

Детали мехатронных модулей и роботов, их конструирование,  
диагностика и надежность

Лабораторная работа №2  
Резервирование

Разработал: А.А. Ефремов

Томский политехнический университет, 2021

## Теоретические сведения

### Основное (последовательное) соединение

Говорят, что компоненты системы соединены последовательно, если для работоспособности системы требуется, чтобы все ее компоненты были работоспособными,

т.е. отказ любого из компонентов системы приводит к отказу системы в целом.

Для простоты расчетов обычно подразумевается, что все компоненты работают и отказывают независимо друг от друга.

Основное (последовательное) соединение

Пусть система состоит из двух элементов  $E_1$  и  $E_2$ , соединенных последовательно.

Обозначим через  $e_i$  событие, заключающееся в том, что  $i$ -й элемент ( $i = 1, 2$ ) работоспособен на интервале  $[0; t]$ , тогда

$$\Pr\{e_i\} = \Pr\{E_i \text{ работоспособен на } [0; t]\} = P_i(t),$$

где  $P_i(t)$  - функция ВБР  $i$ -го элемента.

Основное (последовательное) соединение

Поскольку последовательная система работоспособна тогда и только тогда, когда работоспособны все ее элементы, то вероятность того, что система работоспособна на интервале  $[0; t]$  (т.е. ВБР системы), равна

$$P_S(t) = \Pr\{e_1 \cap e_2\}.$$

Т.к. отказы элементов системы считаются независимыми событиями, то

$$P_S(t) = \Pr\{e_1 \cap e_2\} = \Pr\{e_1\} \cdot \Pr\{e_2\} = P_1(t) \cdot P_2(t).$$

Основное (последовательное) соединение

Обобщая полученное выражение на случай последовательной системы из  $n$  (независимых) элементов, можно записать

$$P_S(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t).$$

Поскольку любая ВБР принимает значения из интервала  $[0; 1]$ , произведение также будет находиться на этом интервале, причем

$$P_S(t) < \min_{i=1..n} P_i(t).$$

Основное (последовательное) соединение

Отсюда следует, что ВБР последовательной системы меньше, чем ВБР ее наименее надежного элемента.

Обозначим через  $h_i(t)$  интенсивность отказов  $i$ -го элемента. Зная, что

$$P(t) = e^{-\int_0^t h(\tau) d\tau},$$

получим

$$P_S(t) = \prod_{i=1}^n e^{-\int_0^t h_i(\tau) d\tau} = e^{-\int_0^t [\sum_{i=1}^n h_i(\tau)] d\tau}.$$

Основное (последовательное) соединение

$$P_S(t) = \prod_{i=1}^n e^{-\int_0^t h_i(\tau) d\tau} = e^{-\int_0^t [\sum_{i=1}^n h_i(\tau)] d\tau}.$$

Обозначив  $h_S(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t)$ , мы можем сделать следующий вывод:

Интенсивность отказов системы, состоящей из  $n$  независимых компонентов, соединенных последовательно, равна сумме интенсивностей отказов компонентов.

## Теоретические сведения

Если надежность последовательной системы недостаточна, и мы не можем повысить ее, заменив компоненты на более надежные, становятся необходимы изменения на структурном уровне.

Говорят, что конфигурация системы является избыточной, если отказ компонента системы не обязательно приводит к отказу системы.

Инструментом введения избыточности является резервирование.

Классификация видов резервирования – см. литературу.

## Теоретические сведения

Если надежность последовательной системы недостаточна, и мы не можем повысить ее, заменив компоненты на более надежные, становятся необходимы изменения на структурном уровне.

Говорят, что конфигурация системы является избыточной, если отказ компонента системы не обязательно приводит к отказу системы.

Инструментом введения избыточности является резервирование.

Классификация видов резервирования – см. литературу.

### Параллельное резервирование

Говорят, что компоненты системы соединены *параллельно*, если система работоспособна до тех пор, пока работоспособен хотя бы один из ее компонентов,

т.е. отказ системы наступает при отказе ее последнего работающего компонента.

