ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
И РОБОТОТЕХНИКИ

ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Диагностика и надежность автоматизированных систем

Лектор: ЕФРЕМОВ Александр Александрович,
ст. преподаватель ОАР ИШИТР

Томск, 2024

Контактная информация

ЕФРЕМОВ Александр Александрович

Старший преподаватель,
Отделение автоматизации и робототехники,
ИШИТР

Ауд. 112а, 10к.
email: *alexyefremov@tpu.ru*

Лекция 1

Основные понятия и определения. Распределения времени до отказа.

Эффективность функционирования автоматизированных систем (АС) в значительной степени зависит от надежности как отдельных устройств, входящих в системы, так и элементов, обеспечивающих взаимодействие между этими устройствами.

Недостаточная надежность элементов и устройств не только приводит к значительным простоям систем, но и удорожает стоимость их эксплуатации.

Кроме того, отказы технических устройств могут привести к аварийным ситуациям, последствия которых могут быть катастрофическими.

Основными причинами, определяющими повышенное внимание к проблемам надежности, являются:

- повышение сложности устройств и появление сложных систем;
- более медленный рост уровня надежности комплектующих элементов по сравнению с ростом числа элементов в устройствах и системах;
- повышение важности выполняемых элементами и устройствами функций и, как следствие этого, повышение требований к их надежности;
- усложнение условий эксплуатации систем.

Теория надежности

- устанавливает закономерности возникновения отказов и восстановления работоспособности системы и её элементов,
- рассматривает влияние внешних и внутренних воздействий на процессы в системах,
- создаёт основы расчёта надёжности и предсказания отказов,
- изыскивает способы повышения надёжности при конструировании и изготовлении систем и элементов, а также способы сохранения надёжности при эксплуатации.

Теория надежности изучает:

- критерии и количественные характеристики надежности;
- методы анализа надежности элементов и систем;
- методы синтеза элементов и систем с заданной надежностью;
- методы повышения надежности элементов и систем на этапах их проектирования и эксплуатации;
- методы испытания элементов и систем на надежность.

Надежность – свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, хранения и транспортирования.

Надёжность является комплексным свойством, которое, в зависимости от назначения объекта и условий его применения, может включать безотказность, долговечность, ремонтопригодность или определённые сочетания этих свойств.

Например, для неремонтируемых объектов основным свойством является безотказность. Для ремонтируемых объектов одним из важнейших свойств, входящих в определение надёжности, может быть ремонтопригодность.

ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

Определение количественных характеристик или показателей надёжности необходимо для того, чтобы:

- учитывать надежность элементов и устройств при их применении в различных системах;
- формулировать требования по надежности к проектируемым устройствам или системам;
- сравнивать различные варианты построения системы;
- рассчитывать необходимый комплект запасных частей и принадлежностей (ЗИП) для восстановления систем, сроки их службы.

ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

Показатель надежности – это количественная характеристика одного или нескольких свойств, составляющих надежность объекта.

Различают единичные, комплексные, расчётные, экспериментальные, и эксплуатационные показатели надежности.

Единичный показатель надежности – это показатель надежности, характеризующий одно из свойств, составляющих надежность объекта.

Комплексный показатель надежности – это показатель надежности, характеризующий несколько свойств, составляющих надежность объекта.

Поскольку отказы элементов являются случайными событиями, то *теория вероятностей и математическая статистика* являются основным аппаратом, используемым при исследовании надежности, а сами характеристики надежности должны выбираться из числа показателей, принятых в теории вероятностей.

Все показатели надёжности могут определяться *аналитически* по формулам, полученным на основе теории вероятности, и по результатам испытаний или наблюдений, т. е. *в виде статистических оценок* показателей надежности, полученным на основе методов математической статистики.

Случайная величина X называется ***непрерывной***, если ее пространством элементарных событий является вся числовая ось (либо отрезок (отрезки) числовой оси), а ***вероятность наступления любого элементарного события равна нулю***.

Для количественного описания распределения вероятностей удобно воспользоваться не вероятностью события $X = x$, а вероятностью события $X \leq x$, где x - некоторое текущее значение переменной.

Вероятность этого события, очевидно, зависит от x, и является некоторой функцией от x. Эта функция называется функцией распределения случайной величины X и обозначается $F_X(x)$:

$$F_X(x) = Pr\{X \leq x\}$$

Функцию $F_X(x)$ иногда называют *(интегральной) функцией распределения*, или *(интегральным) законом распределения*.

Функция распределения – самая универсальная характеристика СВ. Она существует как для дискретных, так и непрерывных СВ.

Функция распределения полностью характеризует СВ с вероятностной точки зрения и является одной из форм закона распределения.

Для непрерывной случайной величины вероятность попасть на интервал равна

$$Pr\{a < X < b\} = Pr\{a \leq X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a)$$

Пусть имеется непрерывная СВ X с функцией распределения $F_X(x)$, которую мы предполагаем *непрерывной и дифференцируемой*.

Вычислим вероятность попадания этой СВ на участок от x до $x + \Delta x$, то есть приращение функции распределения на этом участке:

$$Pr\{x \leq X \leq x + \Delta x\} = F_X(x + \Delta x) - F_X(x)$$

Найдем отношение этой вероятности к длине участка, то есть среднюю вероятность, приходящуюся на единицу длины на этом участке, и устремим Δx к 0.

В пределе получим производную функции распределения:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} = \frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$$

Функция $f_X(x)$ – производная функции распределения характеризует плотность, с которой распределяются значения СВ в данной точке.

Эта функция называется *плотностью распределения (плотностью вероятности)* непрерывной СВ X .

Будем считать, что отказ объекта – это случайное событие.

Наработка (время) до отказа – непрерывная случайная величина X, распределенная в соответствии с некоторым распределением $F_X(t)$.

Функция $F_X(t)$ называется ***вероятностью отказа*** и представляет собой функцию распределения случайной величины:

$$F_X(t) = \Pr\{X \leq t\}$$

Свойства: $F_X(0) = 0$;

$F_X(\infty) = 1$;

$F_X(t)$ не убывает на всей числовой прямой.

Вероятность безотказной работы – вероятность того, что в пределах заданной наработки на отказ (в заданном интервале времени $[0; t]$) отказ объекта не возникнет.

Вероятность безотказной работы дополняет вероятность отказа до 1:

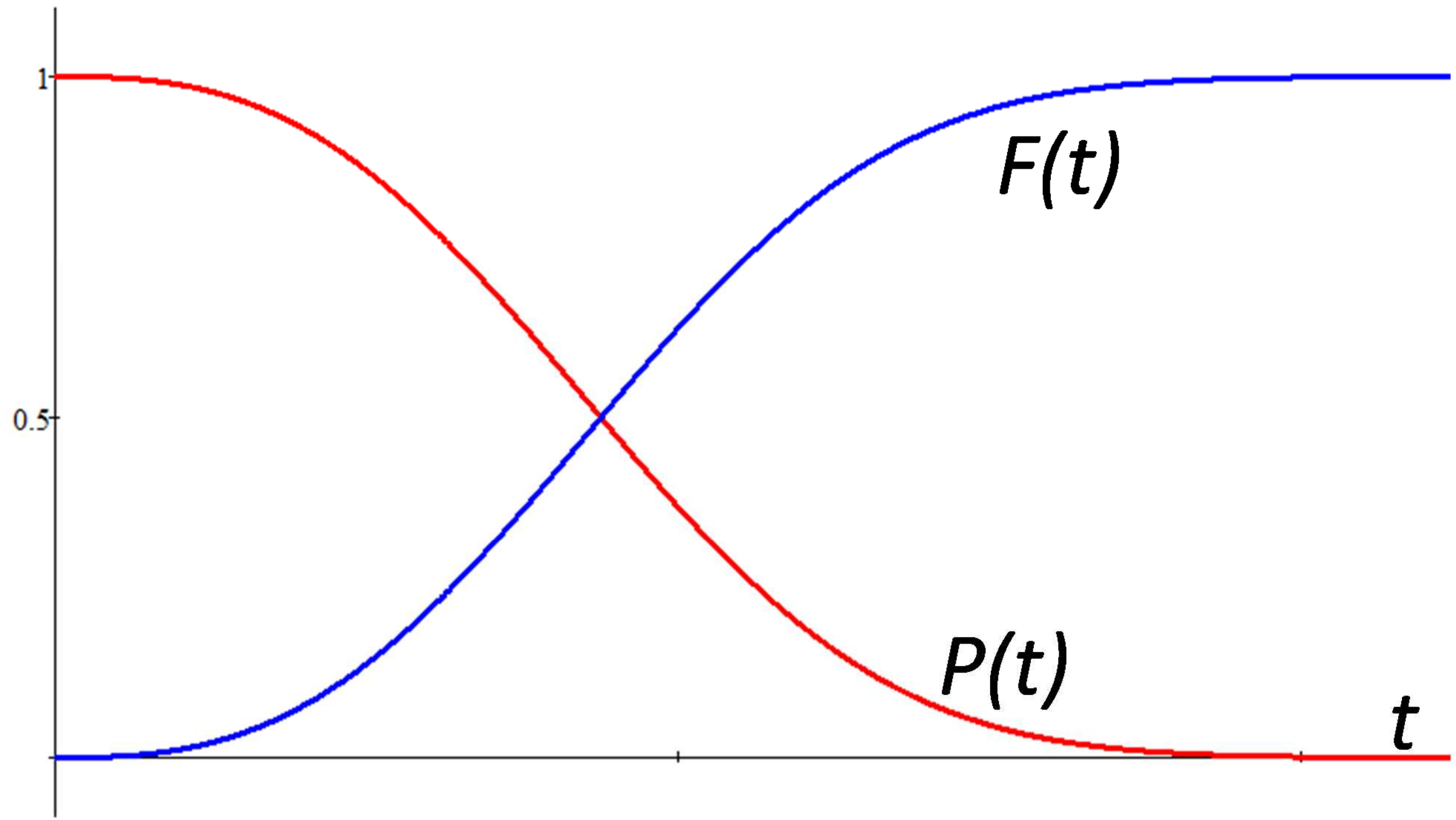
$$F_X(t) = \Pr\{X \le t\} \qquad P(t) = \Pr\{X > t\}$$
$$F_X(t) + P(t) = 1$$

$P(t)$ - функция вероятности безотказной работы (функция ВБР).

Свойства: $P(0) = 1$;

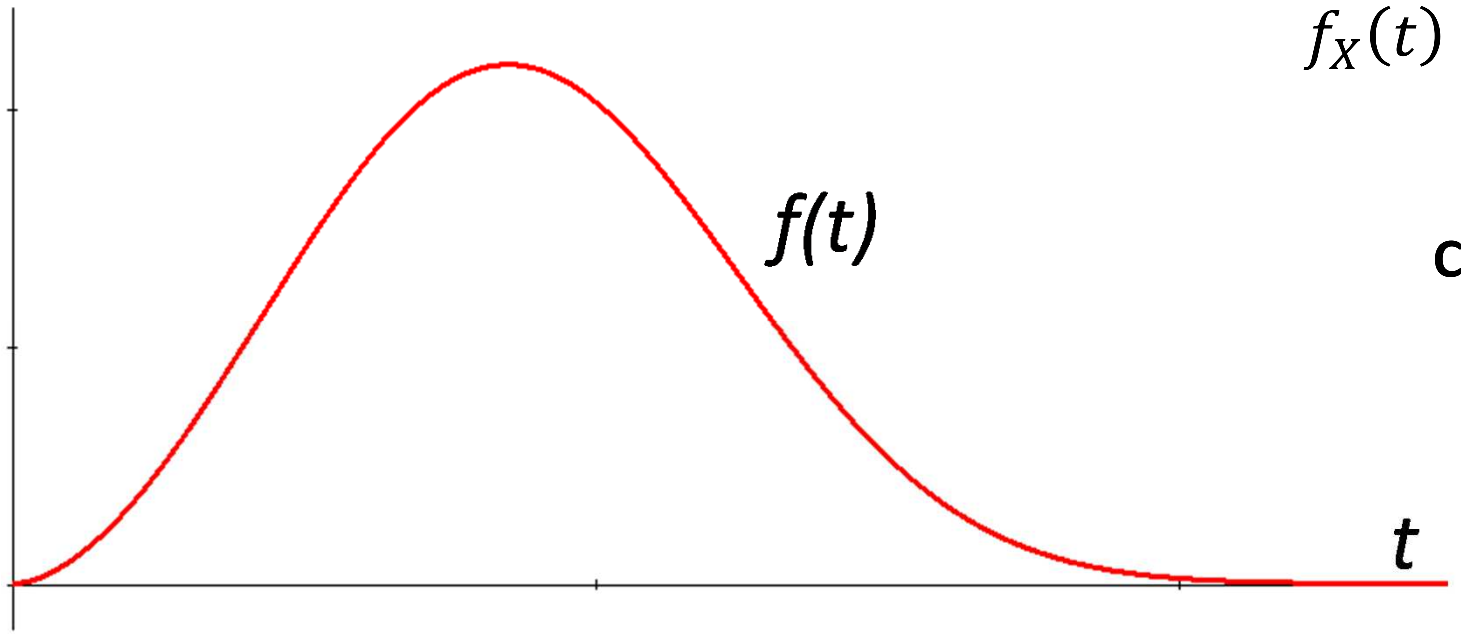
$P(\infty) = 0$;

$P(t)$ не возрастает на всей числовой прямой.


1
0.5
F(t)
P(t)
t

Лекция 1

Для непрерывной случайной величины с функцией распределения $F_X(t)$ можно определить функцию плотности распределения $f_X(t)$, которая в теории надежности называется ***частотой отказов***.



$$f_X(t) = \frac{dF_X(t)}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt}$$

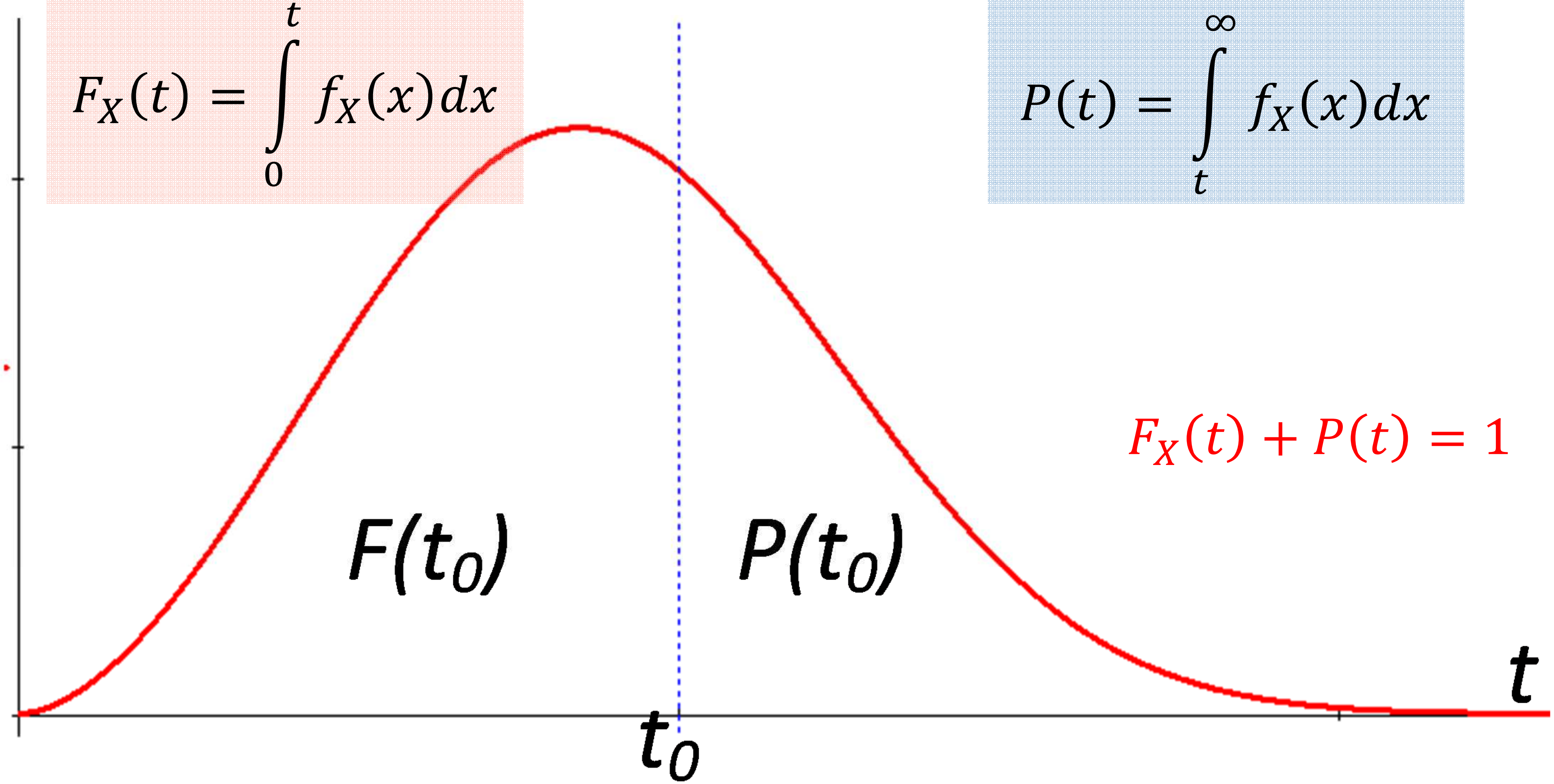
Свойства:

$$f_X(t) \geq 0;$$

$$\int_0^{\infty} f_X(t)dt = 1.$$

$$F_X(t) = \int_0^t f_X(x)dx$$

$$P(t) = \int_t^\infty f_X(x)dx$$



$$F_X(t) + P(t) = 1$$

Интенсивность отказов – это условная плотность распределения вероятности времени безотказной работы для момента времени t, при условии, что до момента времени t отказ объекта не произошел.

$$h(t) = \frac{f_X(t)}{P(t)}$$

Так как $\mathrm{P}(t) \leq 1$, то, очевидно, всегда выполняется соотношение

$$h(t) \geq f_X(t)$$

Функцию ВБР можно выразить через интенсивность отказов следующим образом:

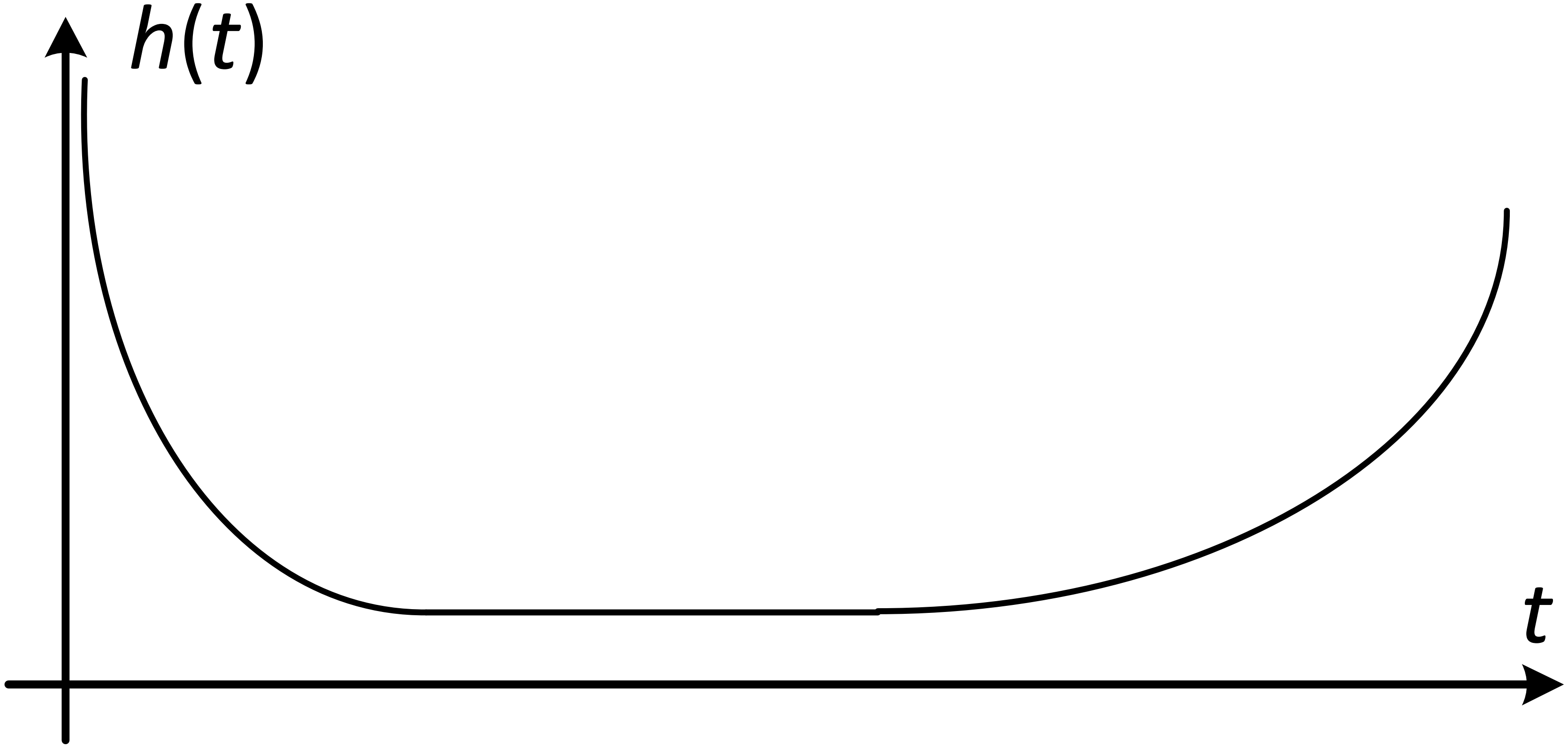
$$P(t) = e^{-\int_0^t h(x)dx}$$

Можно отметить различие между величинами $f_X(t)$ и $h(t)$.

Вероятность $f_X(t)dt$ характеризует вероятность отказа системы или элемента за интервал времени $(t, t + dt)$, взятых произвольным образом из группы таких же систем или элементов, причем *неизвестно, в каком состоянии (работоспособном или неработоспособном) находится элемент или система*.

Вероятность $h(t)dt$ характеризует вероятность отказа системы или элемента за интервал $(t, t + dt)$, взятых из группы элементов или систем, *которые остались работоспособными к моменту времени t*.

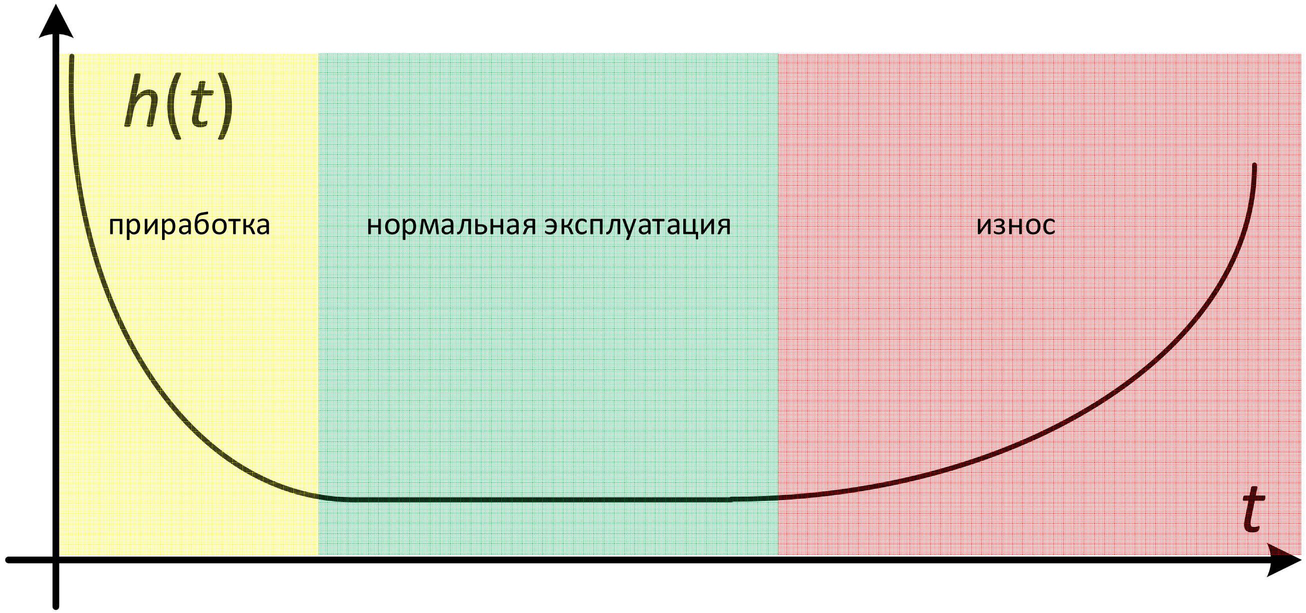
Для большинства физических систем (в том числе технических) кривая интенсивности отказов выглядит как U-образная кривая:



<u>Лекция 1</u>

В соответствии с формой кривой интенсивности отказов можно выделить <u>три периода жизненного цикла изделия</u>:

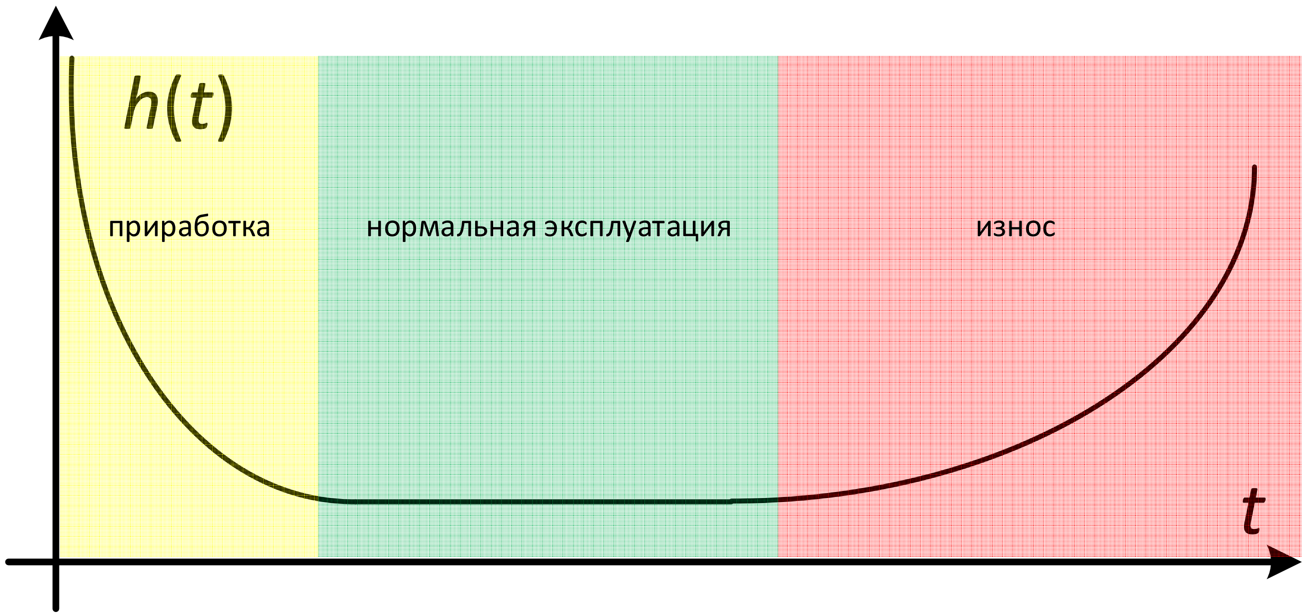
- период приработки;
- период нормальной эксплуатации;
- период износа.



Лекция 1

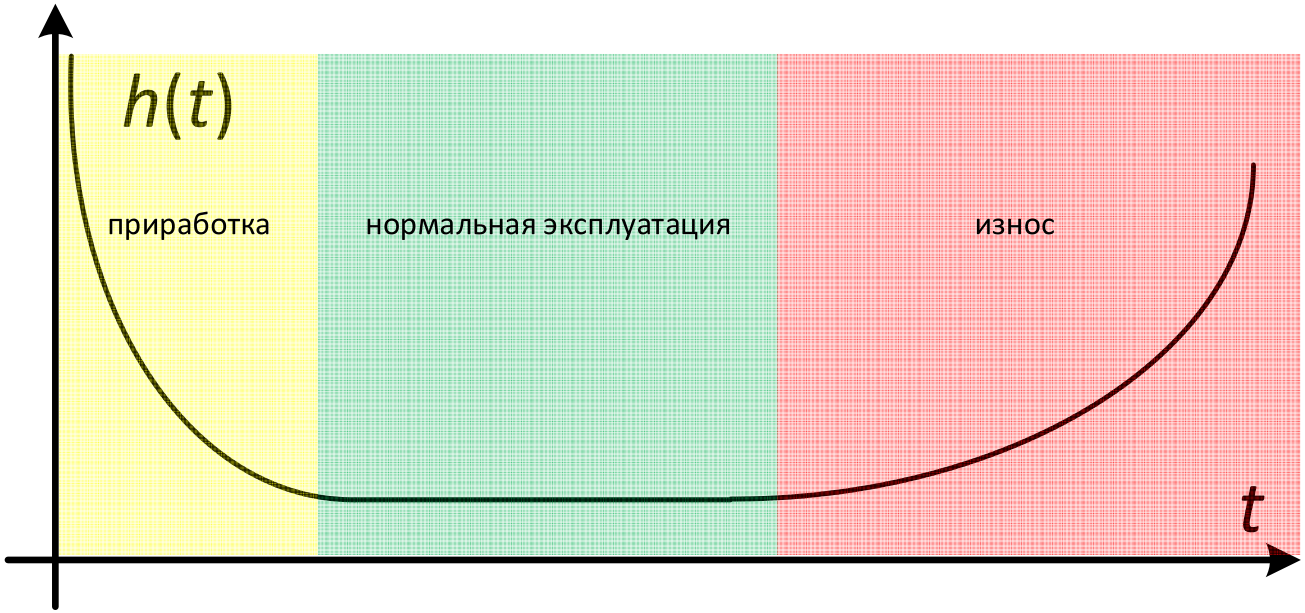
В период приработки интенсивность отказов *высока и уменьшается* с течением времени. На этом участке выявляются грубые дефекты производства объекта.

Для устройств и систем длительность этого участка составляет десятки, иногда сотни часов.



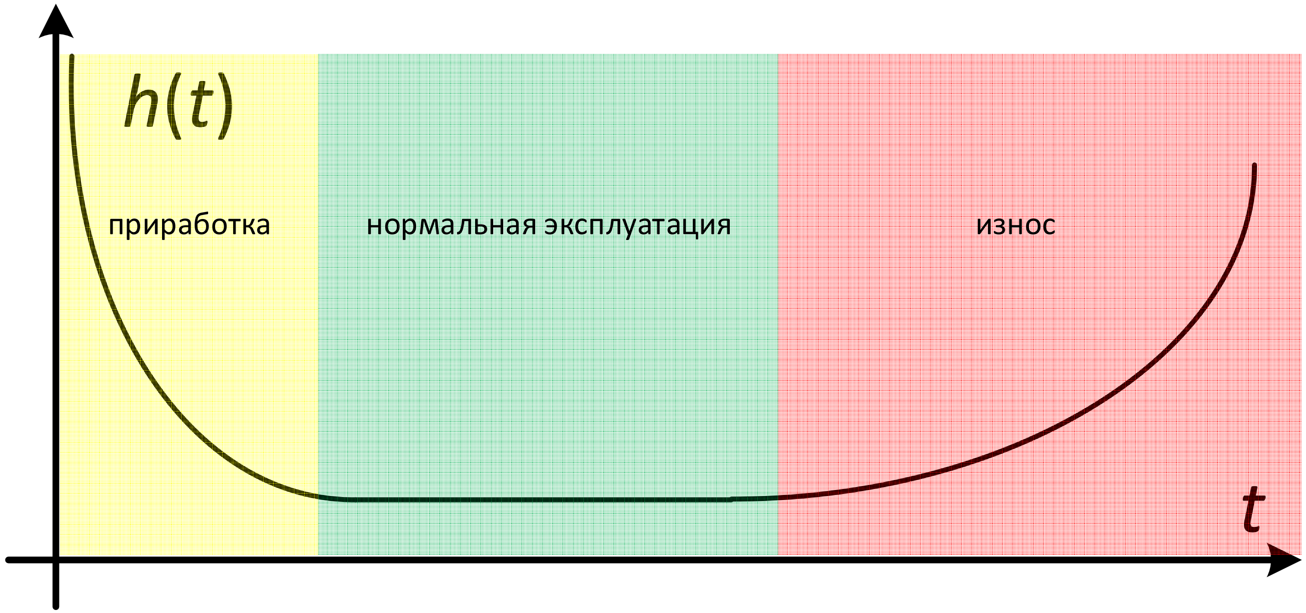
В период нормальной эксплуатации интенсивность отказов имеет *приблизительно постоянное значение*.

Длительность этого участка для современных элементов, устройств и систем составляет тысячи и десятки тысяч часов.



Лекция 1

В период износа из-за усиления процессов старения элементов интенсивность отказов начинает *возрастать*.
Момент начала этого участка может служить временем, при достижении которого объекты должны сниматься с эксплуатации или ставиться на капитальный ремонт.



Математическое ожидание (среднее значение) непрерывной случайной величины X представляет собой ее первый начальный момент:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt$$

В теории надежности математическое ожидание времени до отказа (времени безотказной работы) называют средним временем безотказной работы (средней наработкой до отказа).

Учитывая, что $t > 0$,

$$T_{cp} = E[X] = \int_{0}^{\infty} t f_X(t) dt = \int_{0}^{\infty} P(t) dt$$

Лекция 1

	$P(t)$	$F(t)$	$f(t)$	$h(t)$	T_{cp}
$P(t) =$		$1 - F(t)$	$\int_t^\infty f(t)dt$	$e^{-\int_0^t h(t)dt}$	
$F(t) =$	$1 - P(t)$		$\int_0^t f(t)dt$	$1 - e^{-\int_0^t h(t)dt}$	
$f(t) =$	$-P'(t)$	$F'(t)$		$-\left[e^{-\int_0^t h(t)dt}\right]'$	
$h(t) =$	$\dfrac{-P'(t)}{P(t)}$	$\dfrac{F'(t)}{1 - F(t)}$	$\dfrac{f(t)}{\int_t^\infty f(t)dt}$		
$T_{cp} =$	$\int_0^\infty P(t)dt$	$\int_0^\infty (1 - F(t))dt$	$\int_0^\infty tf(t)dt$	$\int_0^\infty e^{-\int_0^t h(t)dt} d\tau$	

Статистические оценки показателей надежности

Вероятность отказа и ВБР:

$$\hat{F}_X(t) = \frac{n(t)}{N_0}; \qquad \hat{P}(t) = \frac{N_0 - n(t)}{N_0};$$

Частота отказов:

$$\hat{f}(t) = \frac{n(\Delta t)}{N_0 \cdot \Delta t};$$

где N_0 - число изделий, поставленных на испытание или на эксплуатацию;

$n(t)$ - число изделий, отказавших в течение времени t;

$n(\Delta t)$ - число отказавших изделий в интервале времени $\left(t - \frac{\Delta t}{2}; t + \frac{\Delta t}{2}\right]$;

Δt – ширина интервала.

