<u>Лекция 3</u>

Восстанавливаемые системы

До этого момента, при изучении разделов теории надежности, мы предполагали, что исследуемые системы были *невосстанавливаемыми*, т.е. нас интересовала работа систем от момента включения до момента отказа системы в целом.

Предполагалось, также, что отказавшие элементы систем с резервированием не восстанавливаются.

Мы можем разделить все системы на восстанавливаемые и не восстанавливаемые довольно условно: один и тот же элемент в зависимости от окружающих условий и этапов эксплуатации может считаться восстанавливаемым или невосстанавливаемым.

В дальнейшем, будем предполагать, что после отказа элемент (система) проходит процедуру восстановления; при этом примем следующие допущения:

- отказ элемента (системы) обнаруживается мгновенно;
- следом за моментом отказа мгновенно начинается восстановление;
- время восстановления – это непрерывная случайная величина, распределенная экспоненциально;
- количество ремонтных бригад неограниченно, т.е. если одновременно имеются несколько отказавших элементов, каждый из них проходит процедуру восстановления без ожидания в очереди;

- восстановленный элемент (система) до момента включения в работу считается абсолютно надежным, т.е. элемент после ремонта обладает такими же характеристиками, что и новый элемент;
- после восстановления элемент (система) мгновенно подключается в работу, либо занимает место среди резервных элементов (ели это предусмотрено).

Наличие такого большого списка допущений связано с тем, что процедура восстановления в значительной мере связана с человеческим фактором, который очень сложно описать математически.

На практике каждое из приведенных выше утверждений может нарушаться:

- отказы не всегда замечаются вовремя,
- демонтаж отказавших элементов (и монтаж восстановленных) могут занимать продолжительное время,
- количество ремонтных бригад всегда ограничено,
- изделия после ремонта редко обладают таким же уровнем надежности, что и новые элементы.

Вероятность восстановления

Момент восстановления работоспособности объекта после отказа является случайным событием. Поэтому интервал времени от момента отказа до момента восстановления является случайной величиной и для характеристики ремонтопригодности может быть использована функция распределения этой случайной величины *T*.

Вероятностью восстановления называется вероятность того, что время восстановления работоспособного состояния объекта не превысит заданного:

$$P_{\text{в}}(t) = Pr\{T \leq t\}, \qquad t \geq 0.$$

Вероятность восстановления

Функция $P_{в}(t)$представляет собой интегральную функцию распределения случайной величины *T*, следовательно, вероятность восстановления является монотонно возрастающей функцией времени:

чем больше времени прошло с момента начала восстановления, тем больше вероятность того, что изделие будет восстановлено.

Мы предположили априори, что закон распределения времени до восстановления является экспоненциальным, тогда

$$P_{в}(t) = 1 - e^{-\mu t},$$

где μ - параметр распределения, называемый *интенсивностью восстановления*.

Среднее время восстановления

По аналогии со средней наработкой до отказа математическое ожидание времени восстановления работоспособного состояния объекта называется средним временем восстановления:

$$T_{\text{в}} = \int_0^{\infty} t f_{\text{в}}(t) dt = \int_0^{\infty} \left(1 - P_{\text{в}}(t)\right) dt\,;$$

где $f_{\text{в}}(t) = P'_{\text{в}}(t)$ - плотность вероятности времени восстановления.

Функция готовности

Аналогом вероятности безотказной работы невосстанавливаемых систем для систем с восстановлением является *функция готовности* - вероятность того, что объект окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается.

Однако, в отличии от ВБР функция готовности не убывает до нуля, а стремится к некоторому значению $K_{\text{г}} = A(\infty)$, которое называется (стационарным) коэффициентом готовности.

Расчет надежности систем с восстановлением

Рассмотрим техническую систему с определенной постоянной интенсивностью отказов λ.

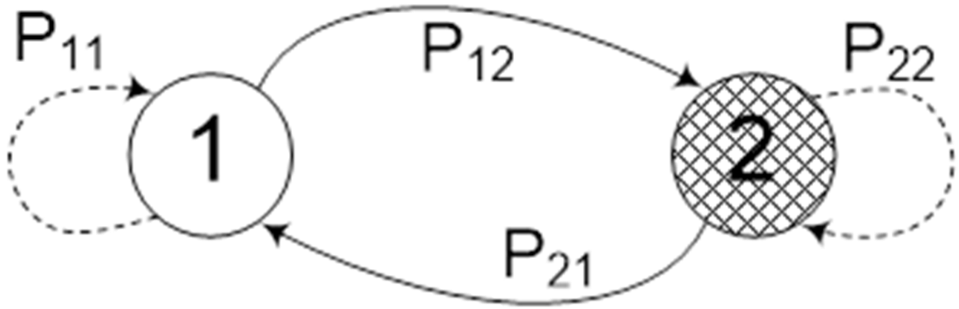
После отказа система мгновенно переходит в режим (состояние) восстановления.

Время до восстановления является непрерывной случайной величиной, распределенной экспоненциально с параметром μ (интенсивность восстановления).

По завершении восстановления система мгновенно переходит в рабочий режим (состояние) – цикл повторяется.

Расчет надежности систем с восстановлением

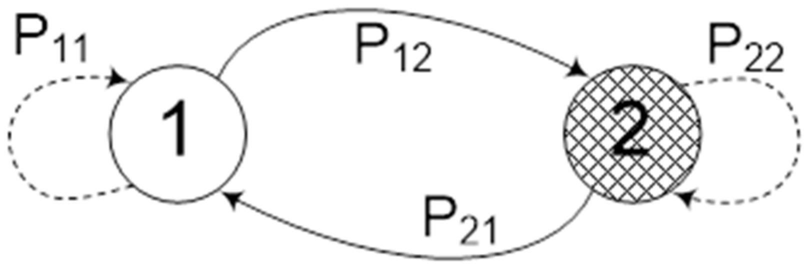
Наиболее подходящим способом представления переходов данной системы из состояния в состояние является граф состояний и переходов:



На рисунке *состояния* системы представлены *вершинами графа (круги)*, а *переходы – дугами*.

