega t$	127
5	Трехпроводная $u_{AB} = 535 \sin(\omega t + \pi/4)$	380
6	Четырехпроводная $u_{AB} = 535 \sin(\omega t + \pi/3)$	220
7	Трехпроводная $u_{AB} = 310 \sin(\omega t + \pi/6)$	220
8	Четырехпроводная $u_{AB} = 310 \sin(\omega t - \pi/3)$	127
9	Трехпроводная $u_{AB} = 535 \sin(\omega t + \pi/2)$	380
0	Четырехпроводная $u_{AB} = 535 \sin(\omega t - \pi/2)$	220

$u_{AB}, u_{BC}, u_{CA}$  – мгновенные значения линейных напряжений трехфазной сети.

Таблица 2А

№	Однофазный приемник			Однофазный приемник			Однофазный приемник			
	Мощность		cosφ	Род нагр.	Мощность		cosφ	Род нагр.	Мощность	cosφ
	P <sub>1</sub> кВт	Q <sub>1</sub> кВар			P <sub>2</sub> кВт	Q <sub>2</sub> кВАр			P <sub>3</sub> кВт	
1	16	–	0,75	Инд.	18	–	0,75	Емк.	15	1
2	10	–	0,85	Инд.	12	–	0,9	Емк.	10	1
3	9	–	0,87	Инд.	–	3	0,92	Емк.	12	1
4	12	–	0,7	Инд.	14	–	0,8	Емк.	14	1
5	–	7	0	Инд.	–	15	0	Емк.	13	1
6	10	–	0,8	Инд.	20	–	0,87	Емк.	8	1
7	20	–	0,9	Инд.	–	11	0	Емк.	11	1
8	15	–	0,92	Инд.	10	–	0,85	Емк.	9	1
9	10	–	0,65	Инд.	–	9	0	Емк.	7	1
0	–	12	0	Инд.	8	–	0,65	Емк.	18	1

Таблица 3А

Трехфазный симметричный приемник.					
№ варианта	Мощность		cosφ	Род нагрузки	Фазное напряжение приемника
	P <sub>Н</sub> кВт	Q <sub>Н</sub> кВАр			
1	–	25	0,5	Инд.	0,578U <sub>AB</sub>
2	20	–	0,9	Емк.	U <sub>AB</sub>
3	18	–	0,8	Инд.	0,578U <sub>AB</sub>
4	–	10	0,6	Емк.	U <sub>AB</sub>
5	–	14	0,55	Емк.	0,578U <sub>AB</sub>
6	15	–	0,85	Инд.	U <sub>AB</sub>
7	19	–	0,75	Емк.	0,578U <sub>AB</sub>
8	–	23	0,45	Инд.	U <sub>AB</sub>
9	27	–	0,94	Инд.	0,578U <sub>AB</sub>
0	12	–	0,7	Емк.	U <sub>AB</sub>

### Задание № 3Б

#### Расчет трехфазной электрической цепи

В трехфазную сеть с линейным напряжением, указанным в табл. 1Б

Таблица 1Б

№	Линейное напряжение, В
1	$u_{AB}=536\sin(\omega t+\pi/6)$
2	$u_{AB}=536\sin(\omega t-\pi/6)$
3	$u_{AB}=311\sin\omega t$
4	$u_{AB}=311\sin(\omega t+\pi/4)$
5	$u_{AB}=536\sin\omega t$
6	$u_{AB}=311\sin(\omega t+\pi/6)$
7	$u_{AB}=311\sin(\omega t+\pi/2)$
8	$u_{AB}=536\sin(\omega t+\pi/2)$
9	$u_{AB}=536\sin(\omega t+2\pi/3)$
0	$u_{AB}=311\sin(\omega t-\pi/4)$

включен трехфазный симметричный приемник, соединение фаз и параметры которого приведены в табл. 2Б – 4Б.

1. Описать симметричные системы действующих значений фазных и линейных напряжений сети в комплексной форме.
2. Рассчитать комплексные действующие значения токов в цепи и фазные напряжения приёмника при симметричном режиме.
3. Рассчитать комплексные

действующие значения токов в цепи и фазные напряжения приёмника при несимметричном режиме.

