Детали мехатронных модулей и роботов, их конструирование, диагностика и надежность

<u>Лабораторная работа №4</u>

Статистическое моделирование надежности

Разработал: А.А. Ефремов

Томский политехнический университет, 2021

Теоретические сведения

Использование моделей надежности элементов для определения модели надежности системы в целом подразумевает, что функция распределения времени до отказа каждого элемента системы полностью определена, т.е. известен закон распределения и его параметры.

На практике такое допущение зачастую не выполняется:

- модели надежности элементов могут быть неизвестны или не полностью определены;
- модели надежности могут быть справедливы для неких «оптимальных» (лабораторных) режимов нагрузки и внешних условий.

Теоретические сведения

Вместо того, чтобы использовать теоретический вероятностный подход к определению модели надежности системы, на практике чаще используют статистические методы определения показателей надежности, суть которых заключается

- в наблюдении за функционированием некоторого числа однотипного оборудования,
- регистрации времени (и, возможно, причины) отказа каждого экземпляра
- и анализа получившихся выборок данных

с целью получения статистических оценок показателей надежности систем.

Теоретические сведения

Исходным материалом любого статистического исследования является совокупность результатов наблюдений. В простейших случаях они представляют собой экспериментальные (полученные в результате опытов) значения некоторой случайной величины ξ. В задачах статистики распределение P этой случайной величины хотя бы частично неизвестно.

Пусть G — эксперимент, связанный со случайной величиной ξ. Рассмотрим n независимых повторений эксперимента G и обозначим через $x_1, \ldots, x_n$ совокупность полученных наблюдений. Вектор $X_n = (x_1, \ldots, x_n)$ называется выборкой объема n из совокупности с распределением P.

Теоретические сведения

Наблюдения, представленные выборкой, можно использовать для оценки количественных характеристик (параметров) $\boldsymbol{\theta} = \langle \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m \rangle^T$, являющихся носителями смысловой и количественной информации об исследуемом объекте или явлении.

Числовые значения параметров, вычисленные по результатам наблюдений, называются точечными оценками этих параметров и обозначаются $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \langle \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m \rangle^T$.

Качество этих оценок определяется качеством выборочных данных: их объемом, достоверностью, значимостью и др.

Теоретические сведения

В общем, точечная оценка – это статистика, т.е. измеримая числовая функция от выборки, не зависящая от неизвестных параметров распределения.

Поскольку точечная оценка зависит от случайных значений некоторой величины, она сама также является случайной величиной.

Статистики, определяющие параметры выборки, также называют выборочными характеристиками.

Выборочное среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

является оценкой математического ожидания случайной величины:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

Выборочная дисперсия

$$S_b^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

является *смещенной* оценкой дисперсии случайной величины:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E[X])^2 \cdot f(x)dx\,,$$

т.е. $E\left[S_b^2\right] \neq D[X]$.

