

## ЛЕКЦИЯ 4

# СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

## Лекция 4

Использование моделей надежности элементов для определения модели надежности системы в целом подразумевает, что функция распределения времени до отказа каждого элемента системы полностью определена, т.е. известен закон распределения и его параметры.

На практике такое допущение зачастую не выполняется:

- модели надежности элементов могут быть неизвестны или не полностью определены;
- модели надежности могут быть справедливы для неких «оптимальных» (лабораторных) режимов нагрузки и внешних условий.

## Лекция 4

Вместо того, чтобы использовать теоретический вероятностный подход к определению модели надежности системы, на практике чаще используют статистические методы определения показателей надежности, суть которых заключается

- в наблюдении за функционированием некоторого числа однотипного оборудования,
  - регистрации времени (и, возможно, причины) отказа каждого экземпляра
  - и анализа получившихся выборок данных
- с целью получения статистических оценок показателей надежности систем.

## Лекция 4

Исходным материалом любого статистического исследования является совокупность результатов наблюдений. В простейших случаях они представляют собой экспериментальные (полученные в результате опытов) значения некоторой случайной величины  $\xi$ .

В задачах статистики распределение  $F$  этой случайной величины хотя бы частично неизвестно.

Пусть  $G$  — эксперимент, связанный со случайной величиной  $\xi$ . Рассмотрим  $n$  независимых повторений эксперимента  $G$  и обозначим через  $x_1, \dots, x_n$  совокупность полученных наблюдений. Вектор  $X_n = (x_1, \dots, x_n)$  называется выборкой объема  $n$  из совокупности с распределением  $F$ .

## Лекция 4

Наблюдения, представленные выборкой, можно использовать для оценки количественных характеристик (параметров)  $\boldsymbol{\theta} = \langle \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m \rangle^T$ , являющихся носителями смысловой и количественной информации об исследуемом объекте или явлении.

Числовые значения параметров, вычисленные по результатам наблюдений, называются точечными оценками этих параметров и обозначаются  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \langle \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m \rangle^T$ .

Качество этих оценок определяется качеством выборочных данных: их объемом, достоверностью, значимостью и др.

## Лекция 4

В общем, точечная оценка – это статистика, т.е. измеримая числовая функция от выборки, не зависящая от неизвестных параметров распределения.

Поскольку точечная оценка зависит от случайных значений некоторой величины, она сама также является случайной величиной.

Статистики, определяющие параметры выборки, также называют выборочными характеристиками.

Выборочное среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

является оценкой математического ожидания случайной величины:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Выборочная дисперсия

$$S_b^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

является смещенной оценкой дисперсии случайной величины:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 \cdot f(x) dx,$$

т.е.  $E[S_b^2] \neq D[X]$ .

