



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Лекции: ст. преп. Ефремов
Александр Александрович

Томск, 2018



ЛЕКЦИЯ 1

Основные понятия СМО М/М/1

Основные понятия ТМО: Определения

Теория массового обслуживания (ТМО) – прикладная математическая дисциплина, занимающаяся исследованием показателей производительности систем, предназначенных для обработки поступающих в них заявок на обслуживание (*запросов, требований*).



Агнер Эрланг
1878-1929

Основные понятия ТМО : Определения

Заявки должны быть обслужены системой (**СМО**) на некотором **приборе** (*устройстве, сервере*) или приборах.

При этом *времена поступления* заявок в систему и *их обслуживания* в общем случае являются **случайными величинами.**

Основные понятия ТМО : Определения

У всех СМО можно выделить общие компоненты:

- ***входящий поток заявок*** (процесс поступления заявок в СМО);
- ***структура системы*** (количество и типы приборов обслуживания, а также наличие, расположение и емкость накопителей (*очерей*));
- ***времена обслуживания заявок*** на приборах;
- ***дисциплина обслуживания*** (процесс распределения заявок между приборами, формирования очередей, выбора заявок из очереди).

Основные понятия ТМО : Входящий поток

Обычно предполагают, что входящий поток является пуассоновским, т.е. обладает свойствами

- **стационарности** (вероятность появления k событий на любом промежутке времени зависит только от числа k и от длительности t промежутка и не зависит от начала его отсчёта);
- **ординарности** (вероятность одновременного появления двух и более событий равна нулю);
- **отсутствия последствий** (вероятность появления k событий на любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка).

Основные понятия ТМО : Входящий поток

Важным свойством пуассоновского (простейшего) потока событий является то, что время между двумя последовательными событиями есть случайная величина, распределенная по ***экспоненциальному закону***:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

где $\lambda > 0$ – интенсивность потока.

Системы с более общими потоками практически не изучены; для них, в лучшем случае, получены лишь частные результаты.

Основные понятия ТМО : Структура СМО

Для задания структуры СМО необходимо перечислить все обслуживающие приборы, имеющиеся в системе, и указать, заявки каких типов может обслуживать каждый прибор.

При этом отдельный прибор может обслуживать заявки нескольких типов и, наоборот, заявки одного типа могут обслуживаться несколькими приборами.

Основные понятия ТМО : Структура СМО

В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда в СМО имеется один или несколько одинаковых приборов и каждая заявка может обслуживаться на любом из них.

Системы такого типа называются **однолинейными** (в случае одного прибора) или **многолинейными** **полнодоступными** (при нескольких приборах).

Кроме того, будем предполагать, что после завершения обслуживания заявка покидает СМО и больше в нее не возвращается, т.е. система является **однофазной**.

Основные понятия ТМО : Структура СМО

В СМО могут быть предусмотрены **накопители** различной емкости (**очереди**), позволяющие заявкам, заставшим в момент поступления все приборы занятыми, ожидать начала обслуживания.

- Если *емкость накопителя бесконечна*, то говорят о **системах бесконечной емкости** (или **системах с ожиданием**).
- Если *накопители отсутствуют*, то говорят о **системах с потерями**.
- При *ограниченной емкости накопителя* говорят о **системах с ожиданием и потерями**.

Основные понятия ТМО : Время обслуживания

Время обслуживания заявок обычно рассматривается как **случайная величина**, распределенная по некоторому закону, и независимая от протекающих в СМО процессов.

Если в СМО поступают заявки нескольких типов, то распределение времени обслуживания *может зависеть от типа заявки*.

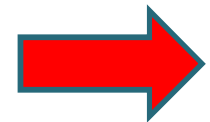
Также, в реальных СМО могут существовать систематические изменения времен обслуживания с течением календарного времени.

Основные понятия ТМО : Дисциплина

Дисциплина обслуживания заключается в правиле постановки заявок в очередь и порядке их выбора из очереди на обслуживание, а также в распределении заявок по приборам.

В основном мы будем предполагать, что в системах реализована естественная дисциплина обслуживания заявок в порядке поступления – **FCFS (first come, first served)**.

Тем не менее, в СМО могут быть использованы и более сложные дисциплины обслуживания:



Основные понятия ТМО : Дисциплина

- Инверсионный порядок обслуживания – **LCFS (last come, first served)** – при котором первой обслуживается заявка, пришедшая в систему последней;
- Случайный выбор на обслуживание – **SIRO (service in random order)** – когда при наличии в очереди n заявок на прибор с вероятностью $1/n$ поступает любая из них;
- Обслуживание первой заявки с минимальным остаточным временем обслуживания – **SRPT (shortest remaining processing time)**;
- Обслуживание первой заявки с максимальным остаточным временем обслуживания – **LRPT (longest remaining processing time)**;
- Обслуживание в режиме разделения времени – **RR (round-robin)** – вся длительность обслуживания разбивается на кванты, каждая из заявок в очереди обслуживается в течении кванта времени, после чего повторно ставится в очередь на дообслуживание, либо покидает СМО (если обслужилась до конца);
- и другие...

Основные понятия ТМО : Дисциплина

Особый класс СМО представляют собой ***приоритетные системы***: поступающие заявки имеют разный приоритет обслуживания.

Различают два важных приоритетных правила:

- ***Относительный приоритет*** – поступившая в СМО заявка с высоким приоритетом занимает первое место в очереди.
- ***Абсолютный приоритет*** – при поступлении заявки с высоким приоритетом прерывается обслуживание заявки с более низким приоритетом (если такая имеется). При этом заявки, вытесненные с сервера, могут *покинуть СМО, встать в очередь на дообслуживание или на повторное обслуживание.*

Основные понятия ТМО : Дисциплина

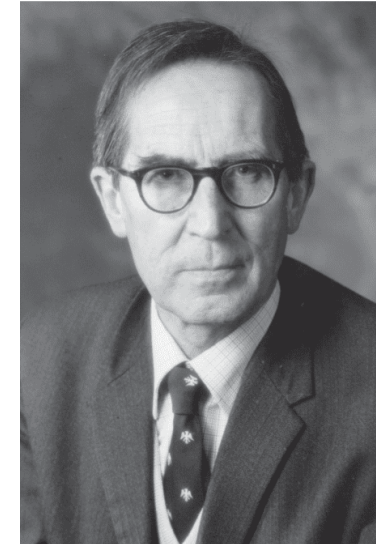
К дисциплинам обслуживания следует отнести и такие факторы, как

- **разогрев прибора** перед началом обслуживания очередной заявки;
- **переключение прибора** на обслуживание заявки другого типа;
- обслуживание заявок **ненадежным прибором**;
- **отключение прибора** на некоторое время после опустошения СМО или после окончания обслуживания определенного числа заявок.

Также, может быть ограничено **время пребывания** заявки в системе или **время ожидания** начала обслуживания.

Основные понятия ТМО : Классификация Кендалла

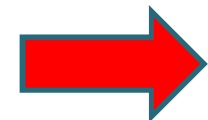
Поскольку класс существующих СМО весьма разнообразен, в 1953 г. Д.Кендалл предложил классификацию простейших однофазных систем, что позволило не описывать каждый раз основные компоненты СМО.



Дэвид Кендалл
1918-2007

Классификация (нотация) Кендалла в общем случае состоит из пяти позиций:

$X/Y/s/q/D$

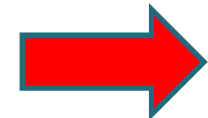


Основные понятия ТМО : Классификация Кендалла

X/Y/s/q/D

Здесь X характеризует входящий поток заявок, а Y – распределение времени обслуживания. Приняты следующие обозначения:

- M – пуассоновский (входной поток) или экспоненциальное время обслуживания;
- E_k – распределение Эрланга k -го порядка;
- HM – гиперэкспоненциальное распределение;
- HE – гиперэрланговское распределение;
- PH – распределение фазового типа;
- G – произвольное распределение;
- D – детерминированное время (вырожденное распределение).



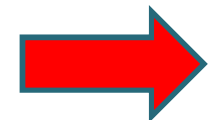
Основные понятия ТМО : Классификация Кендалла

$X/Y/s/q/D$

Здесь s обозначает число обслуживающих приборов (серверов) в СМО, q – максимальное число мест для ожидания (размер очереди), а D – дисциплину обслуживания.

Если емкость накопителя бесконечна, вместо q ставят знак ∞ или вообще опускают эту позицию.

Вместо D ставят описание дисциплин обслуживания, отличных от FCFS (сама дисциплина FCFS не обозначается, по умолчанию).



Основные понятия ТМО : Классификация Кендалла

Примеры:

M/M/1 (или $M/M/1/\infty$) – СМО с пуассоновским входным потоком, экспоненциально распределенным временем обслуживания, с одним сервером и бесконечной очередью. Дисциплина обслуживания FCFS.

D/G/2/5 – СМО с вырожденным входным потоком, произвольным распределением времени обслуживания, с двумя серверами и пятью местами для ожидания. Дисциплина обслуживания FCFS.

M/PH/1/SIRO – СМО с пуассоновским входным потоком, фазовым распределением времени обслуживания, с одним сервером и бесконечной очередью. Дисциплина обслуживания SIRO (в случайном порядке).

Основные понятия ТМО: Характеристики СМО

Для повышения эффективности функционирования СМО необходимо уметь рассчитывать их характеристики, связанные с

- наличием очередей,
- ожиданием начала обслуживания,
- простоем приборов и т.п.

При этом различают **нестационарные** характеристики СМО (для произвольного момента времени) и **стационарные** (для установившегося режима).

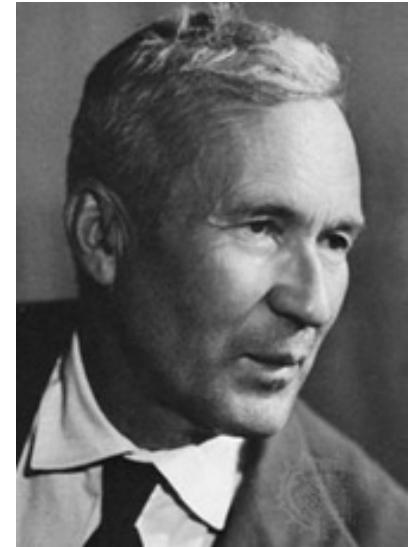
Основные понятия ТМО: Характеристики СМО

Зачастую интерес представляют следующие характеристики:

- вероятность застать СМО в свободном состоянии;
- вероятность потери заявки;
- (средняя) длина очереди;
- (среднее) число заявок в системе;
- (среднее) время ожидания начала обслуживания;
- (среднее) время пребывания заявки в СМО.

Основные понятия ТМО: Граф состояний

При решении задач ТМО полезным инструментом является граф состояний и переходов системы, и описывающая его система дифференциальных уравнений Колмогорова.



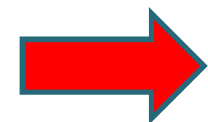
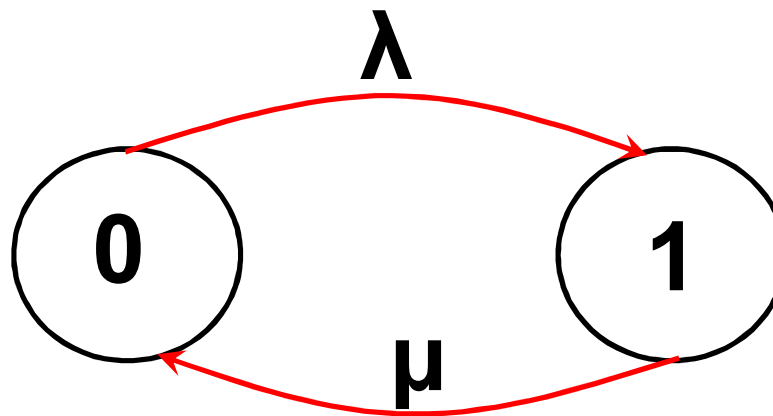
Андрей Николаевич
Колмогоров
1903-1987

Рассмотрим некую систему, способную находиться лишь в двух состояниях. При этом в каждом из них система проводит некоторое случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметрами λ и μ .

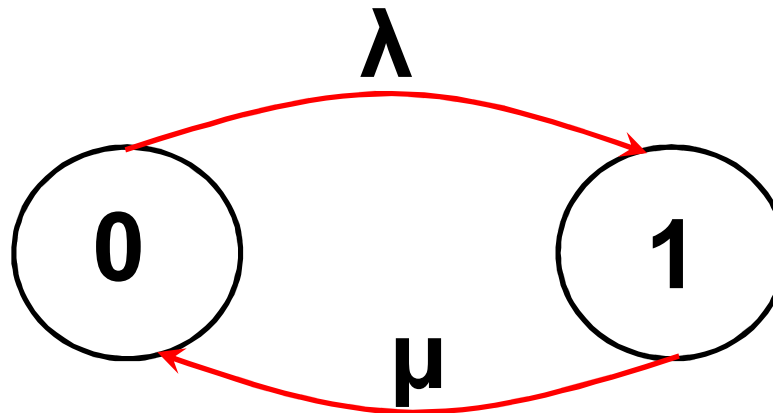


Основные понятия ТМО: Граф состояний

В этом случае функционирование системы возможно представить следующим графом состояний и переходов:



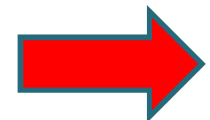
Основные понятия ТМО: Граф состояний



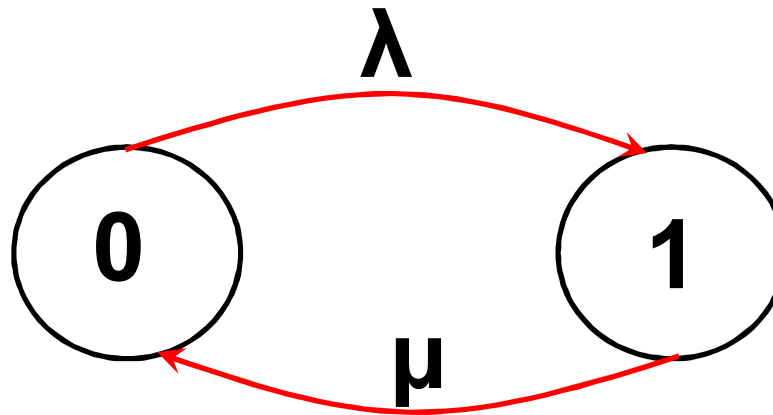
Вероятности пребывания системы в каждом состоянии можно записать следующим образом:

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$

$$P'_1(t) = \lambda P_0(t) - \mu P_1(t).$$



Основные понятия ТМО: Граф состояний



В стационарном (установившемся) режиме уравнения Колмогорова примут вид:

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1;$$

$$0 = \lambda P_0 - \mu P_1;$$

$$1 = P_0 + P_1.$$

Система М/М/1

В соответствии с классификацией Кендалла система М/М/1 представляет собой однолинейную СМО с накопителем неограниченной емкости.