Обозначим работоспособное состояние как состояние 1, состояние отказа (восстановления) – как состояние 2.

Расчет надежности систем с восстановлением

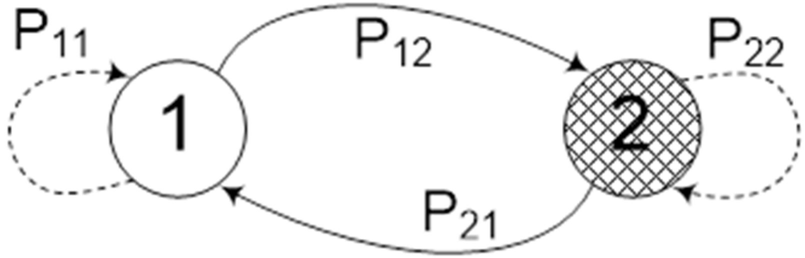


Вероятности P_{ii} не используются в расчетах, поэтому изображать на графах мы их не будем

Для каждого момента времени существует вероятность перехода системы из текущего состояния в следующее (P_{12} и P_{21}), а также вероятности того, что система в следующий момент времени останется в исходном состоянии (P_{11} и P_{22}). В данном случае вероятность P_{12} представляет собой вероятность отказа, а P_{21} - вероятность восстановления.

Для каждого i-го состояния сумма вероятностей переходов P_{ij} $(j = 1, 2)$ равна единице.

Расчет надежности систем с восстановлением

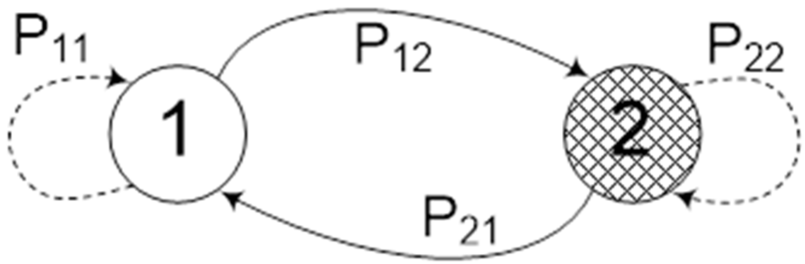


Система уравнений, определяющая вероятности состояний, такова:

$$P_1(t+\Delta t) = P_1(t)\cdot[1-P_{12}(\Delta t)] + P_2(t)\cdot P_{21}(\Delta t);$$
$$P_2(t+\Delta t) = P_2(t)\cdot[1-P_{21}(\Delta t)] + P_1(t)\cdot P_{12}(\Delta t).$$

Для простоты объяснения будем называть момент времени t – «сейчас», а $t+\Delta t$ – «следующий момент».

Расчет надежности систем с восстановлением



Тогда первое уравнение можно прочитать следующим образом:

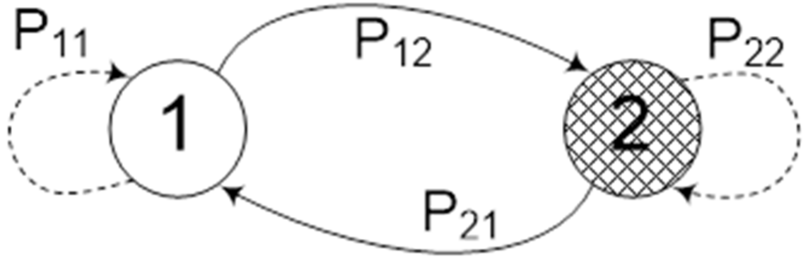
$$P_1(t+\Delta t) = P_1(t)\cdot[1 - P_{12}(\Delta t)] + P_2(t)\cdot P_{21}(\Delta t);$$

Вероятность того, что система в следующий момент времени будет находиться в состоянии 1, равна…

… вероятности того, что сейчас она находится в состоянии 1 и за время Δt не перейдет в состояние 2…

… плюс вероятность того, что сейчас она находится в состоянии 2 и за время Δt перейдет в состояние 1

Расчет надежности систем с восстановлением



При $\Delta t \to 0,\ P_{ij}(\Delta t) \to \gamma_{ij} \cdot \Delta t$,где γ_{ij}- интенсивность перехода.

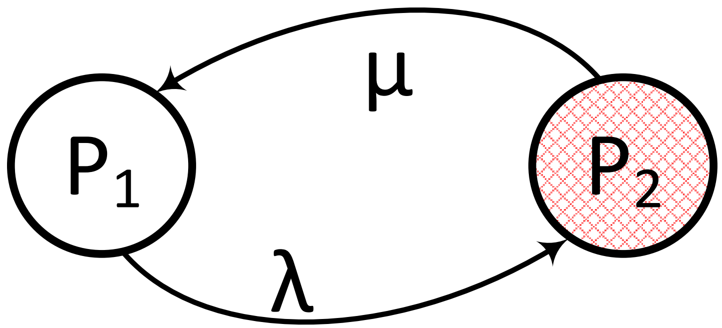
Используя определение производной, получаем:

$$\begin{cases} P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t); \\ P_2'(t) = \ \lambda P_1(t) - \mu P_2(t), \end{cases}$$

так как $\gamma_{12} = \lambda$ и $\gamma_{21} = \mu$.

Расчет надежности систем с восстановлением

Для каждого состояния имеем уравнение, в левой части которого стоит производная вероятности этого состояния.