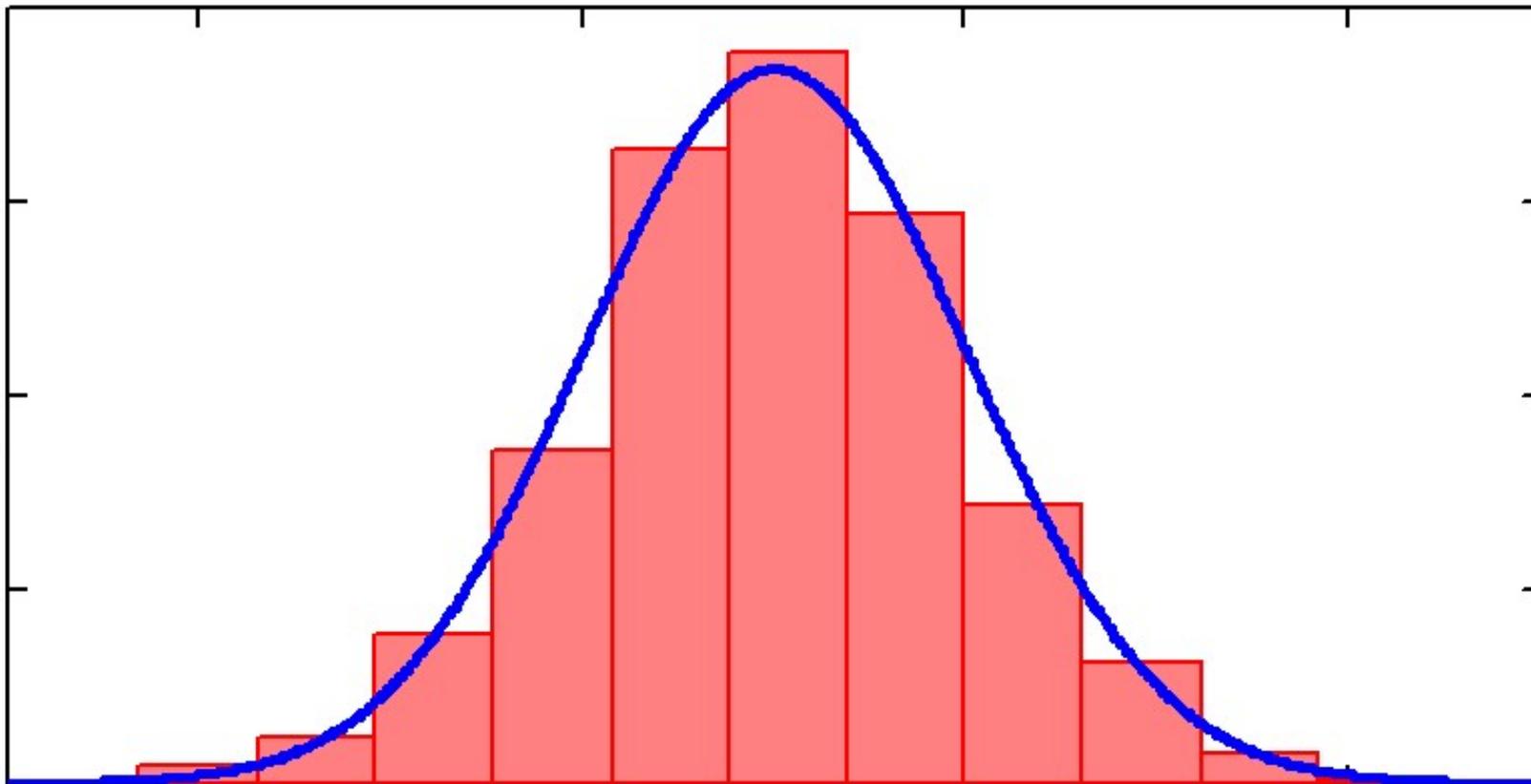
Исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

является несмещенной оценкой дисперсии случайной величины.