В зависимости от того, в каком режиме находятся резервные компоненты параллельной системы, различают:

- «горячее» (нагруженное) резервирование;
- «холодное» (ненагруженное) резервирование;
- «теплое» (недогруженное) резервирование.

## Теоретические сведения

### Параллельное резервирование

В случае горячего резервирования резервные элементы находятся в тех же рабочих условиях и несут ту же нагрузку, что и «основной» элемент.

Элементы, находящиеся в холодном резерве, являются ненагруженными до момента переключения в рабочий режим. Предполагается, что резервные элементы не отказывают из состояния холодного резерва.

Для элементов, находящихся в теплом резерве, характерен облегченный режим работы. Находясь в теплом резерве, элементы могут отказаться, но интенсивность отказов в этом случае меньше, чем для элементов в рабочем режиме.

Параллельное резервирование

В дальнейшем, если особо не оговорено, под параллельным резервированием будем понимать горячее резервирование.

Пусть система состоит из двух элементов  $E_1$  и  $E_2$ , соединенных параллельно.

Обозначим через  $\bar{e}_i$  событие, заключающееся в том, что  $i$ -й элемент ( $i = 1, 2$ ) отказал на интервале  $[0; t]$ , тогда

$$\Pr\{\bar{e}_i\} = \Pr\{E_i \text{ отказал на } [0; t]\} = F_i(t),$$

где  $F_i(t) = 1 - P_i(t)$ - функция вероятности отказа  $i$ -го элемента.

Параллельное резервирование

Поскольку параллельная система отказывает тогда и только тогда, когда отказывают все ее элементы, то вероятность того, что система отказала на интервале  $[0; t]$  (т.е. вероятность отказа системы), равна

$$F_S(t) = \Pr\{\bar{e}_1 \cap \bar{e}_2\}.$$

Т.к. отказы элементов системы считаются независимыми событиями, то

$$F_S(t) = \Pr\{\bar{e}_1 \cap \bar{e}_2\} = \Pr\{\bar{e}_1\} \cdot \Pr\{\bar{e}_2\} = F_1(t) \cdot F_2(t).$$

Параллельное резервирование

Обобщая полученное выражение на случай параллельной системы из  $n$  (независимых) элементов, можно записать

$$F_S(t) = \prod_{i=1}^n F_i(t).$$

Переходя к выражению для ВБР, получим

$$P_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P_i(t)].$$

Параллельное резервирование

Поскольку любая функция вероятности отказа принимает значения из интервала  $[0; 1]$ , произведение также будет находиться на этом интервале, причем

$$F_S(t) < \min_{i=1..n} F_i(t).$$

Переходя к выражению для ВБР, получим

$$P_S(t) > \max_{i=1..n} P_i(t).$$

Отсюда следует, что ВБР параллельной системы больше, чем ВБР ее наиболее надежного элемента.

Параллельное резервирование

Расчет надежности систем с холодным и теплым резервированием в общем случае затруднителен.

Для параллельной системы, состоящей из одного основного и одного резервного элемента, ВБР можно найти по формуле:

$$P_S(t) = P_1(t) + \int_0^t f_1(x) \cdot P_{2;R}(x) \cdot \frac{P_{2;A}(t_e + t - x)}{P_{2;A}(t_e)} dx$$

где  $P_1, f_1$  - ВБР и частота отказов основного элемента;

$P_{2;R}, P_{2;A}$  - ВБР резервного элемента в состоянии резерва (R) и в рабочем режиме (A).

Параллельное резервирование

$$P_S(t) = P_1(t) + \int_0^t f_1(x) \cdot P_{2;R}(x) \cdot \frac{P_{2;A}(t_e + t - x)}{P_{2;A}(t_e)} dx$$

В данной формуле  $t_e$  - эквивалентное время работы резервного элемента к моменту его переключения в рабочий режим. Его значение можно определить, решив уравнение

$$P_{2;R}(x) = P_{2;A}(t_e)$$

относительно  $t_e$ .