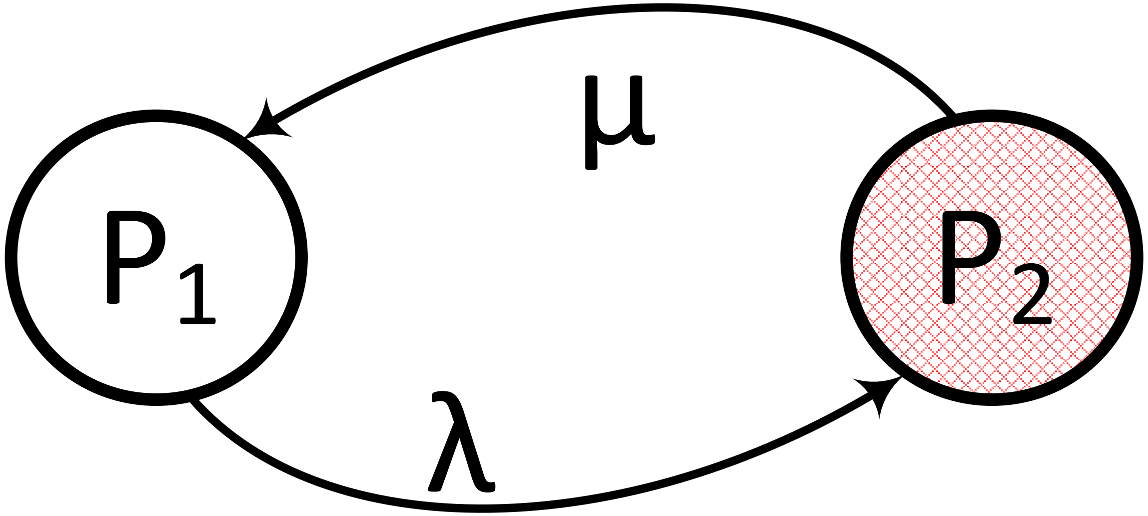


В правой части уравнения содержится столько слагаемых, сколько дуг связано с данным состоянием.

Каждая дуга представлена своей интенсивностью перехода, умноженной на вероятность состояния, из которого эта дуга выходит.

При этом входящие дуги учитываются со знаком «+», исходящие – со знаком «-».

Расчет надежности систем с восстановлением



$$\begin{cases} P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t) \\ P_2'(t) = \ \ \lambda P_1(t) - \mu P_2(t) \end{cases}$$

Расчет надежности систем с восстановлением

Решение полученной системы можно провести с использованием преобразования Лапласа. Это позволяет преобразовать систему дифференциальных уравнений в систему алгебраических уравнений.

$$p(t) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} P(s)$$

$$p'(t) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} sP(s) - p(0^+)$$

Примечание. Исторически принято для обозначения изображений по Лапласу использовать прописные буквы, а для обозначения оригиналов функций – строчные. Поскольку мы уже привыкли обозначать вероятность прописной буквой ($P(t)$), мы не будем придерживаться здесь этого правила.
Однако следует помнить, что $P(t)$ и $P(s)$ – это совершенно разные функции, причем

$$P(s)=L\{P(t)\}.$$

Расчет надежности систем с восстановлением

Считая, что в начальный момент времени система определенно находится в состоянии 1, получим:

$$\begin{cases} P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t) \\ P_2'(t) = \lambda P_1(t) - \mu P_2(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} sP_1(s) = -\lambda P_1(s) + \mu P_2(s) + 1 \\ sP_2(s) = \lambda P_1(s) - \mu P_2(s) \end{cases}$$

Из второго уравнения

$$P_2(s) = \frac{\lambda}{s+\mu} P_1(s)$$

Расчет надежности систем с восстановлением

Подставив этот результат в первое уравнение, в итоге получим:

$$P_1(s) = \frac{s+\mu}{s(s+\lambda+\mu)} \qquad P_2(s) = \frac{\lambda}{s(s+\lambda+\mu)}$$

Это является решением системы в области изображений.

Для перехода к оригиналам, воспользуемся обратным преобразованием Лапласа:

$$P_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_1(s)\} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Расчет надежности систем с восстановлением

$$P_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_1(s)\} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

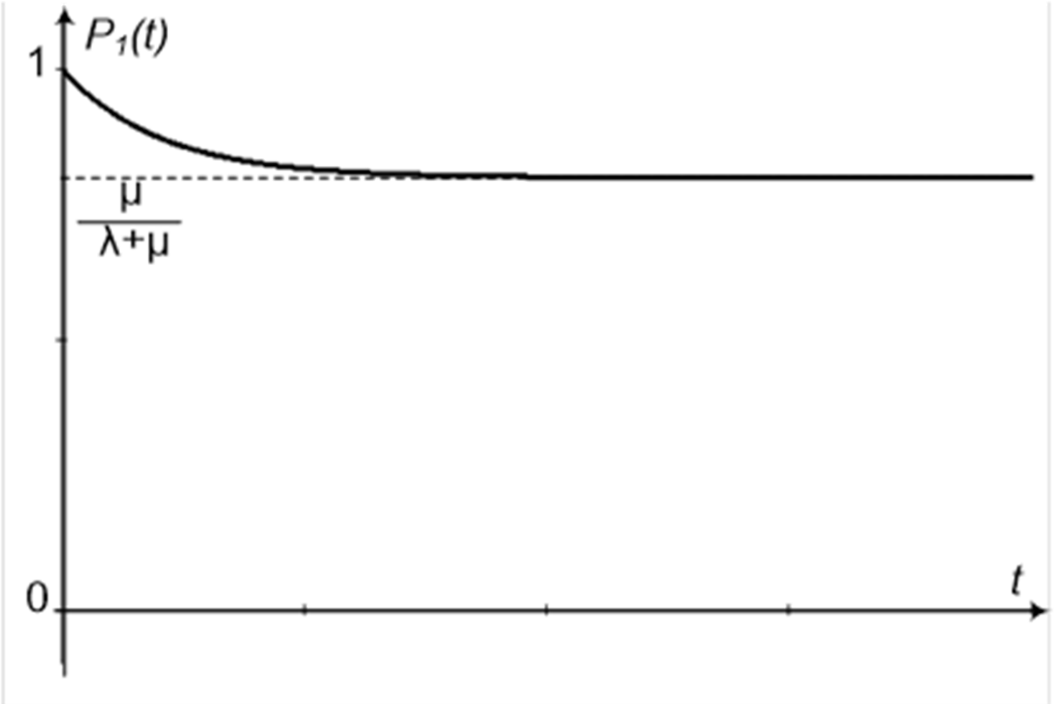
По определению, $P_1(t)$ - это вероятность того, что система в момент t будет находиться в работоспособном состоянии – функция готовности $A(t) = P_1(t)$.

