Лекция 3

Восстанавливаемые системы.

До этого момента, при изучении разделов теории надежности, мы предполагали, что исследуемые системы были *невосстанавливаемыми*, т.е. нас интересовала работа систем от момента включения до момента отказа системы в целом.

Предполагалось, также, что отказавшие элементы систем с резервированием не восстанавливаются.

Мы можем разделить все системы на восстанавливаемые и не восстанавливаемые довольно условно: один и тот же элемент в зависимости от окружающих условий и этапов эксплуатации может считаться восстанавливаемым или невосстанавливаемым.

В дальнейшем, будем предполагать, что после отказа элемент (система) проходит процедуру восстановления; при этом примем следующие допущения:

- отказ элемента (системы) <u>обнаруживается мгновенно</u>;
- следом за моментом отказа <u>мгновенно</u> начинается восстановление;
- время восстановления – это непрерывная случайная величина, <u>распределенная экспоненциально</u>;
- <u>количество ремонтных бригад неограниченно</u>, т.е. если одновременно имеются несколько отказавших элементов, каждый из них проходит процедуру восстановления без ожидания в очереди;

- восстановленный элемент (система) до момента включения в работу считается абсолютно надежным, т.е. элемент после ремонта обладает такими же характеристиками, что и новый элемент;
- после восстановления элемент (система) мгновенно подключается в работу, либо занимает место среди резервных элементов (ели это предусмотрено).

Наличие такого большого списка допущений связано с тем, что процедура восстановления в значительной мере связана с человеческим фактором, который очень сложно описать математически.

На практике каждое из приведенных выше утверждений может нарушаться:

- отказы не всегда замечаются вовремя,
- демонтаж отказавших элементов (и монтаж восстановленных) могут занимать продолжительное время,
- количество ремонтных бригад всегда ограничено,
- изделия после ремонта редко обладают таким же уровнем надежности, что и новые элементы.

Вероятность восстановления

Момент восстановления работоспособности объекта после отказа является случайным событием. Поэтому интервал времени от момента отказа до момента восстановления является случайной величиной и для характеристики ремонтопригодности может быть использована функция распределения этой случайной величины *T*.

Вероятностью восстановления называется вероятность того, что время восстановления работоспособного состояния объекта не превысит заданного:

$$P_{\text{в}}(t) = Pr\{T \leq t\}, \qquad t \geq 0.$$

Вероятность восстановления

Функция $P_{\text{в}}(t)$представляет собой интегральную функцию распределения случайной величины *T*, следовательно, вероятность восстановления является монотонно возрастающей функцией времени:

чем больше времени прошло с момента начала восстановления, тем больше вероятность того, что изделие будет восстановлено.

Мы предположили априори, что закон распределения времени до восстановления является экспоненциальным, тогда

$$P_{\text{в}}(t) = 1 - e^{-\mu t},$$

где μ - параметр распределения, называемый *интенсивностью восстановления*.

Среднее время восстановления

По аналогии со средней наработкой до отказа математическое ожидание времени восстановления работоспособного состояния объекта называется средним временем восстановления:

$$T_{\text{в}} = \int_0^{\infty} t f_{\text{в}}(t)dt = \int_0^{\infty} \left(1 - P_{\text{в}}(t)\right)dt\,;$$

где $f_{\text{в}}(t) = P'_{\text{в}}(t)$ - плотность вероятности времени восстановления.

Функция готовности

Аналогом вероятности безотказной работы невосстанавливаемых систем для систем с восстановлением является *функция готовности* - вероятность того, что объект окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается.

Однако, в отличии от ВБР функция готовности не убывает до нуля, а стремится к некоторому значению $K_{\text{г}} = A(\infty)$, которое называется (стационарным) коэффициентом готовности.

Расчет надежности систем с восстановлением

Рассмотрим техническую систему с определенной постоянной интенсивностью отказов λ.

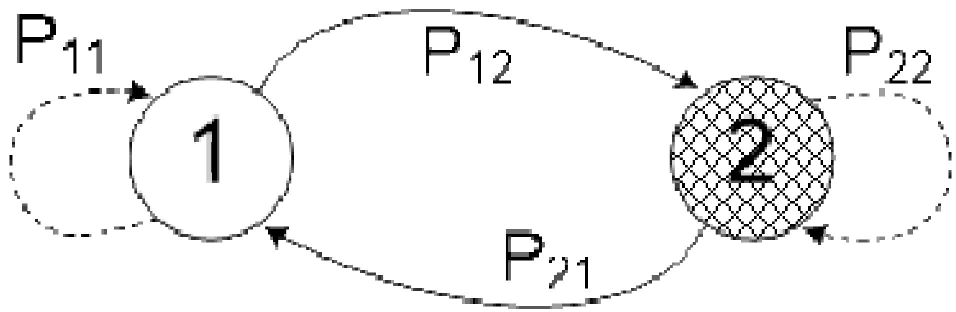
После отказа система мгновенно переходит в режим (состояние) восстановления.

Время до восстановления является непрерывной случайной величиной, распределенной экспоненциально с параметром μ (интенсивность восстановления).

По завершении восстановления система мгновенно переходит в рабочий режим (состояние) – цикл повторяется.

Расчет надежности систем с восстановлением

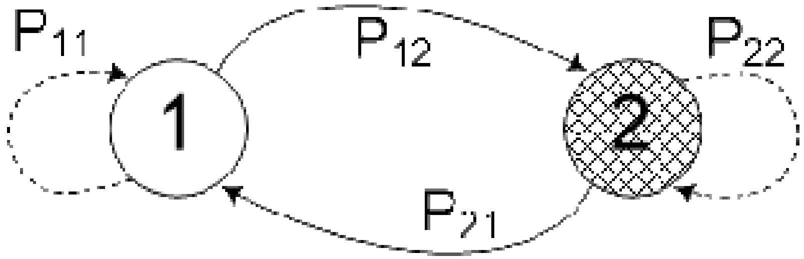
Наиболее подходящим способом представления переходов данной системы из состояния в состояние является граф состояний и переходов:



На рисунке *состояния* системы представлены *вершинами графа (круги)*, а *переходы – дугами*.

Обозначим работоспособное состояние как состояние 1, состояние отказа (восстановления) – как состояние 2.

Расчет надежности систем с восстановлением

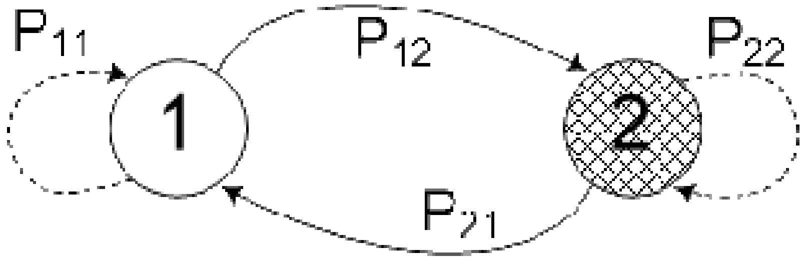


Вероятности P_{ii} не используются в расчетах, поэтому изображать на графах мы их не будем

Для каждого момента времени существует вероятность перехода системы из текущего состояния в следующее (P_{12} и P_{21}), а также вероятности того, что система в следующий момент времени останется в исходном состоянии (P_{11} и P_{22}). В данном случае вероятность P_{12} представляет собой вероятность отказа, а P_{21} - вероятность восстановления.

Для каждого i-го состояния сумма вероятностей переходов P_{ij} $(j = 1, 2)$ равна единице.

Расчет надежности систем с восстановлением

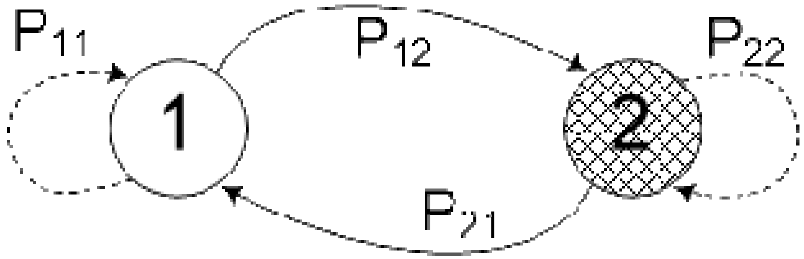


Система уравнений, определяющая вероятности состояний, такова:

$$P_1(t+\Delta t) = P_1(t)\cdot[1 - P_{12}(\Delta t)] + P_2(t)\cdot P_{21}(\Delta t);$$
$$P_2(t+\Delta t) = P_2(t)\cdot[1 - P_{21}(\Delta t)] + P_1(t)\cdot P_{12}(\Delta t).$$

Для простоты объяснения будем называть момент времени t – «сейчас», а $t+\Delta t$ – «следующий момент».