## Лекция 4

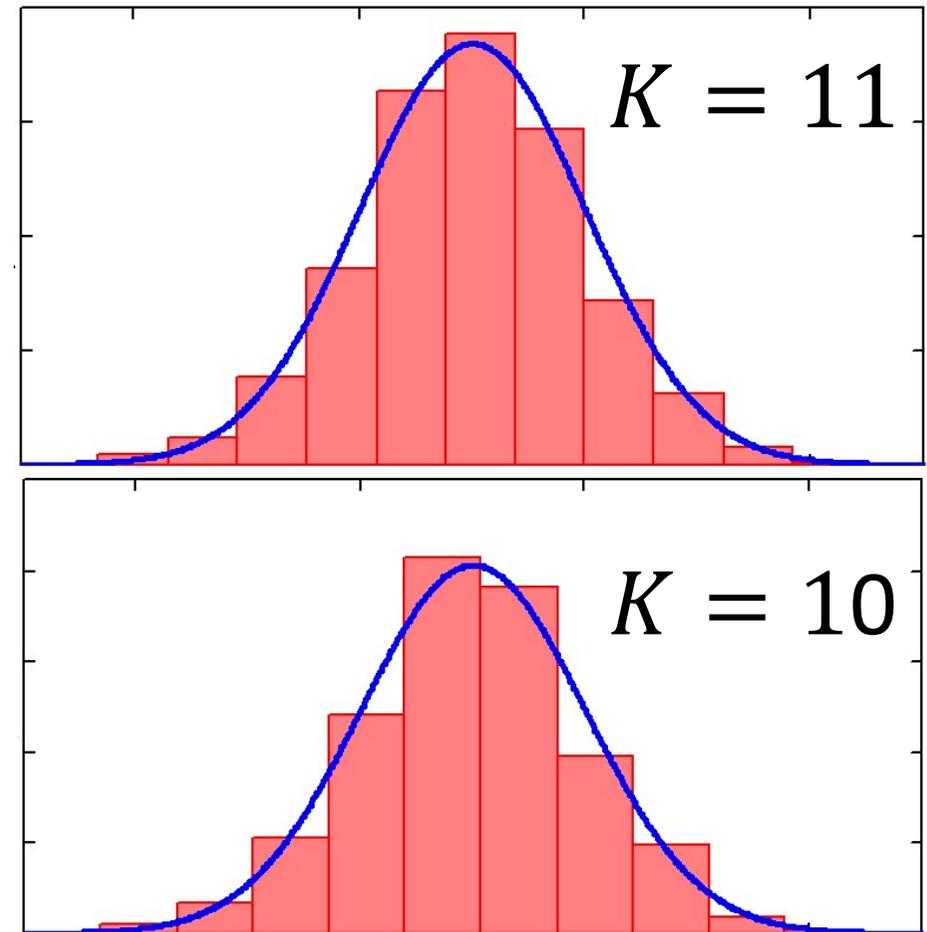
Гистограмму можно считать оценкой функции плотности вероятности распределения случайной величины.



## Лекция 4

Для построения гистограммы весь диапазон выборочных значений необходимо разделить на  $K$  непересекающихся интервалов и возвести на каждом из них прямоугольник, высота которого пропорциональна числу элементов выборки, попавших в данный интервал.

Внешний вид гистограммы зависит от выбранного значения  $K$ .



Правило квадратного корня:

$$K = \lceil \sqrt{n} \rceil$$

Формула Стёрджиса:

$$K = \lceil 1 + \log_2 n \rceil$$

Правило Скотта:

$$K = \left\lceil \frac{\sqrt[3]{n} \cdot (\max(x_i) - \min(x_i))}{3,49 \cdot S} \right\rceil$$

где  $S = \sqrt{S^2}$  - выборочное несмещенное среднеквадратическое отклонение.

## Лекция 4

Для использования гистограммы в качестве оценки функции плотности, она должна быть нормализована, т.е. площадь всех прямоугольников, составляющих гистограмму должна быть равна единице.

Эмпирическая (выборочная) функция распределения

Выборочная функция распределения  $\hat{F}(x)$  – это приближение теоретической функции распределения, построенное с помощью выборки из него.

Пусть  $X_n = (x_1, \dots, x_n)$  - выборка объема  $n$ , порождённая случайной величиной  $X$ , задаваемой функцией распределения  $F(x)$ .