В СМО поступает пуассоновский поток с интенсивностью λ .

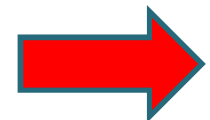
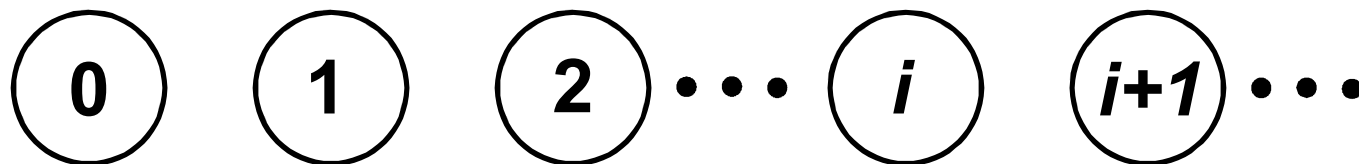
Времена обслуживания заявок являются независимыми случайными величинами, распределенными экспоненциально с параметром μ .

Обозначим через $v(t)$ число заявок в системе в момент времени t .

Множество X состояний процесса $\{v(t), t > 0\}$ имеет вид:

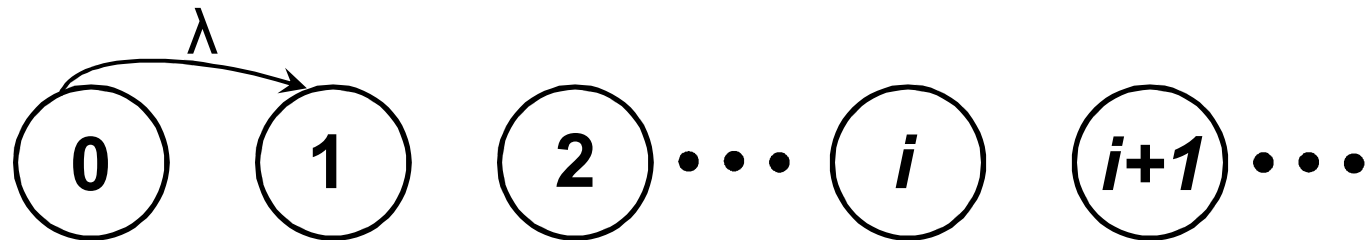
$$X = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Будем предполагать, что для всех СМО $v(0)=0$.

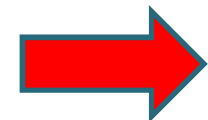
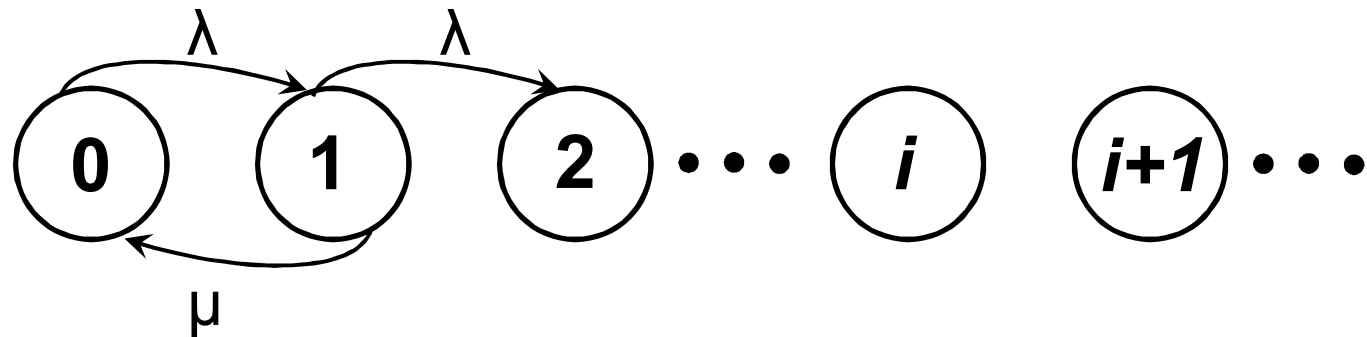


Система М/М/1

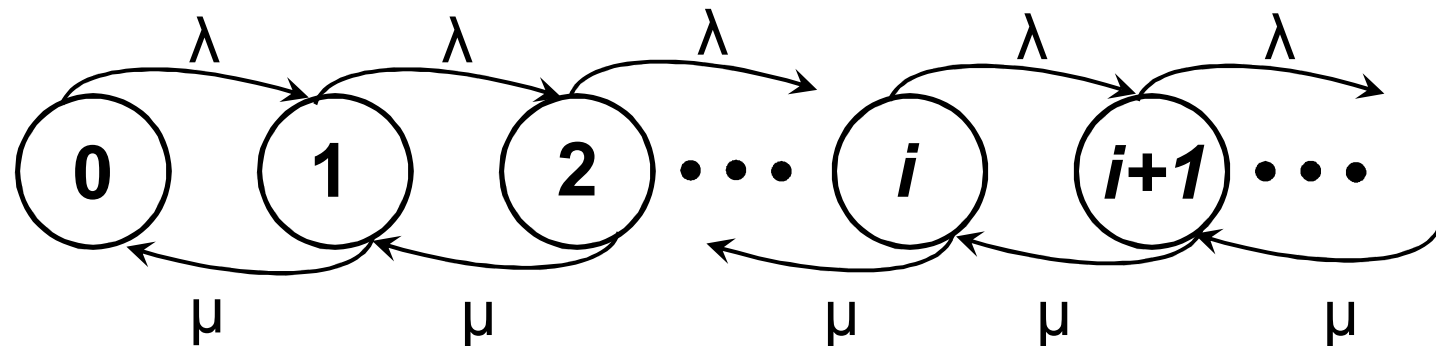
Из состояния **0** можно перейти лишь в состояние **1** в силу свойства ординарности входного потока (поступление новой заявки). Интенсивность этого перехода равна λ .



Из состояния **1** можно перейти в **2** с интенсивностью λ , либо в **0** с интенсивностью μ .

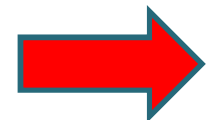


Продолжая аналогично:

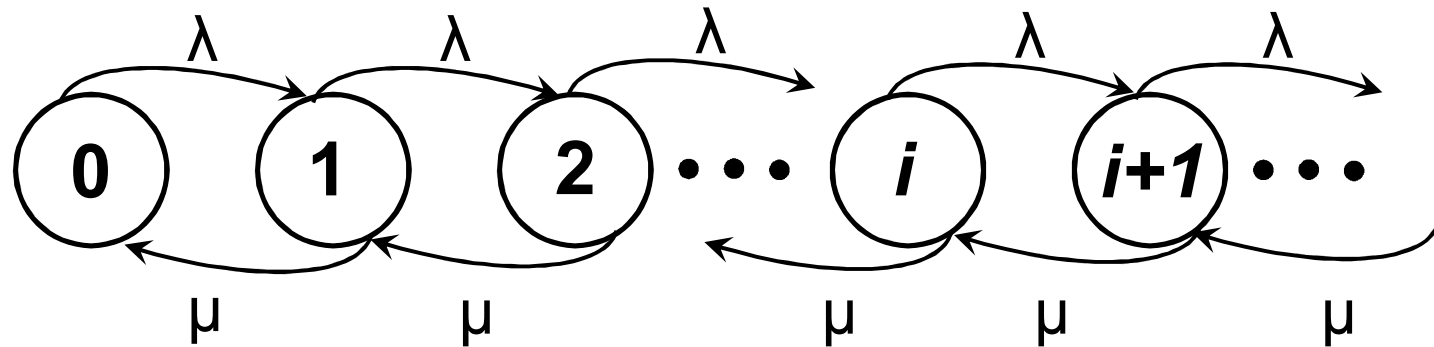


Получившийся бесконечный цепной граф является графом состояний и переходов СМО М/М/1.

Запишем систему уравнений Колмогорова



Система М/М/1



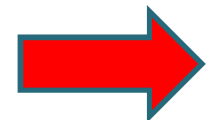
$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$

$$P'_1(t) = \lambda P_0(t) - (\lambda + \mu)P_1(t) + \mu P_2(t);$$

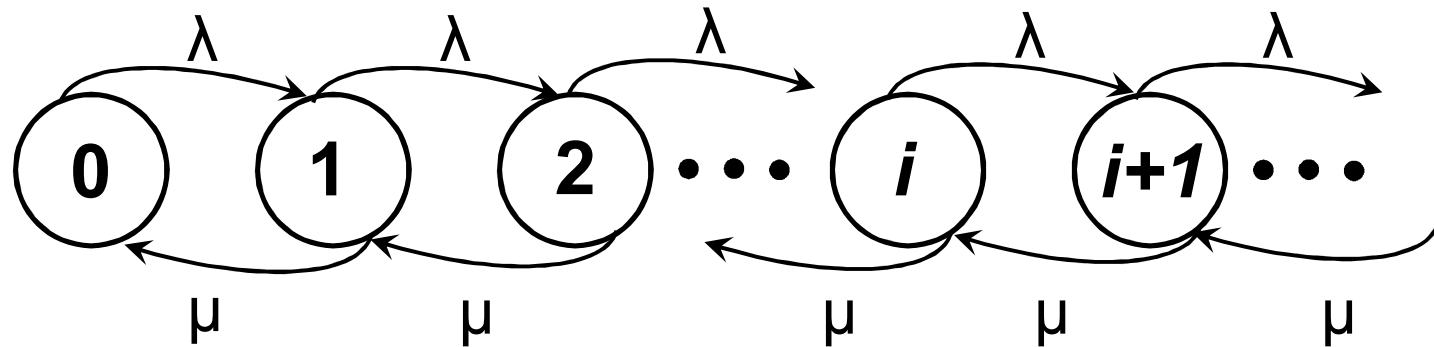
...

$$P'_i(t) = \lambda P_{i-1}(t) - (\lambda + \mu)P_i(t) + \mu P_{i+1}(t);$$

...



Система М/М/1



Запишем компактнее:

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$

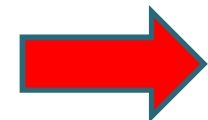
$$P'_i(t) = \lambda P_{i-1}(t) - (\lambda + \mu)P_i(t) + \mu P_{i+1}(t), \quad i \geq 1.$$

В стационарном режиме:

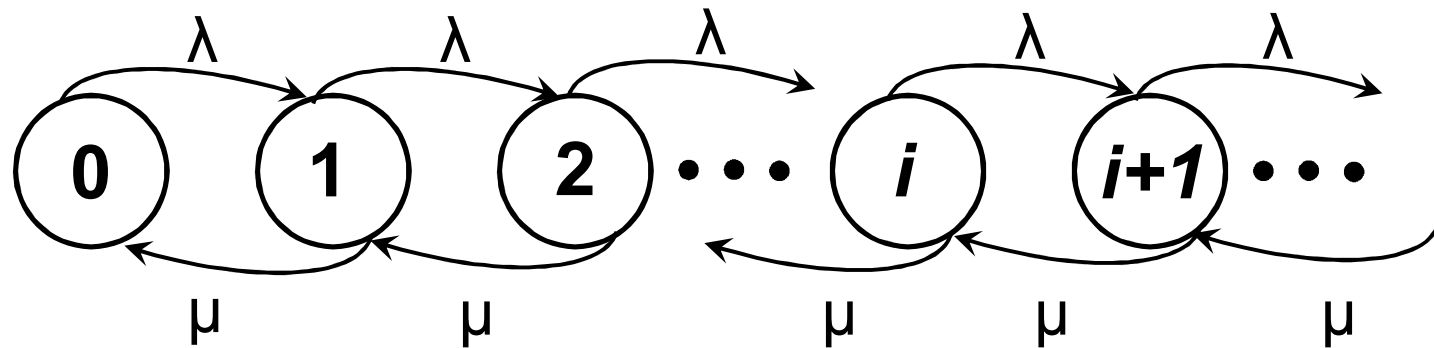
$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1;$$

$$0 = \lambda P_{i-1} - (\lambda + \mu)P_i + \mu P_{i+1}, \quad i \geq 1;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1.$$



Система М/М/1

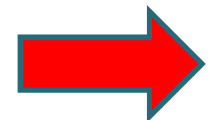


Выражая стационарные вероятности каждого состояния ($i > 0$) через вероятность предыдущего, получим:

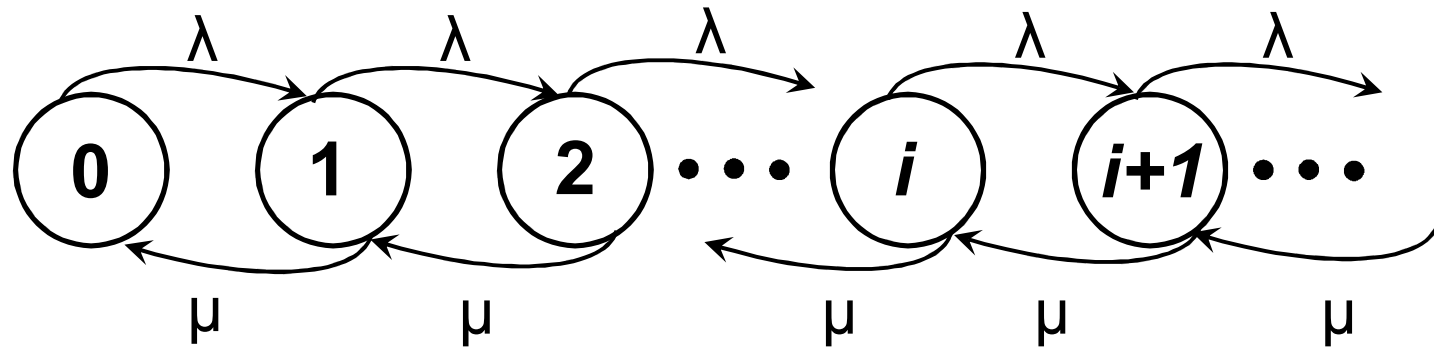
$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0; \quad P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1; \quad \dots \quad P_i = \frac{\lambda}{\mu} P_{i-1}; \quad \dots$$

Выразим все вероятности через P_0 :

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0; \quad P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot P_0; \quad \dots \quad P_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot P_0; \quad \dots$$



Система М/М/1

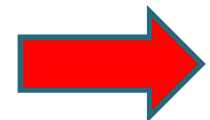


В итоге можем записать:

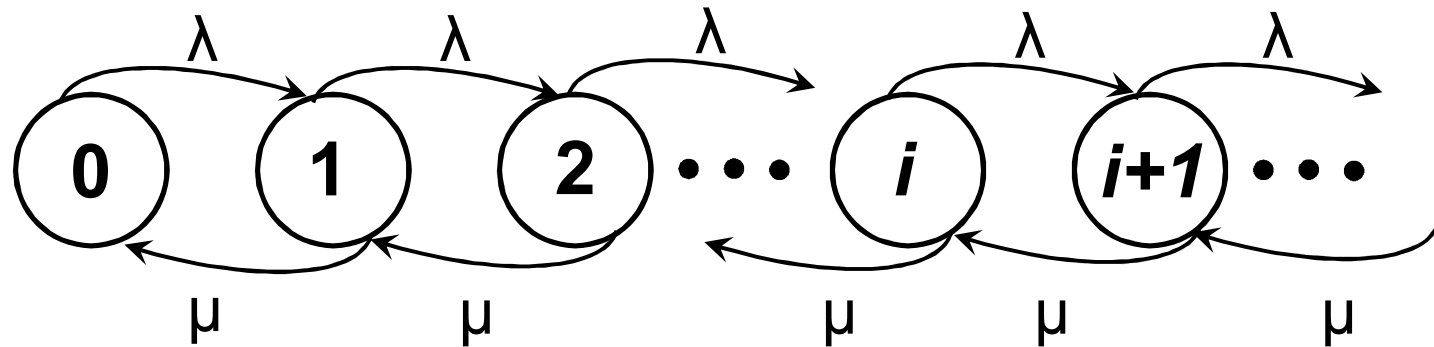
$$P_i = \rho^i \cdot P_0, \quad i \geq 0;$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Однако, нам все еще нужно определить P_0 !