Расчет надежности систем с восстановлением



Тогда первое уравнение можно прочитать следующим образом:

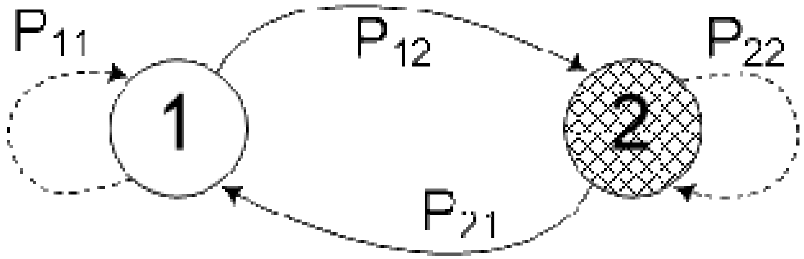
$$P_1(t+\Delta t) = P_1(t)\cdot[1-P_{12}(\Delta t)] + P_2(t)\cdot P_{21}(\Delta t);$$

Вероятность того, что система в следующий момент времени будет находиться в состоянии 1, равна…

… вероятности того, что сейчас она находится в состоянии 1 и **за время Δt** не перейдет в состояние 2…

… плюс вероятность того, что сейчас она находится в состоянии 2 и **за время Δt** перейдет в состояние 1

Расчет надежности систем с восстановлением



При $\Delta t \to 0$, $P_{ij}(\Delta t) \to \gamma_{ij} \cdot \Delta t$, где γ_{ij}- интенсивность перехода.

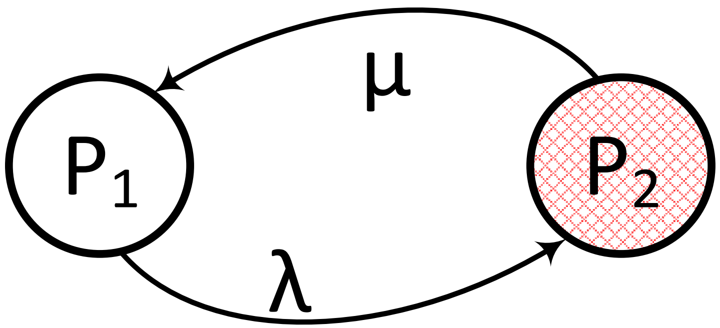
Используя определение производной, получаем:

$$\begin{cases} P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t); \\ P_2'(t) = \ \ \lambda P_1(t) - \mu P_2(t), \end{cases}$$

так как $\gamma_{12} = \lambda$ и $\gamma_{21} = \mu$.

Расчет надежности систем с восстановлением

Для каждого состояния имеем уравнение, в левой части которого стоит производная вероятности этого состояния.

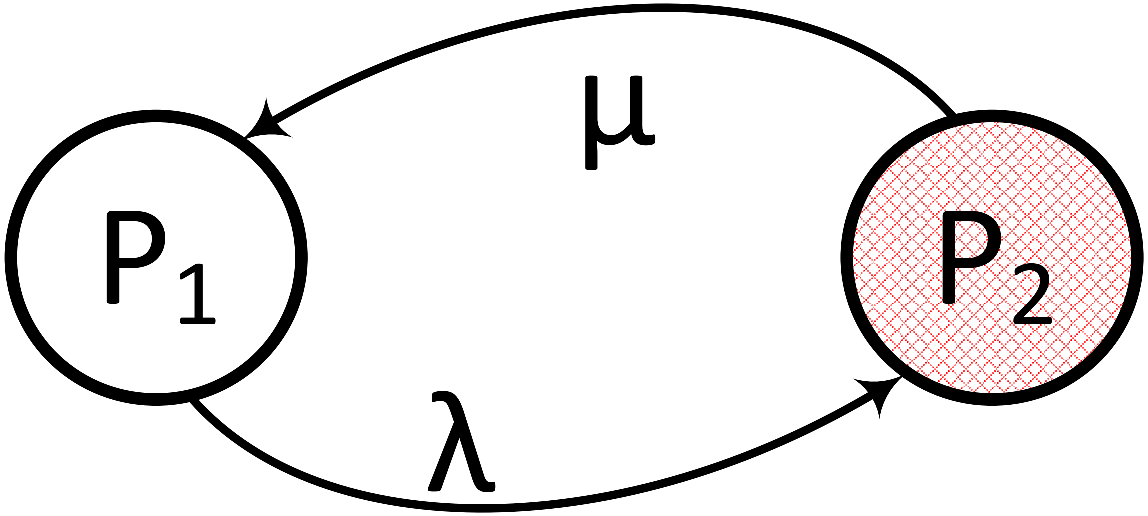


В правой части уравнения содержится столько слагаемых, сколько дуг связано с данным состоянием.

Каждая дуга представлена своей интенсивностью перехода, умноженной на вероятность состояния, из которого эта дуга выходит.

При этом входящие дуги учитываются со знаком «+», исходящие – со знаком «-».

Расчет надежности систем с восстановлением



$$\begin{cases} P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t) \\ P_2'(t) = \ \lambda P_1(t) - \mu P_2(t) \end{cases}$$

Расчет надежности систем с восстановлением

Решение полученной системы можно провести с использованием преобразования Лапласа. Это позволяет преобразовать систему дифференциальных уравнений в систему алгебраических уравнений.

$$p(t) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} P(s)$$

$$p'(t) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} sP(s) - p(0^+)$$

Примечание. Исторически принято для обозначения изображений по Лапласу использовать прописные буквы, а для обозначения оригиналов функций – строчные. Поскольку мы уже привыкли обозначать вероятность прописной буквой ($P(t)$), мы не будем придерживаться здесь этого правила.

Однако следует помнить, что $P(t)$ и $P(s)$ – это совершенно разные функции, причем

$$P(s)=L\{P(t)\}.$$

Расчет надежности систем с восстановлением

Считая, что в начальный момент времени система определенно находится в состоянии 1, получим:

$$\begin{cases} P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t) \\ P_2'(t) = \ \ \lambda P_1(t) - \mu P_2(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} sP_1(s) = -\lambda P_1(s) + \mu P_2(s) + 1 \\ sP_2(s) = \lambda P_1(s) - \mu P_2(s) \end{cases}$$

Из второго уравнения

$$P_2(s) = \frac{\lambda}{s+\mu} P_1(s)$$

Расчет надежности систем с восстановлением

Подставив этот результат в первое уравнение, в итоге получим:

$$P_1(s) = \frac{s+\mu}{s(s+\lambda+\mu)} \qquad P_2(s) = \frac{\lambda}{s(s+\lambda+\mu)}$$

Это является решением системы в области изображений.

Для перехода к оригиналам, воспользуемся обратным преобразованием Лапласа:

$$P_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_1(s)\} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Расчет надежности систем с восстановлением

$$P_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_1(s)\} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

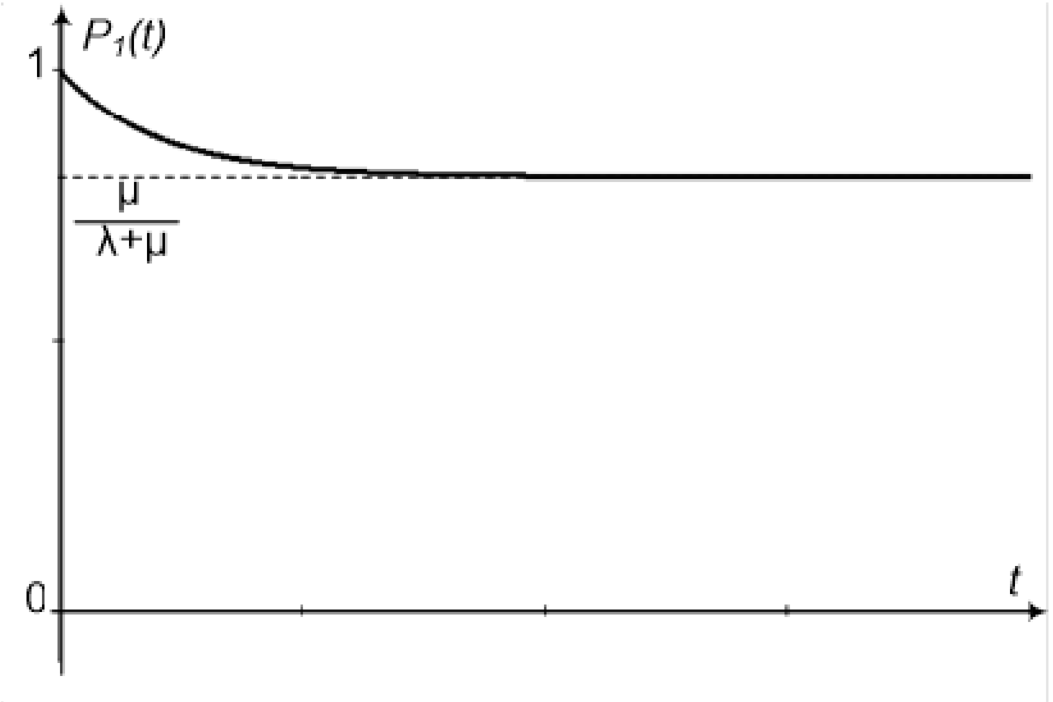
По определению, $P_1(t)$ - это вероятность того, что система в момент t будет находиться в работоспособном состоянии – функция готовности $A(t) = P_1(t)$.