По смыслу это очень похоже на определение ВБР, однако, для функции $P_1(t)$ не выполняется условие $P_1(\infty) = 0$.

Анализируя полученное решение, видно что $P_1(\infty) = K_\text{г} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

Расчет надежности систем с восстановлением

$$P_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_1(s)\} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$



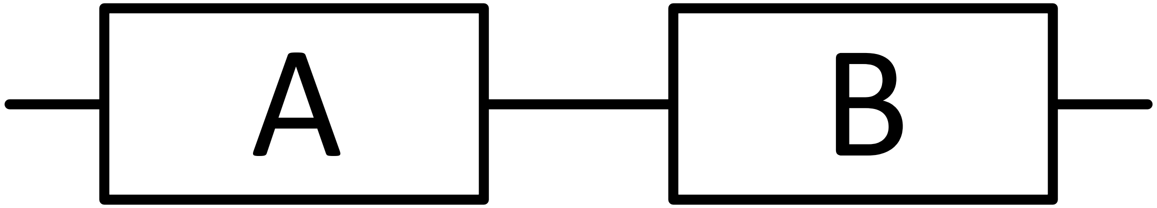
Расчет надежности систем с восстановлением

Несмотря на относительную простоту метода определения надежности восстанавливаемых систем с помощью графов, существуют и определенные проблемы:

- для случайных времен до отказа и до восстановления используется только экспоненциальное распределение;
- при увеличении числа элементов в рассматриваемой системе значительно увеличивается число возможных состояний системы, а, следовательно, и количество уравнений в системе.

Пример 1

Дана последовательная система, состоящая из двух элементов *A* и *B*, с интенсивностями отказа $\lambda_A = 0{,}001$ ч$^{-1}$, $\lambda_B = 0{,}002$ ч$^{-1}$ и с интенсивностями восстановления $\mu_A = 0{,}04$ ч$^{-1}$, $\mu_B = 0{,}01$ ч$^{-1}$.



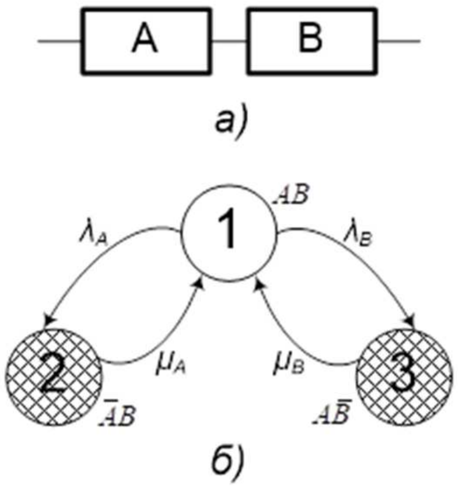
Найти функцию готовности и стационарный коэффициент готовности.

Пример 1

Решение:

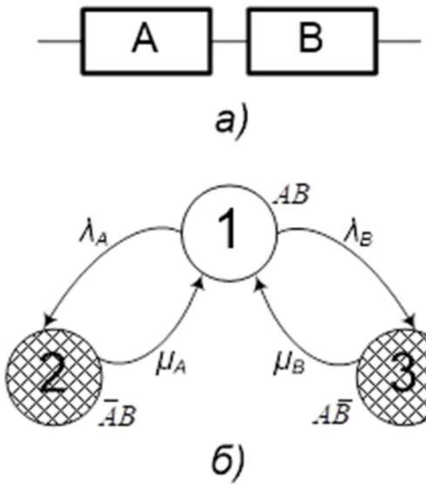
Составим граф состояний и переходов для данной системы.

При этом будем не только обозначать состояния системы числами, но и подписывать их, используя логико-буквенные обозначения для состояний элементов (инверсия обозначает, что соответствующий элемент отказал).



Пример 1

Решение:



В начальном состоянии 1 оба элемента системы работоспособны.

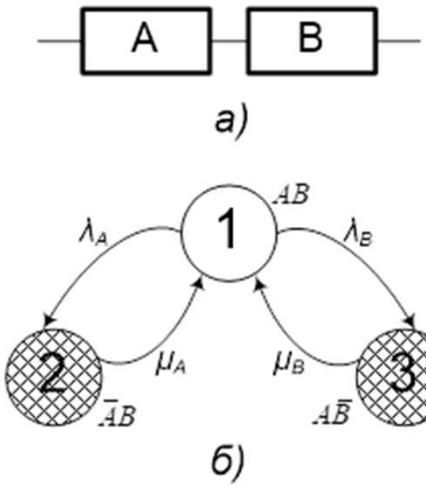
В этом состоянии возможны два разных события: отказ элемента А и отказ элемента В. Поэтому, рисуем две исходящие стрелки – в состояния 2 и 3.