Для горячего резерва  $t_e = x$ ; для холодного -  $t_e = 0$ .

Параллельное резервирование

Для параллельных систем, состоящих из  $m + 1$  идентичных компонентов, чье время до отказа распределено в соответствии с экспоненциальным распределением, существуют формулы расчета ВБР и среднего времени до отказа.

В случае параллельной системы, состоящей из одного основного и  $m$  резервных компонентов в холодном резерве:

$$P_S(t) = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^m \frac{(\lambda t)^i}{i!}; \quad T_{cp} = \frac{m + 1}{\lambda};$$

где  $\lambda$  – интенсивность отказов отдельного компонента.

## Теоретические сведения

### Параллельное резервирование

В случае параллельной системы, состоящей из одного основного и  $m$  резервных компонентов в теплом резерве:

$$P_S(t) = e^{-\lambda t} \left( 1 + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{i!} (1 - e^{-\lambda_R t})^i \right); \quad T_{cp} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^m \frac{1}{1 + ik};$$

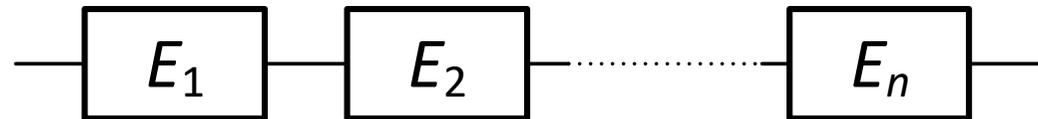
где  $\lambda_R$  – интенсивность отказов компонента из состояния резерва;