По смыслу это очень похоже на определение ВБР, однако, для функции $P_1(t)$ не выполняется условие $P_1(\infty) = 0$.

Анализируя полученное решение, видно что $P_1(\infty) = K_{\text{г}} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

Расчет надежности систем с восстановлением

$$P_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_1(s)\} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$



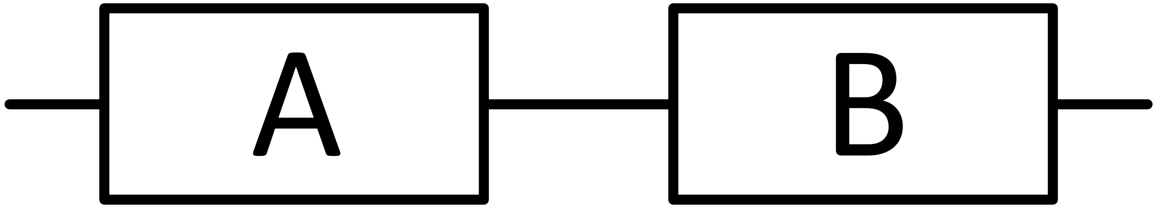
Расчет надежности систем с восстановлением

Несмотря на относительную простоту метода определения надежности восстанавливаемых систем с помощью графов, существуют и определенные проблемы:

- для случайных времен до отказа и до восстановления используется только экспоненциальное распределение;
- при увеличении числа элементов в рассматриваемой системе значительно увеличивается число возможных состояний системы, а, следовательно, и количество уравнений в системе.

Пример 1

Дана последовательная система, состоящая из двух элементов *A* и *B*, с интенсивностями отказа $\lambda_A = 0{,}001\ \text{ч}^{-1}$, $\lambda_B = 0{,}002\ \text{ч}^{-1}$ и с интенсивностями восстановления $\mu_A = 0{,}04\ \text{ч}^{-1}$, $\mu_B = 0{,}01\ \text{ч}^{-1}$.

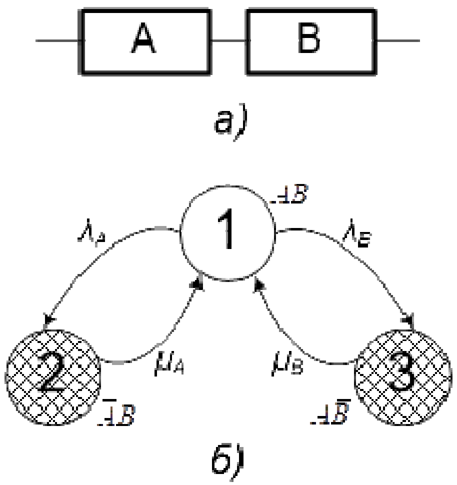


Найти функцию готовности и стационарный коэффициент готовности.

Пример 1

Решение:

Составим граф состояний и переходов для данной системы.

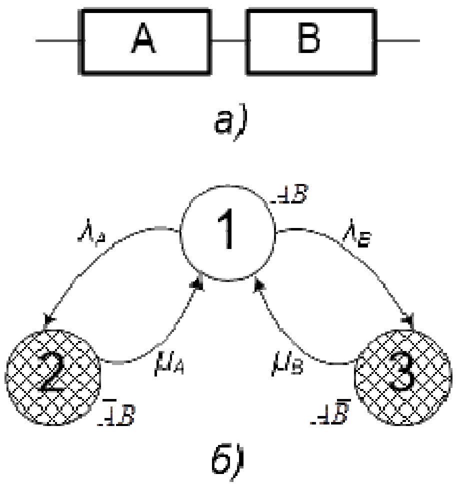


При этом будем не только обозначать состояния системы числами, но и подписывать их, используя логико-буквенные обозначения для состояний элементов (инверсия обозначает, что соответствующий элемент отказал).

Пример 1

Решение:

В начальном состоянии 1 оба элемента системы работоспособны.



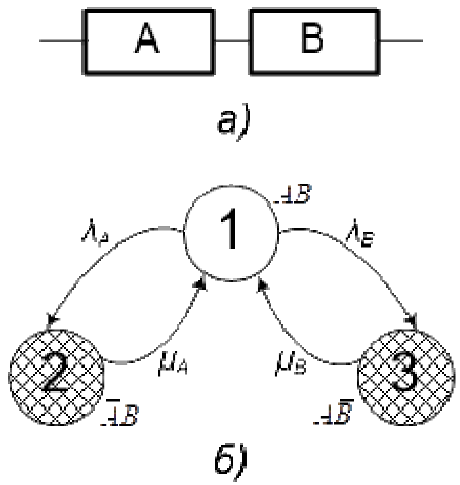
В этом состоянии возможны два разных события: отказ элемента А и отказ элемента В. Поэтому, рисуем две исходящие стрелки – в состояния 2 и 3.

Примечание. Мы предполагаем, что потоки отказов и потоки восстановлений являются **простейшими**. Из этого следует, что потоки являются также и **однородными**.

Таким образом, **невозможно** одновременное появление двух и более событий. Поэтому, **невозможным** является и **одновременный отказ элементов А и В**.

Пример 1

Решение:

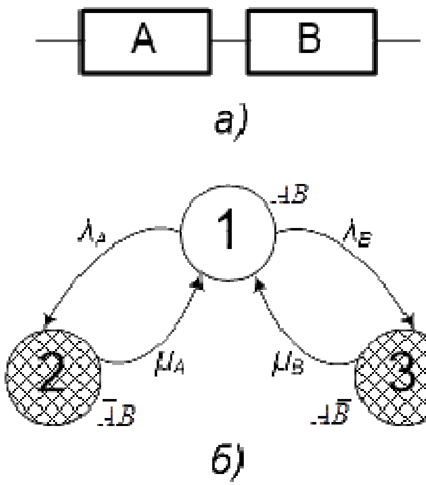


В состояниях 2 и 3 один элемент отказал, а один находится в работоспособном состоянии. Однако работоспособные элементы не могут отказать из состояний 2 и 3, т.к. система в целом в этих состояниях уже не работоспособна.

Также, в состояниях 2 и 3 начинается восстановление отказавших элементов, поэтому рисуем стрелки обратно в состояние 1.

Пример 1

Решение:



Запишем систему уравнений в области изображений по Лапласу:

$$\begin{cases} sP_1(s) = -(\lambda_A + \lambda_B)P_1(s) + \mu_A P_2(s) + \mu_B P_3(s) + 1 \\ sP_2(s) = \lambda_A P_1(s) - \mu_A P_2(s) \\ sP_3(s) = \lambda_B P_1(s) - \mu_B P_3(s) \end{cases}$$

Выражаем из полученной системы $P_2(s)$ и $P_3(s)$ через $P_1(s)$:

$$P_2(s) = \frac{\lambda_A}{s + \mu_A} P_1(s) \qquad P_3(s) = \frac{\lambda_B}{s + \mu_B} P_1(s)$$

и подставляем их в первое уравнение системы.