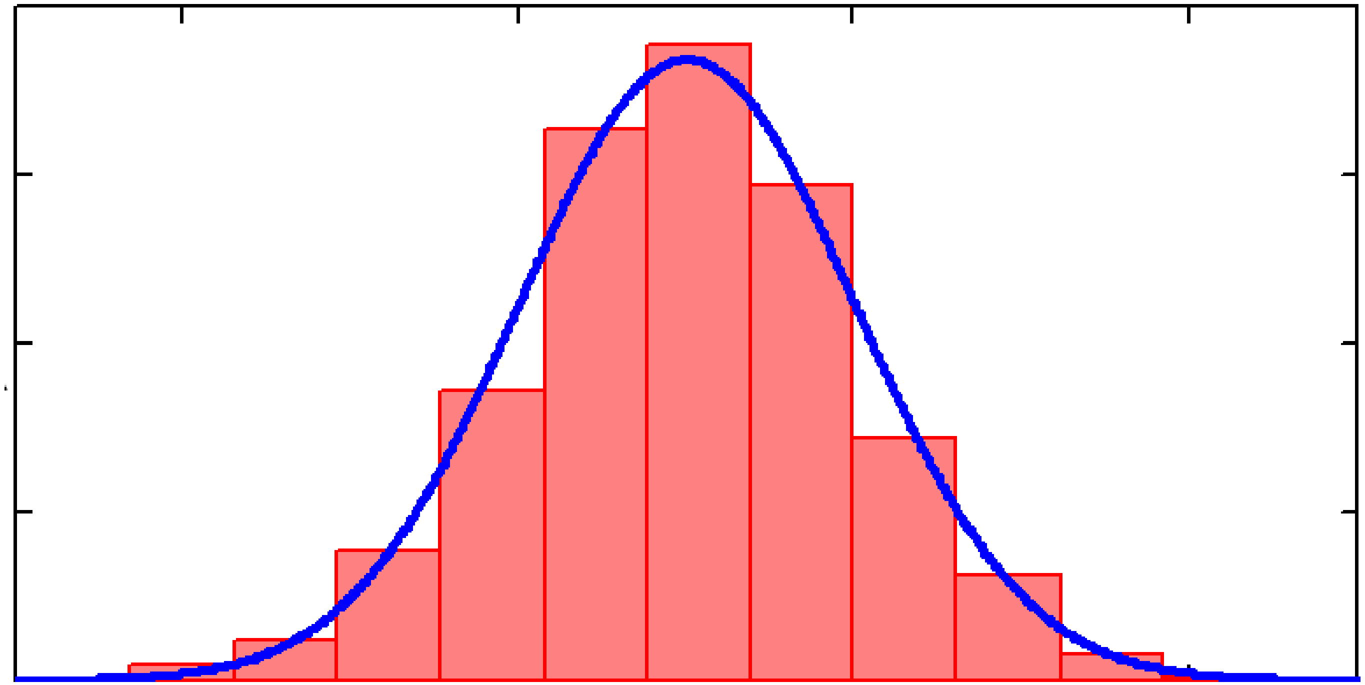
Исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

является *несмещенной* оценкой дисперсии случайной величины.

Теоретические сведения

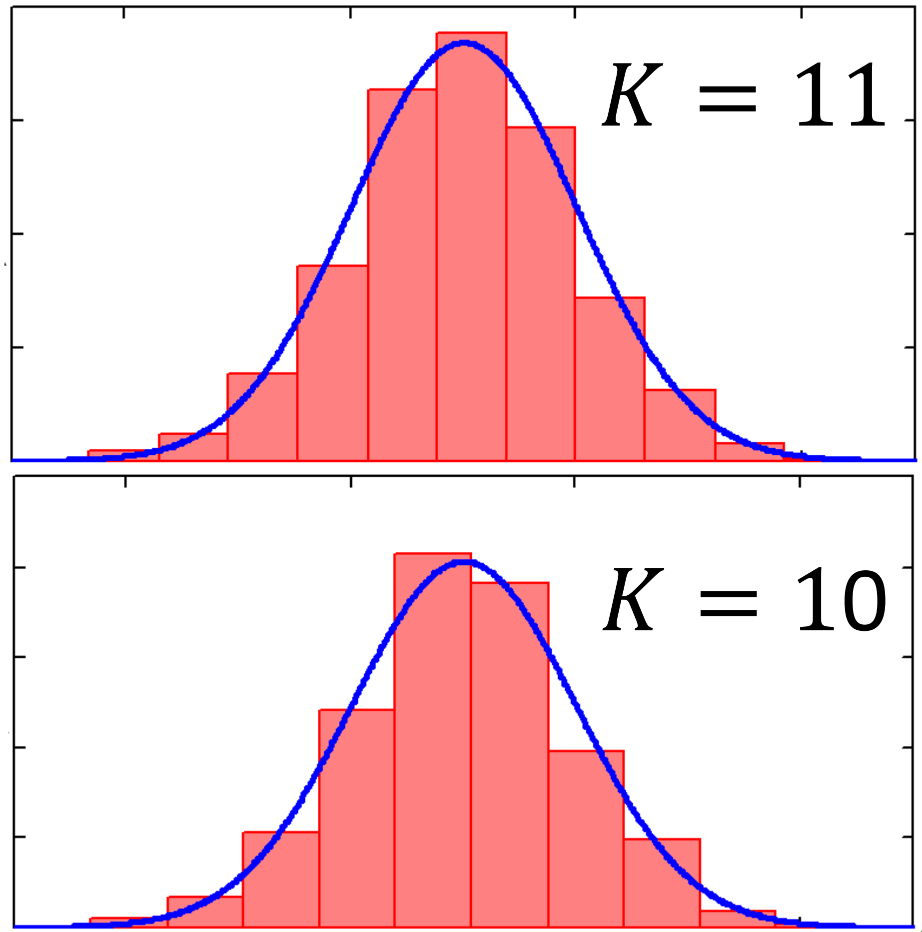
Гистограмму можно считать оценкой функции плотности вероятности распределения случайной величины.