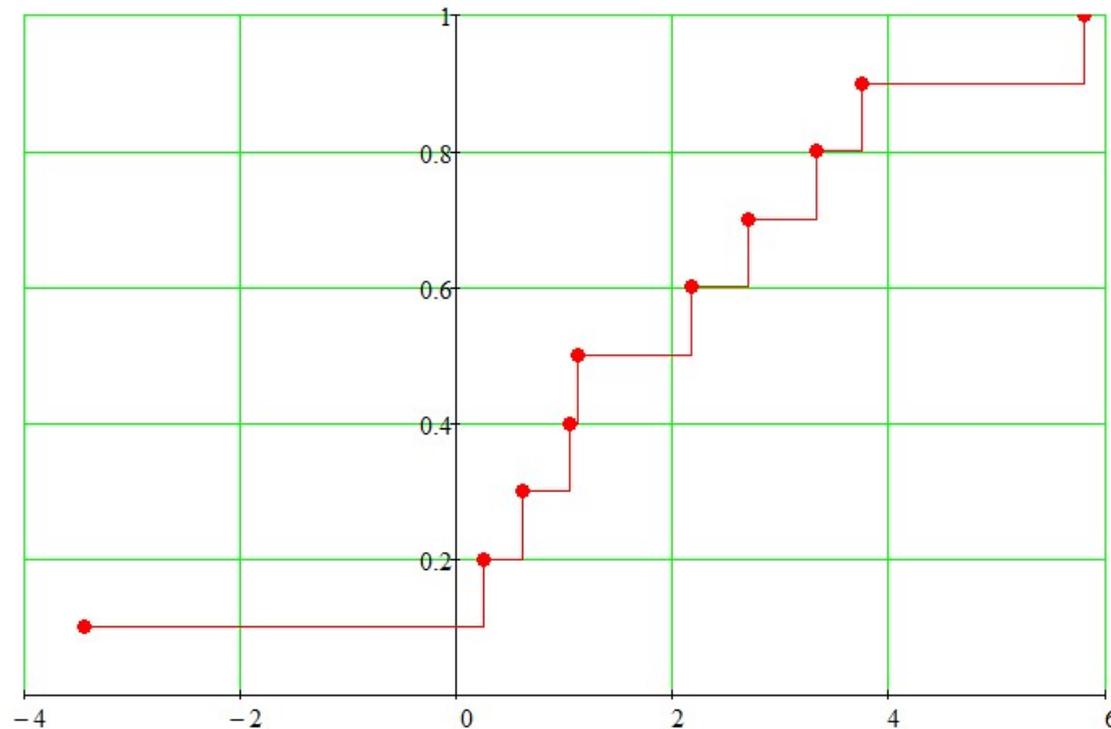
Определим функцию  $\hat{F}(x)$  следующим образом:

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{x_i \leq x\}},$$

где  $\mathbf{1}_A$  - индикатор события  $A$ .

Эмпирическая (выборочная) функция распределения

Таким образом, значение функции  $\hat{F}(x)$  в точке  $x$  равно относительной частоте элементов выборки, не превосходящих значение  $x$ .



Генераторы псевдослучайных чисел

Наиболее распространенным способом является метод обратного преобразования (преобразование Смирнова).

Пусть  $F(x)$  является функцией произвольного распределения.

Покажем как, имея генератор выборки из стандартного непрерывного равномерного распределения, получить выборку из распределения, задаваемого функцией распределения  $F(x)$ .

Генераторы псевдослучайных чисел

Если функция  $F: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  строго возрастает на всей области определения, то она имеет обратную функцию  $F^{-1}: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Пусть  $u_1, u_2, \dots, u_n \sim U[0; 1]$  - выборка из стандартного непрерывного равномерного распределения.

Тогда  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , где  $x_i = F^{-1}(u_i), i = 1, 2, \dots, n$  - выборка из интересующего нас распределения.

Пример:

Пусть требуется сгенерировать выборку из экспоненциального распределения с параметром  $\lambda > 0$ .

Функция этого распределения  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  строго возрастает, и её обратная функция имеет вид  $F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x)$

Таким образом, если  $u_1, u_2, \dots, u_n$  — выборка из стандартного непрерывного равномерного распределения, то  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , где

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u_i)$$

— искомая выборка из экспоненциального распределения.

## Лекция 4

Несмотря на кажущуюся универсальность, данный алгоритм имеет серьёзные практические ограничения.

Даже если функция распределения строго возрастает, вычислить её обратную не всегда просто, особенно если она не задана в виде элементарной функции, как, например, в случае нормального распределения.