Пример 1

Решение:

$$sP_1(s) = -(\lambda_A + \lambda_B)P_1(s) + \frac{\lambda_A\mu_A}{s+\mu_A}P_1(s) + \frac{\lambda_B\mu_B}{s+\mu_B}P_1(s) + 1$$

Выражаем $P_1(s)$:

$$P_1(s) = \frac{s^2 + (\mu_A + \mu_B)s + \mu_A\mu_B}{s^3 + (\lambda_A + \lambda_B + \mu_A + \mu_B)s^2 + (\lambda_A\mu_B + \lambda_B\mu_A + \mu_A\mu_B)s}$$

Подставляя численные значения параметров, и выполняя обратное преобразование Лапласа, получим выражение для вероятности 1-го состояния (функции готовности системы) и значение стационарного коэффициента готовности:

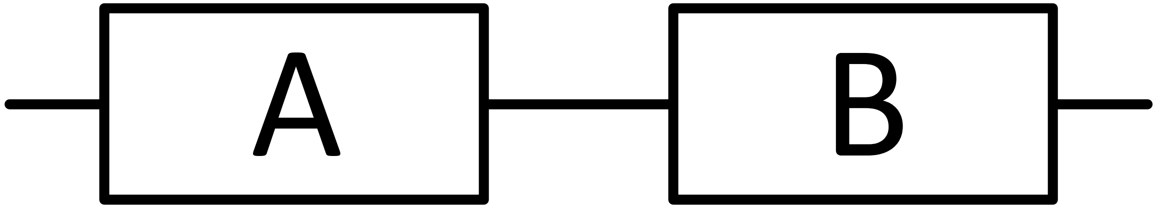
$$A(t) = P_1(t) \approx 0{,}816 + 0{,}028e^{-0{,}04107t} + 0{,}156e^{-0{,}0119t}$$
$$K_\text{г} = A(\infty) \approx 0{,}816.$$

Значительно упростить решение подобных задач можно в частных случаях, а именно, когда интенсивности отказов и/или восстановлений элементов равны.

В таких случаях, последствия отказов разных элементов одинаковы, т.е. нет никакой разницы, какой из элементов отказал первым, а какой вторым.

Пример 2

Дана последовательная система, состоящая из двух элементов *A* и *B*,
с интенсивностями отказа $\lambda_A = 0{,}001$ ч$^{-1}$, $\lambda_B = 0{,}002$ ч$^{-1}$
и с интенсивностями восстановления $\mu_A = \mu_B = \mu = 0{,}01$ ч$^{-1}$.



Найти функцию готовности и стационарный коэффициент готовности.

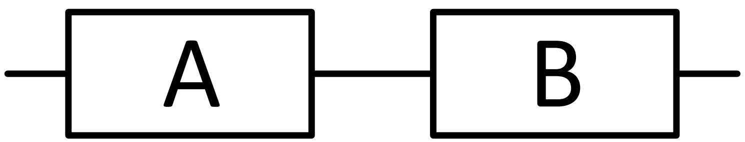
Пример 2

Решение:

Отказ любого элемента системы приводит к ее отказу.

При этом нет никакой разницы в интенсивности восстановления, какой бы элемент ни отказал.

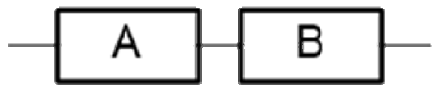
Подобную задачу также можно решать с использованием графа из Примера 1, однако гораздо удобнее упростить граф.



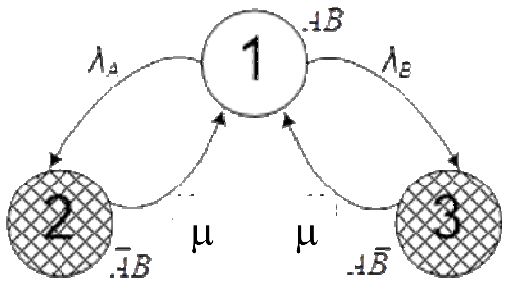
Пример 2

Решение:

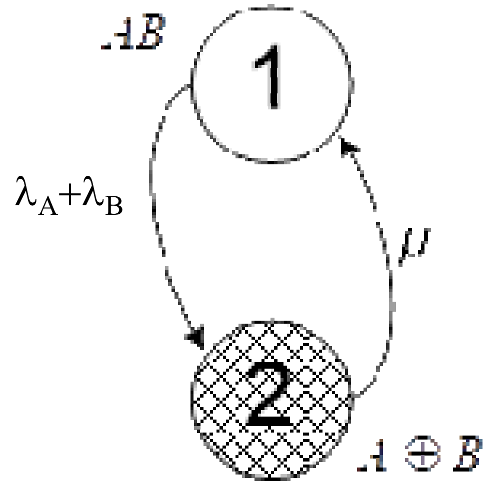
Состояние 1 эквивалентно первому состоянию из Примера 1 – в нем также работоспособны оба элемента.



а)



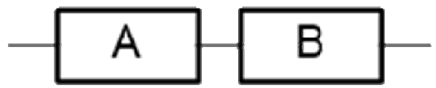
б)



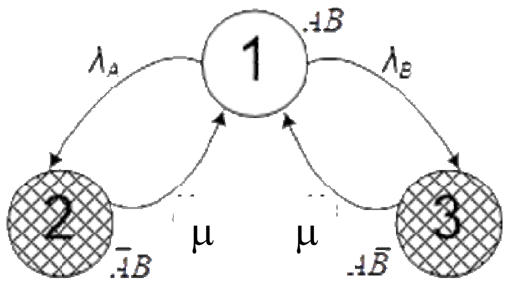
В состоянии 2 отказал какой-то один элемент – A или B, - но не оба элемента сразу (!).

Пример 2

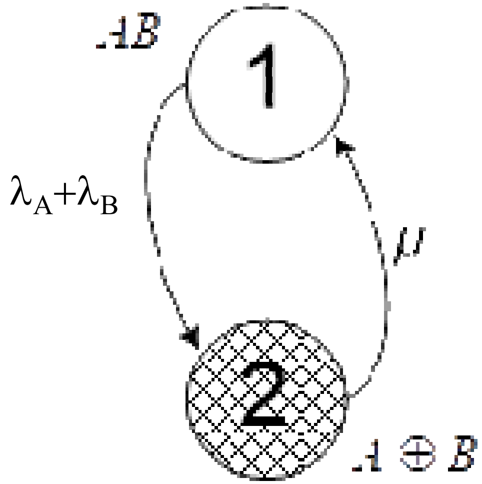
Решение:



а)



б)

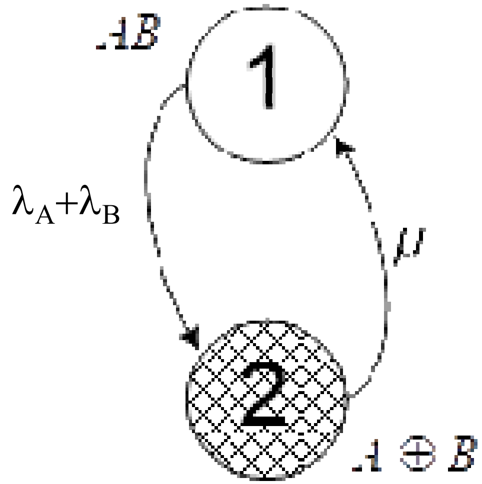


В состоянии 1 два элемента находятся в рабочем состоянии, поэтому их суммарная интенсивность отказов будет равна $\lambda_A + \lambda_B$.

В состоянии 2 только один элемент восстанавливается, поэтому интенсивность перехода из 2-го состояния в 1-ое равна μ.

Пример 2

Решение:



Мы уже получили решение для системы, соответствующей полученному графу.
С учетом изменившейся интенсивности отказов:

$$A(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_1(s)\} = \frac{\mu}{\lambda_A + \lambda_B + \mu} + \frac{\lambda_A + \lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B + \mu} e^{-(\lambda_A + \lambda_B + \mu)t}$$

$$= \frac{10}{13} + \frac{3}{13} e^{-0{,}013t}$$

$$K_\text{г} = A(\infty) = \frac{10}{13}$$

Поскольку обычно $\mu \gg \lambda$, функция готовности очень быстро стремится к своему стационарному (установившемуся) значению. Зачастую на практике определяют лишь стационарный коэффициент готовности. Это позволяет значительно сократить объем вычислений.

Поскольку стационарный режим характеризуется тем, что производные равны нулю (функции больше не меняются), в системе дифференциальных уравнений необходимо приравнять к нулю левые части уравнений и дополнить систему уравнением

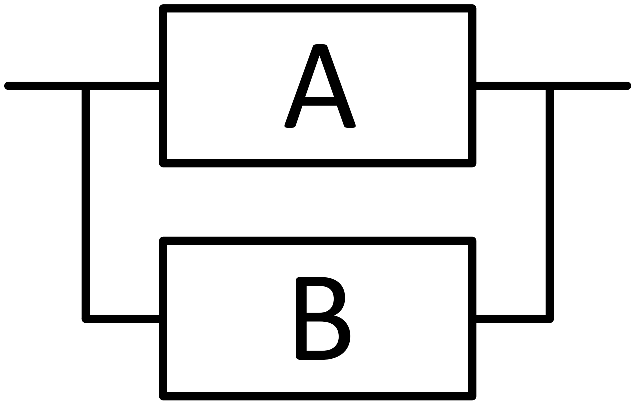
$$\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$$

где N – количество состояний.