Примечание. Мы предполагаем, что потоки отказов и потоки восстановлений являются **простейшими**. Из этого следует, что потоки являются также и **однородными**.

Таким образом, **невозможно** одновременное появление двух и более событий. Поэтому, **невозможным** является и **одновременный отказ элементов А и В**.

Пример 1

Решение:

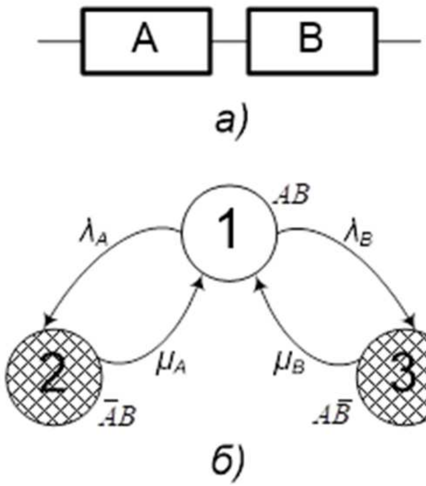


В состояниях 2 и 3 один элемент отказал, а один находится в работоспособном состоянии. Однако работоспособные элементы не могут отказать из состояний 2 и 3, т.к. система в целом в этих состояниях уже не работоспособна.

Также, в состояниях 2 и 3 начинается восстановление отказавших элементов, поэтому рисуем стрелки обратно в состояние 1.

Пример 1

Решение:



Запишем систему уравнений в области изображений по Лапласу:

$$\begin{cases} sP_1(s) = -(\lambda_A + \lambda_B)P_1(s) + \mu_A P_2(s) + \mu_B P_3(s) + 1 \\ sP_2(s) = \lambda_A P_1(s) - \mu_A P_2(s) \\ sP_3(s) = \lambda_B P_1(s) - \mu_B P_3(s) \end{cases}$$

Выражаем из полученной системы $P_2(s)$ и $P_3(s)$ через $P_1(s)$:

$$P_2(s) = \frac{\lambda_A}{s + \mu_A} P_1(s) \qquad P_3(s) = \frac{\lambda_B}{s + \mu_B} P_1(s)$$

и подставляем их в первое уравнение системы.

Пример 1

Решение:

$$sP_1(s) = -(\lambda_A + \lambda_B)P_1(s) + \frac{\lambda_A\mu_A}{s+\mu_A}P_1(s) + \frac{\lambda_B\mu_B}{s+\mu_B}P_1(s) + 1$$

Выражаем $P_1(s)$:

$$P_1(s) = \frac{s^2 + (\mu_A + \mu_B)s + \mu_A\mu_B}{s^3 + (\lambda_A + \lambda_B + \mu_A + \mu_B)s^2 + (\lambda_A\mu_B + \lambda_B\mu_A + \mu_A\mu_B)s}$$

Подставляя численные значения параметров, и выполняя обратное преобразование Лапласа, получим выражение для вероятности 1-го состояния (функции готовности системы) и значение стационарного коэффициента готовности:

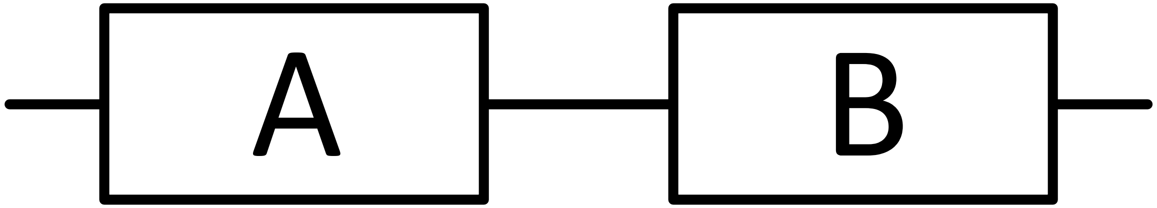
$$A(t) = P_1(t) \approx 0{,}816 + 0{,}028e^{-0{,}04107t} + 0{,}156e^{-0{,}0119t}$$
$$K_\text{г} = A(\infty) \approx 0{,}816.$$

Значительно упростить решение подобных задач можно в частных случаях, а именно, когда интенсивности отказов и/или восстановлений элементов равны.

В таких случаях, последствия отказов разных элементов одинаковы, т.е. нет никакой разницы, какой из элементов отказал первым, а какой вторым.

Пример 2

Дана последовательная система, состоящая из двух элементов *A* и *B*, с интенсивностями отказа $\lambda_A = 0{,}001\ \text{ч}^{-1}$, $\lambda_B = 0{,}002\ \text{ч}^{-1}$ и с интенсивностями восстановления $\mu_A = 0{,}04\ \text{ч}^{-1}$, $\mu_B = 0{,}01\ \text{ч}^{-1}$.



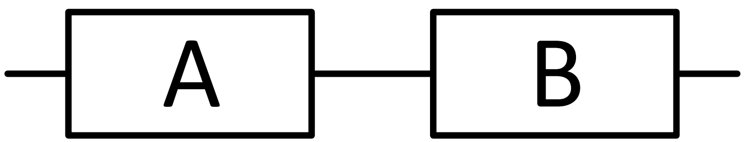
Найти функцию готовности и стационарный коэффициент готовности.

Пример 2

Решение:
Отказ любого элемента системы приводит к ее отказу.

При этом нет никакой разницы в интенсивности восстановления, какой бы элемент ни отказал.