$$a_i = \prod_{j=0}^{i-1} \left( j + \frac{1}{k} \right);$$

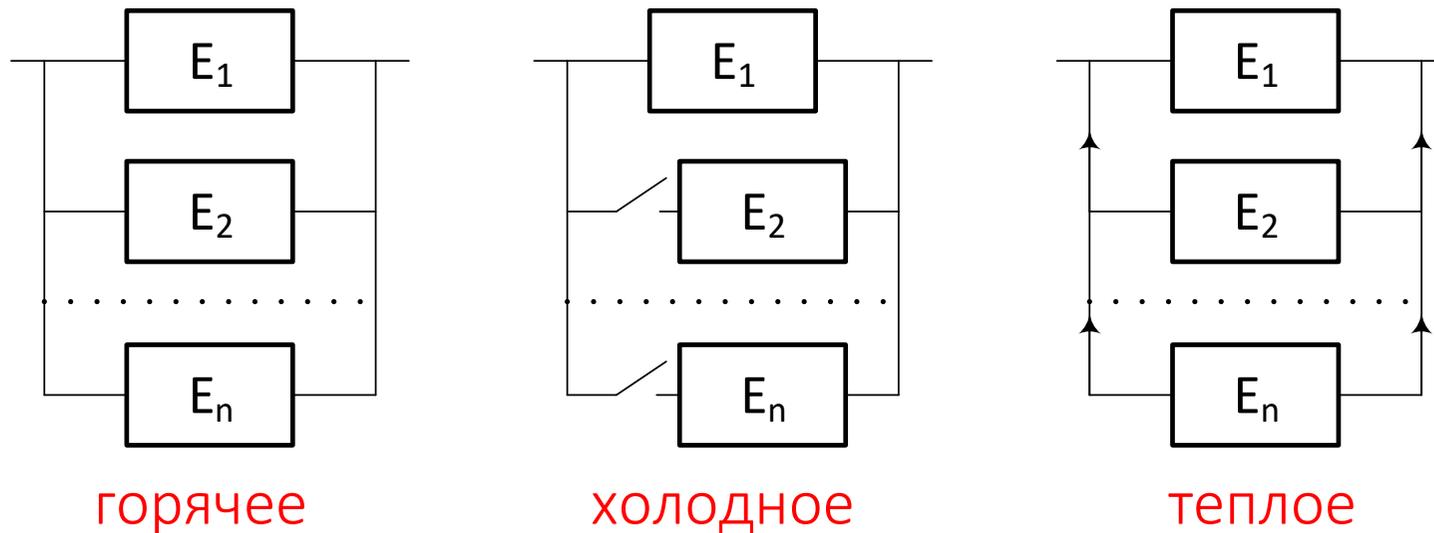
$$k = \frac{\lambda_R}{\lambda}.$$

Блок-схемы надежности

Последовательное соединение:

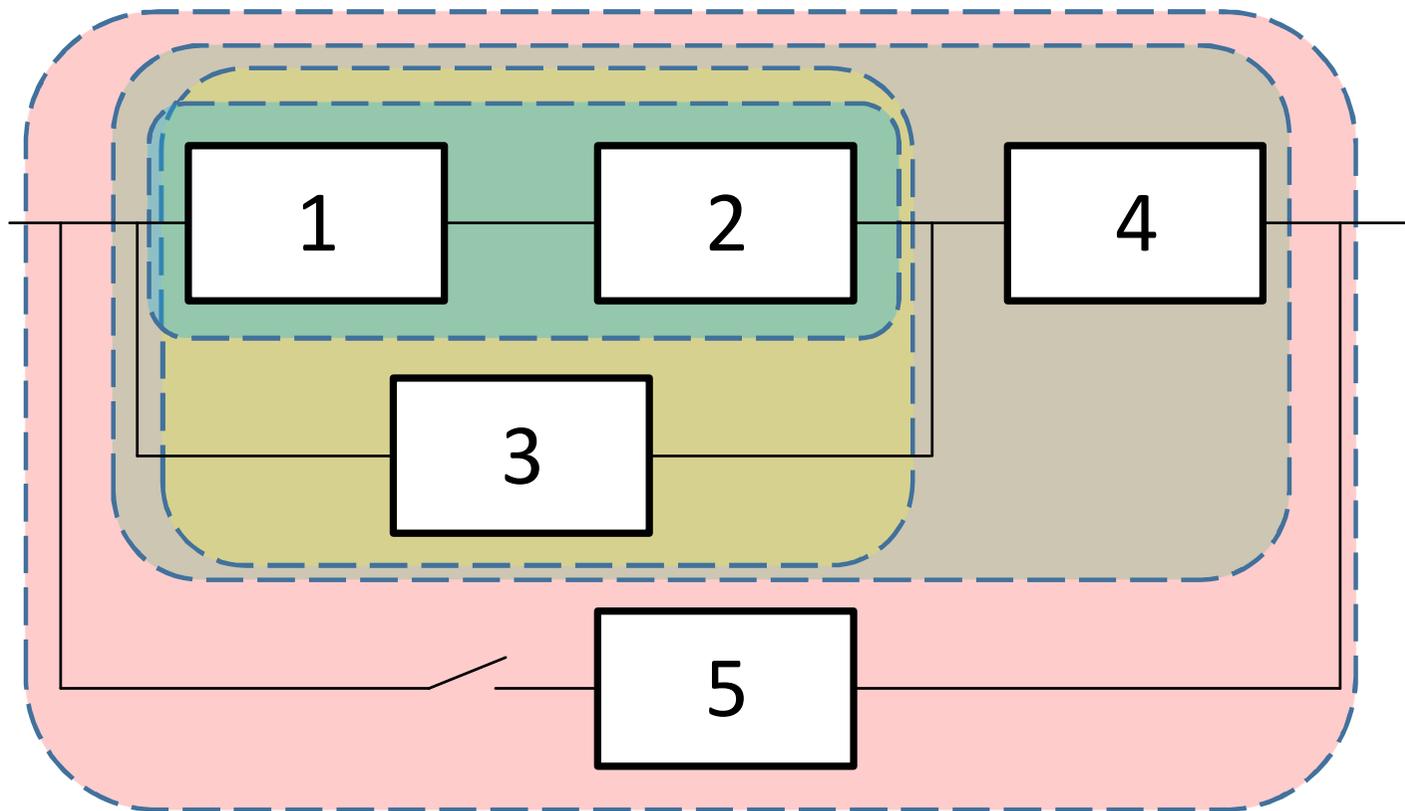


Параллельное соединение:



Блок-схемы надежности

Последовательно-параллельное соединение:



## Рекомендованная литература

Острейковский, В. А. Теория надежности : Учеб, для вузов / В. А. Острейковский. — М. : Высш. шк., 2003. - 463 с. // URL: <https://znanium.com/catalog/product/487996>

Сапожников, В. В. Основы теории надежности и технической диагностики : учебник / В. В. Сапожников, В. В. Сапожников, Д. В. Ефанов. — СПб : Лань, 2019. — 588 с. // Лань : ЭБС. — URL: <https://e.lanbook.com/book/115495>

## ЗАДАНИЕ

### Цель работы:

освоить процедуру расчета показателей надежности последовательно-параллельных систем с различными видами резервирования.

### Ход работы:

1. Для последовательной системы трех компонентов (Табл. 1, Приложение 1)
  - построить графики функций ВБР и интенсивности отказов для каждого компонента и для системы в целом;
  - определить значения этих функций в момент времени  $T$ ;
  - определить значение среднего времени безотказной работы каждого компонента и системы в целом.

## ЗАДАНИЕ

2. Определив наименее и наиболее надежные компоненты последовательной системы, выполните горячее резервирование поочередно наименее и наиболее надежного компонента
- одним идентичным резервным компонентом;
  - двумя идентичными резервными компонентами.

Для каждого случая определите значение ВБР в момент времени  $T$  и среднее время до отказа системы. Сделайте вывод.

## ЗАДАНИЕ

3. Определите значение ВБР в момент времени  $T$  и среднее время до отказа системы для общего и отдельного горячего резервирования (дублирования) системы. Сделайте вывод.
4. Выполните холодное резервирование (дублирование) наименее надежного компонента последовательной системы идентичным компонентом. Определите значение ВБР в момент времени  $T$  и среднее время до отказа системы. Сравните результат с результатами горячего резервирования.
5. Выполните теплое резервирование компонента E1
  - одним идентичным резервным компонентом;
  - двумя идентичными резервными компонентами,при условии, что интенсивность отказов компонентов в состоянии резерва в 5 раз меньше, чем в рабочем режиме.

## ЗАДАНИЕ

6. Определите значение ВБР в момент времени  $T$  и среднее время до отказа системы. Сравните результат с результатами горячего резервирования.