Пример 3

Дана параллельная система из двух элементов с «горячим» резервированием.

Интенсивности отказов и восстановлений элементов одинаковы и равны $\lambda = 0{,}001$ ч$^{-1}$ и $\mu = 0{,}01$ ч$^{-1}$ соответственно.

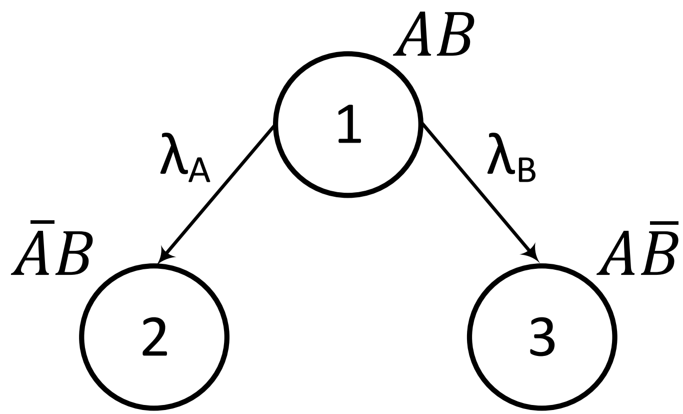


Найти стационарный коэффициент готовности.

Пример 3

Решение:

Составим неупрощенный граф состояний и переходов для данной системы.



В начальном состоянии 1 оба элемента А и В работоспособны, следовательно, возможны два события – отказ А и отказ В.

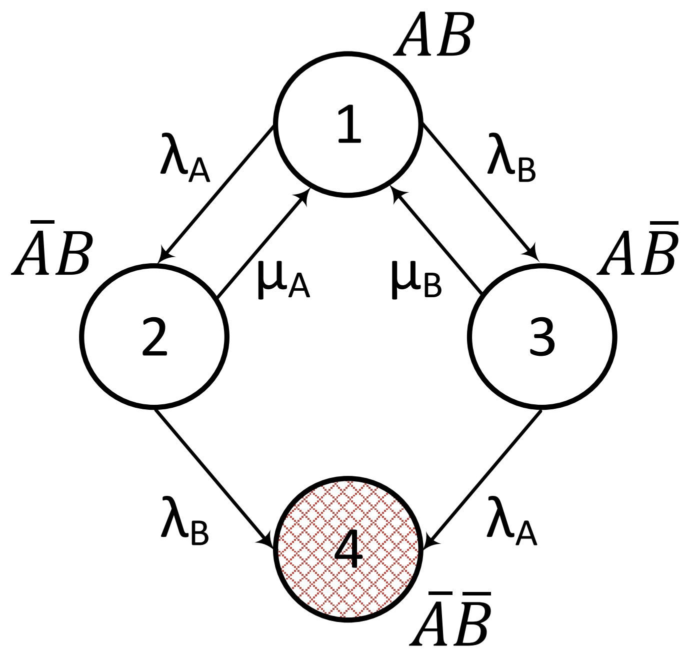
Это приводит нас к двум новым состояниям – 2 и 3 – в каждом из которых не работает (восстанавливается) один элемент.

Однако, в каждом из этих двух состояний один элемент по-прежнему работоспособен.

Пример 3

Решение:

Отказавшие элементы могут быть восстановлены, что возвращает систему в начальное состояние.



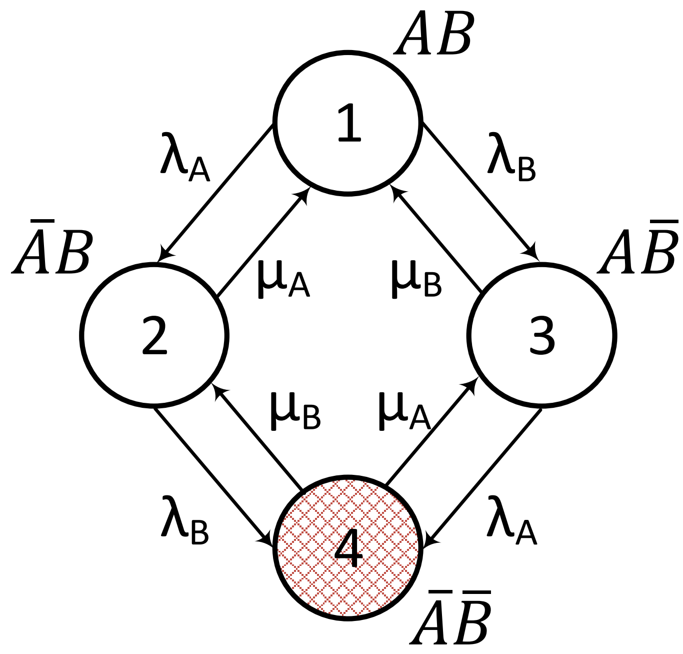
Элементы, все еще работающие в состояниях 2 и 3, также могут отказать, переводя систему в состояние отказа (4).

Пример 3

Решение:

И наконец, отказавшие элементы из состояния 4 могут быть восстановлены, переводя систему в состояние 2 или состояние 3.

Полученный граф может использоваться для определения готовности системы, однако его можно упростить.



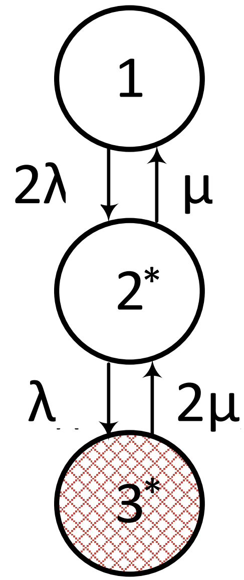
Поскольку при «горячем» резервировании оба элемента находятся в одинаковых условиях (несут полную нагрузку), их деление на основной и резервный элементы является условным.

Пример 3

Решение:

Отказ любого из элементов приведет к тому, что этот элемент будет восстанавливаться с интенсивностью восстановления одинаковой для всех элементов;

интенсивность отказов оставшегося элемента также не будет зависеть от того, какой элемент продолжит работу.



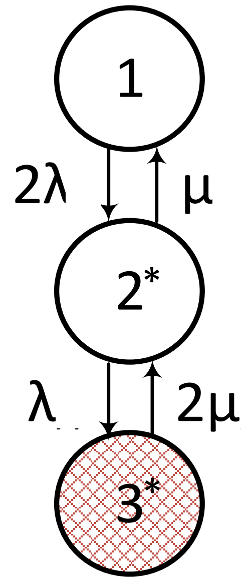
В упрощенном графе состояние 2* эквивалентно объединению состояний 2 и 3 исходного графа, а состояние 3* эквивалентно состоянию 4.

Пример 3

Решение:

Запишем систему уравнений в области времени:

$$\begin{cases} P_1'(t) = -2\lambda P_1(t) + \mu P_2(t); \\ P_2'(t) = \ 2\lambda P_1(t) - (\lambda + \mu) P_2(t) + 2\mu P_3(t); \\ P_3'(t) = \lambda P_2(t) - 2\mu P_3(t) \end{cases}$$



Приравняем производные к нулю и добавим уравнение

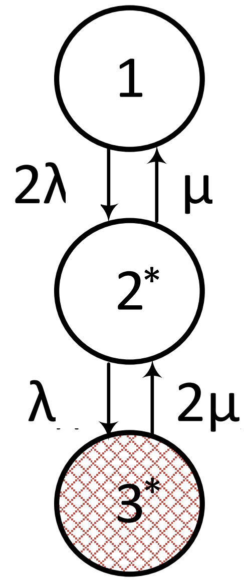
$$\begin{cases} 0 = -2\lambda P_1 + \mu P_2; \\ 0 = 2\lambda P_1 - (\lambda + \mu) P_2 + 2\mu P_3; \\ 0 = \lambda P_2 - 2\mu P_3; \\ 1 = P_1 + P_2 + P_3. \end{cases}$$

Пример 3

Решение:

Используя первое и третье уравнения, получим

$$P_1 = \frac{\mu}{2\lambda}P_2; \quad P_3 = \frac{\lambda}{2\mu}P_2$$



Подставим эти выражения в последнее уравнение:

$$\frac{\mu}{2\lambda}P_2 + P_2 + \frac{\lambda}{2\mu}P_2 = 1 \Longrightarrow \left(\frac{\mu}{2\lambda} + 1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right)P_2 = 1$$

Получим

$$P_2 = \frac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}; \quad P_1 = \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}; \quad K_\text{г} = P_1 + P_2 = \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} \approx 0{,}992$$

Лекция 3

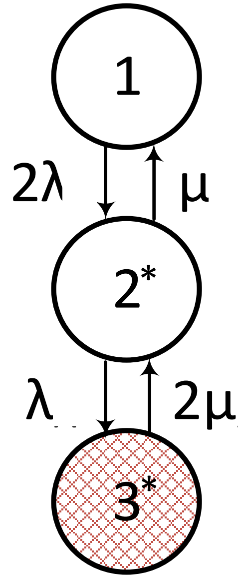
Еще одной областью применения графов является определение среднего времени до отказа восстанавливаемой системы в целом.