4. Определить активную, реактивную и полную мощности приёмника при симметричном режиме.
5. Определить показания приборов при симметричном и несимметричном режимах приёмника.
6. Построить векторные диаграммы для симметричного и несимметричного режимов работы приемника.

Таблица 2Б

№	Схема	Несимметричный режим
1	Рис.3.1.Б	откл.ф. <i>b</i>
2	Рис.3.2.Б	к.з. ф. <i>a</i>
3	Рис.3.3.Б	обрыв провода <i>A</i>
4	Рис.3.1.Б	откл.ф. <i>c</i>
5	Рис.3.2.Б	откл.ф. <i>b</i>
6	Рис.3.3.Б	откл.ф. <i>ca</i>
7	Рис.3.2.Б	к.з. ф. <i>b</i>

Таблица 3Б

№	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>
	Ом	Ом	Ом
1	8	8	8
2	10	10	10
3	4	4	4
4	20	20	20
5	12	12	12
6	15	15	15
7	18	18	18

Таблица 4Б

№	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	Род нагр.
	Ом	Ом	Ом	
1	6	6	6	Инд.
2	0	0	0	
3	3	3	3	Емк.
4	22	22	22	Емк.
5	7	7	7	Инд.
6	10	10	10	Инд.
7	18	18	18	Емк.



8	Рис.3.3.Б	обрыв провода <i>B</i>	8	5	5	5	8	8	8	8	Инд.
9	Рис.3.3.Б	откл.ф <i>bc</i>	9	11	11	11	9	0	0	0	
0	Рис.3.2.Б	откл.ф. <i>c</i>	0	16	16	16	0	25	25	25	Емк.

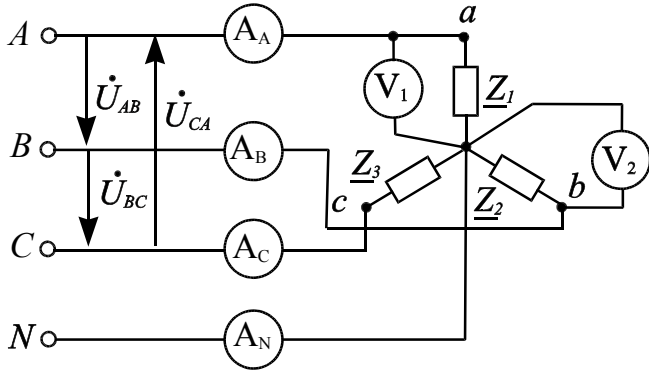


Рис.3.2.1Б

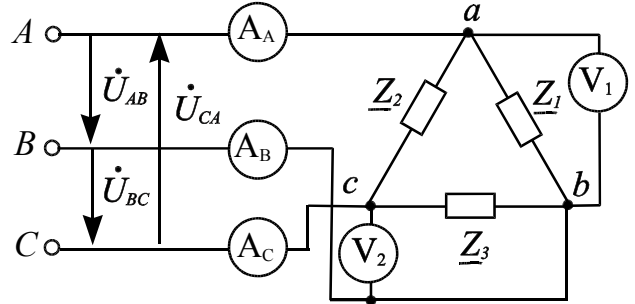


Рис.3.2.3Б

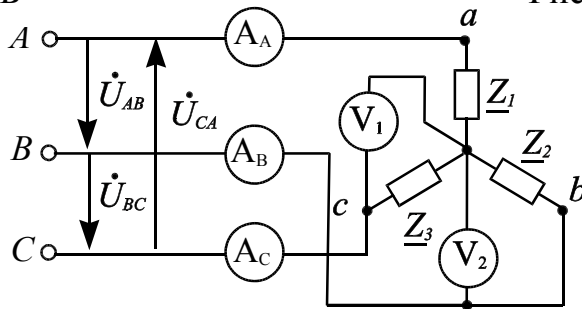


Рис.3.2.2Б

### 3. Примеры решения задач

**3.3.1.** Трехфазный симметричный приемник с соединением фаз звездой подключен к трехфазной сети с симметричной системой напряжений (рис. 3.3.1).