Для получения нормально распределённых случайных чисел используются другие алгоритмы, например, преобразование Бокса-Мюллера, Алгоритм Зиккурат.

## Моделирование отказов системы

Получив выборки времен отказов отдельных компонентов, можно использовать их для генерирования времен отказов системы в целом.

Для этого необходимо проанализировать условия появления события отказа системы: комбинации отказов компонентов и их последовательность.

Предположим, нам необходимо получить  $N$  отказов системы, состоящей из  $K$  компонентов с некоторой схемой резервирования (или без резервирования).

Моделирование отказов системы

Сгенерируем  $K$  выборок  $X^{(i)}$  ( $i = 1..K$ ) случайных чисел, соответствующих временам отказа компонентов, каждая из которых состоит из  $N$  элементов  $X_j^{(i)}$  ( $j = 1..N$ ).

В полученных выборках  $j$ -е элементы соответствуют временам отказа компонентов в некотором гипотетическом эксперименте.

Моделирование отказов системы

Предположим, что моделируемая система является последовательной.

Поскольку событие отказа такой системы наступает при отказе любого ее компонента, то самый ранний отказ в  $j$  – ом гипотетическом эксперименте будет означать отказ системы:

$$Y_j = \min_{i \in (1, K)} X_j^{(i)}, j = 1..N$$

Моделирование отказов системы

Пусть моделируемая система является параллельной, с горячим резервированием.

Поскольку событие отказа такой системы наступает при отказе всех ее компонентов, то последний отказ в  $j$  –ом гипотетическом эксперименте будет означать отказ системы:

$$Y_j = \max_{i \in (1, K)} X_j^{(i)}, j = 1..N$$

## Моделирование отказов системы

Пусть моделируемая система является параллельной, с холодным резервированием.

Поскольку событие отказа такой системы наступает при отказе всех ее компонентов, каждый из которых начинает работу после отказа предыдущего, то время отказа системы будет являться суммой времен отказов компонентов:

$$Y_j = \sum_{i=1}^K X_j^{(i)}$$

Моделирование отказов системы

Пусть моделируемая система является системой с резервированием с дробной кратностью,  $k$  из  $n$ .

Поскольку отказ такой системы наступает когда число работоспособных элементов становится меньше  $k$ , отказ системы будет соответствовать  $(n - k + 1)$ -му отказу, а время отказа –  $(n - k + 1)$ -му элементу в упорядоченном множестве  $\{t_1, t_2, \dots, t_K\}, t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_K$ :

$$Y_j = \left\{ X_j^{(1)}, X_j^{(2)}, \dots, X_j^{(K)} \right\}_{n-k+1}$$

Моделирование отказов системы

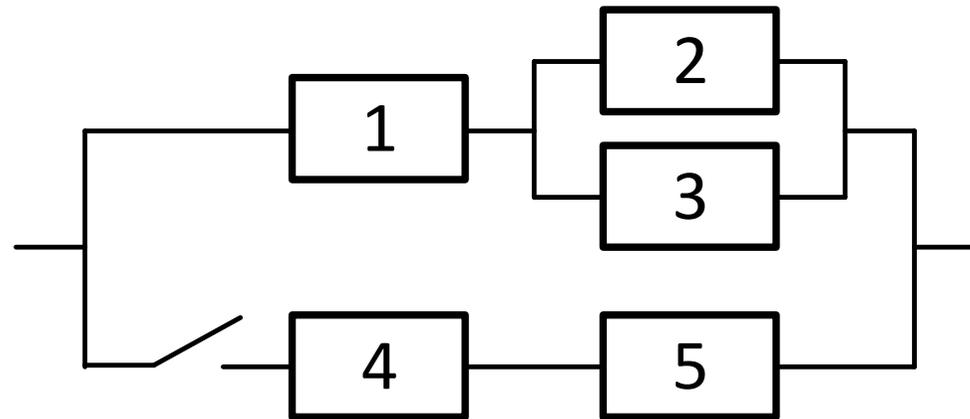
В частном случае мажоритарного резервирования  $k$  из  $n$ ,  $(n - k + 1)$ -й элемент упорядоченного множества  $\{t_1, t_2, \dots, t_K\}$  является его медианным значением:

$$Y_j = \operatorname{median}_{i \in (1, K)} X_j^{(i)}$$

Для последовательно параллельных систем с различными схемами резервирования процедура генерации выборки времен отказов системы напоминает процедуру поиска ВБР сложной системы.