Аналогично расчету коэффициента готовности, средняя наработка до отказа должна быть равна сумме средних времен пребывания системы во всех ее работоспособных состояниях.

Для этого в системе уравнений в изображениях по Лапласу необходимо принять $s = 0$, заменить все P_i на T_i, и исключить из системы все уравнения, описывающие неработоспособные состояния и все слагаемые, содержащие вероятности неработоспособных состояний.

Пример 4

Найти среднюю наработку до отказа системы из Примера 3.



Решение:

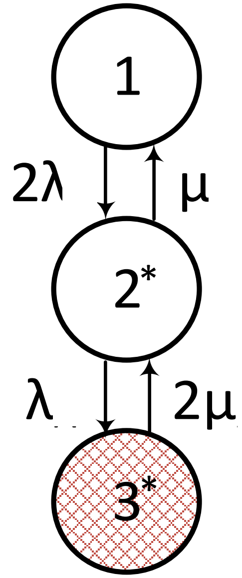
$$\begin{cases} \cancel{sP_1}(s) = -2\lambda P_1(s) + \mu P_2(s) + 1; \\ \cancel{sP_2}(s) = \ 2\lambda P_1(s) - (\lambda+\mu)P_2(s) + \cancel{2\mu P_3(s);} \\ \cancel{sP_3(s) = \lambda P_2(s) - 2\mu P_3(s)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -2\lambda T_1 + \mu T_2 + 1; \\ 0 = \ 2\lambda T_1 - (\lambda+\mu)T_2. \end{cases}$$

Пример 4

Решение:

$$\begin{cases} 0 = -2\lambda T_1 + \mu T_2 + 1; \\ 0 = 2\lambda T_1 - (\lambda + \mu) T_2(s); \end{cases}$$



Решив систему, получим

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{\lambda + \mu}{2\lambda^2} \\ T_2 = \dfrac{1}{\lambda} \end{cases} \Longrightarrow T_{cp} = T_1 + T_2 = \frac{3\lambda + \mu}{2\lambda^2} = 6500 \text{ ч}$$

Поскольку обычно $\mu \gg \lambda$, функция готовности очень быстро стремится к своему стационарному (установившемуся) значению. Зачастую на практике определяют лишь стационарный коэффициент готовности. Это позволяет значительно сократить объем вычислений.

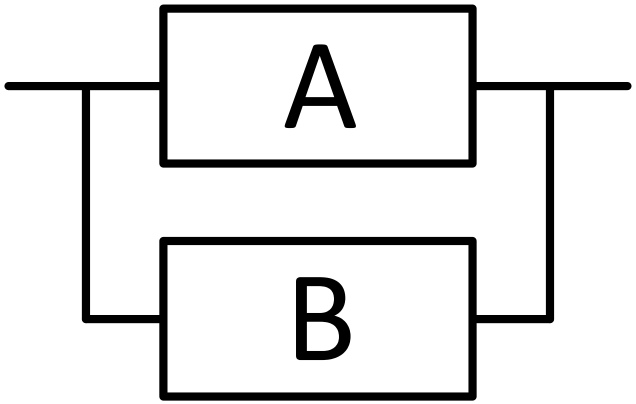
Поскольку стационарный режим характеризуется тем, что производные равны нулю (функции больше не меняются), в системе дифференциальных уравнений необходимо приравнять к нулю левые части уравнений и дополнить систему уравнением

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$$

где N – количество состояний.

Пример 3

Дана параллельная система из двух элементов с «горячим» резервированием.
Интенсивности отказов и восстановлений элементов одинаковы и равны $\lambda = 0{,}001\ ч^{-1}$ и $\mu = 0{,}01\ ч^{-1}$ соответственно.



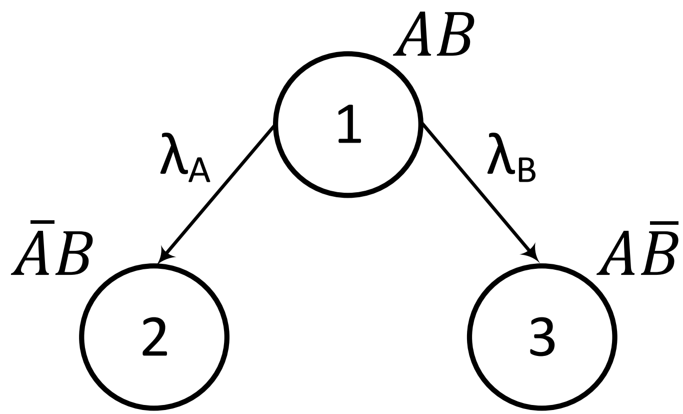
Найти стационарный коэффициент готовности.

Пример 3

Решение:

Составим неупрощенный граф состояний и переходов для данной системы.

В начальном состоянии 1 оба элемента A и B работоспособны, следовательно, возможны два события – отказ A и отказ B.



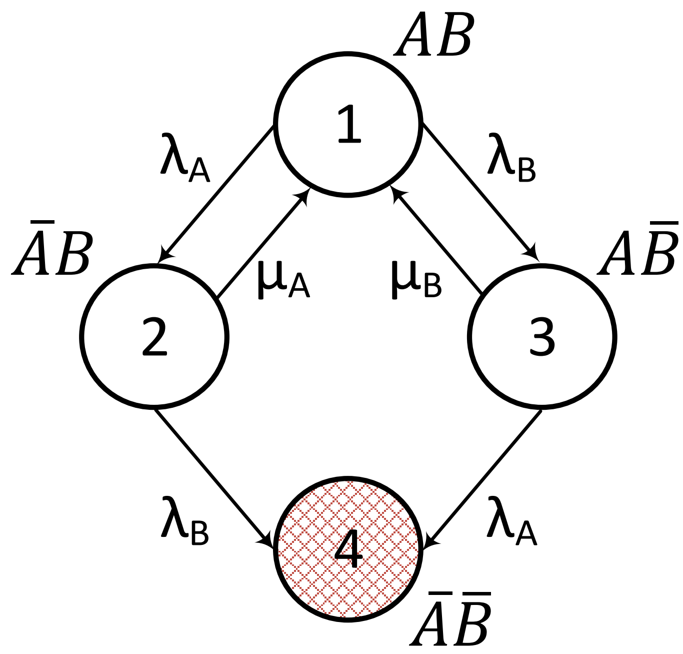
Это приводит нас к двум новым состояниям – 2 и 3 – в каждом из которых не работает (восстанавливается) один элемент.

Однако, в каждом из этих двух состояний один элемент по-прежнему работоспособен.

Пример 3

Решение:

Отказавшие элементы могут быть восстановлены, что возвращает систему в начальное состояние.

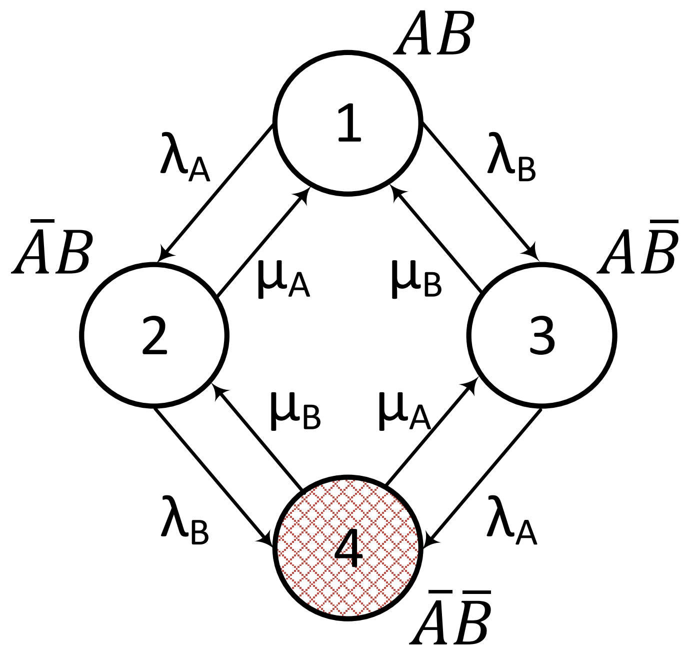


Элементы, все еще работающие в состояниях 2 и 3, также могут отказать, переводя систему в состояние отказа (4).