Статистические оценки показателей надежности

Интенсивность отказов:

$$\hat{h}(t) = \frac{n(\Delta t)}{N_{cp} \cdot \Delta t};$$

Средняя наработка до отказа:

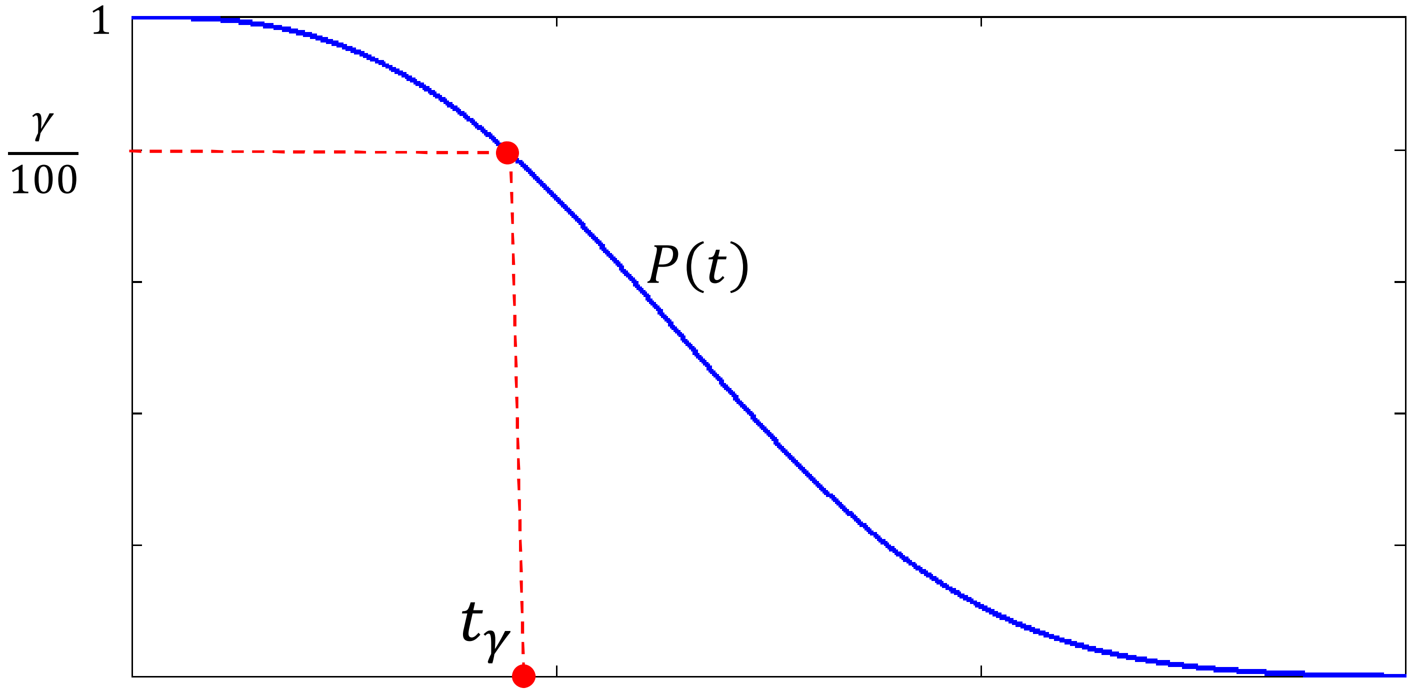
$$\hat{T}_{cp} = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} t_i \,;$$

где $N_{cp} = \frac{1}{2}(N_a + N_b)$ - среднее число изделий, исправно работающих на интервале $(a; b]$;

t_i - время безотказной работы i-го изделия.

Гамма-процентная наработка до отказа – это наработка, в течении которой отказ объекта не возникнет с вероятностью γ, выраженной в процентах, то есть:

$$P(t_\gamma) = \frac{\gamma}{100}$$



Как следует из определений показателей надёжности для их расчёта необходимо знание закона или функции распределения ***времени безотказной работы объекта***, которое является случайной величиной.

Функция распределения времени безотказной работы объекта $F_X(t)$, определяющая вероятность отказа, может быть определена по статистическим данным, полученным при испытании или при наблюдении за объектом.

Однако, на стадии проектирования объектов таких статистических данных нет, поэтому, обычно, выдвигается и обосновывается гипотеза о функции распределения времени безотказной работы, которая затем должна проверяться после производства и в процессе эксплуатации объекта.

Лекция 1

Время до отказа для элементов устройств или систем является непрерывной случайной величиной, которая характеризуется некоторым законом распределения.

Поскольку истинное распределение может быть неизвестно, для практических целей предполагается, что время до отказа распределено в соответствии с неким известным законом распределения, который используется в качестве вероятностной модели надежности (ВМН) объекта или системы.

В качестве ВМН можно использовать любое непрерывное распределение, для которого *носителем* является положительная числовая полуось:

$$supp(X) = [0; \infty)$$

В теории надежности часто используются следующие распределения (вероятностные модели надежности):

- экспоненциальное распределение;
- распределение Вейбулла;
- распределение Рэлея;
- (усеченное) нормальное распределение;
- логнормальное распределение.

Нормальное распределение (распределение Гаусса) используется реже; обычно в случаях, когда $F_X(0) \approx 0$.

Экспоненциальная модель надежности

$$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \qquad f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t};$$

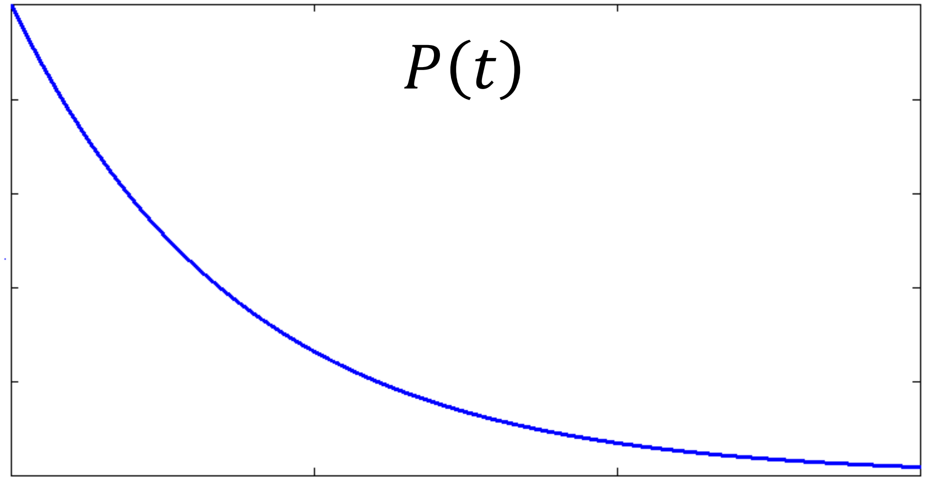
$$P(t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t};$$

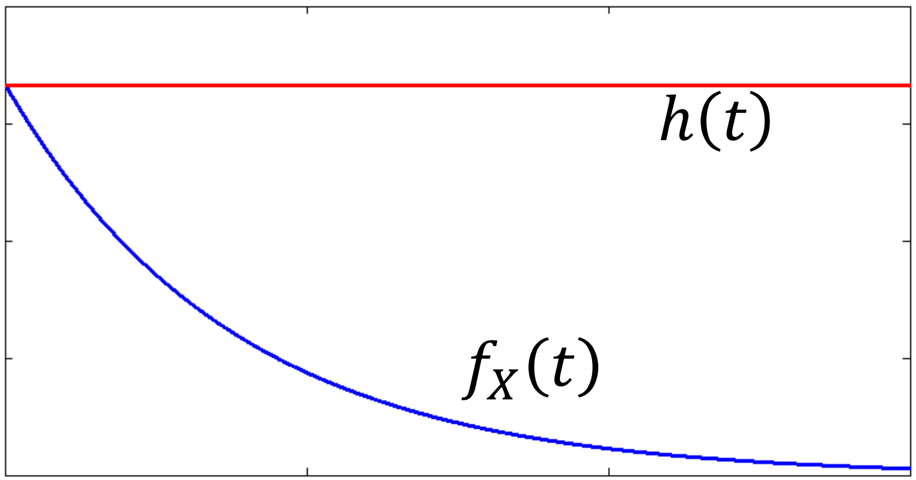
$$h(t) = \frac{f_X(t)}{P(t)} = \lambda = const.$$

$$T_{cp} = \int_0^{\infty} P(t)dt = \frac{1}{\lambda};$$

где $t \geq 0$, а $\lambda > 0$ – параметр распределения.

Экспоненциальная модель надежности





Экспоненциальная модель надежности

Недостатки:

- $h(t) = const$ означает, что экспоненциальная модель надежности не подходит для моделирования отказов в периодах приработки и износа. Более того, модель подразумевает, что объект не «стареет».

Достоинства:

- Простота расчетов;
- Многие современные электронные компоненты действительно могут демонстрировать постоянную интенсивность отказов в течении долгого времени.

Модель надежности Рэлея

$$F_X(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}; \qquad f_X(t) = \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}};$$

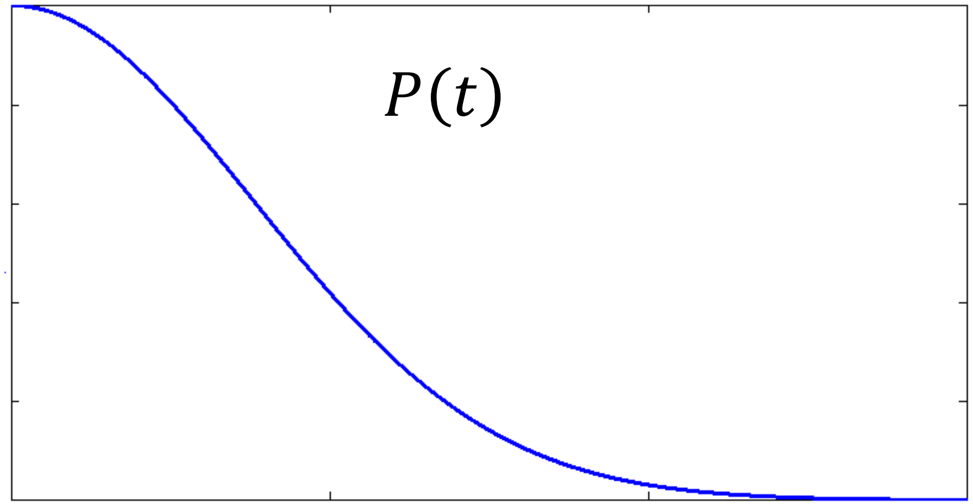
$$P(t) = 1 - F_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}};$$

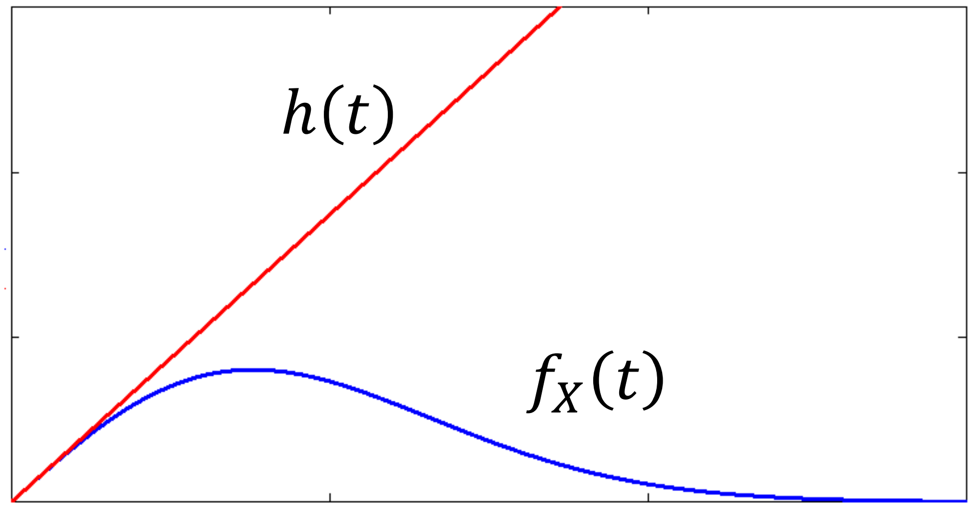
$$h(t) = \frac{f_X(t)}{P(t)} = \frac{t}{\sigma^2}.$$

$$T_{cp} = \int_0^\infty P(t)dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma;$$

где $t \geq 0$, а $\sigma > 0$ – параметр распределения.

Модель надежности Рэлея





Модель надежности Рэлея

Недостатки:

- Линейное возрастание интенсивности отказов означает, что модель надежности Рэлея не подходит для моделирования отказов в периоде приработки.

Достоинства:

- Относительная простота;
- Некоторые механические и электромеханические компоненты могут иметь возрастающую интенсивность отказов, сходную по форме с линейной зависимостью.

Модель надежности Вейбулла

$$F_X(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}; \qquad f_X(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}};$$

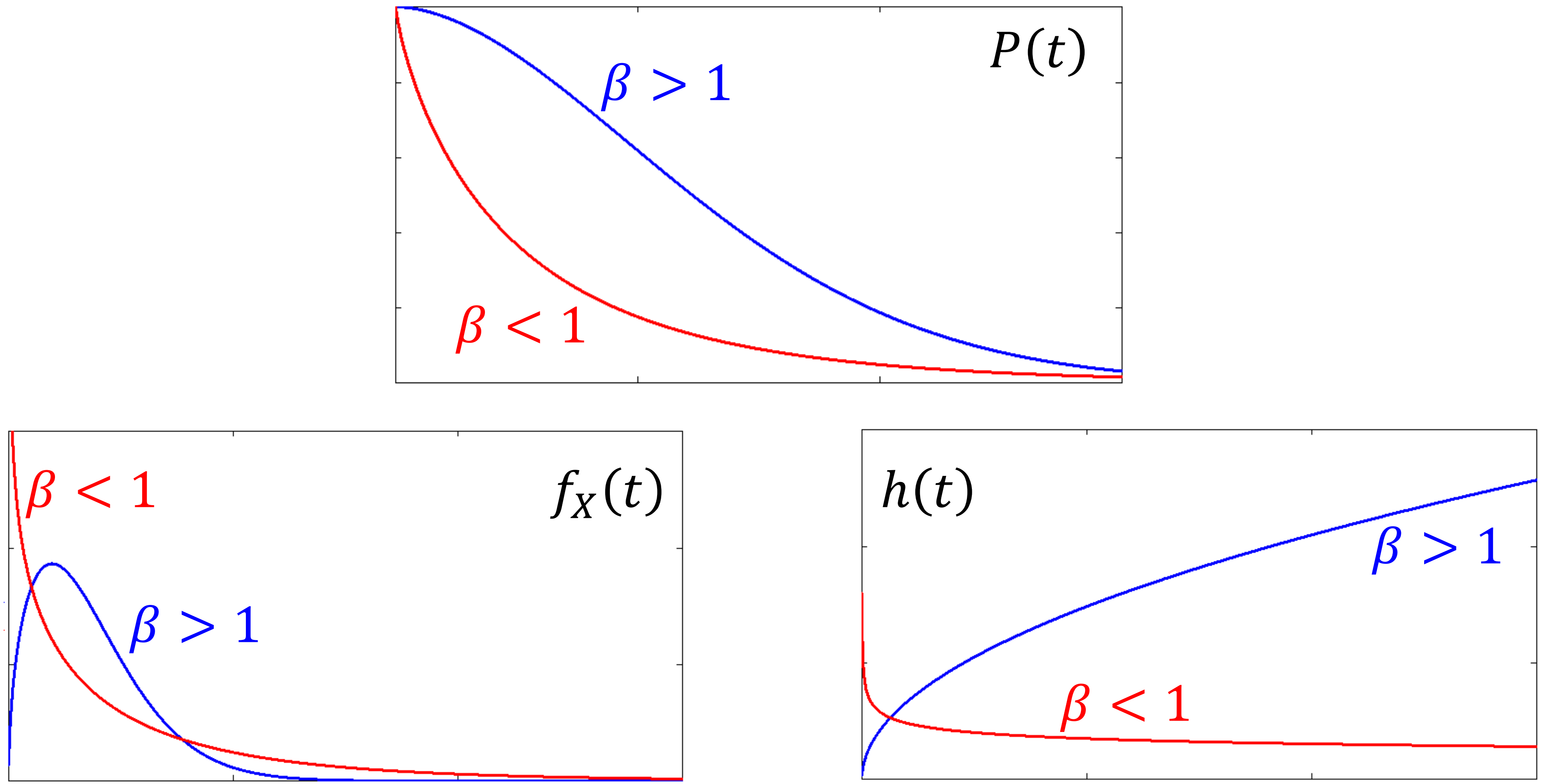
$$P(t) = 1 - F_X(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}; \qquad h(t) = \frac{f_X(t)}{P(t)} = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}.$$

$$T_{cp} = \int_0^{\infty} P(t)dt = \eta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right);$$

где $t \geq 0$, а $\beta, \eta > 0$ – параметры распределения;

$\Gamma(x)$ - гамма-функция.

Модель надежности Вейбулла



Модель надежности Вейбулла

Достоинства:

- Гибкость модели – возможность получать разные формы кривой интенсивности в зависимости от значения параметра β;
- Относительная простота.

Недостатки:

- Относительная сложность – при расчетах появляется необходимость рассчитывать значение гамма-функции.

Модель надежности Вейбулла

Следует отметить, что экспоненциальное распределение и распределение Рэлея являются частными случаями распределения Вейбулла:

при $\beta = 1$: $F_X(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^1} = 1 - e^{-\frac{1}{\eta}t} = 1 - e^{-\lambda t}$ $\left(\frac{1}{\eta} = \lambda\right)$

при $\beta = 2$: $F_X(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^2} = 1 - e^{-\frac{t^2}{\eta^2}} = 1 - e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ $(\eta^2 = 2\sigma^2)$

Альтернативные параметризации распределений

В разных источниках можно встретить различные способы записи функций распределений (экспоненциального, Рэлея, Вейбулла):

$$F_W(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} \equiv 1 - e^{-(\lambda_W t)^{\beta}} \equiv 1 - e^{-\alpha_W t^{\beta}}$$

$$F_R(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \equiv 1 - e^{-(\lambda_R t)^2} = 1 - e^{-\alpha_R t^2}$$

$$F_E(t) = 1 - e^{-\lambda t} \equiv 1 - e^{-\frac{t}{\gamma}}$$

Альтернативные параметризации распределений

Однако, следует помнить, что

- разные параметризации имеют разные записи выражений для показателей надежности;

- некоторые параметры распределений имеют размерность! Эту размерность можно определить, исходя из того, что степень экспоненты должна быть безразмерной величиной.