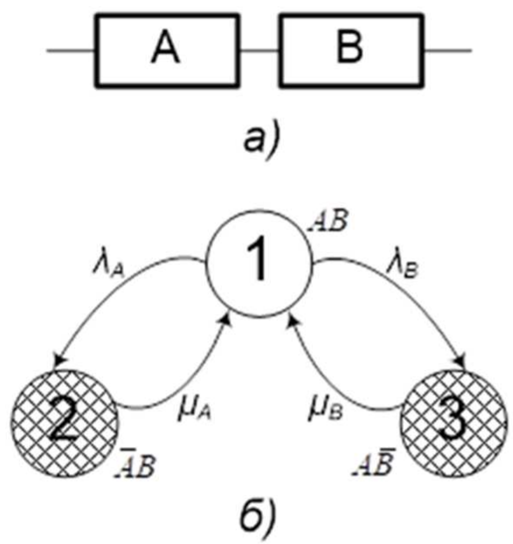
Подобную задачу также можно решать с использованием графа из Примера 1, однако гораздо удобнее упростить граф.

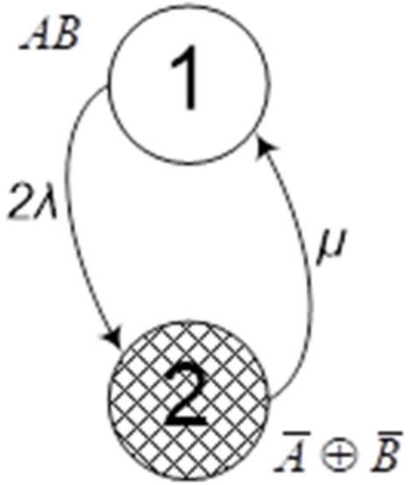


Пример 2

Решение:

Состояние 1 эквивалентно первому состоянию из Примера 1 – в нем также работоспособны оба элемента.



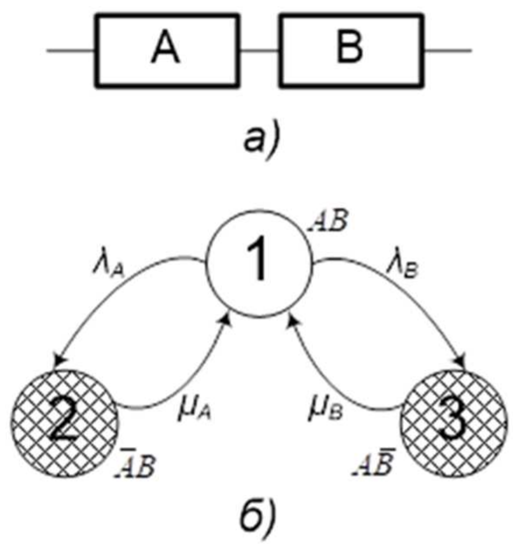


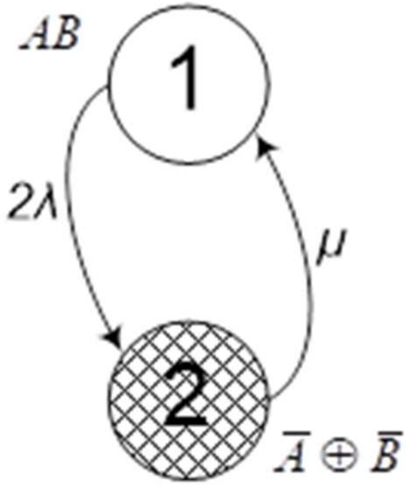
В состоянии 2 отказал какой-то один элемент – А или В, - но не оба элемента сразу (!).

Пример 2

Решение:

В состоянии 1 два элемента находятся в рабочем состоянии, поэтому их суммарная интенсивность отказов будет равна 2λ.

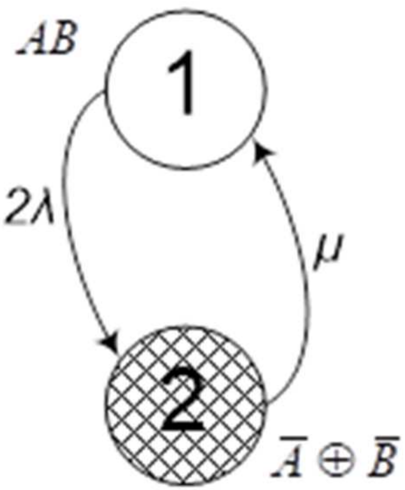




В состоянии 2 только один элемент восстанавливается, поэтому интенсивность перехода из 2-го состояния в 1-ое равна μ.

Пример 2

Решение:



Мы уже получили решение для системы, соответствующей полученному графу.
С учетом изменившейся интенсивности отказов:

$$A(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_1(s)\} = \frac{\mu}{2\lambda + \mu} + \frac{2\lambda}{2\lambda + \mu} e^{-(2\lambda+\mu)t} = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} e^{-0{,}012t}$$

$$K_\text{г} = A(\infty) = \frac{5}{6}$$

Поскольку обычно $\mu \gg \lambda$, функция готовности очень быстро стремится к своему стационарному (установившемуся) значению. Зачастую на практике определяют лишь стационарный коэффициент готовности. Это позволяет значительно сократить объем вычислений.

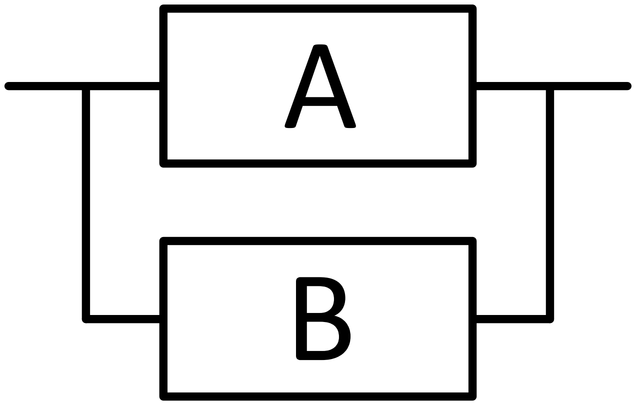
Поскольку стационарный режим характеризуется тем, что производные равны нулю (функции больше не меняются), в системе дифференциальных уравнений необходимо приравнять к нулю левые части уравнений и дополнить систему уравнением

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$$

где N – количество состояний.