Система М/М/1

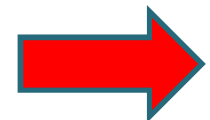


Исходя из условия нормировки

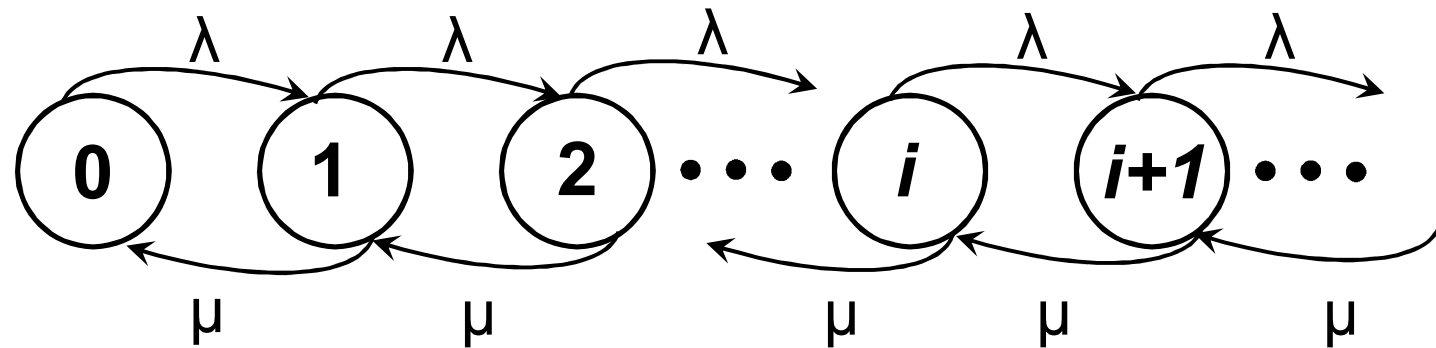
$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1,$$

получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = P_0 \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = 1.$$

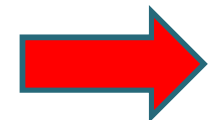


Система М/М/1

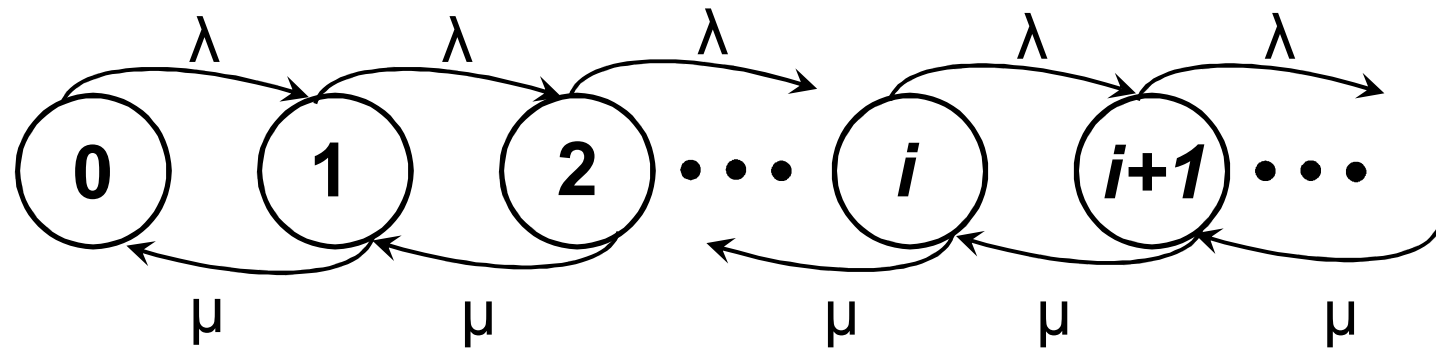


Сумма $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k$ конечна и равна $\frac{1}{1-\rho}$ тогда и только тогда, когда $\rho < 1$. Это является необходимым и достаточным условием существования стационарного режима функционирования СМО.

Иными словами, при $\rho \geq 1$ в СМО М/М/1 с течением времени в очереди будут накапливаться заявки (до бесконечности).



Система М/М/1



В итоге получаем:

$$P_i = (1 - \rho)\rho^i, \quad i \geq 0.$$

Т. о. стационарное распределение числа заявок в системе М/М/1 является геометрическим.

Величина ρ называется загрузкой системы.

Кроме того, стационарная вероятность u того, что в системе имеется хотя бы одна заявка равна

$$u = 1 - P_0 = \rho.$$

Это значит, что ρ в данном случае имеет также смысл средней доли времени u , которую система в стационарном режиме занята обслуживанием заявок.

Величину u называют *коэффициентом использования системы*.

Стационарное среднее число заявок в системе определяется как среднее значение дискретной случайной величины:

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} i P_i = (1 - \rho) \sum_{i=0}^{\infty} i \rho^i = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

Стационарное среднее число заявок в очереди определяется аналогично:

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} (i - 1) P_i = (1 - \rho) \sum_{i=0}^{\infty} (i - 1) \rho^i = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.$$

Стационарное среднее время ожидания начала обслуживания заявки:

$$w = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}.$$

Стационарное среднее время пребывания заявки в СМО:

$$v = w + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1 - \rho)}.$$

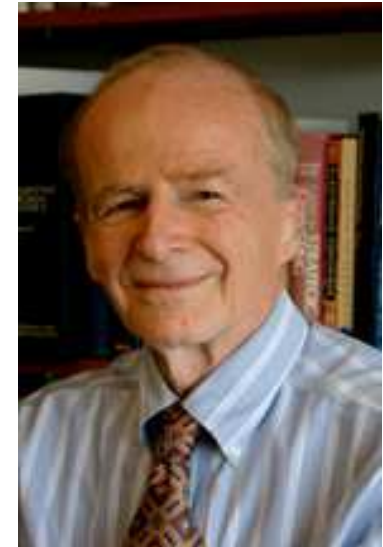
Вывод данных формул приведен в учебнике.

Формулы Литтла позволяют установить соответствие между средним количеством заявок в системе (очереди) и средним временем пребывания (ожидания) заявки в СМО:

$$N = \lambda v$$

$$Q = \lambda w$$

Вывод данных формул приведен в учебнике.



Джон Литтл
род. 1928



ЛЕКЦИЯ 2

**СМО $M/M/n/r$
СМО с нетерпеливыми
заявками**

Система М/М/п/г

Система М/М/п/г представляет собой p -линейную СМО с g местами для ожидания ($g \leq \infty$), в которую поступает пуассоновский поток с интенсивностью λ , а времена обслуживания заявок независимы и при этом время обслуживания каждой заявки на любом приборе распределено по экспоненциальному закону с параметром μ .

Заявка, поступающая в переполненную систему, теряется и вновь в нее не возвращается.

Система М/М/п/г также относится к экспоненциальным СМО.

Рассматривая $v(t)$ – число заявок в системе во время t , нетрудно показать, что процесс $\{v(t), t \geq 0\}$ является однородным марковским процессом с множеством состояний $X = \{0, 1, 2, \dots, n+r\}$.

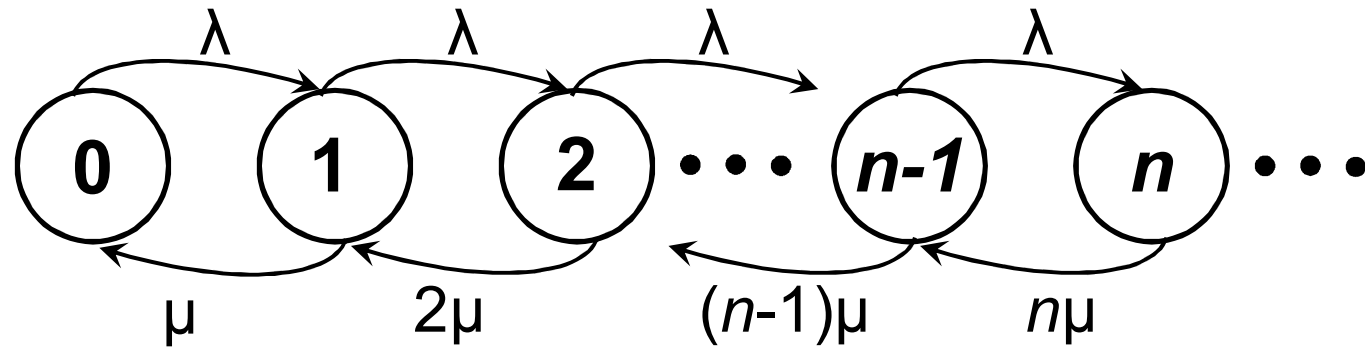
Для составления графа состояний и переходов и записи уравнений Колмогорова необходимо рассмотреть три случая:

- $i < n$: есть свободные приборы, очередь не заполнена;
- $n \leq i < n+r$: все приборы заняты, есть свободные места в очереди;
- $i = n+r$: система переполнена, новые заявки теряются.

Система M/M/n/r

Также считаем, что $v(0) = 0$.

$i < n$



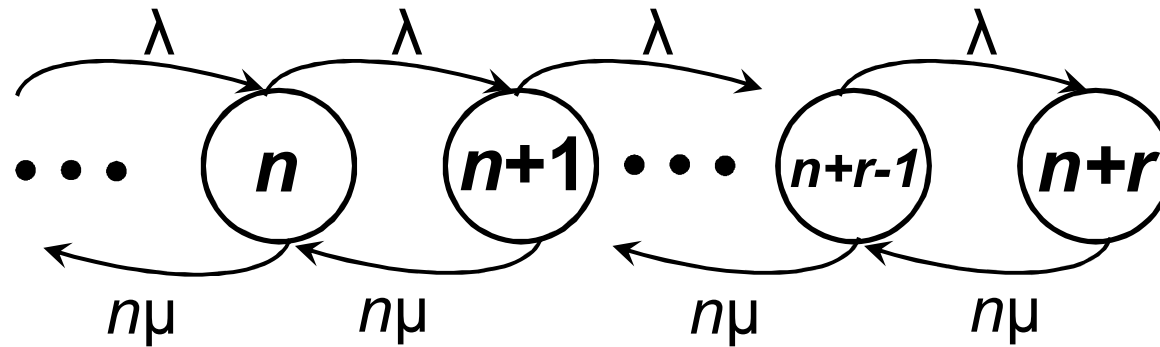
$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$

$$P'_i(t) = \lambda P_{i-1}(t) - (\lambda + i\mu)P_i(t) + (i+1)\mu P_{i+1}(t),$$

↑ $1 \leq i \leq n-1;$

Система M/M/n/r

$n \leq i \leq n+r$



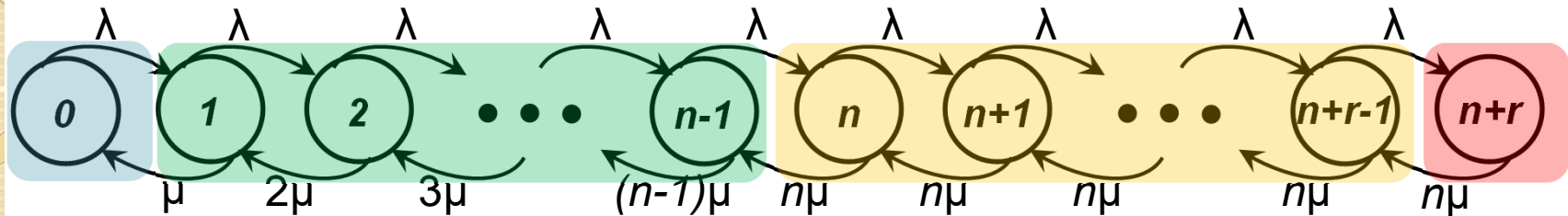
$n \leq i \leq n+r-1;$

$$P'_i(t) = \lambda P_{i-1}(t) - (\lambda + n\mu)P_i(t) + n\mu P_{i+1}(t),$$

$$P'_{n+r}(t) = \lambda P_{n+r-1}(t) - n\mu P_{n+r}(t);$$

Система M/M/n/r

В итоге получаем:



$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$

$$P'_i(t) = \lambda P_{i-1}(t) - (\lambda + i\mu)P_i(t) + (i+1)\mu P_{i+1}(t);$$

$$1 \leq i \leq n-1;$$

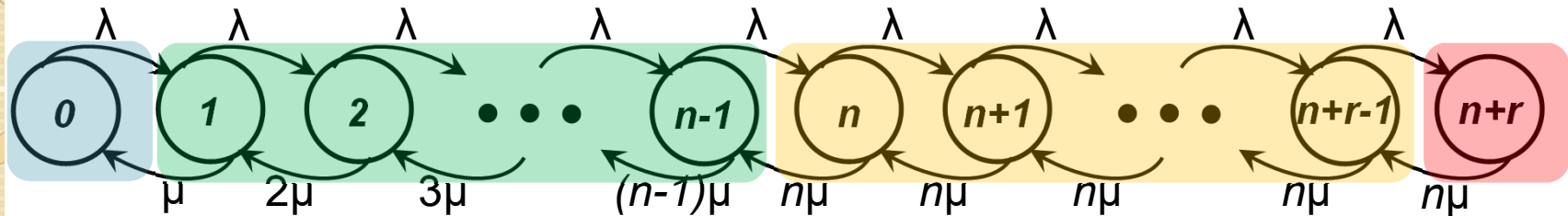
$$P'_i(t) = \lambda P_{i-1}(t) - (\lambda + n\mu)P_i(t) + n\mu P_{i+1}(t);$$

$$n \leq i \leq n+r-1;$$

$$P'_{n+r}(t) = \lambda P_{n+r-1}(t) - n\mu P_{n+r}(t).$$

Система M/M/n/r

В стационарном режиме:



$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1;$$

$$0 = \lambda P_{i-1} - (\lambda + i\mu)P_i + (i+1)\mu P_{i+1};$$

$$0 = \lambda P_{i-1} - (\lambda + n\mu)P_i + n\mu P_{i+1};$$

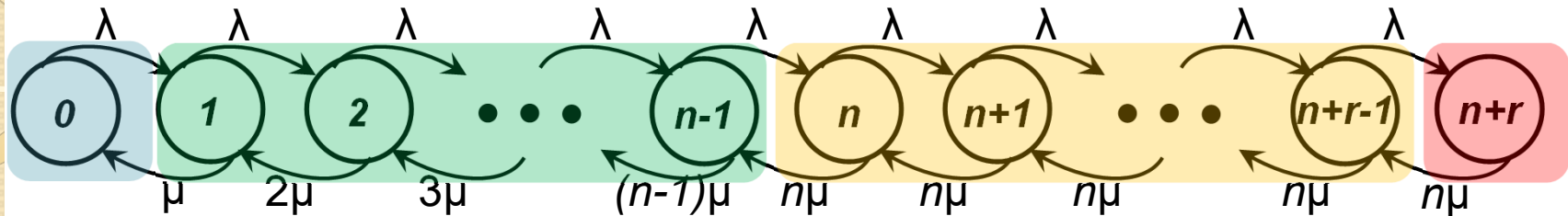
$$0 = \lambda P_{n+r-1} - n\mu P_{n+r}.$$

$$1 \leq i \leq n-1;$$

$$n \leq i \leq n+r-1;$$

$$\sum_{i=0}^{n+r} P_i = 1$$

Принцип локального баланса



Суммарные потоки вероятности, входящие в i -е состояние и выходящие из него, равны между собой.

$$\lambda P_0 = \mu P_1;$$

$$(\lambda + i\mu)P_i = \lambda P_{i-1} + (i+1)\mu P_{i+1};$$

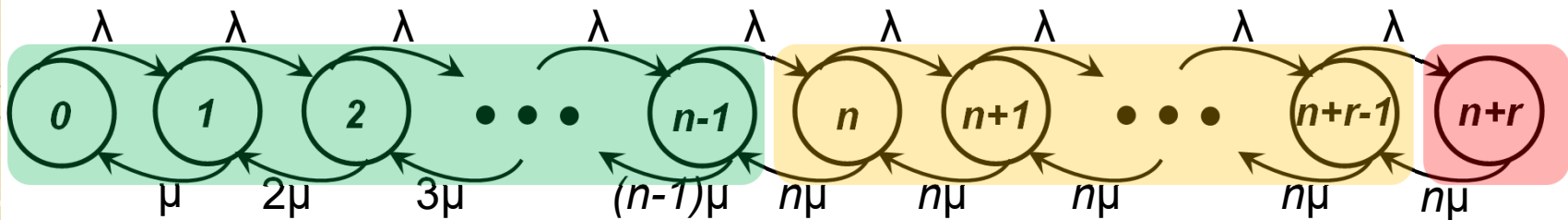
$$(\lambda + n\mu)P_i = \lambda P_{i-1} + n\mu P_{i+1};$$

$$n\mu P_{n+r} = \lambda P_{n+r-1}.$$

$$1 \leq i \leq n-1;$$

$$n \leq i \leq n+r-1;$$

Система M/M/n/r



Исходя из принципа локального баланса, получаем баланс потоков вероятностей между i -м и $(i+1)$ -м состояниями:

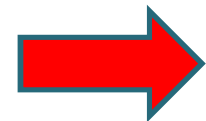
$$\lambda P_i = (i+1)\mu P_{i+1};$$

$$0 \leq i \leq n-1;$$

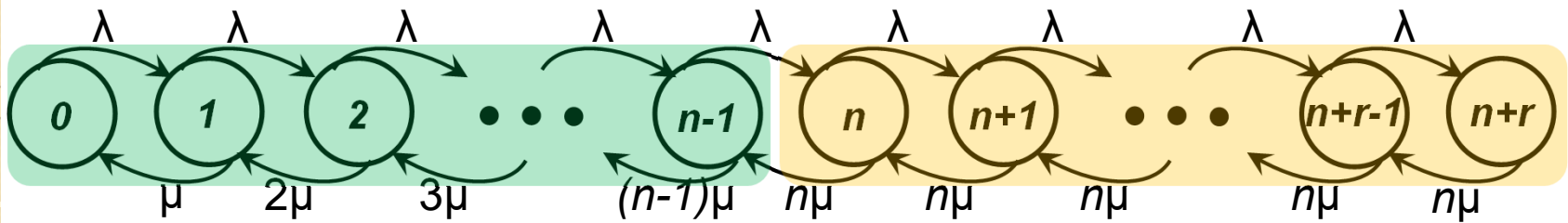
$$\lambda P_i = n\mu P_{i+1};$$

$$n \leq i \leq n+r-1.$$

Из этих выражений рекуррентно получаем:

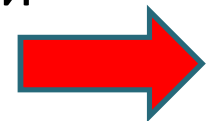


Система M/M/n/r

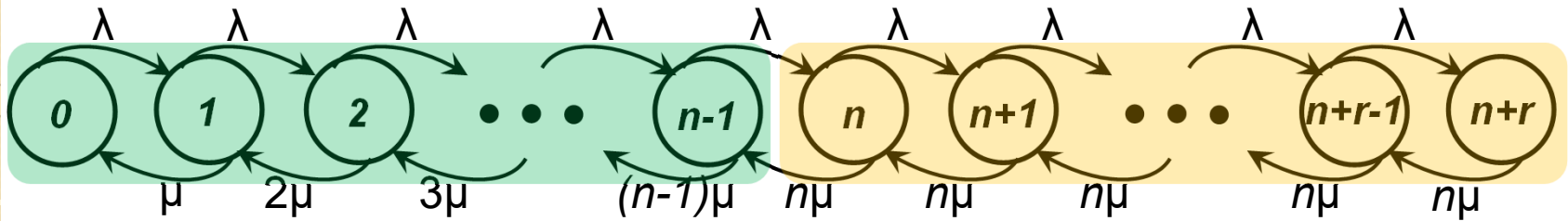


$$P_i = \begin{cases} \frac{\rho^i}{i!} P_0, & 0 \leq i \leq n-1; \\ \frac{\rho^i}{n! n^{i-n}} P_0, & n \leq i \leq n+r. \end{cases} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Вероятность P_0 определяется из условия нормировки



Система M/M/n/r



$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{i=0}^r \left(\frac{\rho}{n} \right)^i \right]^{-1} =$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^{r+1}}{1 - \frac{\rho}{n}} \right]^{-1}.$$

Система М/М/п/г

В частном случае $n = 1$ для однолинейной СМО **М/М/1/г** с накопителем конечной емкости имеем:

$$P_i = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{r+2}} \rho^i, \quad 0 \leq i \leq r + 1.$$

В отличие от СМО **М/М/1**, для **М/М/п/г** ($r < \infty$) стационарный режим существует при любых значениях ρ : **$0 < \rho < \infty$**

Запишем выражения для некоторых характеристик

Стационарная вероятность $P_{w=0}$ немедленного обслуживания заявки (обслуживание без ожидания) совпадает со стационарной вероятностью того, что в СМО находятся 0, 1, ..., n-1 заявок, т.е. присутствует хотя бы один свободный сервер:

$$P_{w=0} = \sum_{i=0}^{n-1} P_i = P_0 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{i!}$$

Система М/М/п/г

Поскольку в СМО **М/М/п/г** накопитель имеет ограниченную емкость, заявка может быть потеряна. Это происходит в том случае, когда в момент поступления заявка застаёт занятыми все приборы и места для ожидания.

Стационарная вероятность потери заявки совпадает со стационарной вероятностью P_{n+r} , т.е.

$$\pi = P_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n! n^r} P_0$$

Система М/М/п/г

Представляет интерес также другой частный случай, когда $г=0$. Тогда в системе отсутствуют места для ожидания (СМО с потерями **М/М/п/0**), и такая система носит название системы Эрланга.

Для СМО **М/М/п/0** стационарные вероятности состояний P_i определяются *формулой Эрланга*:

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} \left(\sum_{j=0}^n \frac{\rho^j}{j!} \right)^{-1}, 0 \leq i \leq n$$

Система М/М/п/п

Стационарная средняя длина очереди в СМО **М/М/п/п** определяется формулой:

$$Q = \sum_{i=1}^r iP_{n+i} = P_n \sum_{i=1}^r \left(\frac{\rho}{n}\right)^i ,$$

или после суммирования:

$$Q = \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1 + r \left(\frac{\rho}{n}\right)^{r+1} - (r+1) \left(\frac{\rho}{n}\right)^r}{\left(\frac{n}{\rho} - 1\right)^2} P_0$$

Система М/М/п/г

Суммируя уравнения локального баланса, получаем:

$$\lambda_D = \lambda(1 - \pi) = \mu \left(\sum_{i=1}^{n-1} iP_i + \sum_{i=n}^{n+r} nP_i \right) = \mu \bar{n},$$

где $\bar{n}$ – среднее число занятых приборов.

Это соотношение отражает равенство интенсивностей принятого в систему и обслуженного ею потоков в стационарном режиме.

Величина λ_D называется **пропускной способностью системы**.

Выражение для стационарного среднего числа N заявок в системе можно получить аналогично Q – как среднее значение дискретной случайной величины.

Однако очевидно, что

$$N = Q + \bar{n}$$

Система М/М/п/г

Стационарное среднее время ожидания обслуживания:

$$w = \frac{n\mu - \left(\frac{\rho}{n}\right)^r [(r+1)n\mu - r\lambda]}{(n\mu - \lambda)^2} \cdot \frac{P_n}{1 - \pi}.$$

Стационарное среднее время пребывания заявки в системе:

$$v = w + \frac{1}{\mu}.$$

Вывод формул приведен в учебнике.

Однако, эти же выражения можно получить из формул Литтла, используя в них λ_D вместо λ .

Система М/М/1 с «нетерпеливыми заявками»

При рассмотрении дисциплин обслуживания были упомянуты варианты СМО, в которых присутствуют заявки **с ограниченным временем ожидания** начала обслуживания или **с ограниченным временем пребывания** заявок в системе.

В первом случае заявки могут выйти из очереди, не дождавшись начала обслуживания.

Во втором – заявки могут выйти как из очереди, так и с сервера, не дождавшись окончания обслуживания.

Предельное время ожидания (пребывания) в общем случае является случайной величиной.

Система М/М/1 с «нетерпеливыми заявками»

Рассмотрим систему М/М/1 с интенсивностью входящего пуассоновского потока λ и интенсивностью обслуживания μ .

Предположим, что заявки могут ожидать обслуживания не более случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром γ .

Обозначим через $v(t)$ число заявок в системе в момент времени t . Множество X состояний процесса $\{v(t), t > 0\}$ имеет вид:

$$X = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

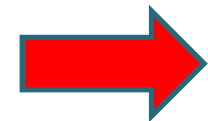
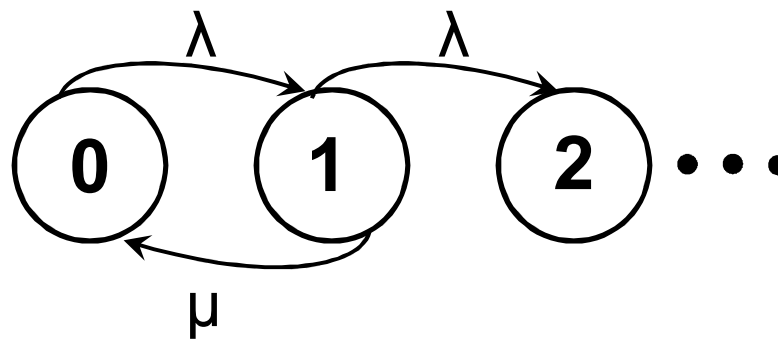
Будем предполагать, что $v(0)=0$.

Система М/М/1 с «нетерпеливыми заявками»

Из состояния $\{v(t)=0\}$ можно перейти лишь в состояние $\{v(t)=1\}$ – **поступление новой заявки** с интенсивностью λ .

Из состояния $\{v(t)=1\}$ можно:

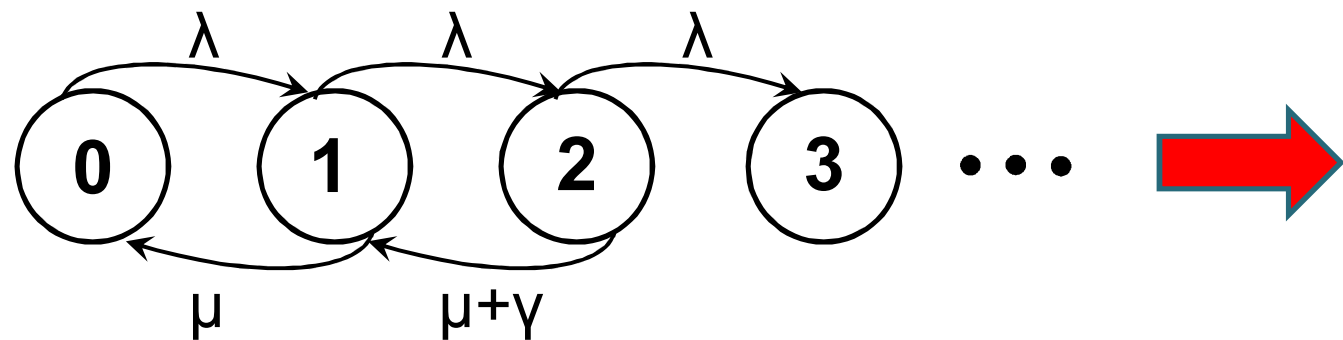
- вернуться в предыдущее состояние (**заявка обслужилась**) с интенсивностью μ ;
- перейти в состояние $\{v(t)=2\}$ – **поступление новой заявки**.