Теоретические сведения

Для построения гистограммы весь диапазон выборочных значений необходимо разделить на K непересекающихся интервалов и возвести на каждом из них прямоугольник, высота которого пропорциональна числу элементов выборки, попавших в данный интервал.

Внешний вид гистограммы зависит от выбранного значения K.



Теоретические сведения

Правило квадратного корня:

$$K = \lceil \sqrt{n} \rceil$$

Формула Стёрджиса:

$$K = \lceil 1 + \log_2 n \rceil$$

Правило Скотта:

$$K = \left\lceil \frac{\sqrt[3]{n} \cdot \left(\mathbf{max}(x_i) - \mathbf{min}(x_i) \right)}{3{,}49 \cdot S} \right\rceil$$

где $S = \sqrt{S^2}$ - выборочное несмещенное среднеквадратическое отклонение.

Теоретические сведения

Для использования гистограммы в качестве оценки функции плотности, она должна быть нормализована, т.е. площадь всех прямоугольников, составляющих гистограмму должна быть равна единице.

Эмпирическая (выборочная) функция распределения

Выборочная функция распределения $\hat{F}(x)$ – это приближение теоретической функции распределения, построенное с помощью выборки из него.

Пусть $X_n = (x_1, \dots, x_n)$ - выборка объема n, порождённая случайной величиной X, задаваемой функцией распределения $F(x)$.

Определим функцию $\hat{F}(x)$ следующим образом:

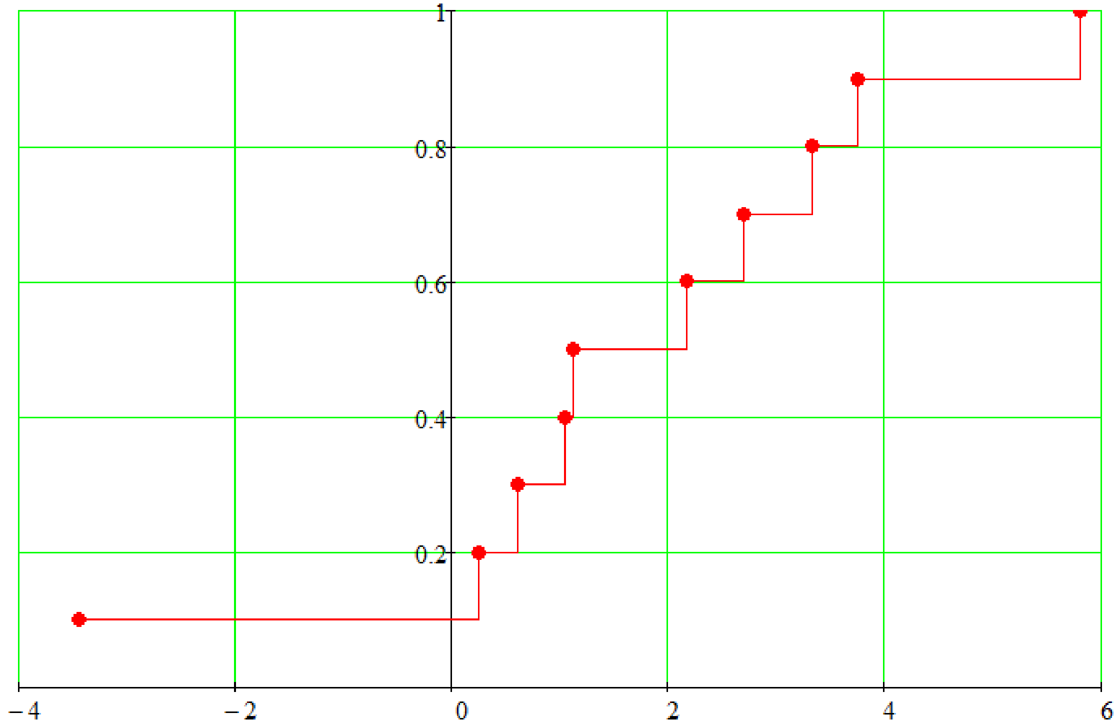
$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{x_i \le x\}},$$