Пример

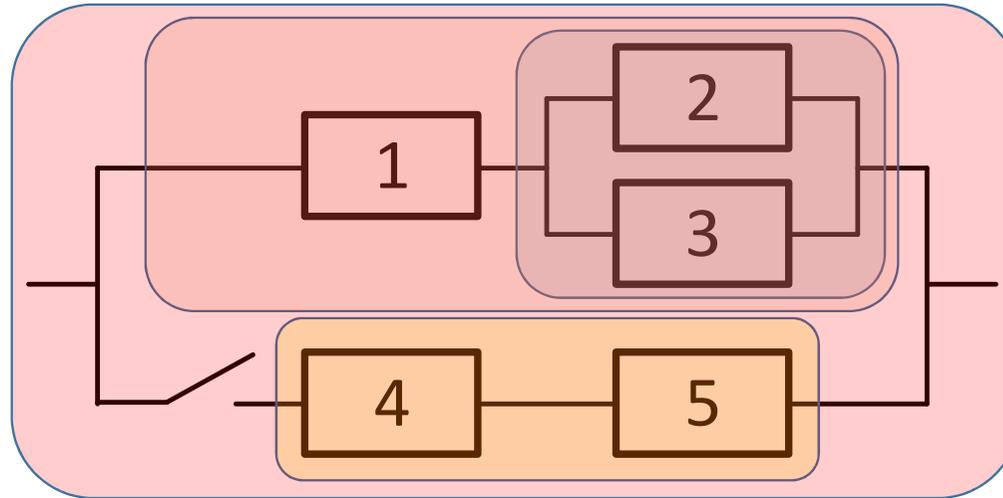
Дана система с блок-схемой надежности, представленной ниже.



Для компонентов системы были получены выборки  $X_j^{(i)}$  времен отказов ( $i = 1..5, j = 1..N$ ).

$$\max (X_j^{(2)}, X_j^{(3)})$$

$$\min (X_j^{(4)}, X_j^{(5)})$$



$$\min [X_j^{(1)}, \max (X_j^{(2)}, X_j^{(3)})]$$

$$Y_j = \min [X_j^{(1)}, \max (X_j^{(2)}, X_j^{(3)})] + \min (X_j^{(4)}, X_j^{(5)})$$

Теория оценивания – это раздел статистики, занимающийся оценкой параметров на основе эмпирических данных.

Параметры отражают основополагающие физические свойства объектов таким образом, что их значения влияют на распределение измеряемых данных.

Оценка (результат процедуры оценивания) – это попытка аппроксимации неизвестных параметров на основе измеренных данных.

Различают точечные и интервальные оценки.

Точечные оценки – это числовые значения, вычисленные по результатам измерений (наблюдений).

Интервальные оценки ставят в соответствие оцениваемому параметру некоторый интервал, в котором с некоторой, заранее заданной вероятностью, находится истинное значение параметра.

Основными методами точечного оценивания параметров являются

- метод наименьших квадратов;
- метод максимального правдоподобия.

Менее популярным является метод моментов.

Метод наименьших квадратов (МНК) является стандартным подходом к аппроксимации решения переопределенных систем, т.е. систем уравнений, в которых число неизвестных меньше числа уравнений.

Общее решение минимизирует сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений от теоретических.

Задача МНК подразделяется на две категории:

- линейный МНК;
- нелинейный МНК,

в зависимости от того, являются ли отклонения линейными по всем неизвестным.