Пример 3

Решение:

И наконец, отказавшие элементы из состояния 4 могут быть восстановлены, переводя систему в состояние 2 или состояние 3.



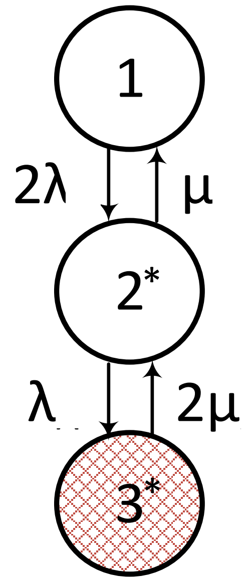
Полученный граф может использоваться для определения готовности системы, однако его можно упростить.

Поскольку при «горячем» резервировании оба элемента находятся в одинаковых условиях (несут полную нагрузку), их деление на основной и резервный элементы является условным.

Пример 3

Решение:

Отказ любого из элементов приведет к тому, что этот элемент будет восстанавливаться с интенсивностью восстановления одинаковой для всех элементов;



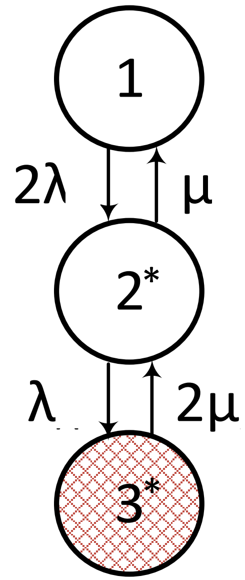
интенсивность отказов оставшегося элемента также не будет зависеть от того, какой элемент продолжит работу.

В упрощенном графе состояние 2* эквивалентно объединению состояний 2 и 3 исходного графа, а состояние 3* эквивалентно состоянию 4.

Пример 3

Решение:

Запишем систему уравнений в области времени:



$$\begin{cases} P_1'(t) = -2\lambda P_1(t) + \mu P_2(t); \\ P_2'(t) = 2\lambda P_1(t) - (\lambda + \mu) P_2(t) + 2\mu P_3(t); \\ P_3'(t) = \lambda P_2(t) - 2\mu P_3(t) \end{cases}$$

Приравняем производные к нулю и добавим уравнение

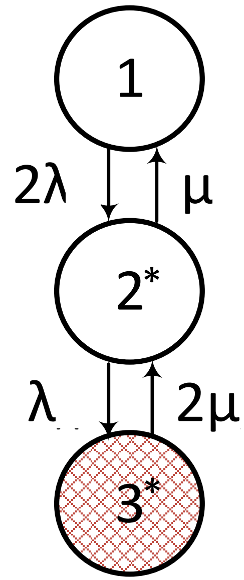
$$\begin{cases} 0 = -2\lambda P_1 + \mu P_2; \\ 0 = 2\lambda P_1 - (\lambda + \mu) P_2 + 2\mu P_3; \\ 0 = \lambda P_2 - 2\mu P_3; \\ 1 = P_1 + P_2 + P_3. \end{cases}$$

Пример 3

Решение:

Используя первое и третье уравнения, получим

$$P_1 = \frac{\mu}{2\lambda} P_2; \qquad P_3 = \frac{\lambda}{2\mu} P_2$$



Подставим эти выражения в последнее уравнение:

$$\frac{\mu}{2\lambda} P_2 + P_2 + \frac{\lambda}{2\mu} P_2 = 1 \Longrightarrow \left(\frac{\mu}{2\lambda} + 1 + \frac{\lambda}{2\mu} \right) P_2 = 1$$

Получим

$$P_2 = \frac{2\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2}; \quad P_1 = \frac{\mu^2}{(\lambda + \mu)^2}; \quad K_\text{г} = P_1 + P_2 = \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2} \approx 0{,}992$$

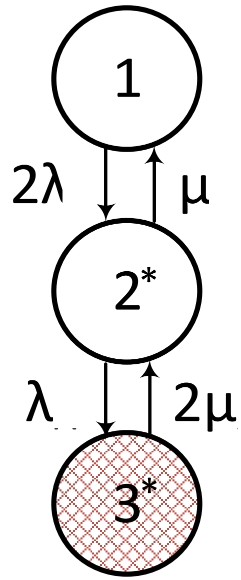
Еще одной областью применения графов является определение среднего времени до отказа восстанавливаемой системы в целом.

Аналогично расчету коэффициента готовности, средняя наработка до отказа должна быть равна сумме средних времен пребывания системы во всех ее работоспособных состояниях.

Для этого в системе уравнений в изображениях по Лапласу необходимо принять $s = 0$, заменить все P_i на T_i, и исключить из системы все уравнения, описывающие неработоспособные состояния и все слагаемые, содержащие вероятности неработоспособных состояний.

Пример 4

Найти среднюю наработку до отказа системы из Примера 3.



Решение:

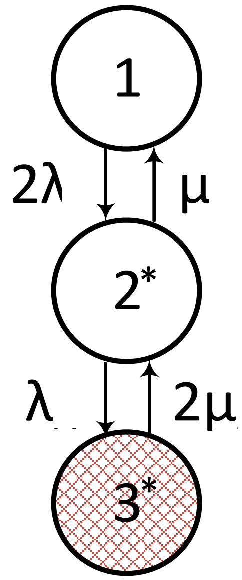
$$\begin{cases} \cancel{sP_1}(s) = -2\lambda P_1(s) + \mu P_2(s) + 1; \\ \cancel{sP_2}(s) = \ 2\lambda P_1(s) - (\lambda + \mu) P_2(s) + \cancel{2\mu P_3(s);} \\ \cancel{sP_3(s) = \lambda P_2(s) - 2\mu P_3(s)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -2\lambda T_1 + \mu T_2 + 1; \\ 0 = \ 2\lambda T_1 - (\lambda + \mu) T_2. \end{cases}$$

Пример 4

Решение:

$$\begin{cases} 0 = -2\lambda T_1 + \mu T_2 + 1; \\ 0 = 2\lambda T_1 - (\lambda + \mu) T_2(s); \end{cases}$$



Решив систему, получим

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{\lambda + \mu}{2\lambda^2} \\ T_2 = \dfrac{1}{\lambda} \end{cases} \Longrightarrow T_{cp} = T_1 + T_2 = \frac{3\lambda + \mu}{2\lambda^2} = 6500 \text{ ч}$$

Лекция 4

Лекция 4

Расчёт необходимого количества запасного имущества и приборов (ЗИП) для устройств и систем

ЗИП – запасное имущество и приборы, придаваемые системам и устройствам с целью обеспечения их ремонта в процессе эксплуатации.

Практика показывает, что затраты на систему ЗИП сравнимы с затратами на изделие, поэтому возникает задача расчёта системы ЗИП, обеспечивающей заданный уровень надёжности изделия при минимальных затратах.

Практически любой используемый ЗИП можно построить из следующих комплектов:

- одиночный комплект ЗИП (ЗИП–О);
- групповой комплект ЗИП (ЗИП–Г);
- ремонтный комплект ЗИП (ЗИП–РО).

Одиночный комплект ЗИП (ЗИП–О) – это комплект запасных конструктивных элементов, придаваемый непосредственно изделию с целью обеспечения его надёжности при длительном использовании.

Групповой комплект ЗИП (ЗИП–Г) – это комплект, придаваемый группе изделий для пополнения одиночных комплектов по мере их расходования, или для обеспечения надёжности изделий по тем типам элементов, которые отсутствуют в номенклатуре одиночных комплектов ЗИП.

Ремонтный комплект ЗИП (ЗИП–РО) – это комплект ЗИП ремонтного органа, придаваемый ему с целью обеспечения работоспособности при обслуживании изделия.

Модель работы системы с ЗИП, в простейшем случае, соответствует модели работы системы, резервированной замещением (холодный резерв).