где $\mathbf{1}_A$ - индикатор события А.

Эмпирическая (выборочная) функция распределения

Таким образом, значение функции $\hat{F}(x)$ в точке x равно относительной частоте элементов выборки, не превосходящих значение x.

Для каждого положительного x, $\hat{F}(x)$ — случайная величина со значением $\frac{\nu}{n}, \nu \in \{0, n\}$.



Генераторы псевдослучайных чисел

При проведении статистических модельных экспериментов необходимо получать выборки случайных чисел, распределенных в соответствии с каким-то распределением.

Современное математическое ПО снабжено генератором псевдослучайных равномерно распределенных чисел.

Для получения выборок, распределенных в соответствии с другими распределениями, необходимо использовать математические методы получения выборок.

Генераторы псевдослучайных чисел

Наиболее распространенным способом является метод обратного преобразования (преобразование Смирнова).

Пусть $F(x)$ является функцией произвольного распределения.

Покажем как, имея генератор выборки из стандартного непрерывного равномерного распределения, получить выборку из распределения, задаваемого функцией распределения $F(x)$.

Генераторы псевдослучайных чисел

Если функция $F: \mathbb{R} \to [0; 1]$ строго возрастает на всей области определения, то она имеет обратную функцию $F^{-1}: [0; 1] \to \mathbb{R}$.

Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n \sim U[0; 1]$ - выборка из стандартного непрерывного равномерного распределения.

Тогда $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $x_i = F^{-1}(u_i), i = 1,2, \ldots, n$ - выборка из интересующего нас распределения.

Пример:

Пусть требуется сгенерировать выборку из экспоненциального распределения с параметром $\lambda > 0$.
Функция этого распределения $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ строго возрастает, и её обратная функция имеет вид $F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - x)$
Таким образом, если $u_1, u_2, \dots, u_n$ — выборка из стандартного непрерывного равномерного распределения, то $x_1, x_2, \dots, x_n$, где

$$x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - u_i)$$

— искомая выборка из экспоненциального распределения.

Теоретические сведения

Несмотря на кажущуюся универсальность, данный алгоритм имеет серьёзные практические ограничения.

Даже если функция распределения строго возрастает, вычислить её обратную не всегда просто, особенно если она не задана в виде элементарной функции, как, например, в случае нормального распределения.

Для получения нормально распределенных случайных чисел используются другие алгоритмы, например, преобразование Бокса-Мюллера, Алгоритм Зиккурат.

ЗАДАНИЕ

Цель работы:

ознакомиться с основными выборочными характеристиками и точечными оценками параметров случайных величин; освоить процедуру получения выборок псевдослучайных чисел с заданными законами распределения и их использования в статистических модельных экспериментах при решении задач теории надежности.

Ход работы:

1. Построить графики функций распределения и функций плотности следующих распределений:
   - равномерного с произвольными значениями параметров;

ЗАДАНИЕ

- нормального с параметрами, заданными по варианту;
- экспоненциального с параметрами, заданными по варианту.

2. Определить для этих распределений теоретические значения
   - математического ожидания;
   - дисперсии;
   - среднеквадратичного отклонения.
3. Сгенерировать выборки случайных чисел объема $N, 5N, 50N$ для этих распределений, где N – число заданное по варианту.
4. Определить выборочные средние, выборочные дисперсии и среднеквадратичное отклонения (несмещенные) для всех выборок; сравнить полученные значения с теоретическими.