Альтернативные параметризации распределений

$F_W(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$: t – случайная величина (время), $[\eta]$ - время.

$$T_{cp} = \eta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

$F_W(t) = 1 - e^{-(\lambda_W t)^{\beta}}$: t – случайная величина (время), $[\lambda_W]$ - время$^{-1}$.

$$T_{cp} = \frac{1}{\lambda_W} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

$F_W(t) = 1 - e^{-\alpha_W t^{\beta}}$: t – случайная величина (время), $[\alpha_W]$ - время$^{-\beta}$.

$$T_{cp} = \frac{1}{\alpha_W{}^{1/\beta}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

Нормальное распределение

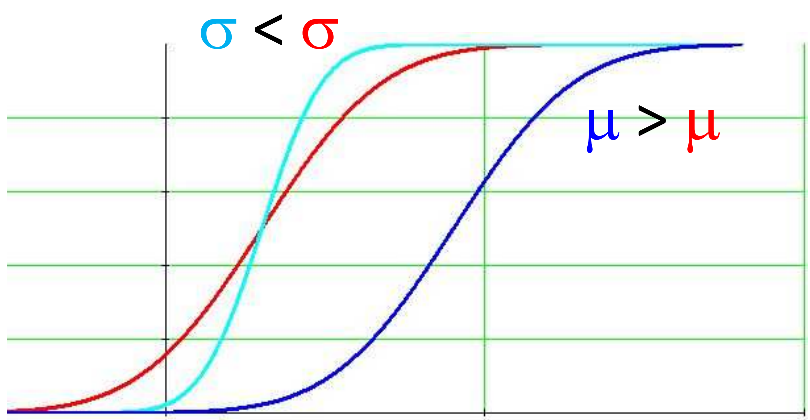
$$F_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx\,;$$

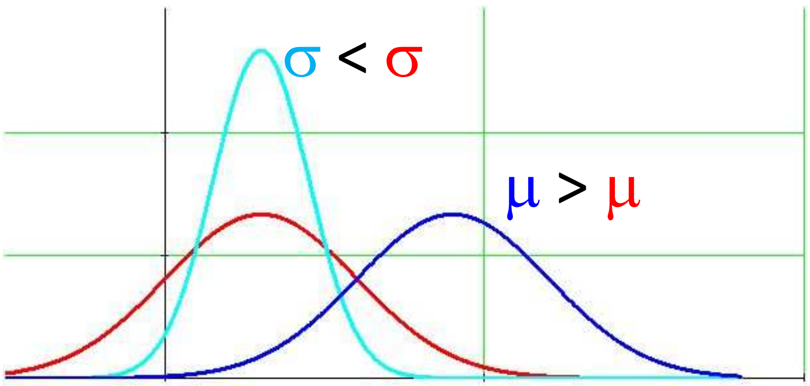
$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}; \qquad P(t) = 1 - F_X(t); \qquad h(t) = \frac{f_X(t)}{P(t)}.$$

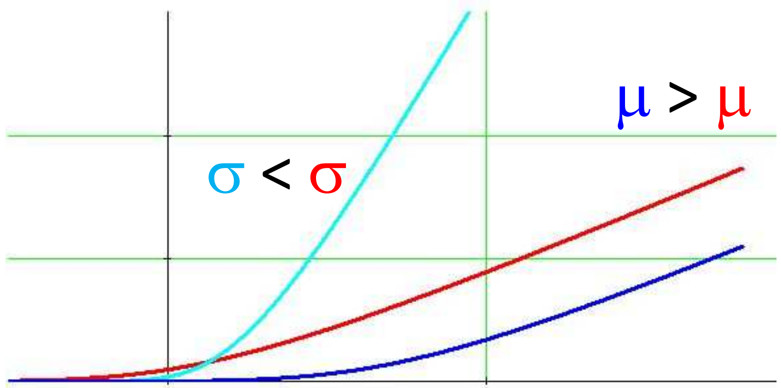
$$T_{cp} = \int_{-\infty}^{\infty} P(t)dt = \mu;$$

где $t \in \mathbb{R}$, а $\mu, \sigma > 0$ – параметры распределения;

Нормальное распределение







Нормальное распределение

Нормальное распределение с параметрами $\mu = 0, \sigma = 1$ называется стандартным нормальным распределением.

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz; \qquad f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Значения этой функции часто приводятся в таблицах.

Можно получить значения функции нормального распределения с произвольными параметрами μ и σ, выполнив следующую замену:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \;\Rightarrow\; F(x) = \Phi_0(z).$$

Нормальное распределение

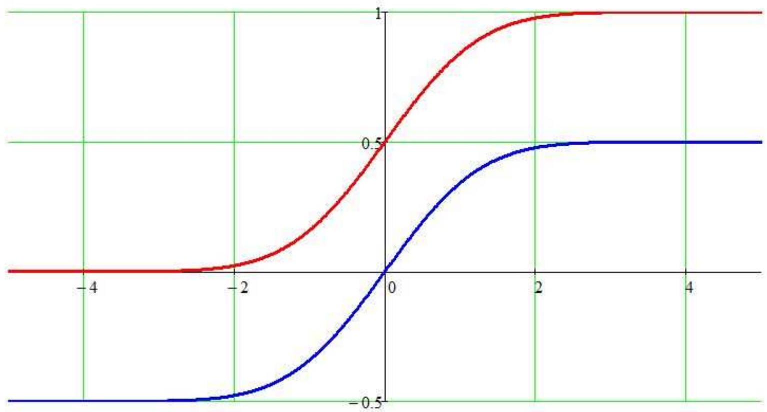
Функцию Φ_0 стандартного нормального распределения можно также определить через функцию Лапласа:

функция Лапласа

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

функция ст. норм. распр.

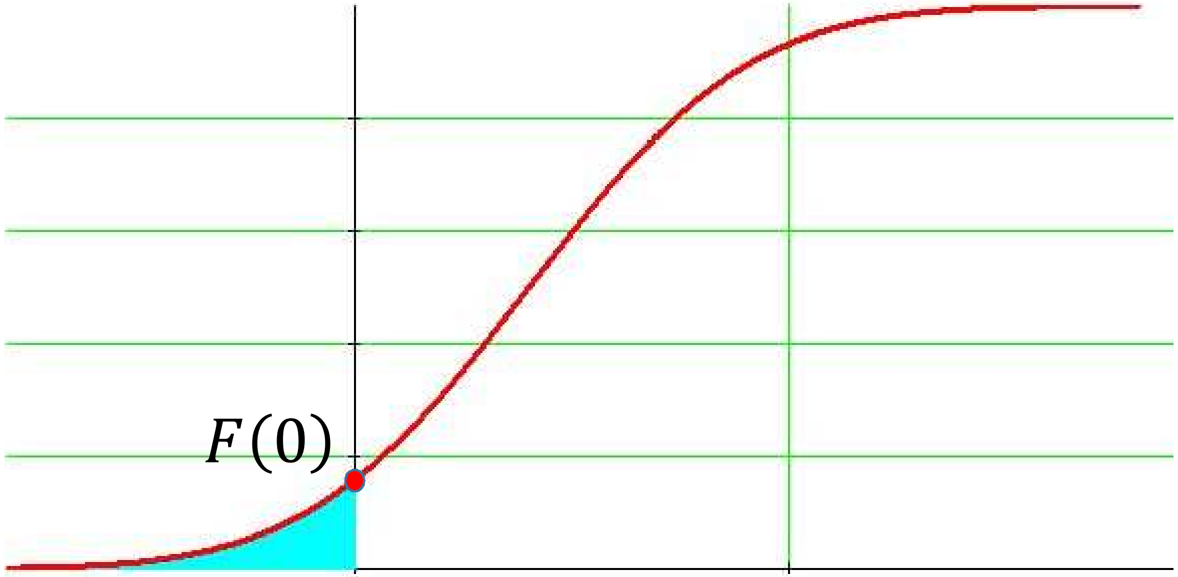
$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



$$\Phi_0(z) = 0.5 + \Phi(z)$$

Усеченное нормальное распределение

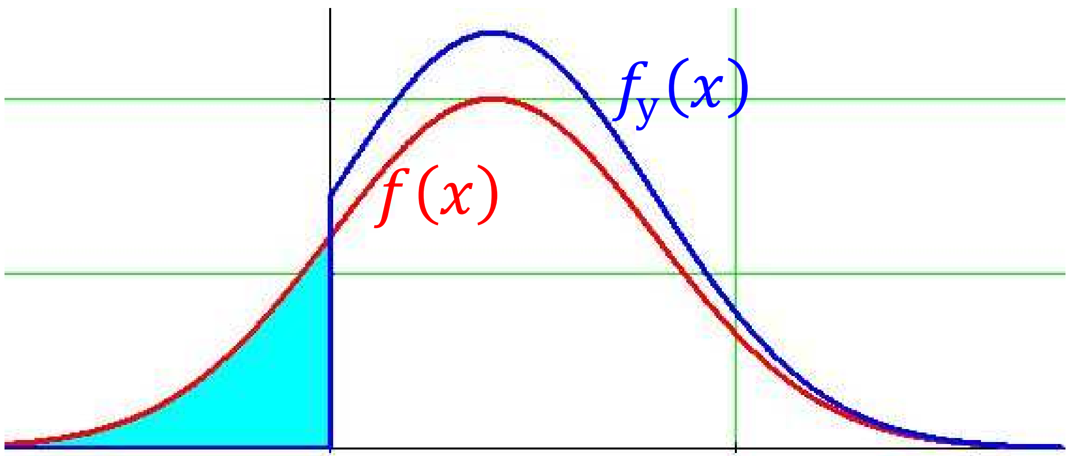
Поскольку наработка до отказа не может принимать отрицательные значения, нормальное распределение не всегда применимо в качестве распределения для наработки, так как значение функции вероятности отказа в момент времени 0 может значимо отличаться от 0.

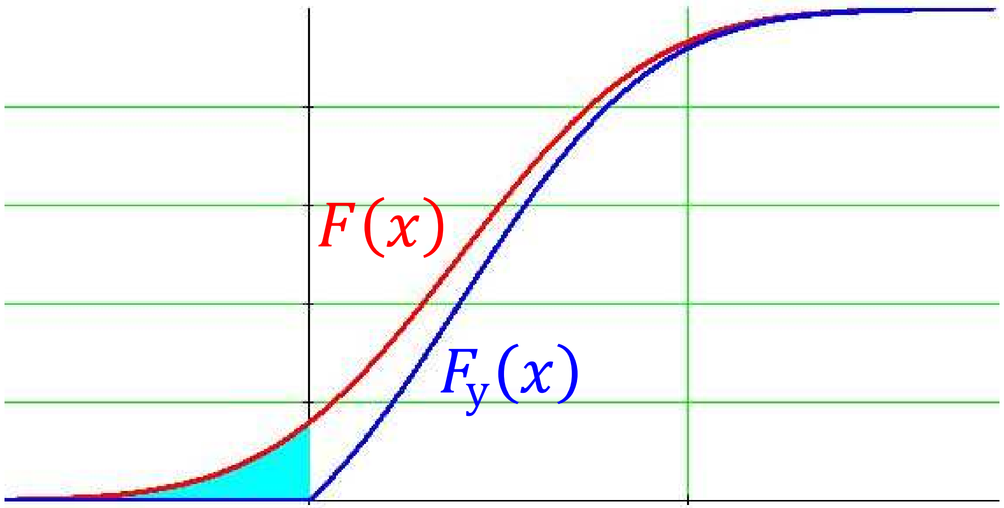


Значением $F(0)$ можно пренебречь, если $\mu > 3\sigma$

Усеченное нормальное распределение

В таких случаях можно использовать усеченное нормальное распределение, для которого функция плотности распределения отлична от 0 только для положительных значений аргумента.





Усеченное нормальное распределение

Переход от нормального распределения с параметрами μ и σ, заданного функциями $F(x), f(x)$, к усеченному нормальному распределению $(F_{\text{у}}(x), f_{\text{у}}(x))$, определенному на интервале $[0;\infty)$, можно по следующим формулам:

$$f_{\text{у}}(x) = \begin{cases} c \cdot f(x), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \qquad F_{\text{у}}(x) = \int_0^x f_{\text{у}}(t)dt = \frac{\Phi_0(z) - \Phi_0(\alpha)}{1 - \Phi_0(\alpha)}$$

где $c = \left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^{-1} = \frac{1}{1-F(0)}$; $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$; $\alpha = \frac{-\mu}{\sigma}$; $\Phi_0(z)$ - функция стандартного нормального распределения.

Усеченное нормальное распределение

Также, можно выразить функцию усеченного нормального распределения через функцию Лапласа:

$$F_у(x) = \frac{\Phi(z) + \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}{0{,}5 + \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}$$

ВБР:

$$P_у(x) = 1 - F_у(x) = 1 - \frac{\Phi(z) + \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}{0{,}5 + \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)} = \frac{0{,}5 + \Phi(-z)}{0{,}5 + \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}$$

или

$$P_у(x) = 1 - F_у(x) = 1 - \frac{\Phi_0(z) - \Phi_0(\alpha)}{1 - \Phi_0(\alpha)} = \frac{\Phi_0(-z)}{\Phi_0\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}$$

Усеченное нормальное распределение

Математическое ожидание случайной величины, принимающей значения из интервала $[0;\infty)$, (среднее время до отказа):

$$T_1 = \mu + \frac{\sigma \varphi_0\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}{\Phi_0\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)},$$

где μ, σ – параметры нормального распределения;

$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ - функция плотности стандартного нормального распределения;

$\Phi_0(x)$ - функция стандартного нормального распределения.

Логнормальное распределение

Если логарифм случайной величины распределен нормально, то сама случайная величина имеет логарифмически нормальное (логнормальное) распределение.

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma_L\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln x - \mu_L)^2}{2\sigma_L{}^2}\right]; \qquad F(x) = \Phi_0\left[\frac{\ln x - \mu_L}{\sigma_L}\right];$$

где $\mu_L, \sigma_L > 0$ – параметры распределения, $x > 0$.

Математическое ожидание (среднее время до отказа):

$$T_{cp} = \exp\left(\mu_L + \frac{\sigma_L{}^2}{2}\right)$$

Лекция 2

Основное соединение элементов. Резервирование.

Основное (последовательное) соединение

Говорят, что компоненты системы соединены ***последовательно***, если для работоспособности системы требуется, чтобы все ее компоненты были работоспособными,

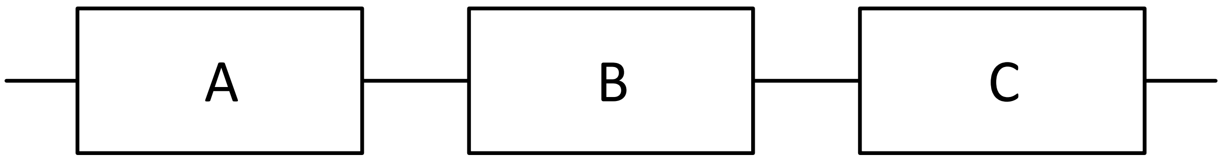
т.е. отказ любого из компонентов системы приводит к отказу системы в целом.

Для простоты расчетов обычно подразумевается, что все компоненты работают и отказывают независимо друг от друга.

Основное (последовательное) соединение

При решении задач теории надежности представляется удобным использовать *блок-схемы надежности*, отражающие влияние работоспособности элементов на работоспособность системы в целом.

Пример блок-схемы для последовательной системы, состоящей из трех элементов приведен ниже:



Основное (последовательное) соединение

Пусть система состоит из двух элементов E_1 и E_2, соединенных последовательно.

Обозначим через e_i событие, заключающееся в том, что i-й элемент ($i = 1, 2$) работоспособен на интервале $[0; t]$, тогда

$$\Pr\{e_i\} = \Pr\{E_i \text{ работоспособен на } [0; t]\} = P_i(t),$$

где $P_i(t)$ - функция ВБР i-го элемента.

Основное (последовательное) соединение

Обобщая полученное выражение на случай последовательной системы из n (независимых) элементов, можно записать

$$P_S(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t)\,.$$

Поскольку любая ВБР принимает значения из интервала $[0;1]$, произведение также будет находиться на этом интервале, причем

$$P_S(t) < \min_{i=1..n} P_i(t).$$

Основное (последовательное) соединение

Отсюда следует, что ВБР последовательной системы меньше, чем ВБР ее наименее надежного элемента.

Обозначим через $h_i(t)$ интенсивность отказов i-го элемента. Зная, что

$$P(t) = e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau},$$

получим

$$P_S(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\int_0^t h_i(\tau)d\tau} = e^{-\int_0^t [\sum_{i=1}^{n} h_i(\tau)]d\tau}.$$

Основное (последовательное) соединение

$$P_S(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\int_0^t h_i(\tau)d\tau} = e^{-\int_0^t \left[\sum_{i=1}^{n} h_i(\tau)\right]d\tau}.$$

Обозначив $h_S(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(t)$, мы можем сделать следующий вывод:

Интенсивность отказов системы, состоящей из n независимых компонентов, *соединенных последовательно*, равна сумме интенсивностей отказов компонентов.

Основное (последовательное) соединение

$$P_S(t) = e^{-\int_0^t h_S(\tau)d\tau}, \qquad h_S(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(t).$$

При выводе данной формулы мы не подразумевали, что нам известны конкретные модели надежностей элементов.

Следовательно, это соотношение справедливо и в общем случае.

Рассмотрим далее, что произойдет, если в основном соединении будут участвовать элементы с конкретными моделями надежности.

Основное (последовательное) соединение

Экспоненциальная модель надежности

В этом случае интенсивности отказов всех элементов постоянны:

$$h_i(t) = \lambda_i = const. \qquad P_i(t) = e^{-\lambda_i t};$$

$$P_S(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} = e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)t} = e^{-\lambda_S t};$$

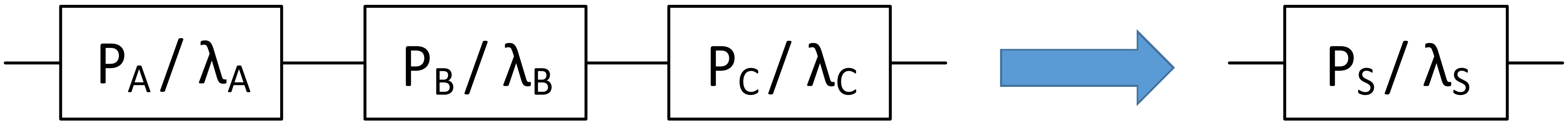
где $\lambda_S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Основное (последовательное) соединение

Экспоненциальная модель надежности

Таким образом, можно утверждать, что если для всех элементов *последовательной системы* справедлива экспоненциальная модель надежности, то она справедлива и для системы в целом.

Иными словами, такую систему можно представить в виде единственного эквивалентного элемента, для которого справедлива экспоненциальная модель надежности с параметром λ_S.



Основное (последовательное) соединение

Модель надежности Рэлея

В этом случае ВБР i-го элемента равна $P_i(t) = e^{-\frac{t^2}{2{\sigma_i}^2}}$.

Выражение для ВБР последовательной системы примет вид:

$$P_S(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{t^2}{2{\sigma_i}^2}} = e^{-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{{\sigma_i}^2}\right)t^2}.$$

Обозначив $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{{\sigma_i}^2} = \frac{1}{{\sigma_S}^2}$, получим $P_S(t) = e^{-\frac{t^2}{2{\sigma_S}^2}}$.

Основное (последовательное) соединение

Модель надежности Рэлея

Таким образом, можно утверждать, что если для всех элементов *последовательной системы* справедлива модель надежности Рэлея, то она справедлива и для системы в целом.

Иными словами, такую систему можно представить в виде единственного эквивалентного элемента, для которого справедлива модель надежности Рэлея с параметром σ_S:

$$\sigma_S = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{{\sigma_i}^2}}}.$$

Основное (последовательное) соединение

Модель надежности Рэлея

Аналогичный вывод можно получить, найдя интенсивность отказов последовательной системы.