Вероятность безотказной работы системы в этом случае определяется выражением

$$P_C(t) = e^{-\lambda_C t} \cdot \sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda_C t)^i}{i!}$$

где m – число резервных элементов в системе;
λ_C - интенсивность отказов резервируемого элемента.

Приведённое выражение можно использовать для расчёта необходимого количества элементов ЗИПа, если под m понимать число элементов в ЗИПе конкретного наименования, а под временем t – время, на которое рассчитывается ЗИП, или время пополнения ЗИП – $t_{\text{п}}$.

Пусть система состоит из n групп элементов. Каждая j-я группа в свою очередь, состоит из N_j элементов, причём, λ_j – интенсивность отказов элементов j-й группы.

Считается, что в системе с ЗИПом все группы равнонадёжны и имеют основное соединение, т. е. отказ любой группы приводит к отказу системы в целом. Тогда:

$$P_C(t) = P_j{}^n(t)$$

Таким образом, если ВБР системы задана, то ВБР j-й группы элементов будет равна:

$$P_j(t) = \sqrt[n]{P_C(t)} \approx 1 - \frac{1 - P_C(t)}{n}$$

Суммарная интенсивность отказов элементов j-й группы с учётом числа элементов в группе будет равна:

$$\lambda_{\text{ГР}_j} = N_j \lambda_j$$

Тогда можно записать

$$P_j(t) = e^{-N_j \lambda_j t} \cdot \sum_{i=0}^{m} \frac{\left(N_j \lambda_j t\right)^i}{i!}$$

Из последней формулы можно найти число m – количество элементов, которое необходимо иметь в ЗИПе для обеспечения эксплуатации системы с заданной надёжностью в течение заданного промежутка времени – времени пополнения ЗИПа.

На практике расчёт ЗИПа проводится из следующих рассуждений:

Пусть λ – интенсивность отказов элемента группы, $t_{\text{п}}$ – время пополнения ЗИПа.

Очевидно, чем больше λ и $t_{\text{п}}$, тем большее количество запасных элементов потребуется при эксплуатации изделия.

Для пуассоновского потока отказов вероятность того, что число отказов за время t будет *не больше* m, равна:

$$P_{n\le m}(t) = e^{-\lambda t} \cdot \sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

Вероятность того, что число отказов за время t будет *больше* m, равна:

$$P_{n>m}(t) = e^{-\lambda t} \cdot \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = 1 - P_{n\le m}(t)$$

Значения $P_{n>m}(t)$, определяющие вероятность того, что число отказавших элементов за время $t_{\text{п}}$ будет больше числа элементов, находящихся в ЗИПе, называются *степенью недостаточности ЗИПа*.

Значения $P_{n\le m}(t)$ называются *степенью достаточности ЗИПа.*

Степень достаточности ЗИП задаётся, обычно, в пределах $0.9 \div 0.99$.

Исходя из выше сказанного, процедура определения числа запасных элементов некоторого j-го типа для случая, когда элементы после отказа не восстанавливаются, может быть определена следующим образом.

Пусть для элементов j-й группы заданы: λ_j – интенсивность отказов одного элемента группы; $t_{\text{п}_j}$ – время пополнения ЗИПа; N_j – число элементов в j-й группе; $P_{\text{дост}}$ – достаточность ЗИПа.

Определим суммарную интенсивность отказов элементов j-й группы

$$\lambda_{\text{гр}_j} = N_j \lambda_j$$

Далее подбираем значение m такое, чтобы

$$P_{n \leq m}(t) = e^{-\lambda_{\text{ГР}_j} t_{\text{п}_j}} \cdot \sum_{i=0}^{m} \frac{\left(\lambda_{\text{ГР}_j} t_{\text{п}_j}\right)^i}{i!} \geq P_{\text{дост}}$$

Найденное значение m определяет необходимое значение количества элементов j-й группы в ЗИПе.

Следует иметь в виду, что если рассчитанное значение m равно 0, в ЗИП все равно нужно поместить один элемент данной группы.

Рассмотренная методика расчета применяется для невосстанавливаемых элементов.

Если элементы группы восстанавливаются после отказа, то время пополнения ЗИПа принимается равным среднему времени восстановления элемента в ремонтном органе.

Далее расчет необходимого количества элементов в ЗИПе проводится также, как для невосстанавливаемых объектов.

Некоторые вопросы эксплуатационной надежности технических систем

Организация эксплуатации изделий и систем существенным образом влияет на их надёжность. Среди мероприятий, направленных на повышение эксплуатационной надёжности систем важное место отводится техническому обслуживанию.

Под техническим обслуживанием (ТО) понимается комплекс организационных и технических мероприятий, направленных на предупреждение отказов технических систем, на обеспечение их исправного состояния в процессе эксплуатации и готовности к их использованию.

К основным задачам технического обслуживания относятся:

- Предупреждение ускоренного износа и старения объектов;
- Поддержание основных технических характеристик элементов и систем на заданном уровне;
- Продление межремонтных сроков эксплуатации систем.

Основу технического обслуживания составляют <u>профилактические работы</u> или обслуживание и <u>регламентные проверки</u>.

Профилактическое обслуживание – это система предупредительных мер, направленных на снижение вероятности возникновения отказов (технические осмотры, регулировка, замена комплектующих элементов, восстановление защитных покрытий, смазка, чистка и т. д.).

Профилактическое обслуживание может быть организовано по принципу:

- регламентного обслуживания;
- календарного обслуживания;
- комбинированного обслуживания.

Регламентное обслуживание – обслуживание, которое проводится по достижении параметрами изделия некоторых регламентированных показателей.
Этот вид обслуживания применяется тогда, когда известна связь работоспособности изделия и показателей некоторых его технических параметров, например, силы тока, напряжения, сопротивления, яркости и т. д. Эти параметры изделий называются главными параметрами.

Если главный параметр, определяющий работоспособность изделия – время, в течение которого изделие эксплуатируется или хранится, то профилактическое обслуживание назначается в строго определённые календарные сроки вне зависимости от состояния изделия.

Такое профилактическое обслуживание называется регламентными календарными проверками или календарными регламентами.

Статистическая оценка времени проведения профилактических работ

Сущность метода состоит в том, что, на основе статистических оценок одного из определяющих работоспособность системы параметров, производится прогнозирование момента её отказа.

При этом определяющим параметром системы называется такой наблюдаемый параметр, который однозначно характеризует её техническое состояние, например, выходная или потребляемая мощность, точность и т. д.

Этот параметр должен измеряться или определяться непрерывно или в дискретные моменты времени.

Для каждого определяющего параметра $x(t)$ устанавливаются *эксплуатационные допуски*, в которых он может находиться в работоспособном состоянии, т. е. $\alpha < x(t) < \beta$.

Опыт эксплуатации систем показывает, что плотность распределения определяющего параметра подчиняется нормальному закону распределения, параметры же распределения – математическое ожидание $m(t)$ и дисперсия $D(t) = \sigma^2(t)$ - являются функциями времени.

Поэтому выражение для плотности распределения будет иметь вид:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp\left\{-\frac{[x(t) - m(t)]^2}{2\sigma^2(t)}\right\}$$

Вероятность исправного состояния системы, т. е. вероятность нахождения определяющего параметра в пределах допусков для любого момента времени может быть определена по формуле:

$$P_{\text{доп}}(t) = \Pr\{\alpha < x(t) < \beta\} = \Phi_0\left[\frac{\beta - m^*(t)}{\sigma^*(t)}\right] - \Phi_0\left[\frac{\alpha - m^*(t)}{\sigma^*(t)}\right]$$

где $m^*(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i(t)}{n}$ – статистическая оценка математического ожидания параметра $x(t)$ в момент времени t; $\sigma^*(t) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[x_i(t) - m^*(t)]^2}$ – статистическая оценка среднего квадратичного отклонения параметра $x(t)$ в момент времени t; $\Phi_0(u)$ – функция *стандартного нормального распределения*; n – объем выборки (число наблюдений).

Если задана требуемая вероятность $P_{\text{треб}}$ нахождения определяющего параметра в пределах допуска, то рекомендуемое время проведения профилактических работ $t_{\text{пр}}$ определяется из условия

$$P_{\text{доп}}\left(t_{\text{пр}}\right) \geq P_{\text{треб}}$$

Если для определяющего параметра установлен односторонний допуск α, то есть $\alpha < x(t) < \infty$, то выражение для вероятности примет следующий вид:

$$P(t) = \Pr\{\alpha < x(t) < \infty\} = \Phi_0[\infty] - \Phi_0[z] = 1 - \Phi_0[z],$$

где $z = \frac{\alpha - m^*(t)}{\sigma^*(t)}$