Пример 3

Дана параллельная система из двух элементов с «горячим» резервированием.
Интенсивности отказов и восстановлений элементов одинаковы и равны $\lambda = 0{,}001\ \text{ч}^{-1}$ и $\mu = 0{,}01\ \text{ч}^{-1}$ соответственно.



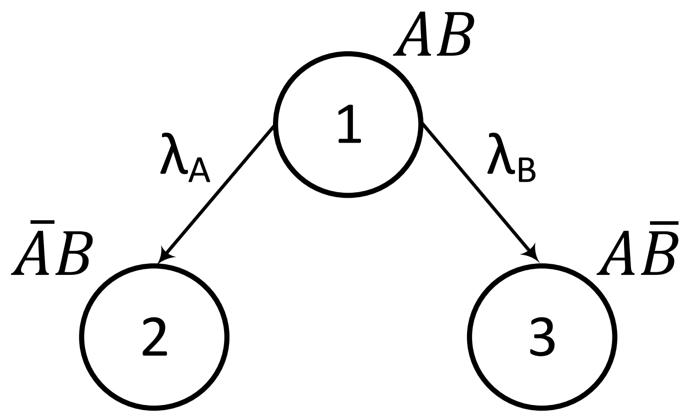
Найти стационарный коэффициент готовности.

Пример 3

Решение:

Составим неупрощенный граф состояний и переходов для данной системы.

В начальном состоянии 1 оба элемента А и В работоспособны, следовательно, возможны два события – отказ А и отказ В.



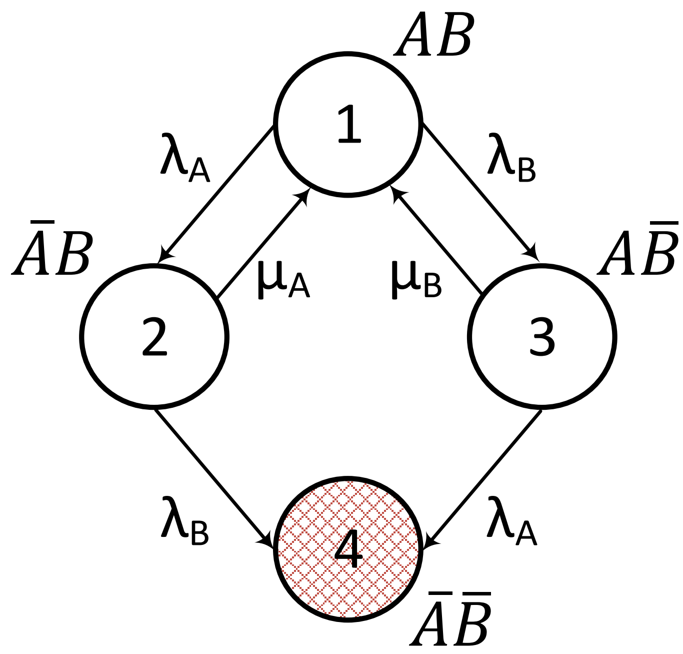
Это приводит нас к двум новым состояниям – 2 и 3 – в каждом из которых не работает (восстанавливается) один элемент.

Однако, в каждом из этих двух состояний один элемент по-прежнему работоспособен.

Пример 3

Решение:

Отказавшие элементы могут быть восстановлены, что возвращает систему в начальное состояние.

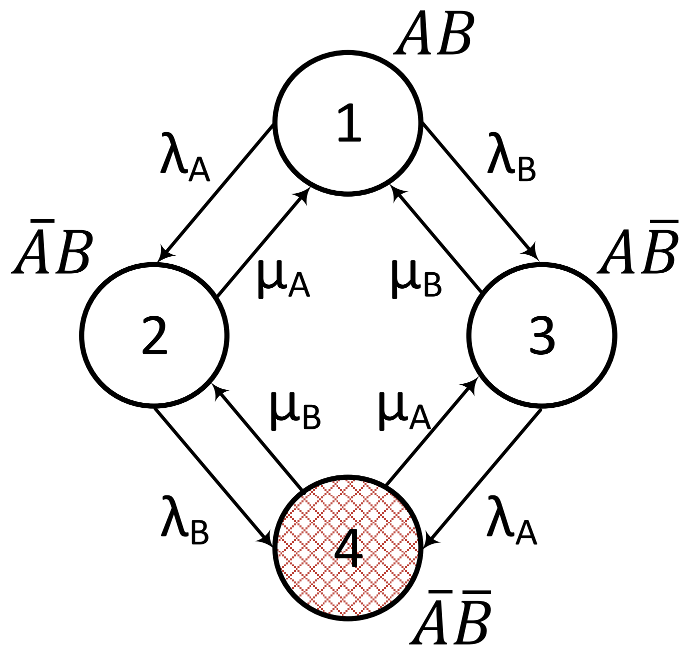


Элементы, все еще работающие в состояниях 2 и 3, также могут отказать, переводя систему в состояние отказа (4).

Пример 3

Решение:

И наконец, отказавшие элементы из состояния 4 могут быть восстановлены, переводя систему в состояние 2 или состояние 3.



Полученный граф может использоваться для определения готовности системы, однако его можно упростить.