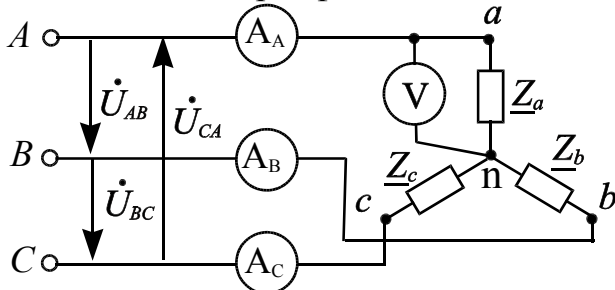


Рис.3.3.1

Определить показания приборов, активную, реактивную и полную мощности приемника, если

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = 8 + j6,$$

$$\text{Ом, } u_{AB} = 311 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ В.}$$

Какими станут показания приборов, если произойдет отключение фазы  $c$ , короткое замыкание фазы  $c$ . Построить векторные диаграммы для симметричного и несимметричного режимов работы приемника.

### Решение

1. Действующие значения линейных и фазных напряжений сети в комплексной форме:

$$U_{\text{л}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 220 \text{ В}, \quad \dot{U}_{AB} = 220e^{j\pi/6} \text{ В}, \quad \dot{U}_{BC} = 220e^{-j\pi/2} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{CA} = 220e^{j5\pi/6} \text{ В}.$$

$$\dot{U}_A = \frac{\dot{U}_{AB}}{\sqrt{3}} e^{-j\pi/6} = 127e^{j0} \text{ В}, \quad \dot{U}_B = 127e^{-j2\pi/3} \text{ В}, \quad \dot{U}_C = 127e^{j2\pi/3} \text{ В}.$$

2. Фазные напряжения симметричного приемника, соединенного звездой меньше линейных напряжений по модулю в  $\sqrt{3}$  раз и отстают на угол  $\pi/6$ :

$$U_{\text{ф}} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127 \text{ В}; \quad \dot{U}_a = \dot{U}_A = 127e^{j0} \text{ В}; \quad \dot{U}_b = \dot{U}_B = 127e^{-j120^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_c = \dot{U}_C = 127e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

3. Комплексные действующие значения токов

Фазные токи приемника определим по закону Ома. При соединении фаз приемника звездой линейные токи в проводах сети равны фазным токам приемника:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{127e^{j0}}{10e^{j36,87^\circ}} = 12,7e^{-j36,87^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{127e^{-j120^\circ}}{10e^{j36,87^\circ}} = 12,7e^{-j156,87^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{127e^{j120^\circ}}{10e^{j36,87^\circ}} = 12,7e^{j83,13^\circ} \text{ А},$$

где

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = 8 + j6 = 10e^{j36,87^\circ} \text{ Ом}.$$

3. Показания приборов при симметричном режиме:

- амперметры измеряют числовые величины действующих значений токов в фазах:

$$I_{\Phi} = \frac{U_{\Phi}}{Z_{\Phi}}, \quad Z_{\Phi} = \sqrt{R_{\Phi}^2 + X_{\Phi}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ Ом.}$$

$$I_A = I_B = I_C = I_{\Phi} = \frac{127}{10} = 12,7 \text{ А};$$

- вольтметр измерит напряжение фазы *a* приёмника по модулю:

$$U_V = U_a = U_{\Phi} = 127 \text{ В.}$$

3. Мощности приемника:

$$P = 3U_{\Phi}I_{\Phi} \cos \varphi = 3R_{\Phi}I_{\Phi}^2 = 3 \cdot 8 \cdot 12,7^2 = 3870,96 \text{ Вт,}$$

$$Q = 3U_{\Phi}I_{\Phi} \sin \varphi = 3X_{\Phi}I_{\Phi}^2 = 3 \cdot 6 \cdot 12,7^2 = 2903,22 \text{ ВАр,}$$

$$S = 3U_{\Phi}I_{\Phi} = 3 \cdot 127 \cdot 12,7 = 4838,7 \text{ ВА.}$$

Отключение фазы *c* ( $Z_C = \infty$ ,  $Y_C = 0$ )