Система М/М/1 с «нетерпеливыми заявками»

Из состояния $\{v(t)=2\}$ можно:

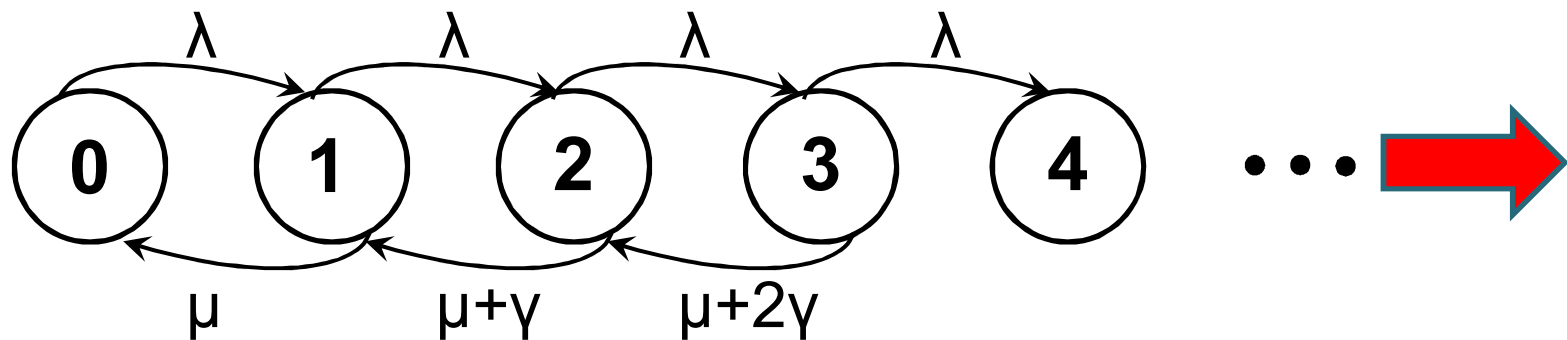
- перейти в состояние $\{v(t)=3\}$ – **поступление новой заявки**;
- вернуться в предыдущее состояние (**заявка обслужилась**) с интенсивностью μ ;
- вернуться в предыдущее состояние, т.к. **заявка вышла из очереди** из-за ограниченного времени ожидания (интенсивность γ).



Система М/М/1 с «нетерпеливыми заявками»

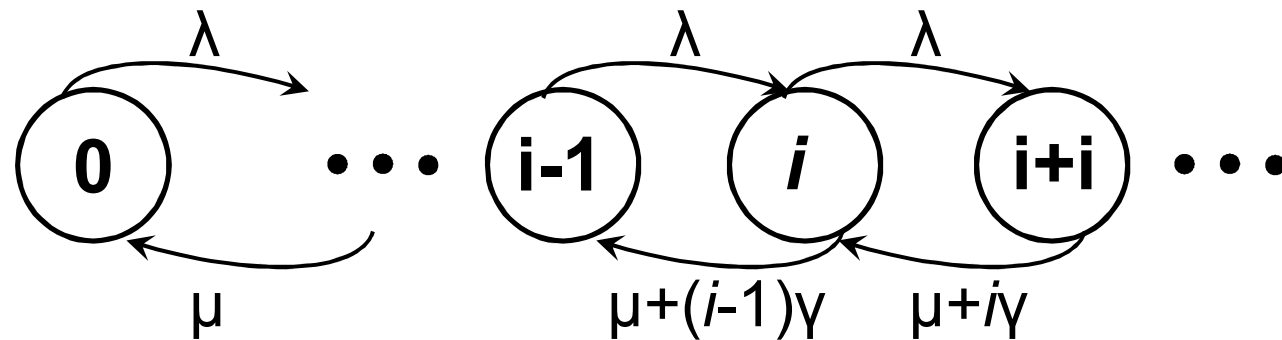
Из состояния $\{v(t)=3\}$ можно:

- перейти в состояние $\{v(t)=4\}$ – **поступление новой заявки**;
- вернуться в предыдущее состояние (**заявка обслужилась**) с интенсивностью μ ;
- вернуться в предыдущее состояние, т.к. **заявка вышла из очереди** из-за ограниченного времени ожидания (интенсивность 2γ).



Система М/М/1 с «нетерпеливыми заявками»

... и т.д.

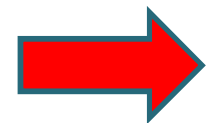


Запишем систему уравнений Колмогорова:

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$

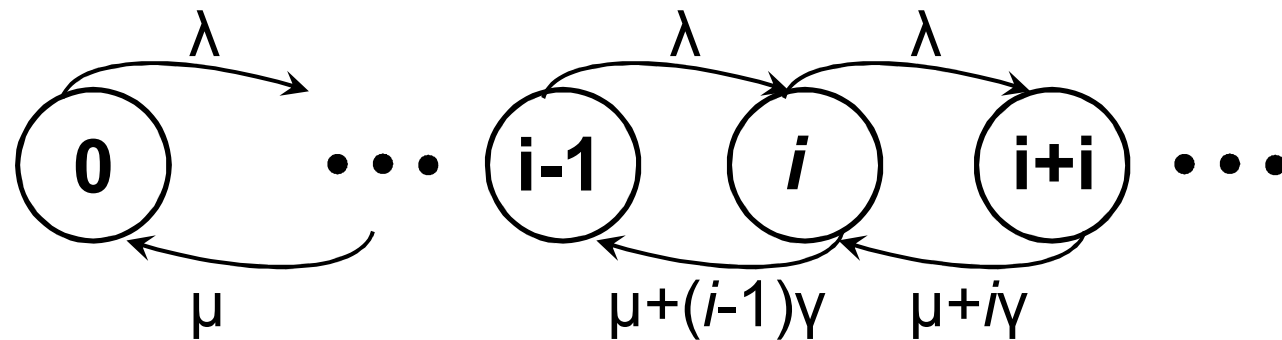
$$P'_i(t) = \lambda P_{i-1}(t) - [\lambda + \mu + (i-1)\gamma]P_i(t) + (\mu + i\gamma)P_{i+1}(t),$$

$$i \geq 1.$$



Система М/М/1 с «нетерпеливыми заявками»

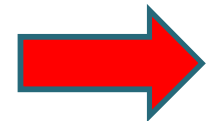
В стационарном режиме:



$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1;$$

$$0 = \lambda P_{i-1} - [\lambda + \mu + (i-1)\gamma]P_i + (\mu + i\gamma)P_{i+1}, i \geq 1;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1.$$



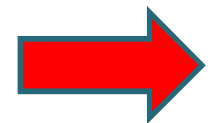
Система М/М/1 с «нетерпеливыми заявками»

Используя принцип глобального баланса, получим уравнение локального баланса:

$$\lambda P_i = (\mu + i\gamma) P_{i+1}, i \geq 0.$$

Исходя из этого соотношения, можно выразить стационарные вероятности всех состояний через вероятность P_0 :

$$P_i = \left[\prod_{j=0}^{i-1} (\mu + j\gamma) \right]^{-1} \cdot \lambda^i \cdot P_0, \quad i \geq 1.$$

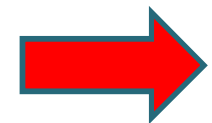


Система М/М/1 с «нетерпеливыми заявками»

Стационарная вероятность P_0 , как обычно, определяется из условия нормировки и имеет вид:

$$P_i = \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{\prod_{j=0}^{i-1} (\mu + j\gamma)} \right]^{-1}.$$

Можно доказать (см. учебник), что стационарный режим существует при любых значениях параметров λ , μ и $\gamma > 0$.

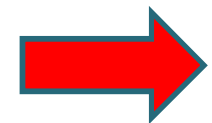


Система М/М/1 с «нетерпеливыми заявками»

Стационарные среднее число N заявок в системе и средняя длина Q очереди определяются формулами:

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} iP_i = P_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\lambda^i}{\prod_{j=0}^{i-1} (\mu + j\gamma)};$$

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)P_i = P_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(i-1)\lambda^i}{\prod_{j=0}^{i-1} (\mu + j\gamma)}$$



Система М/М/1 с «нетерпеливыми заявками»

Просуммировав уравнения локального баланса по всем $i = 0, 1, 2, \dots$, получаем равенство

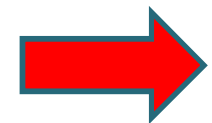
$$\lambda = \mu(1 - P_0) + \gamma \sum_{i=1}^{\infty} (i - 1)P_i = \mu(1 - P_0) + \gamma Q$$

имеющее очевидный физический смысл: в стационарном режиме интенсивность входящего в систему потока равна сумме интенсивностей потока обслуженных и потока «нетерпеливых» заявок.

Система М/М/1 с «нетерпеливыми заявками»

Одной из основных характеристик системы с «нетерпеливыми» заявками является P_s – стационарная вероятность того, что заявка будет обслужена.

В СМО в среднем поступает λ заявок в единицу времени. Поскольку прибор в среднем загружен долю времени $1-P_0$, а при полной загрузке он обслуживает μ заявок за единицу времени, то фактически обслуживается $\mu(1-P_0)$ заявок в единицу времени.



Система М/М/1 с «нетерпеливыми заявками»

Разделив среднее число обслуженных заявок на среднее число поступивших заявок, получаем:

$$P_s = \frac{\mu}{\lambda} (1 - P_0).$$



ЛЕКЦИЯ 3

СМО с повторными заявками
СМО с конечным числом
ИСТОЧНИКОВ

Система М/М/1/О с «повторными» заявками

Существует ряд систем, в которых заявки, обнаружив, что сервер занят, не становятся в очередь на ожидание, а покидают систему; однако позже делают повторную попытку занять сервер.

В таком случае в СМО можно рассматривать два типа заявок: новые и повторные.

Поскольку места для ожидания в такой СМО не предусмотрены, нет строгой очередности в обращениях повторных заявок к серверу.

Система М/М/1/О с «повторными» заявками

Рассмотрим простейшую СМО М/М/1/О с повторными заявками.

В этой СМО входящий поток является пуассоновским с параметром λ , а времена обслуживания распределены экспоненциально с параметром μ .

Однако заявка, получившая отказ в обслуживании, становится в очередь повторных заявок, существенно отличающуюся от обычной очереди.

Система M/M/1/O с «повторными» заявками

Во-первых, повторная заявка не попадает на обслуживающий прибор сразу, после его освобождения.

Она может попасть на него только тогда, когда произошла повторная попытка, и при условии, что в этот момент сервер свободен.

Повторные попытки каждая заявка производит через случайное время. Предположим, что оно распределено по экспоненциальному закону с параметром γ .

Система М/М/1/О с «повторными» заявками

Во-вторых, после каждой неудачной попытки занять сервер заявка (как повторная, так и вновь поступившая) может уйти из СМО с вероятностью q .

В случае, если $q = 0$, говорят о СМО с «настойчивыми» заявками.

Даже при наличии повторных заявок после освобождения сервера на него может попасть новая заявка.

Система М/М/1/О с «повторными» заявками

Рассмотрим

$v(t)$ – число повторных заявок в системе в момент времени t , и

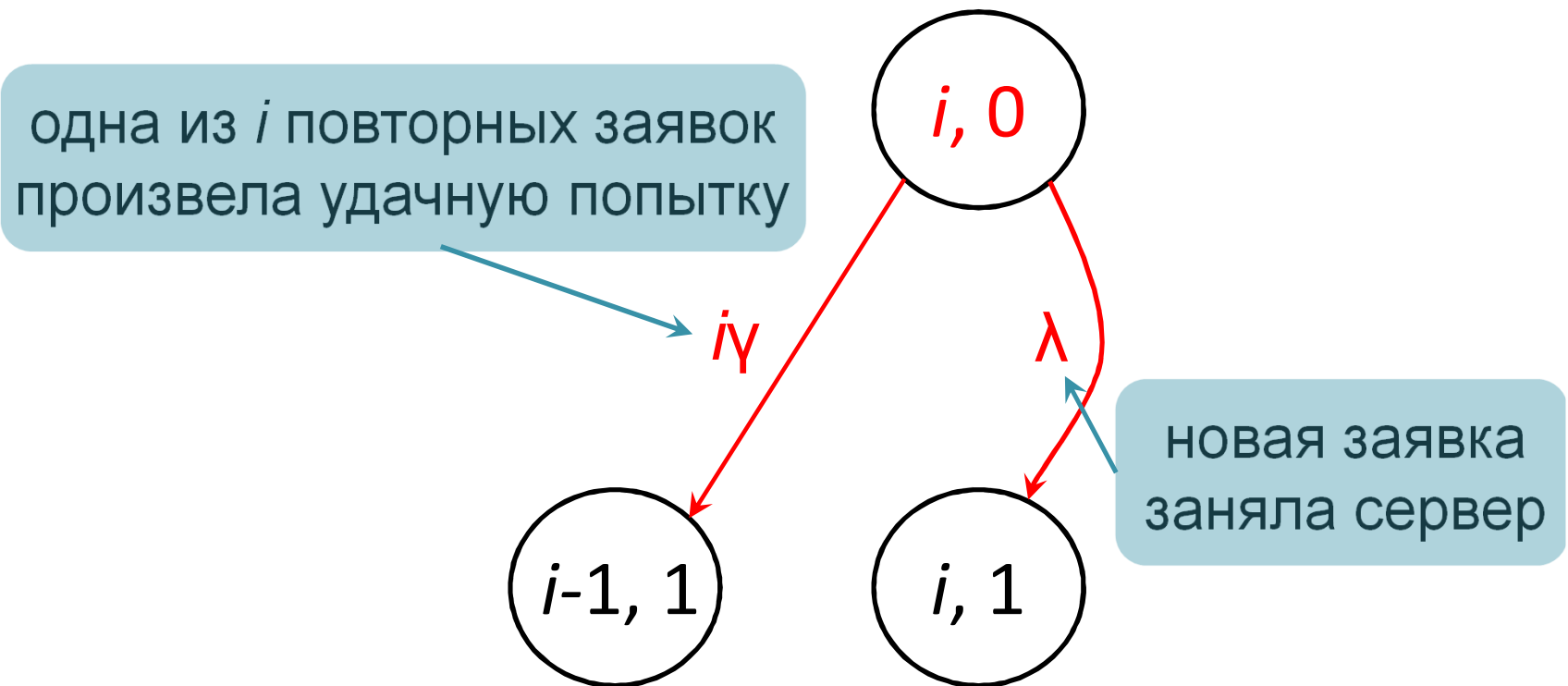
$\chi(t)$ – величину, равную 1 в момент времени t , если сервер занят обслуживанием заявки, и 0 в противном случае.