## ЗАДАНИЕ

### Таблица 1

8E81		T	E1	E2	E3		
				Weibull			
1	Акилбаева Адеми Бекенкызы	900	Exp	$\beta_W=0,4$	CWG	$\alpha = 0,8$	$\beta = 1,3$
2	Бабенко Юлия Анатольевна	1100	Exp	$\beta_W=0,8$	ECEG	$\alpha = 0,8$	$a = 1,1$
3	Кадыров Рафаэль Альбертович	500	Exp	$\beta_W=0,85$	Kw-R	$a = 0,2$	$b = 1,15$
4	Маркер Виктор Андреевич	2500	Exp	$\beta_W=3,2$	GCRG	$\alpha = 0,35$	$b = 2,8$
5	Мвила Ва Кунтобо Кен	500	Exp	$\beta_W=0,5$	GCRG	$\alpha = 0,9$	$b = 4,5$
6	Новокрещенных Даниил Игоревич	400	Exp	$\beta_W=0,35$	EW	$a = 1,25$	$\beta = 0,5$
7	Новоселов Константин Иванович	1400	Exp	$\beta_W=1,15$	ECRG	$\alpha = 0,8$	$a = 2,6$
8	Петрунев Семен Евгеньевич	2200	Exp	$\beta_W=1,1$	Kw-E	$a = 2,2$	$b = 1,9$
9	Растрепин Дмитрий Евгеньевич	2200	Exp	$\beta_W=1,85$	Kw-R	$a = 1,2$	$b = 0,5$
10	Рынгач Илья Владиславович	300	Exp	$\beta_W=0,6$	Kw-E	$a = 1,25$	$b = 0,45$
11	Тихонов Андрей Александрович	850	Exp	$\beta_W=1,2$	Kw-E	$a = 1,5$	$b = 1,6$
12	Тюленева Валерия Александровна	250	Exp	$\beta_W=0,3$	Kw-R	$a = 0,6$	$b = 1,5$
13	Устинов Иван Сергеевич	400	Exp	$\beta_W=1,35$	GW	$b = 0,9$	$\beta = 1,2$
14	Ханхатов Виктор Аюрович	700	Exp	$\beta_W=0,2$	GCEG	$\alpha = 0,3$	$b = 1,8$
15	Широких Никита Михайлович	1300	Exp	$\beta_W=0,7$	GW	$b = 2,1$	$\beta = 0,2$
16	Юрков Максим Сергеевич	100	Exp	$\beta_W=0,35$	ECRG	$\alpha = 0,4$	$a = 0,4$

**ЗАДАНИЕ**

Таблица 1

8E82		T	E1	E2	E3		
				Weibull			
1	Арестов Александр Андреевич	550	Exp	$\beta_W=0,9$	GW	$b = 2$	$\beta = 1,2$
2	Барсукова Ангелина Анатольевна	350	Exp	$\beta_W=1,4$	GCEG	$\alpha = 0,7$	$b = 1,6$
3	Гарифуллин Зариф	600	Exp	$\beta_W=1,8$	ECEG	$a = 0,3$	$\alpha = 0,2$
4	Го Цзыцзюнь	1400	Exp	$\beta_W=1,3$	EW	$a = 1,2$	$\beta = 1,5$
5	Гончарова Наталия Сергеевна	500	Exp	$\beta_W=1,2$	CWG	$\alpha = 0,7$	$\beta = 0,8$
6	Гоп Сергей Сергеевич	1600	Exp	$\beta_W=0,55$	Kw-E	$a = 0,6$	$b = 0,3$
7	Ковалёв Даниил Евгеньевич	900	Exp	$\beta_W=0,3$	CWG	$\alpha = 0,2$	$\beta = 0,5$
8	Кузьмина Полина Николаевна	2000	Exp	$\beta_W=1,5$	ECRG	$a = 1,3$	$\alpha = 0,85$
9	Мещеряков Роман Андреевич	200	Exp	$\beta_W=0,3$	CWG	$\alpha = 0,7$	$\beta = 0,4$
10	Нефедов Михаил Владиславович	700	Exp	$\beta_W=1,25$	GCRG	$\alpha = 0,5$	$b = 1,25$
11	Садиков Роман Евгеньевич	250	Exp	$\beta_W=0,8$	Kw-E	$a = 0,5$	$b = 0,4$
12	Стрекаловский Игорь Сергеевич	2100	Exp	$\beta_W=1,1$	Kw-R	$a = 1,2$	$b = 0,2$
13	Сушков Максим Петрович	800	Exp	$\beta_W=0,65$	EW	$a = 0,8$	$\beta = 0,4$
14	Тхан Куок Дат	650	Exp	$\beta_W=1,3$	Kw-R	$a = 2$	$b = 1,8$
15	Харжеев Никита Борисович	800	Exp	$\beta_W=0,55$	ECRG	$a = 0,2$	$\alpha = 0,15$
16	Хромов Игорь Владимирович	200	Exp	$\beta_W=0,7$	EW	$a = 3,7$	$\beta = 0,2$
17	Чан Тхань Хоа	1250	Exp	$\beta_W=1,7$	GW	$b = 0,7$	$\beta = 1,4$
18	Чипизубов Андрей Сергеевич	500	Exp	$\beta_W=0,7$	GCEG	$\alpha = 0,4$	$b = 0,6$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