Если интенсивности отказов всех элементов последовательной системы представляют собой линейные функции $h_i(t) = \frac{1}{{\sigma_i}^2}t$, то их сумма также будет являться линейной функцией:

$$h_S(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{{\sigma_i}^2}\right) t = \frac{1}{{\sigma_S}^2} t.$$

Основное (последовательное) соединение

Модель надежности Вейбулла

В этом случае ВБР i-го элемента равна $P_i(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{\beta_i}}$.

Тогда, выражение для ВБР последовательной системы примет вид:

$$P_S(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{\beta_i}} = e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{\beta_i}}.$$

Основное (последовательное) соединение

Модель надежности Вейбулла

Если проанализировать получившееся выражение, можно увидеть, что в общем случае невозможно найти такие параметры η_S и β_S, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{\beta_i} = \left(\frac{t}{\eta_S}\right)^{\beta_S}.$$

Если для всех элементов *последовательной системы* справедлива модель надежности Вейбулла с различными значениями параметров η_i и β_i, то ВБР системы нельзя записать с помощью модели Вейбулла.

Если надежность последовательной системы недостаточна, и мы не можем повысить ее, заменив компоненты на более надежные, становятся необходимы изменения на структурном уровне.

Говорят, что конфигурация системы является ***избыточной***, если отказ компонента системы не обязательно приводит к отказу системы.

Инструментом введения избыточности является ***резервирование***.

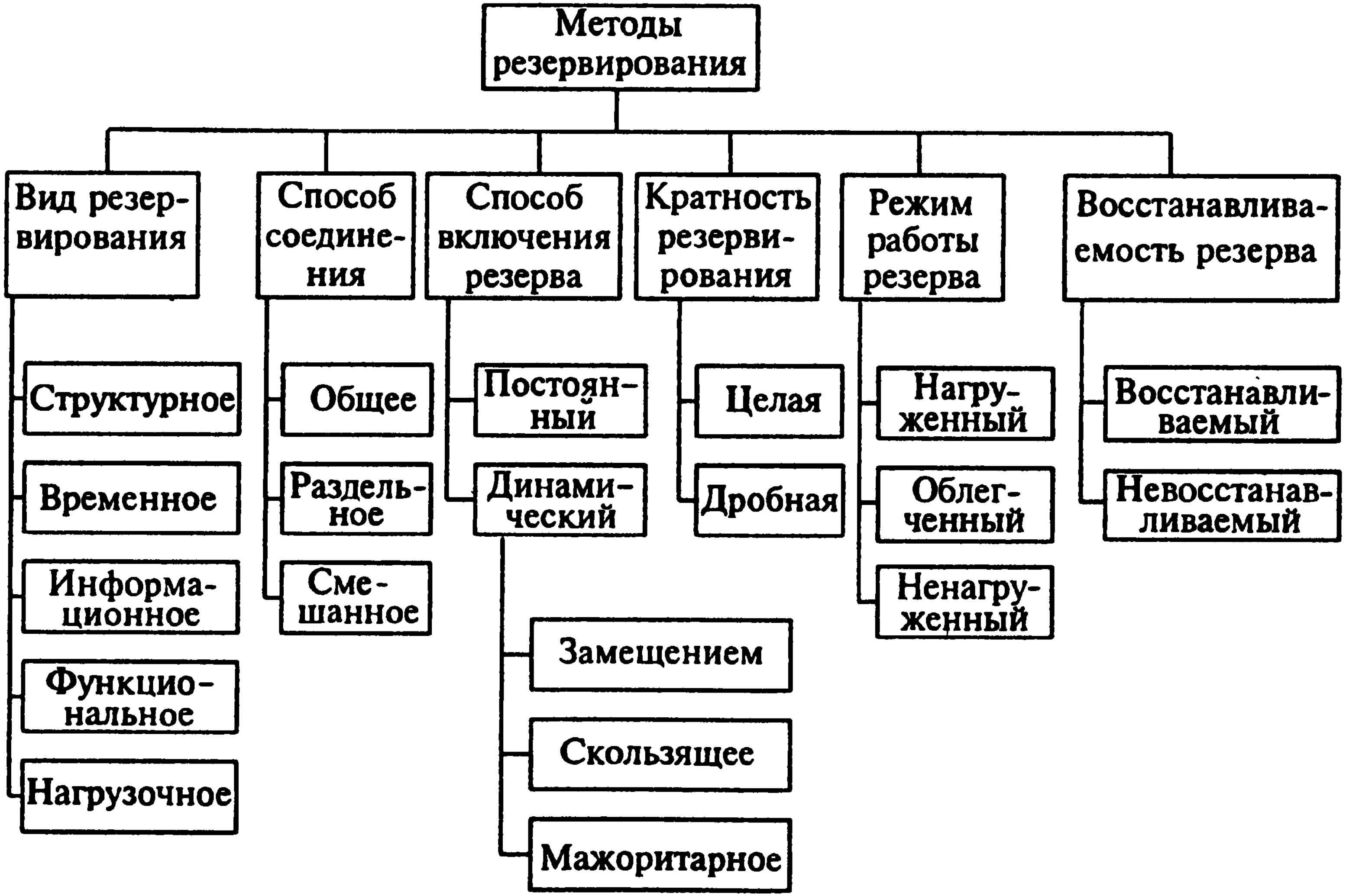
Резервирование — это основное средство обеспечения заданного уровня надежности объекта при недостаточно надежных элементах.

В соответствии с ГОСТ 27.002-89 *резервированием* называется применение дополнительных средств и (или) возможностей с целью сохранения работоспособного состояния объекта при отказе одного или нескольких его элементов.

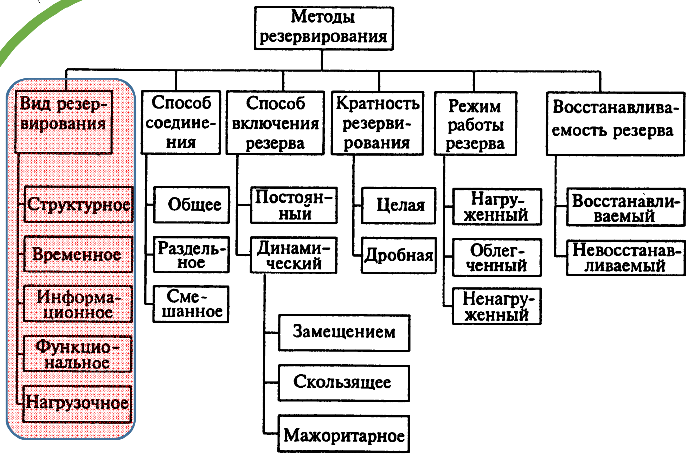
Таким образом, резервирование — это метод повышения надежности объекта путем введения избыточности.

В свою очередь, *избыточность* — это дополнительные средства и (или) возможности сверхминимально необходимые для выполнения объектом заданных функций. Задачей введения избыточности является обеспечение нормального функционирования объекта после возникновения отказа в его элементах.

Лекция 2



Методы резервирования
Вид резер-вирования
Способ соедине-ния
Способ включения резерва
Кратность резерви-рования
Режим работы резерва
Восстанавлива-емость резерва
Структурное
Временное
Информа-ционное
Функцио-нальное
Нагрузочное
Общее
Раздель-ное
Сме-шанное
Постоян-ный
Динами-ческий
Замещением
Скользящее
Мажоритарное
Целая
Дробная
Нагру-женный
Облег-ченный
Ненагру-женный
Восстанавли-ваемый
Невосстанав-ливаемый

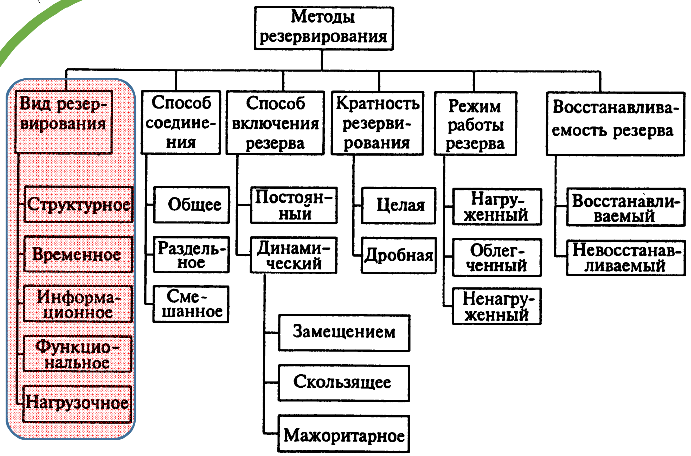


<u>Структурное резервирование</u> предусматривает применение резервных элементов структуры объекта. Суть структурного резервирования заключается в том, что в минимально необходимый вариант объекта вводятся дополнительные элементы.

<u>Элементы резервированной системы:</u>

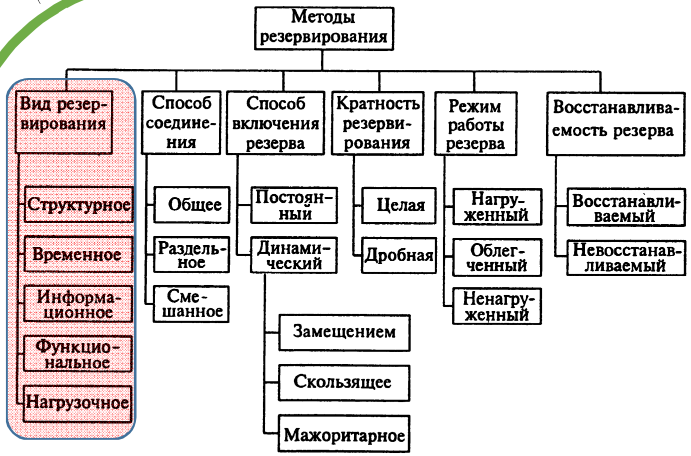
- *<u>Основной (резервируемый)</u>* элемент — элемент структуры объекта, необходимый для выполнения объектом требуемых функций при отсутствии отказов его элементов.
- *<u>Резервный</u>* элемент — элемент объекта, предназначенный для выполнения функций основного элемента, в случае отказа последнего.

Лекция 2



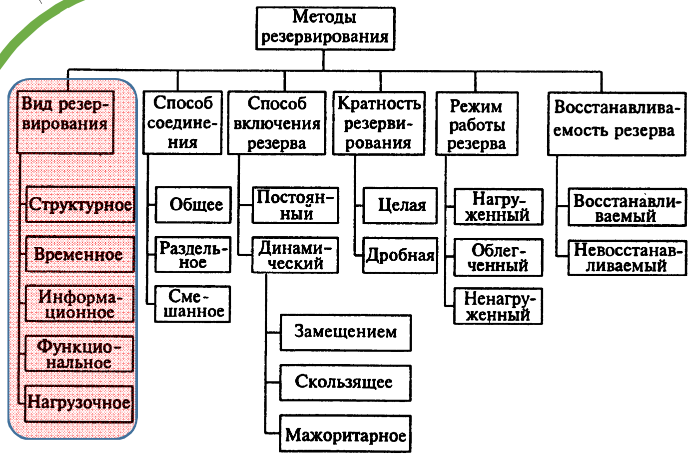
<u>Временное резервирование</u> связано с использованием резервов времени. При этом предполагается, что на выполнение объектом необходимой работы отводится время, заведомо большее минимально необходимого.

Резервы времени могут создаваться за счет повышения производительности объекта, инерционности его элементов и т.д.



Информационное резервирование — это резервирование с применением избыточности информации. Примерами информационного резервирования являются многократная передача одного и того же сообщения по каналу связи; применение при передаче информации по каналам связи различных кодов, обнаруживающих и исправляющих ошибки; и т.п.

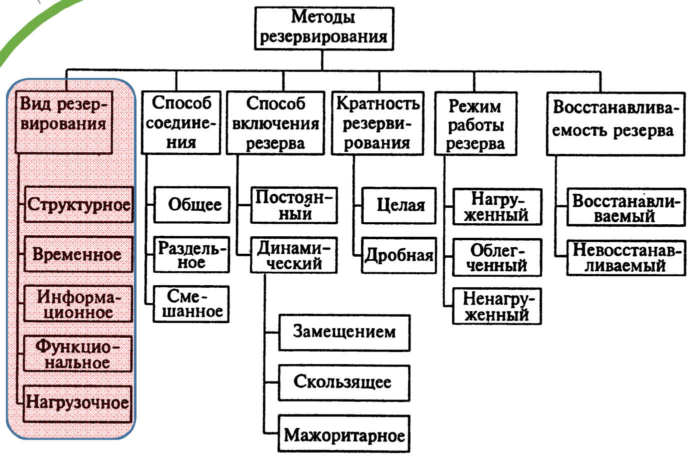
Избыток информации позволяет в той или иной мере компенсировать искажения передаваемой информации или устранять их.



<u>Функциональное резервирование</u> — резервирование, при котором заданная функция может выполняться различными способами и техническими средствами.

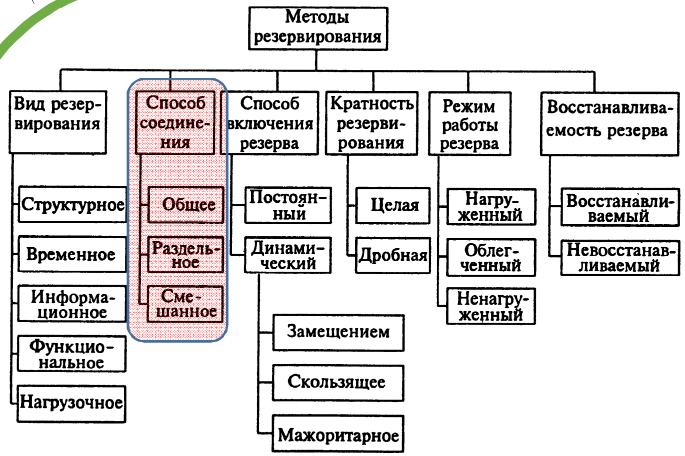
Например, функция быстрой остановки энергетического реактора может быть осуществлена вводом в активную зону стержней аварийной защиты или впрыском борного раствора.

Лекция 2



Нагрузочное резервирование, прежде всего, заключается в обеспечении оптимальных запасов способности элементов выдерживать действующие на них нагрузки.

Также, возможно введение дополнительных защитных или разгружающих элементов.

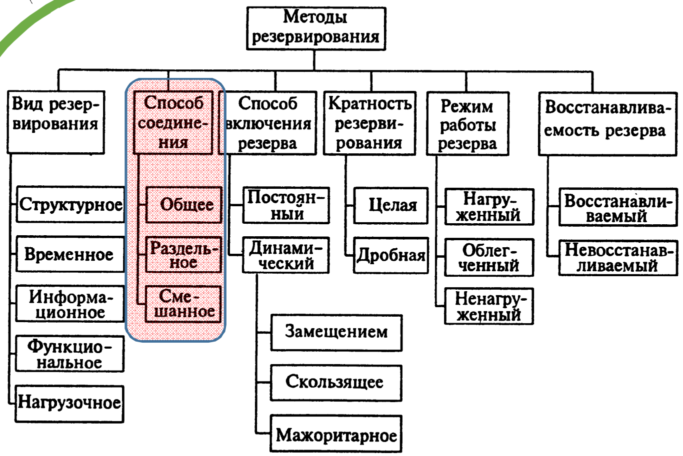


Перечисленные виды резервирования могут быть применены либо <u>к системе в целом</u>, либо <u>к отдельным элементам</u> системы или к их группам.

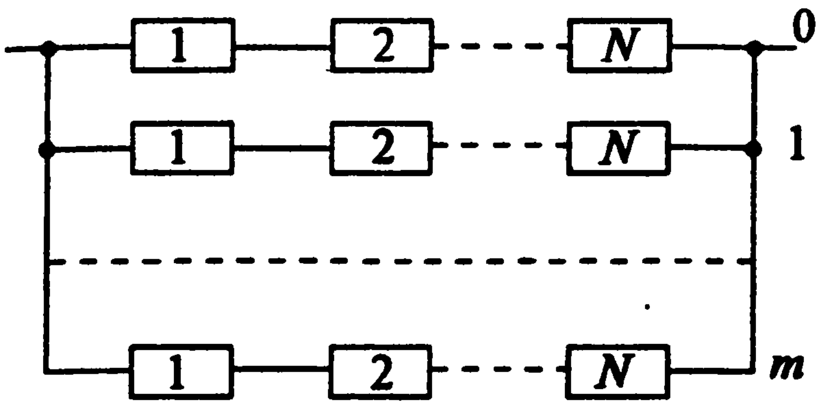
В первом случае резервирование называется <u>*общим*</u>, во втором — <u>раздельным</u>.

Сочетание различных видов резервирования в одном и том же объекте называется <u>*смешанным*</u>.