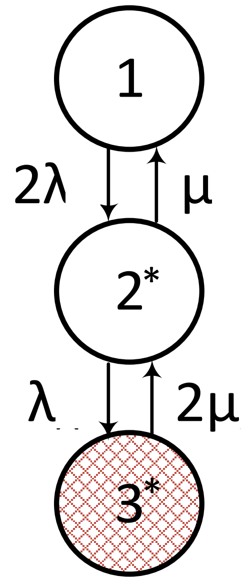
Поскольку при «горячем» резервировании оба элемента находятся в одинаковых условиях (несут полную нагрузку), их деление на основной и резервный элементы является условным.

Пример 3

Решение:

Отказ любого из элементов приведет к тому, что этот элемент будет восстанавливаться с интенсивностью восстановления одинаковой для всех элементов;

интенсивность отказов оставшегося элемента также не будет зависеть от того, какой элемент продолжит работу.



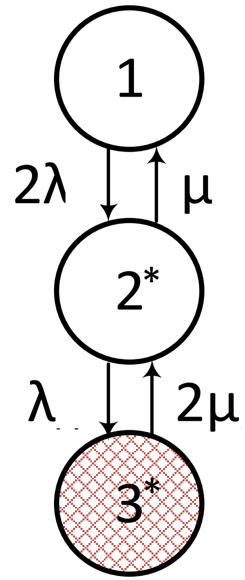
В упрощенном графе состояние 2* эквивалентно объединению состояний 2 и 3 исходного графа, а состояние 3* эквивалентно состоянию 4.

Пример 3

Решение:

Запишем систему уравнений в области времени:

$$\begin{cases} P_1'(t) = -2\lambda P_1(t) + \mu P_2(t); \\ P_2'(t) = 2\lambda P_1(t) - (\lambda + \mu) P_2(t) + 2\mu P_3(t); \\ P_3'(t) = \lambda P_2(t) - 2\mu P_3(t) \end{cases}$$



Приравняем производные к нулю и добавим уравнение

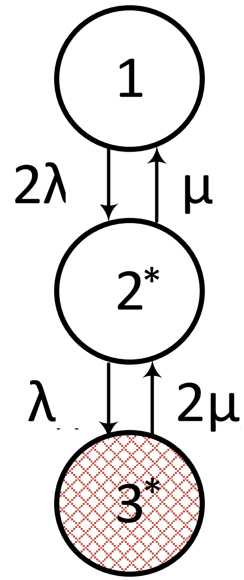
$$\begin{cases} 0 = -2\lambda P_1 + \mu P_2; \\ 0 = 2\lambda P_1 - (\lambda + \mu) P_2 + 2\mu P_3; \\ 0 = \lambda P_2 - 2\mu P_3; \\ 1 = P_1 + P_2 + P_3. \end{cases}$$

Пример 3

Решение:

Используя первое и третье уравнения, получим

$$P_1 = \frac{\mu}{2\lambda} P_2; \qquad P_3 = \frac{\lambda}{2\mu} P_2$$



Подставим эти выражения в последнее уравнение:

$$\frac{\mu}{2\lambda} P_2 + P_2 + \frac{\lambda}{2\mu} P_2 = 1 \Longrightarrow \left(\frac{\mu}{2\lambda} + 1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right) P_2 = 1$$

Получим

$$P_2 = \frac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}; \quad P_1 = \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}; \quad K_\text{г} = P_1 + P_2 = \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} \approx 0{,}992$$

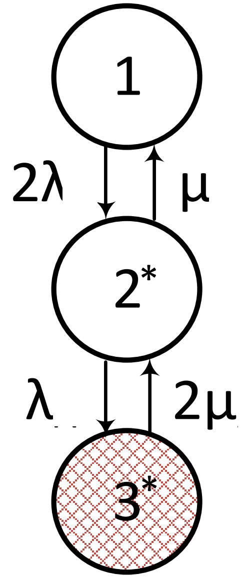
Еще одной областью применения графов является определение среднего времени до отказа восстанавливаемой системы в целом.

Аналогично расчету коэффициента готовности, средняя наработка до отказа должна быть равна сумме средних времен пребывания системы во всех ее работоспособных состояниях.

Для этого в системе уравнений в изображениях по Лапласу необходимо принять $s = 0$, заменить все P_i на T_i, и исключить из системы все уравнения, описывающие неработоспособные состояния и все слагаемые, содержащие вероятности неработоспособных состояний.

Пример 4

Найти среднюю наработку до отказа системы из Примера 3.



Решение:

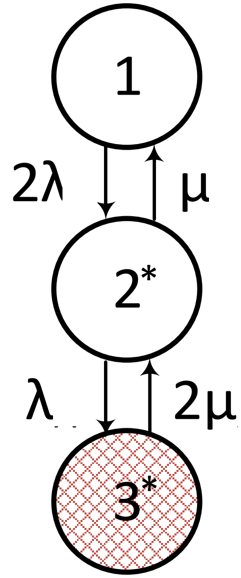
$$\begin{cases} \cancel{sP_1}(s) = -2\lambda P_1(s) + \mu P_2(s) + 1; \\ \cancel{sP_2}(s) = \ 2\lambda P_1(s) - (\lambda + \mu) P_2(s) + \cancel{2\mu P_3(s)}; \\ \cancel{sP_3(s) = \lambda P_2(s) - 2\mu P_3(s)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -2\lambda T_1 + \mu T_2 + 1; \\ 0 = \ 2\lambda T_1 - (\lambda + \mu) T_2. \end{cases}$$

Пример 4

Решение:

$$\begin{cases} 0 = -2\lambda T_1 + \mu T_2 + 1; \\ 0 = 2\lambda T_1 - (\lambda + \mu) T_2(s); \end{cases}$$



Решив систему, получим

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{\lambda + \mu}{2\lambda^2} \\ T_2 = \dfrac{1}{\lambda} \end{cases} \Longrightarrow T_{cp} = T_1 + T_2 = \frac{3\lambda + \mu}{2\lambda^2} = 6500 \text{ ч}$$