Тогда СМО будет описываться двумерным марковским процессом

$$\{\eta(t), t \geq 0\} = \{v(t), \chi(t), t \geq 0\},$$

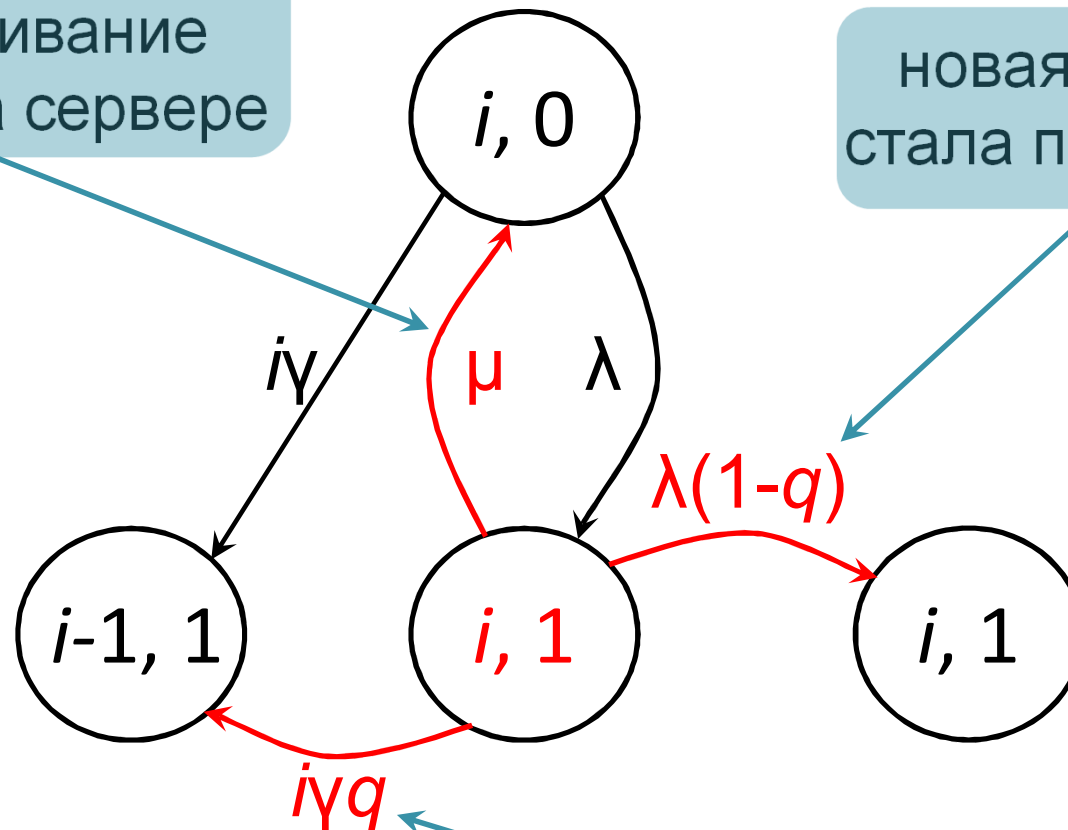
определенным на множестве состояний $X = \{(i, j)\}$
 $i = 0, 1, 2, \dots; j = 0, 1$.

Система M/M/1/0 с «повторными» заявками



Система М/М/1/О с «повторными» заявками

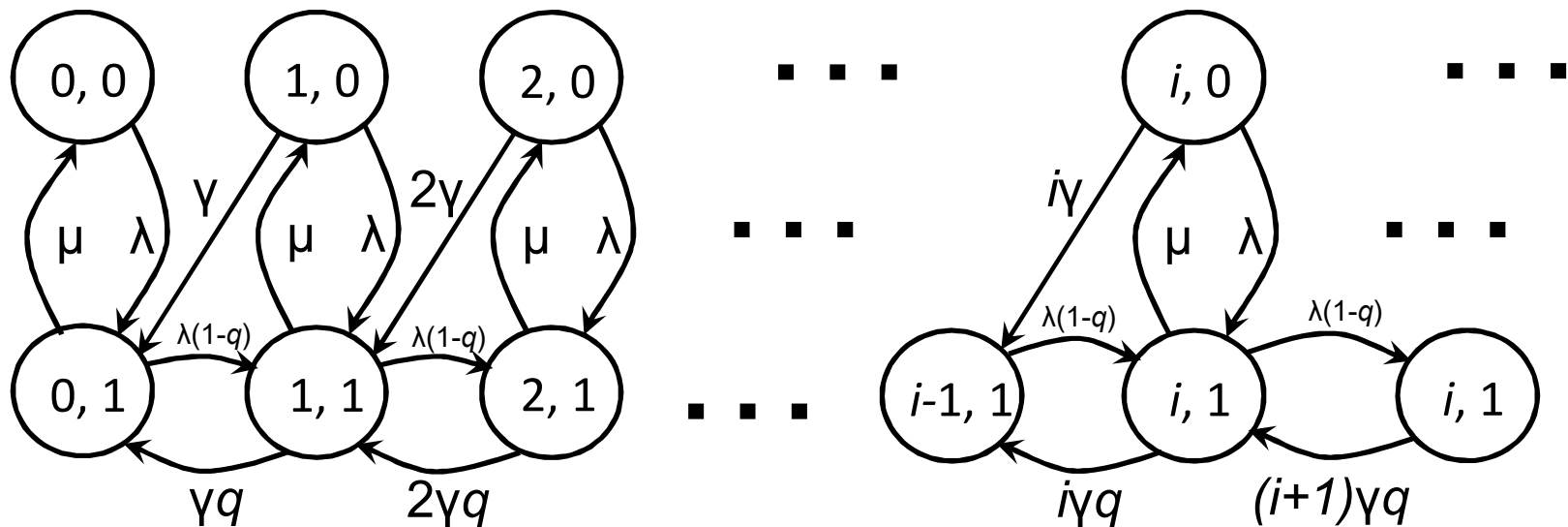
закончилось
обслуживание
заявки на сервере



новая заявка
стала повторной

одна из i повторных заявок
произвела неудачную попытку
и покинула систему

Система М/М/1/О с «повторными» заявками

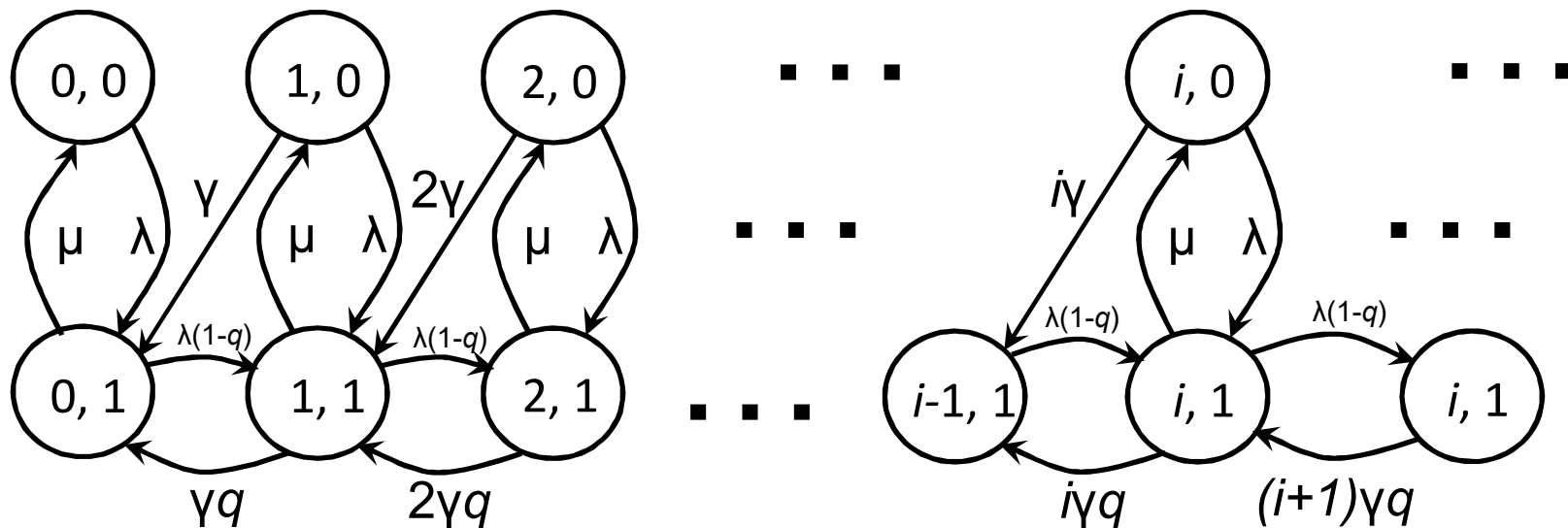


$$P'_{i0}(t) = -(\lambda + i\gamma)P_{i0}(t) + \mu P_{i1}(t), \quad i \geq 0;$$

$$P'_{01}(t) = -[\lambda(1 - q) + \mu]P_{01}(t) + \lambda P_{00}(t) + \gamma P_{10}(t) + \gamma q P_{11}(t);$$

$$P'_{i1}(t) = -[\lambda(1 - q) + \mu + i\gamma q]P_{i1}(t) + \lambda(1 - q)P_{i-1,1}(t) + \\ + \lambda P_{i0}(t) + \gamma(i + 1)P_{i+1,0}(t) + \gamma q(i + 1)P_{i+1,1}(t), \quad i \geq 1$$

Система М/М/1/О с «повторными» заявками



$$0 = -(\lambda + i\gamma)P_{i0} + \mu P_{i1}, \quad i \geq 0;$$

$$0 = -[\lambda(1 - q) + \mu]P_{01} + \lambda P_{00} + \gamma P_{10} + \gamma q P_{11};$$

$$0 = -[\lambda(1 - q) + \mu + i\gamma q]P_{i1} + \lambda(1 - q)P_{i-1,1} +$$

$$+ \lambda P_{i0} + \gamma(i + 1)P_{i+1,0} + \gamma q(i + 1)P_{i+1,1}, \quad i \geq 1,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 P_{ij} = 1.$$

Система М/М/1/О с «повторными» заявками

Используя принцип локального баланса, можно получить следующие соотношения:

$$\lambda P_{00} = \mu P_{01};$$

$$\lambda P_{i0} + \lambda(1 - q)P_{i-1,1} = (\mu + i\gamma q)P_{i,1}, \quad i \geq 1$$

И далее:

$$\left(\mu + i\gamma q - \frac{\lambda\mu}{\lambda + i\gamma} \right) P_{i,1} = \lambda(1 - q)P_{i-1,1}, \quad i \geq 1.$$

Система M/M/1/O с «повторными» заявками

С учетом предыдущих соотношений можно выразить вероятности всех состояний через вероятность начального состояния:

$$P_{i,0} = P_{0,0} \sigma_i \prod_{j=0}^i \theta_j;$$

$$P_{i,1} = P_{0,0} \prod_{j=0}^i \theta_j, \quad i \geq 0;$$

где

$$\theta_0 = \rho = \frac{\lambda}{\mu}; \quad \theta_i = \frac{\lambda(1-q)(\lambda + i\gamma)}{i\gamma(\mu + q\lambda + iq\gamma)}; \quad \sigma_i = \frac{\mu}{\lambda + i\gamma}.$$

Система M/M/1/0 с «повторными» заявками

Вероятность начального состояния находится из условия нормировки:

$$P_{0,0} = \left[\sum_{i=0}^{\infty} (1 + \sigma_i) \prod_{j=0}^i \theta_j \right]^{-1}$$

Можно показать, что стационарные вероятности существуют

- для любых λ , μ и $\gamma > 0$, если $\rho > 0$;
- для $\rho < 1$, если $\rho = 0$ (настойчивые заявки).

Система М/М/1/0 с «повторными» заявками

Стационарное среднее число N повторных заявок в системе (для $q = 0$):

$$N = \frac{\rho(1 + \alpha\rho)}{\alpha(1 - \rho)}, \quad \alpha = \frac{\gamma}{\lambda}$$

Стационарная вероятность $P_{w=0}$ того, что заявка будет обслужена с первой попытки (для $q = 0$):

$$P_{w=0} = \sum_{i=0}^{\infty} P_{i,0} = 1 - \rho$$

Для $q > 0$ расчет показателей затруднителен.

Система с конечным числом источников

Ранее мы предполагали, что входной поток является пуассоновским, т.е., в частности, не зависит от того, сколько заявок находится в СМО.

Однако, встречаются СМО, в которых это предположение не выполняется.

К таким системам относится СМО с конечным числом источников, называемая также системой Энгсета.



Торе Энгсет
1865-1943

Система с конечным числом источников

Предположим, что в однолинейную СМО с накопителем конечной емкости m поступают заявки от m одинаковых источников.

Каждый источник может послать только одну заявку, и пока она не будет обслужена, других заявок источник не посылает.

Время от момента возвращения заявки в источник до момента следующего поступления ее в систему распределено по экспоненциальному закону с параметром λ .

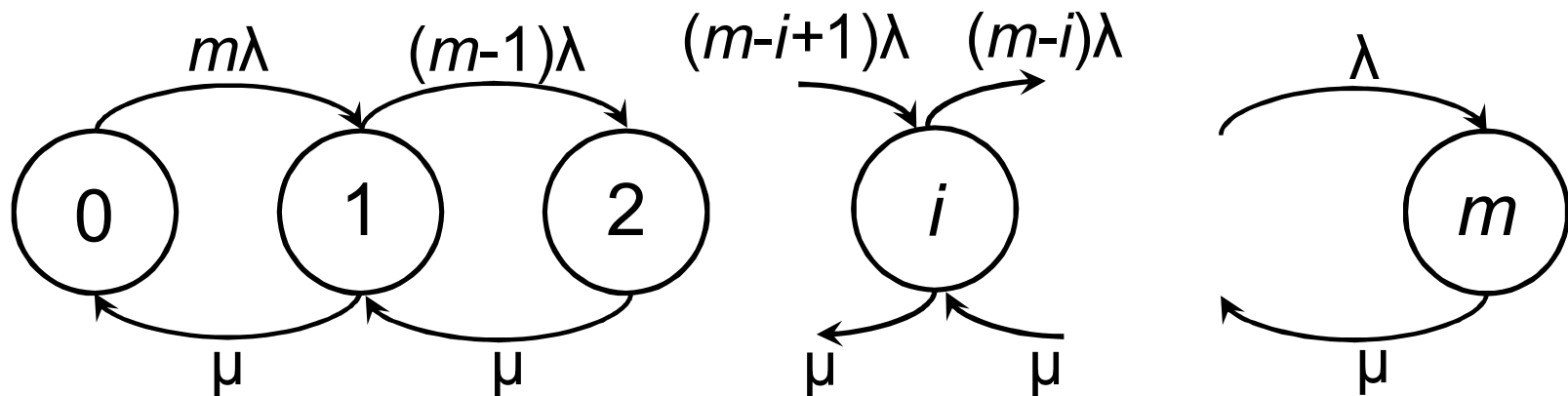
Время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ .

Система с конечным числом источников

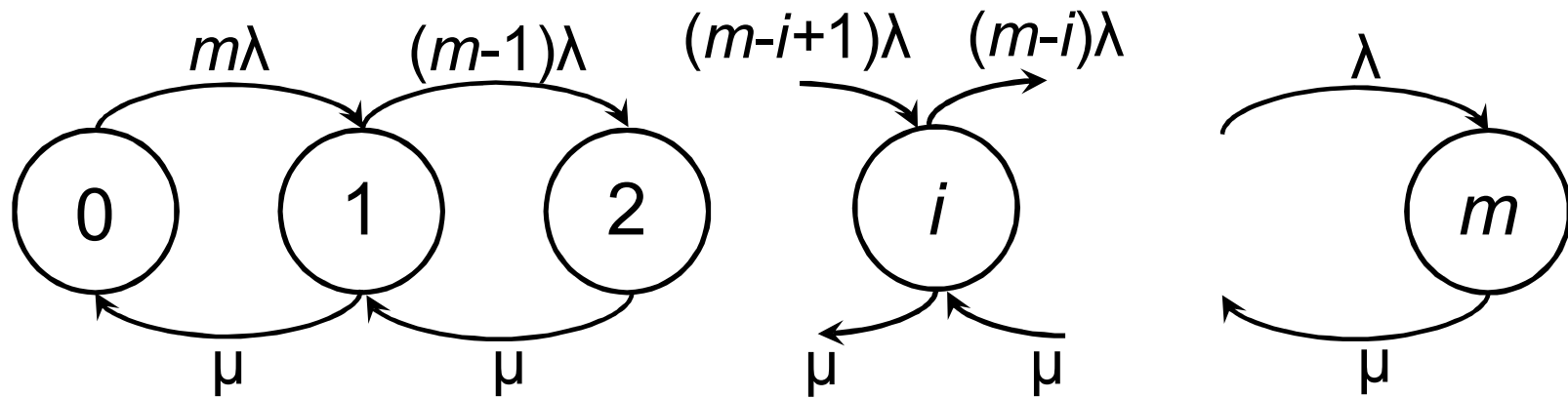
Рассмотрим снова $v(t)$ – число заявок в системе.

Множество состояний процесса $\{v(t)\}$ имеет вид:

$$X = \{0, 1, 2, \dots, m\}$$



Система с конечным числом источников

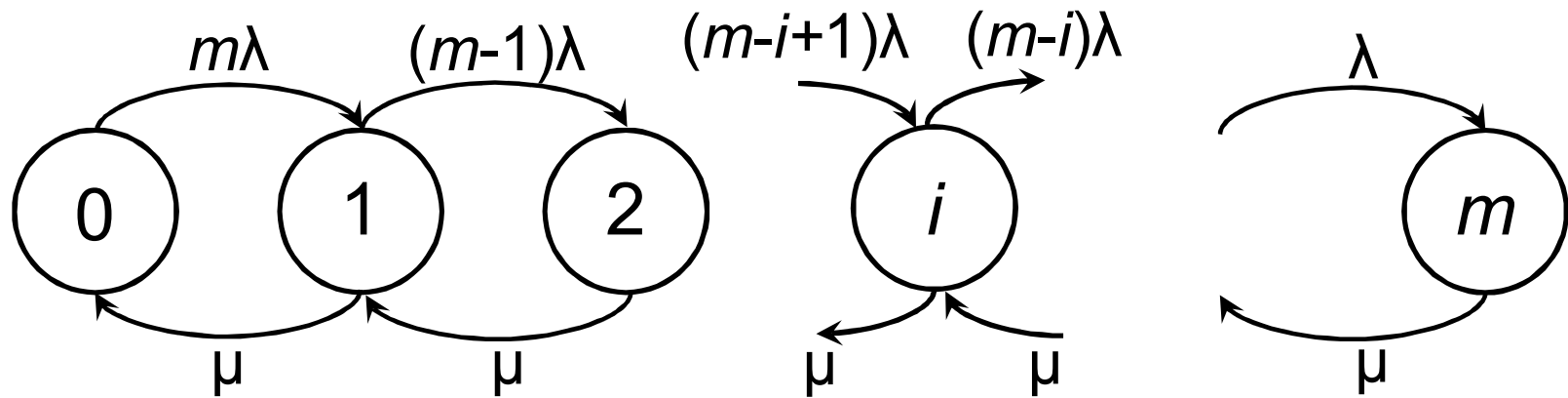


$$P'_0(t) = -m\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$

$$P'_i(t) = -[(m-i)\lambda + \mu]P_i(t) + (m-i+1)\lambda P_{i-1}(t) + \mu P_{i+1}(t);$$

$$P'_m(t) = -\mu P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t);$$

Система с конечным числом источников



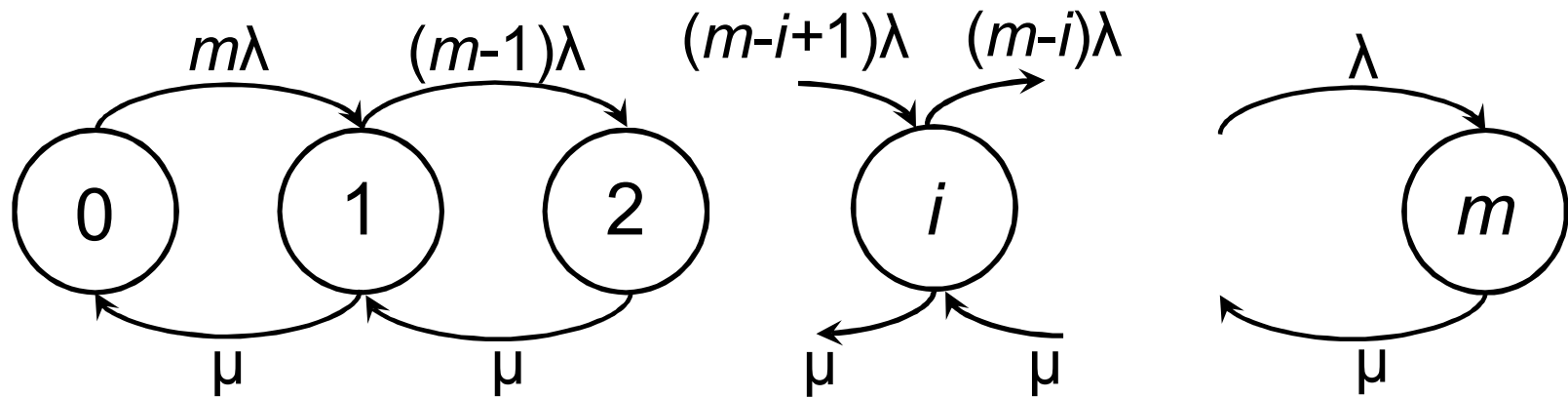
$$0 = -m\lambda P_0 + \mu P_1;$$

$$0 = -[(m-i)\lambda + \mu]P_i + (m-i+1)\lambda P_{i-1} + \mu P_{i+1};$$

$$0 = -\mu P_m + \lambda P_{m-1};$$

$$\sum_{k=0}^m P_k = 1.$$

Система с конечным числом источников



Получим уравнения локального баланса:

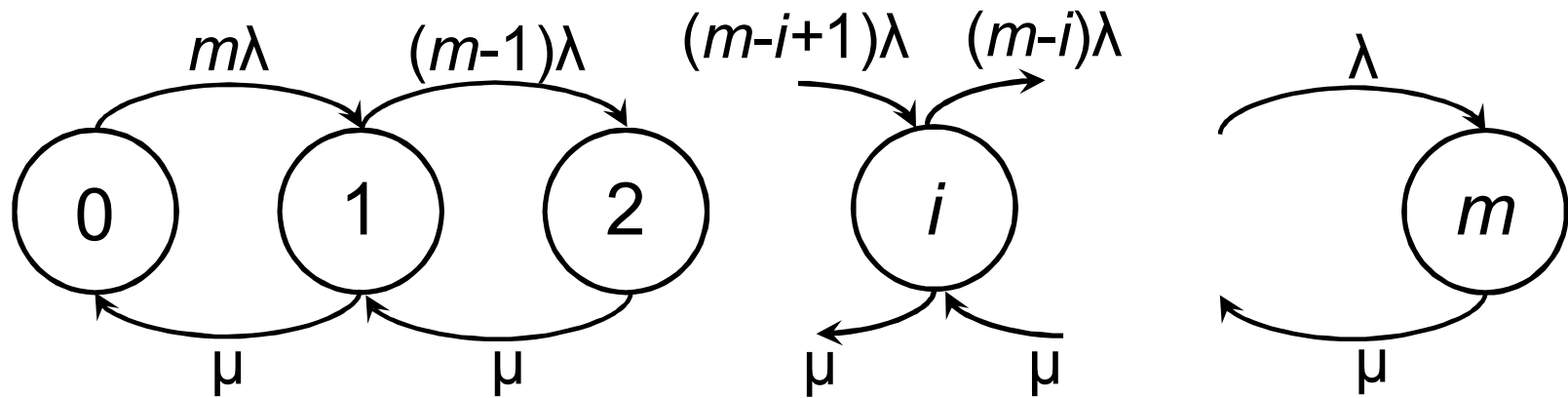
$$\mu P_{i+1} = \lambda(m-i)P_i$$

Отсюда:

$$P_1 = \frac{\lambda m}{\mu} P_0 \quad P_2 = \frac{\lambda^2 m(m-1)}{\mu^2} P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda^3 m(m-1)(m-2)}{\mu^3} P_0$$

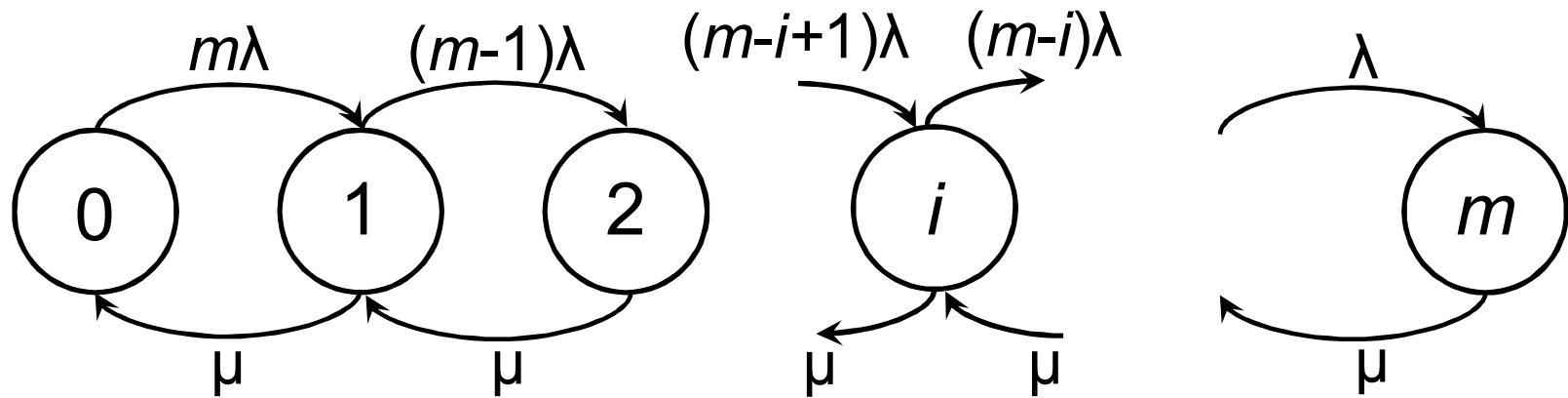
Система с конечным числом источников



$$P_i = P_0 \rho^i \prod_{j=0}^{i-1} (m - j), \quad 1 \leq i \leq m$$

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^m \rho^i \prod_{j=0}^{i-1} (m - j) \right]^{-1}$$

Система с конечным числом источников



Стационарное среднее число заявок в системе:

$$N = P_0 \sum_{i=1}^m i \rho^i \prod_{j=0}^{i-1} (m - j)$$

Стационарная средняя длина очереди:

$$Q = N - (1 - P_0)$$

Система с конечным числом источников

Из уравнений локального баланса можно получить:

$$\lambda(m - N) = \mu(1 - P_0)$$

Эта формула отражает равенство интенсивностей потоков заявок, поступающих в СМО и обслуженных ею.

Величина λ_D

$$\lambda_D = \lambda(m - N) = \mu(1 - P_0)$$

Называется пропускной способностью системы.

Система с конечным числом источников

Стационарное среднее время ожидания начала обслуживания:

$$w = \frac{Q}{\lambda(m - N)} = \frac{Q}{\lambda_D}$$

Стационарное среднее время пребывания заявки в системе:

$$v = \frac{Q}{\lambda_D} + \frac{1}{\mu} = \frac{N}{\lambda_D}$$

Эти формулы являются аналогами формул Литтла для данной СМО.