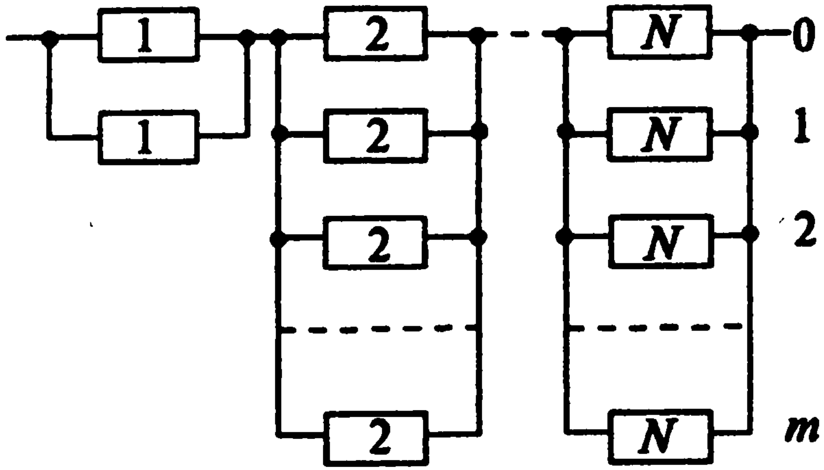
Лекция 2



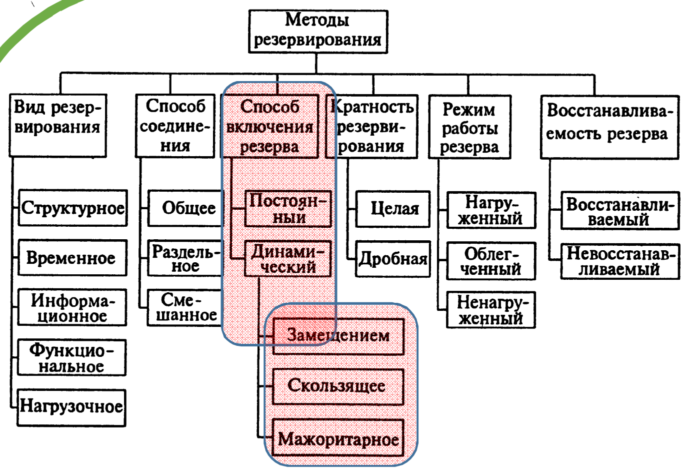
Общее резервирование



Раздельное резервирование



Лекция 2

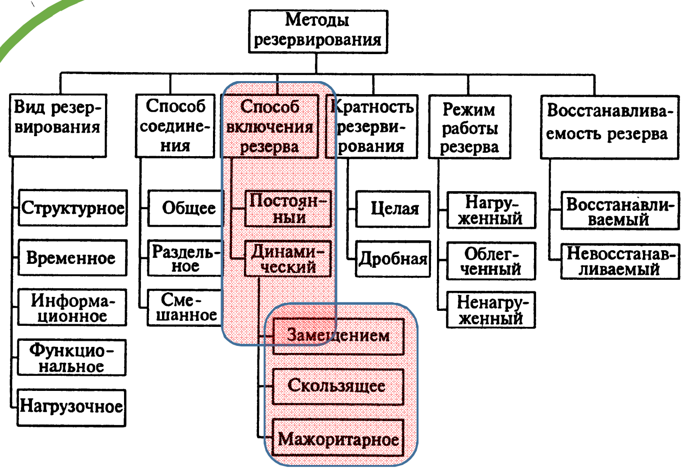


<u>По способу включения</u> резервных элементов различают постоянное, динамическое, резервирование замещением, скользящее и мажоритарное резервирование.

Постоянное резервирование — это резервирование без перестройки структуры объекта при возникновении отказа его элемента.

Для постоянного резервирования существенно, что в случае отказа основного элемента не требуется специальных устройств, вводящих в действие резервный элемент, а также отсутствует перерыв в работе.

Лекция 2

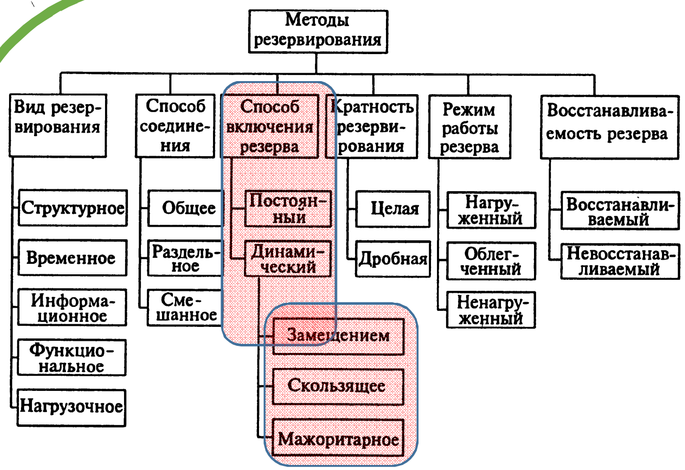


Динамическое резервирование — это резервирование с перестройкой структуры объекта при возникновении отказа его элемента. Динамическое резервирование имеет ряд разновидностей.

Резервирование замещением — это динамическое резервирование, при котором функции основного элемента передаются резервному только после отказа основного элемента. Включение резерва замещением обладает следующими преимуществами:

- не нарушает режима работы резерва;
- сохраняет в большей степени надежность резервных элементов, так как при работе основных элементов они находятся в нерабочем состоянии.

Лекция 2

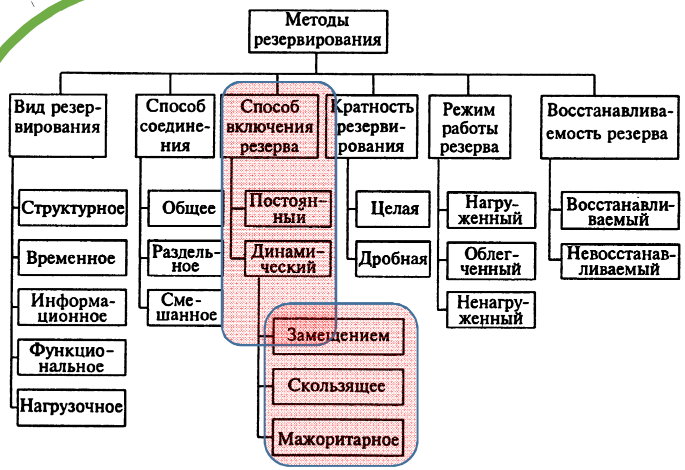


Существенным недостатком резервирования замещением является необходимость наличия переключающих устройств.

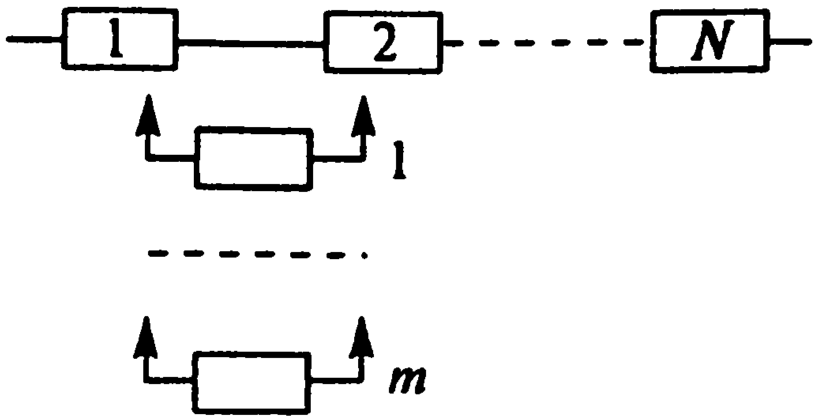
При раздельном резервировании число переключающих устройств равно числу основных элементов, что может сильно понизить надежность всей системы.

Поэтому резервировать замещением выгодно крупные узлы или всю систему, а во всех других случаях — при высокой надежности переключающих устройств.

Лекция 2



<u>*Скользящее резервирование*</u> — это резервирование замещением, при котором группа основных элементов объекта резервируется одним или несколькими резервными элементами, каждый из которых может заменить любой отказавший основной элемент в данной группе.



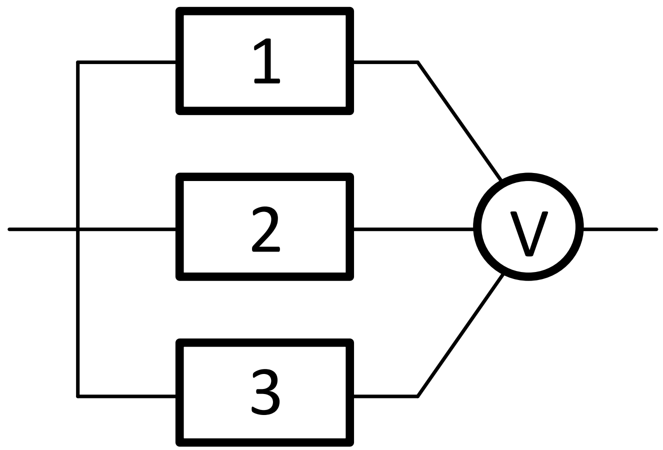
Лекция 2

В системах управления нашло широкое применение ***мажоритарное резервирование*** (*с использованием «голосования»*).

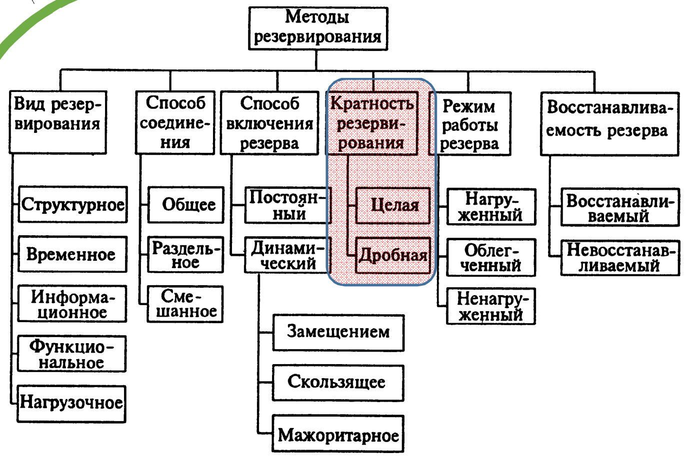
Этот способ основан на применении дополнительного элемента, называемого мажоритарным, или логическим, элементом.

Логический элемент позволяет вести сравнение сигналов, поступающих от элементов, выполняющих одну и ту же функцию.

Если результаты совпадают, то они передаются на выход устройства.



Лекция 2



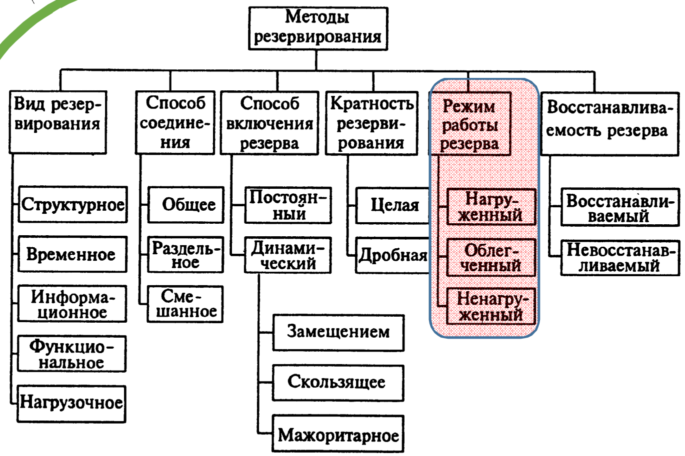
Степень избыточности характеризуется *кратностью резервирования* — отношением числа резервных элементов объекта к числу резервируемых ими основных элементов, выраженное несокращенной дробью.

Резервирование с целой кратностью имеет место, когда один основной элемент резервируется одним или более резервными элементами.

Резервирование с дробной кратностью: два и более однотипных элементов резервируются одним и более резервными элементами.

Резервирование, кратность которого равна единице $\left(\frac{1}{1}\right)$, называется *дублированием*.

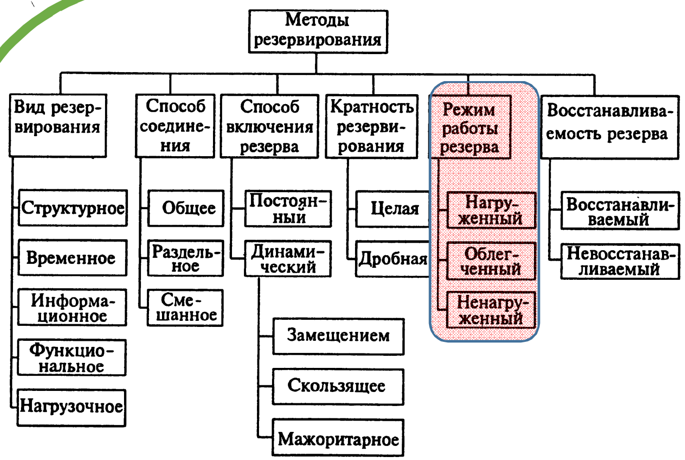
Лекция 2



В зависимости от режима работы резерва различают нагруженный, облегченный и ненагруженный резервы.

Нагруженный («горячий») резерв — это резерв, который содержит один или несколько резервных элементов, находящихся в режиме основного элемента.

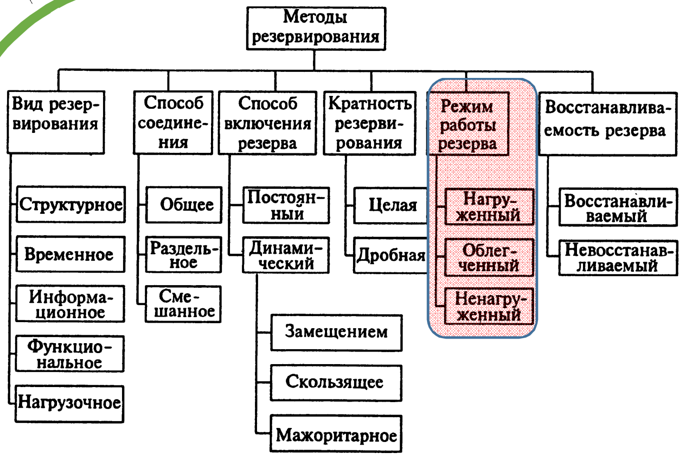
При этом, элементы нагруженного резерва имеют тот же уровень безотказности, что и резервируемые ими основные элементы.

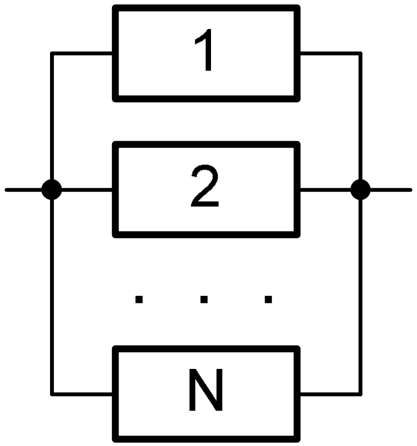


Лекция 2

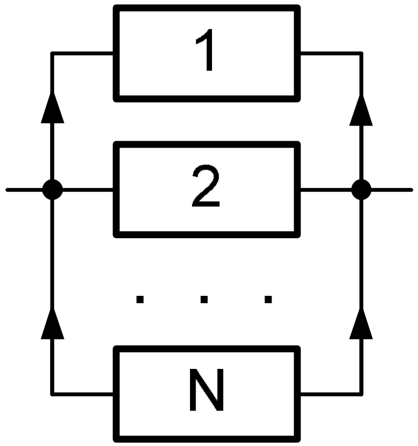
Облегченный («теплый») резерв — это резерв, который содержит один или несколько резервных элементов, находящихся в менее нагруженном режиме, чем основной. Элементы облегченного резерва обладают, как правило, более высоким уровнем безотказности, чем основные элементы.

Ненагруженный («холодный») резерв — это резерв, который содержит один или несколько резервных элементов, находящихся в ненагруженном режиме до начала выполнения ими функций основного элемента. Для элементов ненагруженного резерва *условно полагают*, что они никогда не отказывают.

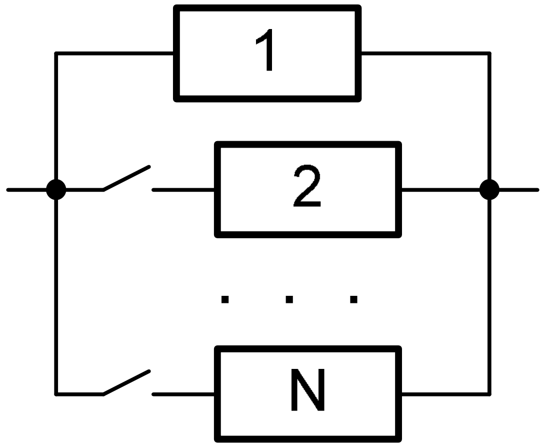




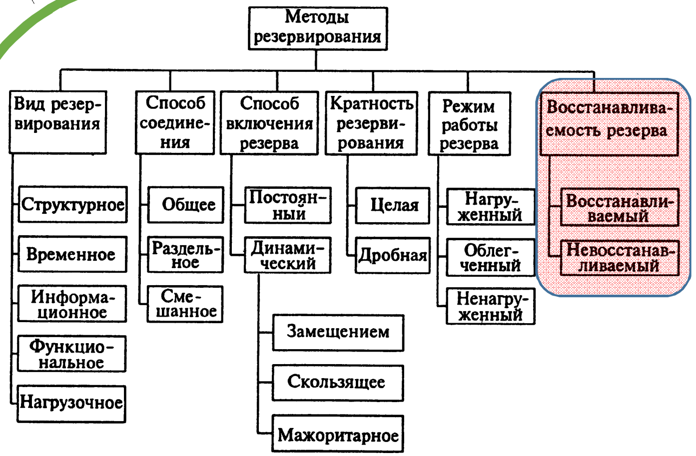
горячий резерв



теплый резерв



холодный резерв



Лекция 2

Резервирование, при котором работоспособность любого одного или нескольких резервных элементов в случае возникновения отказов подлежит восстановлению при эксплуатации, называется ***резервированием с восстановлением***; в противном случае имеет место ***резервирование без восстановления***.

Восстанавливаемость резерва обеспечивается при наличии контроля работоспособности элементов.

При наличии резервирования это особенно важно, так как в этом случае число скрытых отказов может быть больше.

Параллельное резервирование

Говорят, что компоненты системы соединены *параллельно*, если система работоспособна до тех пор, пока работоспособен хотя бы один из ее компонентов,

т.е. отказ системы наступает при отказе ее последнего работающего компонента.

В зависимости от того, в каком режиме находятся резервные компоненты параллельной системы, различают:

- «горячее» (нагруженное) резервирование;
- «холодное» (ненагруженное) резервирование;
- «теплое» (недогруженное, облегченное) резервирование.

Нагруженное («горячее») резервирование

В дальнейшем, если особо не оговорено, под параллельным резервированием будем понимать горячее резервирование.

Пусть система состоит из двух элементов E_1 и E_2, соединенных параллельно.

Обозначим через $\bar{e}_i$ событие, заключающееся в том, что i-й элемент ($i = 1, 2$) отказал на интервале $[0; t]$, тогда

$$\Pr\{\bar{e}_i\} = \Pr\{E_i \text{ отказал на } [0; t]\} = F_i(t),$$

где $F_i(t) = 1 - P_i(t)$- функция вероятности отказа i-го элемента.

Нагруженное («горячее») резервирование

Поскольку параллельная система отказывает тогда и только тогда, когда отказывают все ее элементы, то вероятность того, что система отказала на интервале $[0; t]$ (т.е. вероятность отказа системы), равна

$$F_S(t) = \Pr\{\bar{e}_1 \cap \bar{e}_2\}.$$

Т.к. отказы элементов системы считаются независимыми событиями, то

$$F_S(t) = \Pr\{\bar{e}_1 \cap \bar{e}_2\} = \Pr\{\bar{e}_1\} \cdot \Pr\{\bar{e}_2\} = F_1(t) \cdot F_2(t).$$

Нагруженное («горячее») резервирование

Обобщая полученное выражение на случай параллельной системы из n (независимых) элементов, можно записать

$$F_S(t) = \prod_{i=1}^{n} F_i(t)\,.$$

Переходя к выражению для ВБР, получим

$$P_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - P_i(t)]\,.$$

Нагруженное («горячее») резервирование

Также, представляется полезным запомнить два выражения для ВБР параллельной системы в частных случаях.