При отключении фазы *c* и отсутствии нейтрального провода,  $\dot{U}_{nN} \neq 0$ .  
Определим напряжения между нейтральными приёмника и источника и фазные напряжения приёмника:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{nN} &= \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_a + \dot{U}_B \underline{Y}_b + \dot{U}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} = \frac{(\dot{U}_A + \dot{U}_B) \underline{Y}_{\Phi}}{2 \underline{Y}_{\Phi}} = \frac{(\dot{U}_A + \dot{U}_B)}{2} = \\ &= \frac{127 - 127e^{-j2\pi/3}}{2} = \frac{63,5 - j110}{2} = 63,5e^{-j60^\circ} = 31,75 - j55 \text{ В;} \end{aligned}$$

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_{nN} = \dot{U}_A - \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_B}{2} = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_B}{2} = \frac{\dot{U}_{AB}}{2} = 110e^{j30^\circ} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_{nN} = \dot{U}_B - \frac{\dot{U}_A + \dot{U}_B}{2} = \frac{\dot{U}_B - \dot{U}_A}{2} = -\frac{\dot{U}_{AB}}{2} = -110e^{j30^\circ} = 110e^{-j150^\circ} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_{nN} = 127e^{j120^\circ} - 63,5e^{-j60^\circ} = 96 = 95,25 + j165 = 190,52e^{-j120^\circ} \text{ В.}$$

Определение токов схемы:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{110e^{j30^\circ}}{10e^{j36,87^\circ}} = 11e^{-j6,87^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{110e^{-j150^\circ}}{10e^{j36,87^\circ}} = 11e^{-j186,87^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_c}{\infty} = 0.$$

Показания приборов:

$$I_A = I_B = \frac{U_{AB}}{2Z_\Phi} = \frac{220}{20} = 11 \text{ A}; \quad I_C = 0;$$

$$U_V = Z_a I_A = 10 \cdot 11 = 110 \text{ В, т.е.}$$

фазы  $a$  и  $b$  будут находиться под напряжением равным половине линейного напряжения  $\dot{U}_{AB}$ .

Короткое замыкание фазы «с» ( $\underline{Z}_C = 0$ )

При коротком замыкании фазы «с» приемника и отсутствии нейтрального провода напряжение между нейтральными источника и приемника рассчитывается по выражению:

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_a + \dot{U}_B \underline{Y}_b + \dot{U}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} = \frac{\infty}{\infty},$$

где

$$\underline{Y}_a = \underline{Y}_b = \frac{1}{\underline{Z}_\Phi}; \quad \underline{Y}_c = \frac{1}{\underline{Z}_c} = \infty.$$

Для получения числового значения  $\dot{U}_{nN}$  поделим числитель и знаменатель на  $\underline{Y}_c$ , в результате чего  $\dot{U}_{nN} = \dot{U}_C = 127e^{j120^\circ}$  и тогда напряжения в фазах приемника будут равны:

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_{nN} = \dot{U}_A - \dot{U}_C = \dot{U}_{AC} = \dot{U}_{CA} e^{\pm j180^\circ} = 220e^{-j30^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_{nN} = \dot{U}_B - \dot{U}_C = \dot{U}_{BC} = 220e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_{nN} = \dot{U}_C - \dot{U}_C = 0.$$

Токи в фазах  $a$  и  $b$  определим по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{220e^{-j30^\circ}}{10e^{j36,87^\circ}} = 22e^{-j66,87^\circ} = 8,64 - j20,23 \text{ A};$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{220e^{-j90^\circ}}{10e^{j36,87^\circ}} = 22e^{-j126,87^\circ} = -13,2 - j17,6 \text{ A}.$$

Из условия, что геометрическая сумма токов в узле равна нулю  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$  можно определить ток фазы  $c$ :

$$\dot{I}_C = -\dot{I}_A - \dot{I}_B = 4,56 + j37,83 = 38,1 e^{j87,13^\circ} \text{ A}.$$

По рассчитанным величинам токов и напряжений показания приборов составят:

$$I_A = 22 \text{ A}; \quad I_B = 22 \text{ A}; \quad I_C = 38,1 \text{ A}; \quad U_a = 220 \text{ В}.$$

На основании выполненных расчетов можно отметить, что при отсутствии нейтрального провода и коротком замыкании в одной из фаз, напряжения и токи в двух других фазах возрастают по модулю в  $\sqrt{3}$  раз, а ток в замкнутой накоротко фазе увеличивается в 3 раза.

Векторная диаграмма для данного режима показана на рис. 3.3.2в.