ЛЕКЦИЯ 4

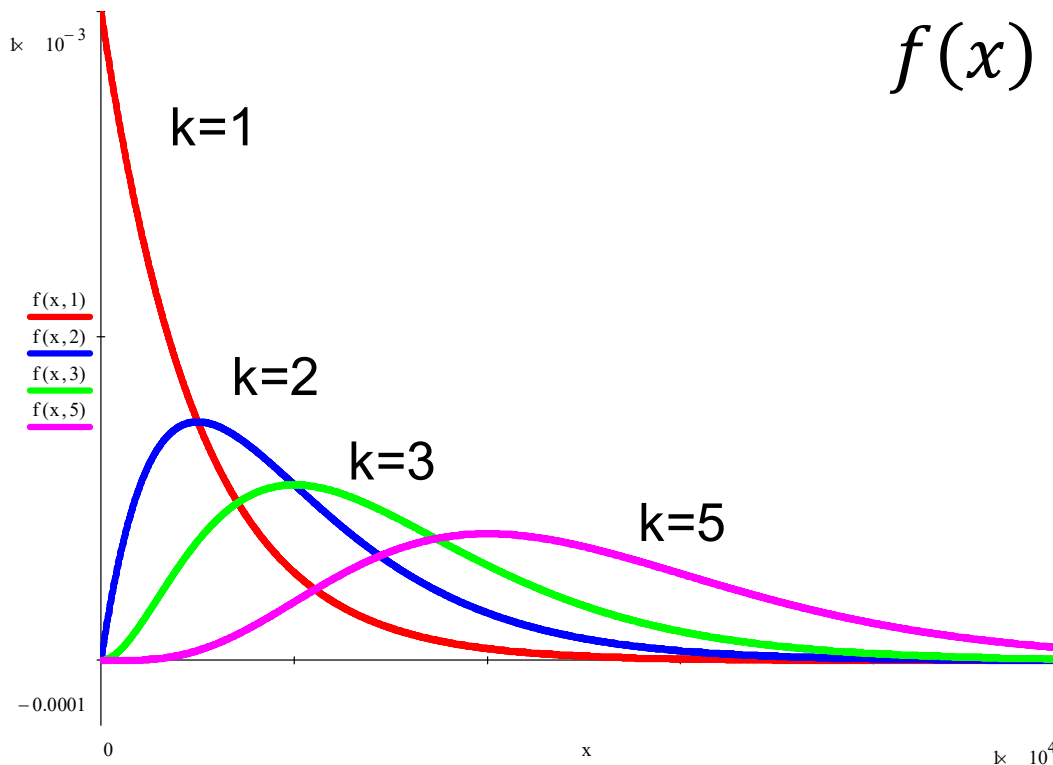
СМО $M/E_m/1$

Распределения случайных
величин

Распределение Эрланга часто используется как в ТМО, так и в других областях техники. Функция плотности распределения Эрланга выглядит следующим образом:

$$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x}$$

k: целое число
(параметр
формы)



При $k = 1$ распределение Эрланга сводится к экспоненциальному распределению.

Вообще, распределение Эрланга k -го порядка можно рассматривать как распределение суммы k экспоненциально распределенных случайных величин с параметром λ .

Математическое ожидание распределения Эрланга:

$$M[X] = \frac{k}{\lambda}$$

При моделировании времени обслуживания, распределенного по закону Эрланга k -го порядка можно представить, что заявка последовательно проходит k фаз обслуживания, причем длительность каждой из них распределена экспоненциально с параметром λ .

Важно понимать, что в действительности никаких фаз может и не быть – это всего лишь удобное представление распределения Эрланга.

Система $M/E_m/1$

Рассмотрим однолинейную СМО $M/E_m/1$ с накопителем неограниченной емкости.

На вход поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ .

Времена обслуживания заявок независимы и распределены по закону Эрланга с параметрами m и μ .

При анализе и моделировании такой СМО будем полагать, что заявка, заняв сервер, последовательно проходит m фаз обслуживания, и только по окончании всех этих фаз она освобождает сервер.

Пусть $v(t)$ – число заявок в СМО в момент t ;
и $\xi(t)$ – число фаз, которое осталось обслужиться
заявке, находящейся на сервере в этот момент.

Определим процесс $\{\eta(t), t \geq 0\}$:

- $\eta(t) = v(t)$, если $v(t) = 0$ (в СМО нет заявок);
- $\eta(t) = (v(t), \xi(t))$, если $v(t) > 0$.

Тогда, множество состояний процесса

$$X = \{0, (i, j)\}, i \geq 1, j \in [1, m]$$

Из состояния 0 возможен переход только в состояние $\{1, m\}$ с интенсивностью λ – поступление заявки.

Из состояния (i, j) , $i \geq 1, 2 \leq j \leq m$ возможны переходы в $(i+1, j)$ с интенсивностью λ ; в $(i, j-1)$ с интенсивностью μ .

Из состояния $(i, 1)$, $i \geq 2$ возможны переходы в $(i+1, 1)$ с интенсивностью λ ; в $(i-1, m)$ с интенсивностью μ .

Из состояния $(1, 1)$ возможны переходы в $(2, 1)$ с интенсивностью λ ; в 0 с интенсивностью μ .

Запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_{11}(t);$$

$$P'_{1j}(t) = -(\lambda + \mu)P_{1j}(t) + \mu P_{1,j+1}(t), \quad j \in [1, m-1];$$

$$P'_{1m}(t) = -(\lambda + \mu)P_{1m}(t) + \lambda P_0(t) + \mu P_{21}(t);$$

$$P'_{ij}(t) = -(\lambda + \mu)P_{ij}(t) + \lambda P_{i-1,j}(t) + \mu P_{i,j+1}(t), \\ i \geq 2, j \in [1, m-1];$$

$$P'_{im}(t) = -(\lambda + \mu)P_{im}(t) + \lambda P_{i-1,m}(t) + \mu P_{i+1,1}(t), \\ i \geq 2.$$

В стационарном режиме:

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_{11};$$

$$0 = -(\lambda + \mu)P_{1j} + \mu P_{1,j+1}, \quad j \in [1, m-1];$$

$$0 = -(\lambda + \mu)P_{1m} + \lambda P_0 + \mu P_{21};$$

$$0 = -(\lambda + \mu)P_{ij} + \lambda P_{i-1,j} + \mu P_{i,j+1},$$

$$i \geq 2, j \in [1, m-1];$$

$$0 = -(\lambda + \mu)P_{im} + \lambda P_{i-1,m} + \mu P_{i+1,1} \quad i \geq 2.$$

$$\sum P = 1$$

В стационарном режиме:

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_{11};$$

$$0 = -(\lambda + \mu)P_{1j} + \mu P_{1,j+1}, \quad j \in [1, m-1];$$

$$0 = -(\lambda + \mu)P_{1m} + \lambda P_0 + \mu P_{21};$$

$$0 = -(\lambda + \mu)P_{ij} + \lambda P_{i-1,j} + \mu P_{i,j+1},$$

$$i \geq 2, j \in [1, m-1];$$

$$0 = -(\lambda + \mu)P_{im} + \lambda P_{i-1,m} + \mu P_{i+1,1} \quad i \geq 2.$$

$$\sum P = 1$$

Полезно знать следующие соотношения
(доказательства в учебнике):

$$\lambda P_0 = \mu P_{11} \quad \lambda P_{i,*} = \mu P_{i,j+1} \quad \lambda = \mu P_{*,1}$$

$$P_{*,1} = P_{*,2} = \dots = P_{*,m} \quad P_{*,j} = \hat{\rho} \quad P_0 = 1 - \rho$$

где

$$\hat{\rho} = \frac{\lambda}{\mu} \quad \rho = \frac{m\lambda}{\mu} = \lambda b$$

b – среднее время обслуживания;

* обозначает суммирование по всем возможным значениям дискретного аргумента.

Необходимое и достаточное условие существования стационарного режима:

$$\rho = \frac{m\lambda}{\mu} = \lambda b < 1$$

Стационарная средняя длина очереди

$$Q = \frac{\rho^2 \left(1 + \frac{1}{m}\right)}{2(1 - \rho)}$$

Стационарное среднее число заявок в СМО

$$N = Q + \rho$$

Стационарные средние времена ожидания и пребывания заявок в системе можно получить из формул Литтла:

$$w = \frac{Q}{\lambda} = \frac{\rho(m+1)}{2\mu(1-\rho)}$$

$$v = \frac{N}{\lambda} = \frac{m}{\mu} \left[1 + \frac{\rho \left(1 + \frac{1}{m} \right)}{2(1-\rho)} \right]$$

Распределения случайных величин

1. Распределение Эрланга

$$E_k(\lambda) \equiv ERLA\left(\frac{1}{\lambda}, k\right)$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \cdot \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^n}{n!};$$

$$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!};$$

$$M[X] = \frac{k}{\lambda};$$

$$D[X] = \frac{k}{\lambda^2};$$

где $x \in [0, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$.

Распределения случайных величин

2. Распределение Вейбулла

$$W(\eta, \beta) \equiv WEIB(\eta, \beta)$$

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta};$$

$$f(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta};$$

$$M[X] = \eta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right);$$

$$D[X] = \eta^2 \cdot \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right)^2 \right];$$

где $x \in [0, \infty)$, $\beta, \eta > 0$.

Распределения случайных величин

3. Гамма-распределение

$$\Gamma(k, \theta) \equiv \text{GAMM}(\theta, k)$$

$$F(x) = \frac{\gamma\left(k, \frac{x}{\theta}\right)}{\Gamma(k)};$$

$$f(x) = \frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)\theta^k} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}};$$

$$M[X] = k\theta;$$

$$D[X] = k\theta^2;$$

где $x, k, \theta > 0$.

Распределения случайных величин

4. Логнормальное распределение

$$\mathbf{LN}(\mu, \sigma) \equiv \mathbf{LOGN}(\mu, \sigma)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{\ln x - \mu_L}{\sqrt{2} \sigma_L} \right];$$

$$f(x) = \frac{1}{x \sigma_L \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\ln x - \mu_L)^2}{2 \sigma_L^2} \right];$$

$$M[X] = \mu = \exp \left(\mu_L + \frac{\sigma_L^2}{2} \right);$$

$$D[X] = \sigma^2 = [e^{\sigma_L^2} - 1] \cdot \exp(2\mu_L + \sigma_L^2);$$

где $x, \sigma_L > 0, \mu_L \in \mathbb{R}$.

Распределения случайных величин

5. Гипоэкспоненциальное распределение 2-го порядка

(обобщенное распределение Эрланга 2-го порядка)

$$\mathbf{GE}_2(a, b) \equiv \text{EXPO}\left(\frac{1}{a}\right) + \text{EXPO}\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$F(x) = 1 - \frac{b}{b-a} e^{-ax} + \frac{a}{b-a} e^{-bx};$$

$$f(x) = \frac{ab}{a-b} (e^{-bx} - e^{-ax});$$

$$M[X] = \frac{1}{a} + \frac{1}{b};$$

$$D[X] = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2};$$

где $x \in [0, \infty)$, $a, b > 0$.

Распределения случайных величин

6. Гипоэкспоненциальное распределение 3-го порядка

(обобщенное распределение Эрланга 3-го порядка)

$$\mathbf{GE}_3(a, b, c) \equiv \text{EXPO}\left(\frac{1}{a}\right) + \text{EXPO}\left(\frac{1}{b}\right) + \text{EXPO}\left(\frac{1}{c}\right)$$

$$F(x) = 1 - \frac{bc \cdot e^{-ax}}{(a-b)(a-c)} - \frac{ac \cdot e^{-bx}}{(b-a)(b-c)} - \frac{ab \cdot e^{-cx}}{(c-a)(c-b)};$$

$$f(x) = abc \left[\frac{e^{-ax}}{(a-b)(a-c)} + \frac{e^{-bx}}{(b-a)(b-c)} + \frac{e^{-cx}}{(c-a)(c-b)} \right];$$

$$M[X] = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c};$$

$$D[X] = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2};$$

где $x \in [0, \infty)$, $a, b, c > 0$.

Распределения случайных величин

7. Распределение фазового типа (I)

(частный случай гипоэкспоненциального распределения 3-го порядка)

$$\mathbf{PH1}(a, b) \equiv \text{EXPO}\left(\frac{1}{a}\right) + \text{ERLA}\left(\frac{1}{b}, 2\right)$$

$$F(x) = 1 - \frac{b^2 \cdot e^{-ax}}{(a-b)^2} - \left[\frac{a(a-2b)}{(a-b)^2} + \frac{abx}{a-b} \right] \cdot e^{-bx};$$

$$f(x) = \frac{ab^2}{(a-b)^2} [e^{-ax} + (ax - bx - 1)e^{-bx}];$$

$$M[X] = \frac{1}{a} + \frac{2}{b};$$

$$D[X] = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2};$$

где $x \in [0, \infty)$, $a, b > 0$.

Распределения случайных величин

8. Распределение фазового типа (II)

(частный случай гипоэкспоненциального распределения 4-го порядка)

$$\mathbf{PH2}(a, b) \equiv \text{ERLA}\left(\frac{1}{a}, 2\right) + \text{ERLA}\left(\frac{1}{b}, 2\right)$$

$$F(x) = 1 + \left[\frac{b^2(b-3a)}{(a-b)^3} - \frac{ab^2x}{(a-b)^2} \right] \cdot e^{-ax} - \\ - \left[\frac{a^2(a-3b)}{(a-b)^3} + \frac{a^2bx}{(a-b)^2} \right] \cdot e^{-bx};$$

$$f(x) = \frac{2a^2b^2}{(a-b)^3} [e^{-ax} - e^{-bx}] + \frac{a^2b^2x}{(a-b)^2} [e^{-ax} + e^{-bx}];$$

$$M[X] = \frac{2}{a} + \frac{2}{b};$$

$$D[X] = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2};$$

где $x \in [0, \infty)$, $a, b > 0$.

Распределения случайных величин

9. Распределение фазового типа (III)

(частный случай гипоэкспоненциального распределения 4-го порядка)

$$\mathbf{PH3}(a, b) \equiv \text{EXPO}\left(\frac{1}{a}\right) + \text{ERLA}\left(\frac{1}{b}, 3\right)$$

$$F(x) = 1 + \frac{b^3 \cdot e^{-ax}}{(a-b)^3} - \left[\frac{ab^2x^2}{2(a-b)} + \frac{abx(a-2b)}{(a-b)^2} + \frac{b^3}{(a-b)^3} + 1 \right] \cdot e^{-bx};$$

$$f(x) = \frac{ab^3}{2(a-b)^3} [(a-b)^2x^2e^{-bx} - 2(a-b)xe^{-bx} - 2(e^{-ax} - e^{-bx})];$$

$$M[X] = \frac{1}{a} + \frac{3}{b};$$

$$D[X] = \frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2};$$

где $x \in [0, \infty)$, $a, b > 0$.

Распределения случайных величин

10. Гиперэкспоненциальное/распределение 2-го порядка

$\text{HM}_2(p, a, b)$

$$F(x) = p(1 - e^{-ax}) + (1 - p)(1 - e^{-bx});$$

$$f(x) = pae^{-ax} + (1 - p)be^{-bx};$$

$$M[X] = \frac{p}{a} + \frac{(1 - p)}{b};$$

$$D[X] = \frac{1}{b^2} + \frac{2b(b - 2a)}{a^2b^2}p - \left(\frac{a - b}{ab}\right)^2 p^2;$$

где $x \in [0, \infty)$, $a, b > 0$, $0 \leq p \leq 1$.