ЗАДАНИЕ

5. Построить эмпирические функции распределения для выборок объема $N,\quad 50N$, и сравнить их с теоретическими.
6. Определить значения числа элементов гистограммы для выборок объема $5N,\ 50N$ в соответствии с
   - правилом квадратного корня;
   - формулой Стёрджеса;
   - правилом Скотта;

и построить по одной гистограмме для каждого из распределений.

7. Поверх каждой из гистограмм построить масштабированные функции плотности соответствующих распределений.
8. Повторить пункты 1 и 2 для распределения F_3, заданного по варианту, выбрав его параметры таким образом, чтобы его математическое ожидания было равно T*.

* **Параметры $\boldsymbol{a, b, \alpha, \beta}$ не должны быть равны единице!**

ЗАДАНИЕ

9. Используя метод обратного преобразования, написать функцию в ПО Mathcad, реализующую получение выборки псевдослучайных чисел, распределенных в соответствии с распределением F_3.
10. Повторить пункты 3-7 для данного распределения.
11. … Часть 2…

ЗАДАНИЕ

8E81		N	EXP	NORM		F_3	T
			λ, 10^{-3}	μ	σ		
1	Акилбаева Адеми Бекенкызы	50	30	1	2	CWG	1400
2	Бабенко Юлия Анатольевна	57	5	2	2,5	ECRG	1700
3	Кадыров Рафаэль Альбертович	76	31	3	3	Kw-R	750
4	Маркер Виктор Андреевич	47	16	4	2,5	GCRG	1900
5	Мвила Ва Кунтобо Кен	66	22	5	2	GCRG	900
6	Новокрещенных Даниил Игоревич	44	14	6	1,5	EW	1550
7	Новоселов Константин Иванович	61	8	7	1	ECEG	1350
8	Петрунев Семен Евгеньевич	59	18	0	0,5	Kw-E	1600
9	Растрепин Дмитрий Евгеньевич	64	35	-1	0,5	Kw-R	150
10	Рынгач Илья Владиславович	63	11	-2	1	Kw-E	850
11	Тихонов Андрей Александрович	79	25	-3	1,5	Kw-E	1250
12	Тюленева Валерия Александровна	70	38	-4	2	Kw-R	1950
13	Устинов Иван Сергеевич	62	1	-5	2,5	GW	1800
14	Ханхатов Виктор Аюрович	74	10	-6	3	GCEG	1200
15	Широких Никита Михайлович	55	13	-7	3,5	GW	350
16	Юрков Максим Сергеевич	68	37	0	4	ECEG	250

ЗАДАНИЕ

8E82		N	EXP	NORM		F_3	T
			λ, 10^{-3}	μ	σ		
1	Арестов Александр Андреевич	65	9	0	2	GW	650
2	Барсукова Ангелина Анатольевна	69	17	-1	2,5	GCEG	300
3	Гарифуллин Зариф	45	29	-2	3	ECRG	1000
4	Го Цзыцзюнь	56	6	-3	2,5	EW	450
5	Гончарова Наталия Сергеевна	58	3	-4	2,5	CWG	1650
6	Гоп Сергей Сергеевич	43	32	-5	1,5	Kw-E	1750
7	Ковалёв Даниил Евгеньевич	51	2	-6	1	CWG	800
8	Кузьмина Полина Николаевна	60	28	-7	0,5	ECEG	1150
9	Мещеряков Роман Андреевич	53	23	1	0,5	CWG	1300
10	Нефедов Михаил Владиславович	42	15	2	1	GCRG	1450
11	Садиков Роман Евгеньевич	54	33	3	1,5	Kw-E	100
12	Стрекаловский Игорь Сергеевич	75	21	4	2	Kw-R	1500
13	Сушков Максим Петрович	49	27	5	2,5	EW	550
14	Тхан Куок Дат	72	26	6	3	Kw-R	950
15	Харжеев Никита Борисович	78	24	7	3,5	ECEG	1100
16	Хромов Игорь Владимирович	73	7	0	3	EW	700
17	Чан Тхань Хоа	77	19	8	4	GW	1050
18	Чипизубов Андрей Сергеевич	67	36	-8	4	GCEG	1850