7. Векторные диаграммы, показанные на рис. 3.3.2, построены для симметричного режима рис. 3.3.2а и для режима с отключенной фазой  $c$  рис. 3.3.2 б. Токи отстают от соответствующих фазных напряжений на угол  $\varphi = \arccos \frac{R_\Phi}{Z_\Phi} = 36,87^\circ$ , т.к. характер приемника активно-индуктивный.

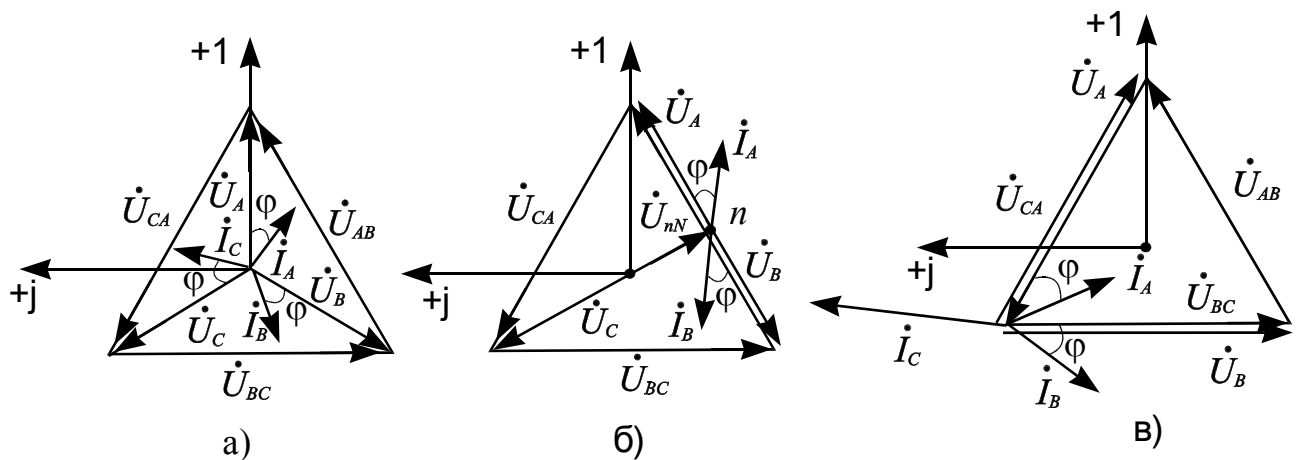


Рис. 3.3.2

**3.3.2.** В трехпроводную сеть с линейным напряжением  $u_{AB} = 311\sin(\omega t + \pi/2)$  необходимо подключить три однофазных приемника с параметрами:  $P_1 = 1,5\text{кВт}$ ,  $U_{1\text{ном}} = 220\text{В}$ ,  $\cos\varphi_1 = 1$ ;  $P_2 = 1\text{кВт}$ ,  $U_{2\text{ном}} = 220\text{В}$ ,  $\cos\varphi_2 = 0,8$  (инд);  $Q_{3\text{ном}} = 800\text{ВА}$ ,  $U_{3\text{ном}} = 220\text{В}$ ,  $\cos\varphi_3 = 0$  (емк.). Составить схему включения приемников и ваттметров для измерения активной мощности потребления энергии всеми приемниками. Определить сопротивления и токи приемников, линейные токи в проводниках сети, построить векторную диаграмму.

### Решение

1. Действующие значения линейных напряжений сети в комплексной форме:

$$U_{Л} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 220\text{ В}; \quad \dot{U}_{AB} = 220e^{j90^\circ}\text{ В}; \quad \dot{U}_{BC} = 220e^{-j30^\circ}\text{ В};$$

$$\dot{U}_{CA} = 220e^{-j150^\circ}\text{ В}.$$

2. Схема включения приемников. Номинальные напряжения приемников равны линейным напряжениям сети, это значит, что приемники должны быть включены между линейными проводами, что образует соединение треугольником. Схема замещения с учетом характера приемников приведена на рис. 3.3.3.