1. Для элемента E1 значение параметра  $\lambda$  выбрать как  $\frac{N}{10000}$  час<sup>-1</sup>, где  $N$  – номер варианта в соответствии с алфавитным списком группы.
2. Для элемента E2 значение параметра  $\eta$  выбрать как  $1000 \cdot N$  час; параметр  $\beta$  выбрать из Табл. 1.
3. Для модели надежности элемента E3 значение параметра  $\gamma$  выбрать как  $\frac{N}{5000}$  час<sup>-1</sup>, а остальные параметры выбрать из Табл. 1.

## ЗАДАНИЕ

### Таблица 2

Распределение**	Функция распределения (вероятность отказа)	Параметры
Kw-E	$F(x) = 1 - (1 - (1 - e^{-\gamma x})^a)^b$	$a, b, \gamma > 0$
Kw-R	$F(x) = 1 - \left(1 - (1 - e^{-(\gamma x)^2})^a\right)^b$	$a, b, \gamma > 0$
GCEG	$F(x) = 1 - \left(\frac{e^{-\gamma x}}{\alpha + (1 - \alpha)e^{-\gamma x}}\right)^b$	$0 < \alpha < 1$ $b, \gamma > 0$
GCRG	$F(x) = 1 - \left(\frac{e^{-(\gamma x)^2}}{\alpha + (1 - \alpha)e^{-(\gamma x)^2}}\right)^b$	$0 < \alpha < 1$ $b, \gamma > 0$
GW	$F(x) = 1 - (e^{-(\gamma x)^\beta})^b$	$\beta, \gamma, b > 0$
ECRG	$F(x) = \left(\frac{\alpha(1 - e^{-(\gamma x)^2})}{\alpha + (1 - \alpha)e^{-(\gamma x)^2}}\right)^a$	$0 < \alpha < 1$ $a, \gamma > 0$
ECEG	$F(x) = \left(\frac{\alpha(1 - e^{-\gamma x})}{\alpha + (1 - \alpha)e^{-\gamma x}}\right)^a$	$0 < \alpha < 1$ $a, \gamma > 0$

## ЗАДАНИЕ

Таблица 2 (продолжение)

Распределение**	Функция распределения (вероятность отказа)	Параметры
EW	$F(x) = \left(1 - e^{-(\gamma x)^\beta}\right)^\alpha$	$a, \beta, \gamma > 0$
CWG	$F(x) = \frac{\alpha \left(1 - e^{-(\gamma x)^\beta}\right)}{\alpha + (1 - \alpha)e^{-(\gamma x)^\beta}}$	$0 < \alpha < 1$ $\beta, \gamma > 0$
CEG	$F(x) = 1 - \frac{e^{-\gamma x}}{\alpha + (1 - \alpha)e^{-\gamma x}}$	$0 < \alpha < 1$ $\gamma > 0$
CRG	$F(x) = 1 - \frac{e^{-(\gamma x)^2}}{\alpha + (1 - \alpha)e^{-(\gamma x)^2}}$	$0 < \alpha < 1$ $\gamma > 0$

\*\*

**Трехпараметрические распределения:**

- Kw-E – Kumaraswamy-Exponential Distribution
- Kw-R – Kumaraswamy-Rayleigh Distribution
- GCEG - Generalized Complementary Exponential-Geometric Distribution
- GCRG - Generalized Complementary Rayleigh-Geometric Distribution
- GW – Generalized Weibull Distribution
- ECEG - Exponentiated Complementary Exponential-Geometric Distribution
- ECRG - Exponentiated Complementary Rayleigh-Geometric Distribution
- EW – Exponentiated Weibull Distribution
- CWG - Complementary Weibull-Geometric Distribution