Линейная задача МНК имеет решение в явном виде. Нелинейные задачи зачастую решаются с помощью итеративного приближения. На каждом шаге система линеаризуется, что позволяет использовать те же основные вычисления, что и для линейного случая.

## Лекция 4

Цель МНК состоит в настройке параметров модели таким образом, что моделируемая функция наилучшим образом описывает имеющиеся данные.

Пусть имеется набор данных, состоящий из  $n$  пар  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Моделируемая функция распределения имеет вид  $F(x, \Theta)$ , где  $m$  неизвестных параметров составляют вектор  $\Theta$ .

Необходимо найти значения оценок  $\hat{\theta}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Близость модели к точке данных определяется отклонением, т.е. разностью между измеренным значением и значением, предсказанным согласно модели:

$$r(\hat{\Theta})_i = y_i - F(x_i, \hat{\Theta})$$

Процедура МНК минимизирует функцию суммы квадратов отклонений:

$$S(\hat{\Theta}) = \sum_{i=1}^n r(\hat{\Theta})_i^2 \rightarrow \frac{\partial S}{\partial \hat{\theta}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

## Лекция 4

При анализе данных об отказах координаты  $x$  представляют собой времена отказов оборудования. Однако, для выполнения МНК нам необходимы и координаты  $y$  – вероятности отказов.

В качестве координат  $y$  можно использовать значения эмпирической функции распределения, однако это может исказить результат.

Основным методом является использование медианных рангов.

Медианный ранг – это значение, которое имела бы истинная функция вероятности отказа  $F(x_j)$  в момент  $j$ -го отказа из выборки  $n$  элементов с 50% доверительным уровнем.

Точные значения медианных рангов  $MR_j \equiv y_j$  можно получить, решив уравнения

$$\sum_{k=j}^n \binom{n}{k} MR_j^k (1 - MR_j)^{n-k} = \frac{1}{2}$$

для всех  $j$ .

Более простым способом получения значений медианных рангов является использование следующей формулы:

$$MR_j = \frac{1}{1 + \frac{n - j + 1}{j} \cdot F^{-1}(0.5, m, n)}$$

где  $m = 2 \cdot (n - j + 1)$ ,  $n = 2j$ , и  $F^{-1}(0.5, m, n)$  - значение обратной функции  $F$ -распределения Фишера с  $m$  и  $n$  степенями свободы, вычисленное в точке 0.5.

Еще одним быстрым, но менее точным способом является использование оценки Филлибена:

$$MR_j = \begin{cases} 1 - 0.5^{1/n} & \text{if } j = 1; \\ \frac{j - 0.3175}{n + 0.365} & \text{if } j = 2, 3, \dots, n - 1; \\ 0.5^{1/n} & \text{if } j = n. \end{cases}$$

или аппроксимации Бенарда:

$$MR_j = \frac{j - 0.3}{n + 0.4}$$

Пример:

Пусть известны времена отказов шести идентичных объектов: 93, 34, 16, 120, 53 и 75 часов. Необходимо вычислить медианные ранги различными методами.

Упорядочим времена отказов в восходящем порядке:

Время до отказа $t_j$ , час	Порядковый номер отказа
16	1
34	2
53	3
75	4
93	5
120	6

Пример:

Начнем с простейшего метода – аппроксимации Бенарда.

$$MR_j = \frac{j-0.3}{n+0.4}, \text{ где } n = 6:$$

Время до отказа $t_j$ , час	Порядковый номер отказа	Медианный ранг
16	1	0,10937
34	2	0,26563
53	3	0,42188
75	4	0,57813
93	5	0,73438
120	6	0,89063

Пример:

Оценка Филлибена:

$$MR_j = \begin{cases} 1 - 0.5^{1/n} & \text{if } j = 1; \\ \frac{j - 0.3175}{n + 0.365} & \text{if } j = 2, 3, \dots, n - 1; \\ 0.5^{1/n} & \text{if } j = n. \end{cases}$$