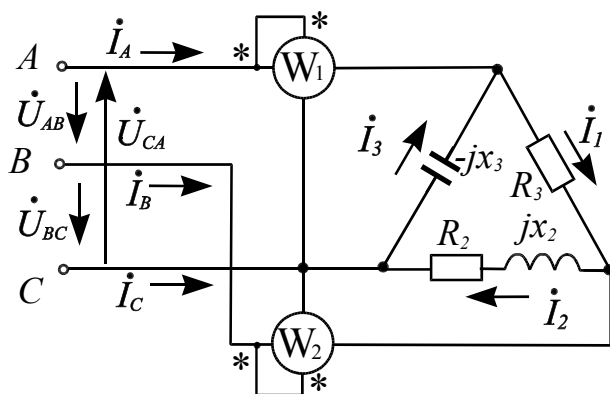


Рис. 3.3.3

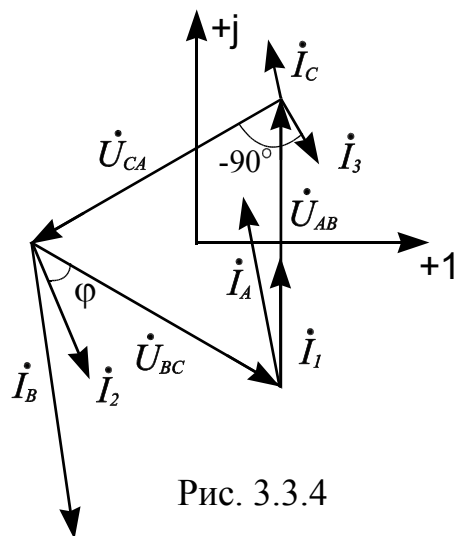


Рис. 3.3.4

3. Фазные токи приемников:

$$I_1 = \frac{P_1}{U_{AB} \cos \varphi_1} = \frac{1500}{220 \cdot 1} = 6,8 \text{ А}, \quad \varphi_1 = 0^\circ;$$

$$I_2 = \frac{P_2}{U_{BC} \cos \varphi_2} = \frac{1000}{220 \cdot 0,8} = 5,68 \text{ А}, \quad \varphi_2 = 36,87^\circ;$$

$$I_3 = \frac{Q_3}{U_{CA} \sin \varphi_3} = \frac{800}{220 \cdot 1} = 3,64 \text{ А}, \quad \varphi_3 = -90^\circ.$$

#### 4. Комплексные значения фазных токов приемников

Ток первого активного приемника совпадает по фазе с напряжением  $\dot{U}_{AB}$ , ток второго приемника активно-индуктивного отстает по фазе от напряжения  $\dot{U}_{BC}$  на угол  $\varphi_2 = 36,87^\circ$ , ток третьего емкостного приемника опережает напряжение  $\dot{U}_{CA}$  на угол  $\varphi_3 = -90^\circ$ :

$$\dot{I}_1 = 6,8 e^{j90^\circ} = j6,8 \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = 5,68 e^{j(-30^\circ - 36,87^\circ)} = 5,68 e^{-j66,87^\circ} = 2,23 - j5,22 \text{ А};$$

$$\dot{I}_3 = 3,64 e^{j(-150^\circ + 90^\circ)} = 3,64 e^{-j60^\circ} = 1,82 - j3,15 \text{ А}.$$

#### 5. Комплексные значения линейных токов в сети:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 - \dot{I}_3 = j6,8 - 1,82 + j3,15 = -1,82 + j9,95 = 10,12 e^{j100,37^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_2 - \dot{I}_1 = 2,23 - j5,22 - j6,8 = 2,23 - j12,02 = 12,23 e^{-j79,49^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_3 - \dot{I}_2 = 1,82 - j3,15 - 2,23 + j5,22 = -0,41 + j2,07 = 2,11 e^{j101,2^\circ} \text{ А}.$$

6. Векторная диаграмма приведена на рис. 3.3.4. Фазные напряжения приемников равны линейным напряжениям сети.

Определение сопротивлений приемников

Первый приемник: активный:

$$\varphi_1 = 0, \quad Z_1 = U_{AB} / I_1 = 220 / 6,8 = 32,35 \text{ Ом}$$

$$R_1 = Z_1 \cos \varphi_1 = 32,35 \cos 0 = 32,35 \text{ Ом}; \quad X_1 = 0.$$

Второй приемник: активно-индуктивный:

$$\varphi_2 = 36,87^\circ, \quad Z_2 = U_{BC} / I_2 = 220 / 5,68 = 38,73 \text{ Ом};$$

$$R_2 = Z_2 \cos \varphi_2 = 38,73 \cos 36,87^\circ = 30,98 \text{ Ом};$$

$$X_{L2} = Z_2 \sin \varphi_2 = 38,73 \sin 36,87^\circ = 23,24 \text{ Ом}.$$

Третий приемник: емкостной:

$$\varphi_3 = -90^\circ, \quad Z_3 = U_{CA} / I_3 = 220 / 3,64 = 60,44 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 0 \text{ Ом}; \quad X_{C3} = Z_3 \sin \varphi_3 = 60,44 \sin(-90^\circ) = -60,44 \text{ Ом}.$$

8. Определение показаний ваттметров и суммарной мощности всех приемников:

$$P_{W1} = U_{AC} I_A \cos \varphi_1 = 220 \cdot 10,12 \cos(-70,37^\circ) = 747,95 \text{ Вт};$$

$$\dot{U}_{AC} = \dot{U}_{CA} e^{j180^\circ} = 220 e^{-j150^\circ} \cdot e^{j180^\circ} = 220 e^{j30^\circ} \text{ В};$$

$$\varphi_1 = \overset{\wedge}{\dot{U}}_{AC} \overset{\wedge}{\dot{I}}_A = \psi_{U_{AC}} - \psi_{I_A} = 30^\circ - 100,37^\circ = -70,37^\circ;$$

$$P_{W2} = U_{BC} I_B \cos \varphi_2 = 220 \cdot 12,23 \cos 49,49^\circ = 1747,76 \text{ Вт};$$

$$\varphi_2 = \overset{\wedge}{\dot{U}}_{BC} \overset{\wedge}{\dot{I}}_B = \psi_{U_{BC}} - \psi_{I_B} = -30^\circ + 79,49^\circ = 49,49^\circ.$$

Суммарная мощность всех приемников:  $P = P_{W1} + P_{W2} = 2495,71 \text{ Вт}$ .

Проверка:  $P_{\text{пр}} = P_1 + P_2 = 1000 + 1500 = 2500 \text{ Вт}$ .

Погрешность расчета составляет:

$$\Delta = \frac{|P_{\text{пр}} - P|}{P_{\text{пр}}} \cdot 100 \% = \frac{2500 - 2495,71}{2500} \cdot 100 \% = 0,17 \%$$



## Список литературы

1. Электротехника и электроника. Кн. 1: Электрические и магнитные цепи. / Под ред. В. Г. Герасимова. – М.: Энергоатомиздат, 1996. – 288 с.
2. Волынский Б. А., Зейн Е. Н., Шатерников В. Е. Электротехника. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 551 с.
3. Касаткин А. С., Немцов М. В. Электротехника. – М.: Высшая школа, 2000. – 542 с.
4. Сборник задач по электротехнике и основам электроники. / Под ред. В. Г. Герасимова. – М.: Высшая школа, 1987. – 286 с.
5. Рекус Г. Г., Белоусов А. И. Сборник задач по электротехнике и основам электроники. – М.: Высшая школа, 2001. – 416 с.

**Федеральное агентство по образованию**  
**Государственное образовательное учреждение высшего**  
**профессионального образования**  
**«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра ТОЭ

ЗАДАНИЕ № \_\_\_\_  
по курсу “Электротехника и электроника”

(название темы)

Выполнил:  
студент гр. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
(фамилия, инициалы)

Проверил:  
\_\_\_\_\_ (фамилия, инициалы)

Томск, 2009 г.

Учебное издание

АРИСТОВА Людмила Ивановна  
МАЛЫШЕНКО Нина Михайловна

**ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА**  
**«Электрические цепи»**

Варианты заданий, примеры расчета и методические указания  
к выполнению индивидуальных домашних заданий  
для студентов неэлектротехнических специальностей

Научный редактор  
доктор физико-математических наук,  
профессор

*Ю.Н. Исеев*

Подписано к печати 27.04.2009. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».


Печать RISO. Усл. печ. л. 3,43. Уч.-изд. л. 3,11.

Заказ . Тираж 150 экз.



Томский политехнический университет  
Система менеджмента качества  
Томского политехнического университета сертифицирована  
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.