Время до отказа $t_j$ , час	Порядковый номер отказа	Медианный ранг
16	1	0,1091
34	2	0,26434
53	3	0,42145
75	4	0,57855
93	5	0,73566
120	6	0,8909

Пример:

Далее, вычислим медианные ранги с использованием формулы с F-распределением:

$$MR_j = \frac{1}{1 + \frac{n-j+1}{j} \cdot F^{-1}(0.5, m, n)} \quad \begin{matrix} m = 2(n-j+1) \\ n = 2j \end{matrix}$$

№	m	n	qF(0.5,m,n)
1	12	2	1.36097
2	10	4	1.11257
3	8	6	1.02975
4	6	8	0.97111
5	4	10	0.89882
6	2	12	0.73477

Значения обратной (квантильной) функции вычислим с использованием функции qF из пакета Mathcad.

Пример:

Тогда медианные ранги равны:

$$MR_j = \frac{1}{1 + \frac{n - j + 1}{j} \cdot F^{-1}(0.5, m, n)} \quad \begin{matrix} m = 2(n - j + 1) \\ n = 2j \end{matrix}$$

Время до отказа $t_j$ , час	Порядковый номер отказа	Медианный ранг
16	1	0.1091
34	2	0.26445
53	3	0.42141
75	4	0.57859
93	5	0.73555
120	6	0.8909

Пример:

Значения, полученные с помощью F-распределения, совпадают с точными значениями, получаемыми путем решения уравнений с биномиальными коэффициентами.

Бенард	Филлибен	F-распределение
0.10937	0.1091	0.1091
0.26563	0.26434	0.26445
0.42188	0.42145	0.42141
0.57813	0.57855	0.57859
0.73438	0.73566	0.73555
0.89063	0.8909	0.8909

Использование аппроксимаций вносит небольшую ошибку, которой во многих случаях можно пренебречь.

Пусть  $X$  – непрерывная случайная величина, имеющая функцию плотности распределения

$$f(x, \Theta) \equiv f(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

где  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  - это  $k$  неизвестных параметров, которые необходимо оценить на основе  $N$  независимых наблюдений  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , ( $N > k$ ), которые в случае теории надежности представляют собой времена отказов.

Функция правдоподобия:

$$\mathcal{L}(\hat{\Theta}) = \prod_{i=1}^N f(x_i, \hat{\Theta})$$

На практике удобнее работать с логарифмической функцией правдоподобия:

$$\Lambda(\hat{\Theta}) = \ln \mathcal{L}(\hat{\Theta}) = \sum_{i=1}^N \ln f(x_i, \hat{\Theta})$$

Оценки максимального правдоподобия получаем, находя максимум значения  $\mathcal{L}(\hat{\Theta})$  или  $\Lambda(\hat{\Theta})$ :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \hat{\theta}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

## Лекция 4

Оценки параметров, полученные разными способами для одной и той же выборки, будут различаться.

Поскольку на практике истинные значения параметров неизвестны, мы не можем с уверенностью предпочесть один метод другому.

Большинство исследователей в области надежности используют метод максимального правдоподобия.

## Лекция 4

Оценки параметров, полученные методом МНК для одной выборки, но разных моделей, можно сравнить между собой, используя сумму квадратов отклонений (RSS) или среднеквадратичную ошибку (MSE):

$$RSS(\hat{\Theta}) = \sum_{i=1}^N (Y_i - F(X_i, \hat{\Theta}))^2$$

$$MSE(\hat{\Theta}) = \frac{RSS(\hat{\Theta})}{N}$$

Меньшее значение указывает на лучшую модель.

## Лекция 4

Оценки параметров, полученные методом ММП для одной выборки, но разных моделей, можно сравнить между собой, используя удвоенное значение логарифмической функции правдоподобия, взятое со знаком «минус»:  $-2\Lambda(\hat{\Theta})$ .

Меньшее значение указывает на лучшую модель.