- ВБР элементов, входящих в систему, одинаковы ($P_i(t) = P(t)$):

$$P_S(t) = 1 - \left(1 - P(t)\right)^n;$$

- параллельная система состоит из двух элементов:

$$P_S(t) = P_1(t) + P_2(t) - P_1(t) \cdot P_2(t)$$

Нагруженное («горячее») резервирование

Поскольку любая функция вероятности отказа принимает значения из интервала $[0;1]$, произведение также будет находиться на этом интервале, причем

$$F_S(t) < \min_{i=1..n} F_i(t).$$

Переходя к выражению для ВБР, получим

$$P_S(t) > \max_{i=1..n} P_i(t).$$

Отсюда следует, что ВБР параллельной системы больше, чем ВБР ее наиболее надежного элемента.

Нагруженное («горячее») резервирование

Также, представляется полезным запомнить два выражения для ВБР параллельной системы в частных случаях.

- ВБР элементов, входящих в систему, одинаковы ($P_i(t) = P(t)$):

$$P_S(t) = 1 - \left(1 - P(t)\right)^n;$$

- параллельная система состоит из двух элементов:

$$P_S(t) = P_1(t) + P_2(t) - P_1(t) \cdot P_2(t)$$

«Холодное» и «теплое» резервирование

Расчет надежности систем с холодным и теплым резервированием в общем случае затруднителен.

Для параллельной системы, состоящей из одного основного и одного резервного элемента, ВБР можно найти по формуле:

$$P_S(t) = P_1(t) + \int_0^t f_1(x) \cdot P_{2;R}(x) \cdot \frac{P_{2;A}(t_e + t - x)}{P_{2;A}(t_e)} dx$$

где P_1, f_1 - ВБР и частота отказов основного элемента;

$P_{2;R}, P_{2;A}$ - ВБР резервного элемента в состоянии резерва (R) и в рабочем режиме (A).

«Холодное» и «теплое» резервирование

$$P_S(t) = P_1(t) + \int_0^t f_1(x) \cdot P_{2;R}(x) \cdot \frac{P_{2;A}(t_e + t - x)}{P_{2;A}(t_e)} dx$$

В данной формуле t_e - эквивалентное время работы резервного элемента к моменту его переключения в рабочий режим.

Его значение можно определить, решив уравнение $P_{2;R}(x) = P_{2;A}(t_e)$ относительно t_e.

Для горячего резерва $t_e = x$; для холодного - $t_e = 0$.

«Холодное» и «теплое» резервирование

Для параллельных систем, состоящих из $m+1$ идентичных компонентов, чье время до отказа распределено в соответствии с экспоненциальным распределением, существуют формулы расчета ВБР и среднего времени до отказа.

В случае параллельной системы, состоящей из одного основного и m резервных компонентов в холодном резерве:

$$P_S(t) = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda t)^i}{i!}; \quad T_{cp} = \frac{m+1}{\lambda};$$

где λ – интенсивность отказов отдельного компонента.

«Холодное» и «теплое» резервирование

В случае параллельной системы, состоящей из одного основного и m резервных компонентов в теплом резерве:

$$P_S(t) = e^{-\lambda t}\left(1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{i!}\left(1 - e^{-\lambda_R t}\right)^i\right); \quad T_{cp} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{1 + ik};$$

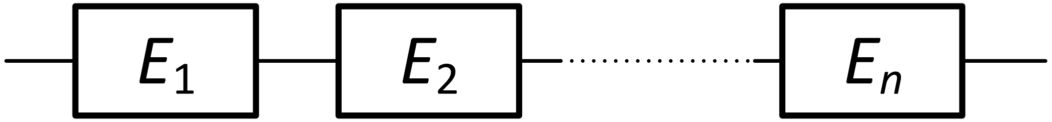
где λ_R – интенсивность отказов компонента из состояния резерва;

$$a_i = \prod_{j=0}^{i-1}\left(j + \frac{1}{k}\right);$$

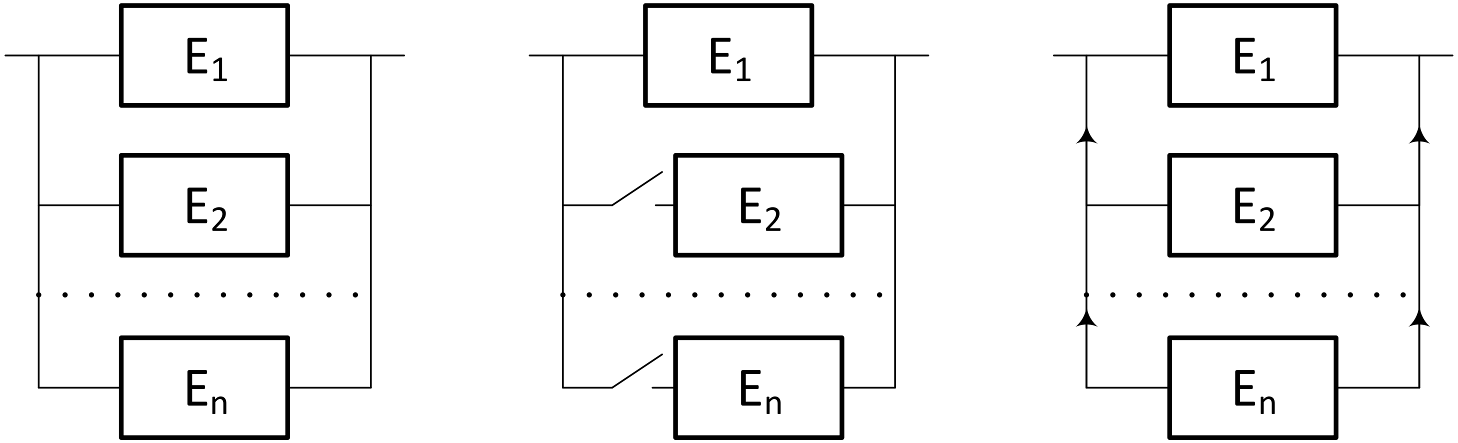
$$k = \frac{\lambda_R}{\lambda}.$$

Блок-схемы надежности

Последовательное соединение:



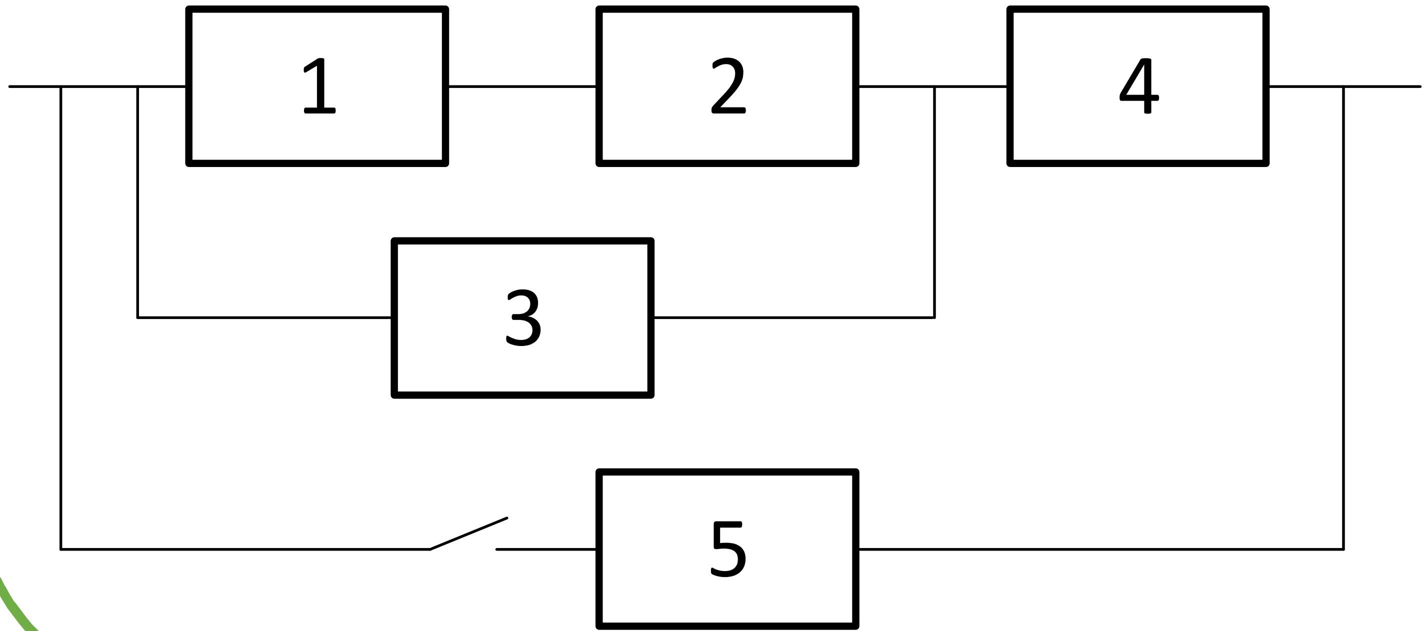
Параллельное соединение:



горячее холодное теплое

Блок-схемы надежности

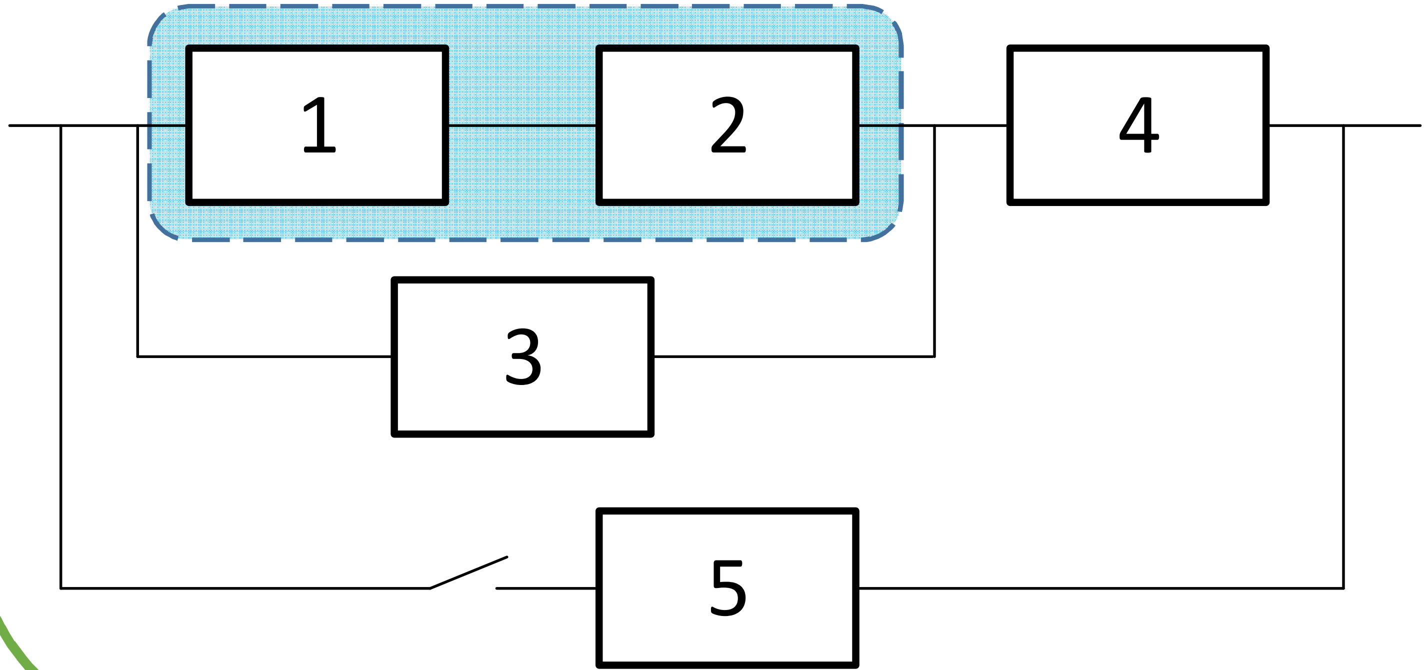
Последовательно-параллельное соединение:



Блок-схемы надежности

Последовательно-параллельное соединение:

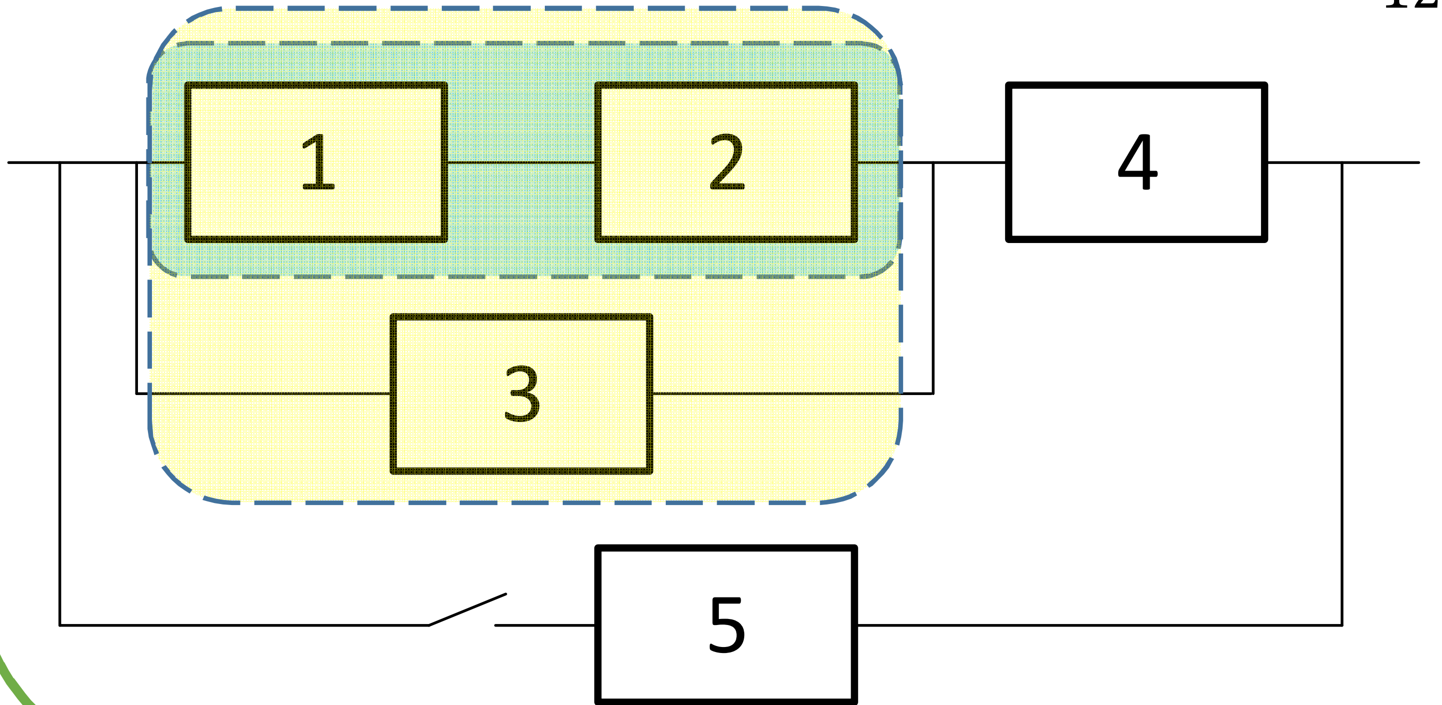
$$P_{12} = P_1 P_2$$



Блок-схемы надежности

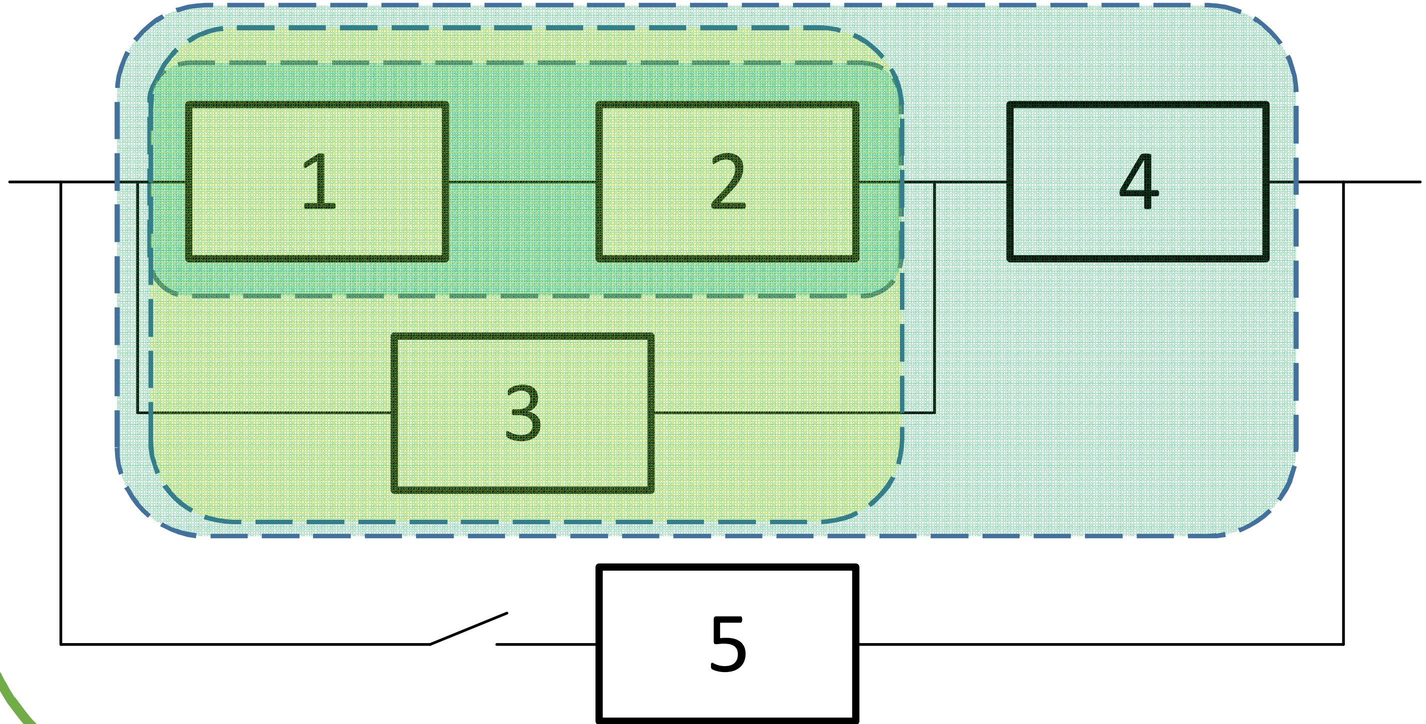
Последовательно-параллельное соединение:

$$P_{123} = P_{12} + P_3 - P_{12}P_3$$



Блок-схемы надежности

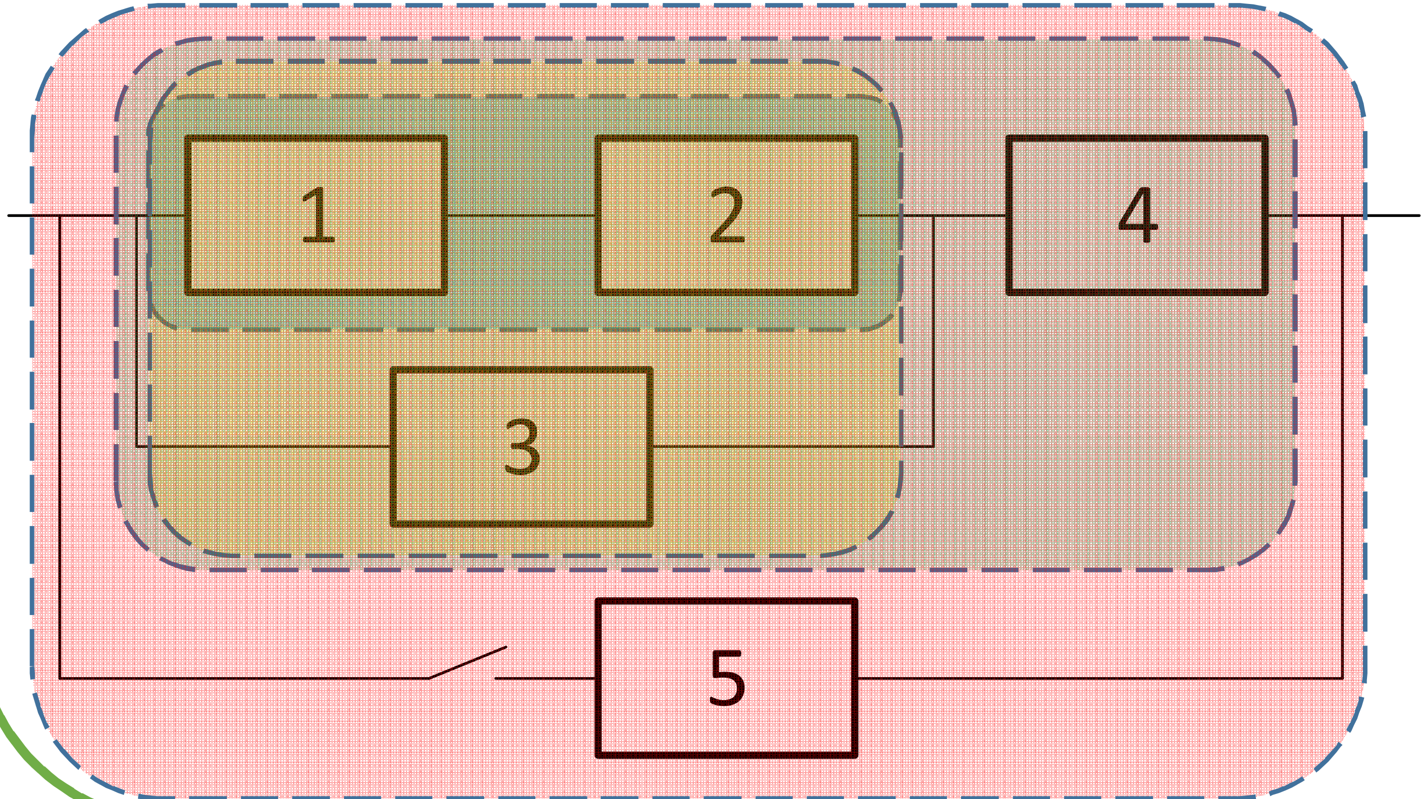
Последовательно-параллельное соединение:



$$P_{1234} = P_{123}P_4$$

Блок-схемы надежности

Последовательно-параллельное соединение:



$$P_S(t) = P_{1234}(t) + \int_0^t f_{1234}(x) P_5(t-x)\,dx$$

Кратность резервирования

Кратность резервирования выражается несокращаемой дробью вида $\frac{q}{m}$, где q – число резервных элементов,

$1 \leq m$ – минимальное число работающих элементов, при котором вся резервированная группа остается работоспособной (число основных элементов).

Дробь вида $\frac{q}{1}$ соответствует параллельной системе; такое резервирование называется резервированием с целой кратностью.

Кратность резервирования

Дробь вида $\frac{q}{m}, 1 < m$ соответствует резервированию с дробной кратностью, т.е. такой системе элементов, которая будет работоспособна до тех пор, пока работоспособны хотя бы m ее элементов.

Разновидностью систем с дробной кратностью являются системы с кратностью $\frac{k-1}{k}, k = 2, 3, \dots$, называемые системами с мажоритарным резервированием: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$.

В зарубежной литературе для указания кратности используют обозначение система $\boldsymbol{k}$-из-$\boldsymbol{n}$, что соответствует кратности $\frac{n-k}{k}$.

Кратность резервирования

Рассмотрим простейшую систему с дробной кратностью $\frac{1}{2}$, состоящую из элементов A, B и C.

Такая система будет работоспособна, если работоспособны все три ее элемента: ABC, а также любые два ее элемента: $\bar{A}BC, A\bar{B}C, AB\bar{C}$.

Т.о., ВБР системы может быть записана в виде:

$$P_S = P_A P_B P_C + (1 - P_A) P_B P_C + P_A (1 - P_B) P_C + P_A P_B (1 - P_C).$$

В случае, когда все элементы равнонадежны и их ВБР равна P, ВБР системы равна

$$P_S = 3P^2 - 2P^3.$$

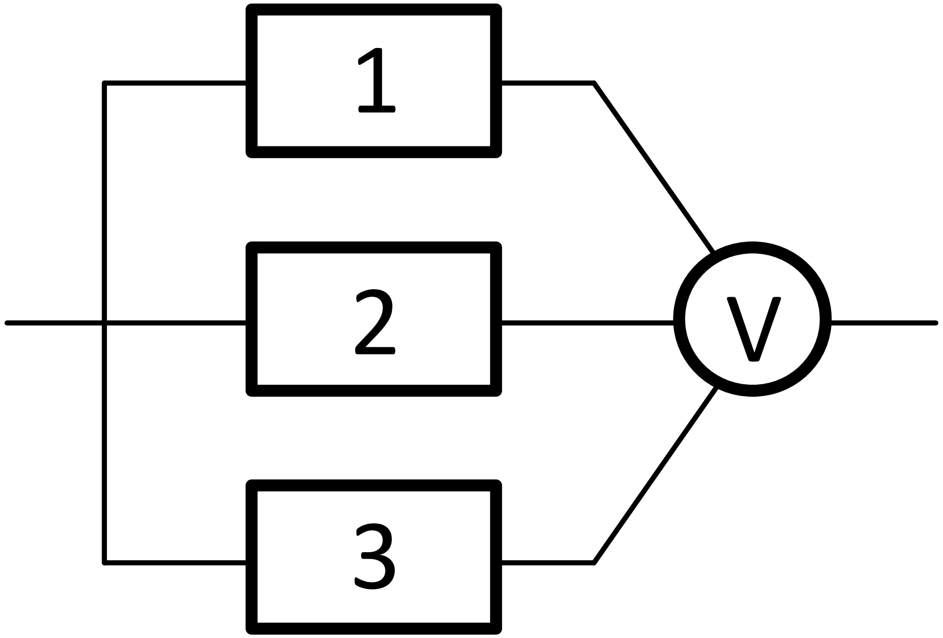
Кратность резервирования

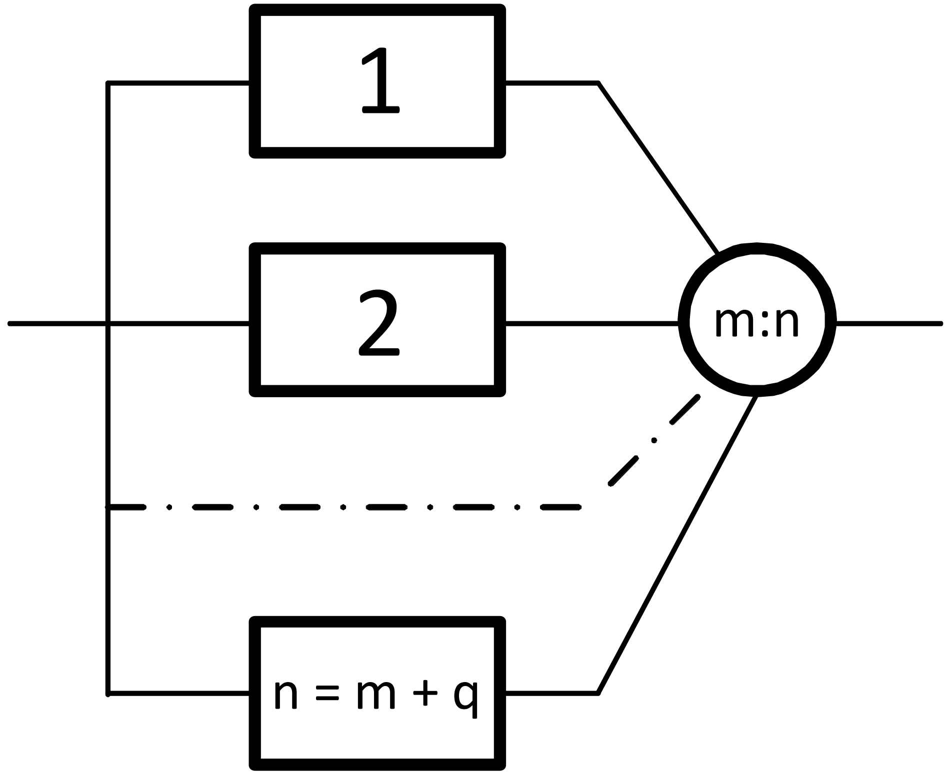
В общем, ВБР систем с дробной кратностью $\frac{q}{m}$, состоящих из равнонадежных элементов, можно записать как

$$P_S = \sum_{i=m}^{m+q} C_{m+q}^{i} P^{i} (1 - P)^{m+q-i},$$

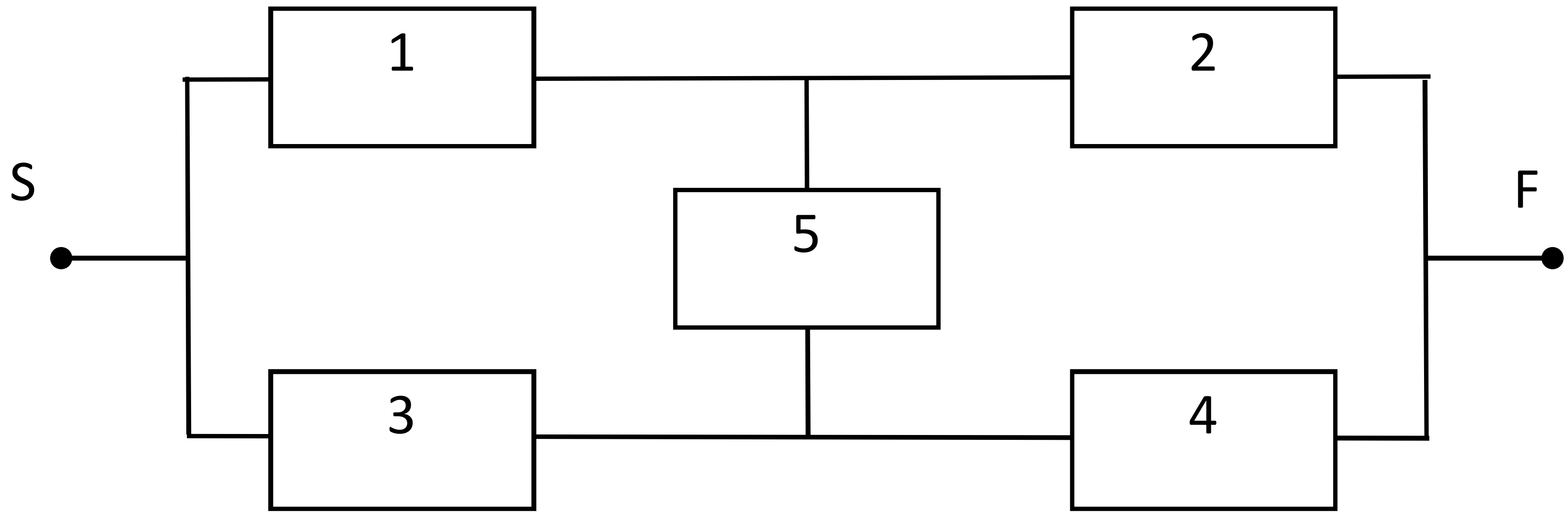
где $C_b^a = \frac{b!}{a!(b-a)!}$ - число сочетаний по a из b.

Кратность резервирования





Надежность систем с резервированием не всегда можно рассчитать путем упрощения блок-схемы. В системах передачи информации или при расчете энергораспределительной сети часто возникают структуры, аналогичные «мостовым» или «мостиковым» схемам из электротехники.



Для расчета надежности подобных систем часто применяются следующие методы:

- метод перебора состояний;
- метод разложения по ключевому элементу;
- метод преобразования «треугольник» - «звезда».

Смысл метода перебора состояний заключается в рассмотрении всего множества состояний работоспособности компонентов, составляющих систему, и в определении подмножества таких состояний, при котором система работоспособна.

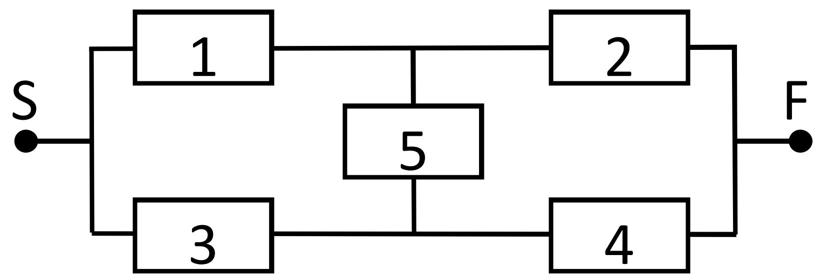
Для этого составляется таблица истинности, в которой аргументами являются состояния компонентов (1 – работоспособное, 0 - неработоспособное), а значение логической функции соответствует состоянию системы в целом.

Также таблица дополняется столбцом, в котором записываются вероятности каждого (работоспособного) состояния, выраженные через значения аргументов:

p_i - ВБР i-го компонента;
q_i - вероятность отказа i-го компонента.

Таблица для системы, состоящей из n компонентов будет иметь 2^n строк.

компоненты					система	вероятность
1	2	3	4	5		
0	0	0	0	0	0	$q_1q_2q_3q_4q_5$
0	0	0	0	1	0	$q_1q_2q_3q_4p_5$
0	0	0	1	0	0	$q_1q_2q_3p_4q_5$
0	0	0	1	1	0	$q_1q_2q_3p_4p_5$
…	…	…	…	…	…	…
0	0	1	1	1	1	$q_1q_2p_3p_4p_5$
…	…	…	…	…	…	…
1	1	1	0	0	1	$p_1p_2p_3q_4q_5$
1	1	1	0	1	1	$p_1p_2p_3q_4p_5$
1	1	1	1	0	1	$p_1p_2p_3p_4q_5$
1	1	1	1	1	1	$p_1p_2p_3p_4p_5$



Работоспособность системы определяется по наличию неразрывного пути между узлами S и F.

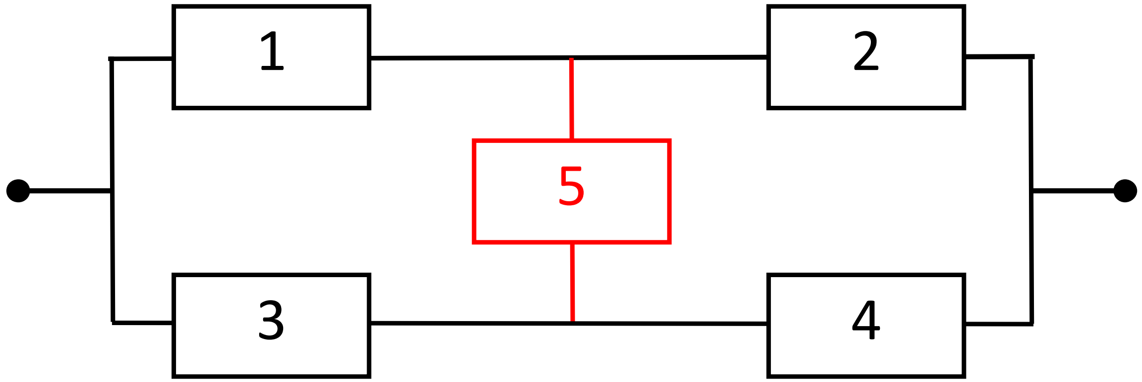
ВБР системы равна сумме всех вероятностей, соответствующих работоспособной системе.

Метод перебора состояний требует значительного времени на заполнение таблицы. Однако, он хорошо алгоритмизируется и является основным для машинного расчета надежности.

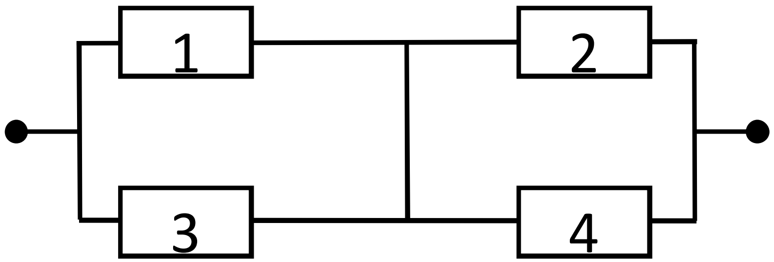
Метод разложения по ключевому элементу по сути является вариацией метода перебора состояний.

Суть метода заключается в выборе ключевого элемента, т.е. такого компонента системы, который «мешает» последовательно-параллельному упрощению блок-схемы надежности.

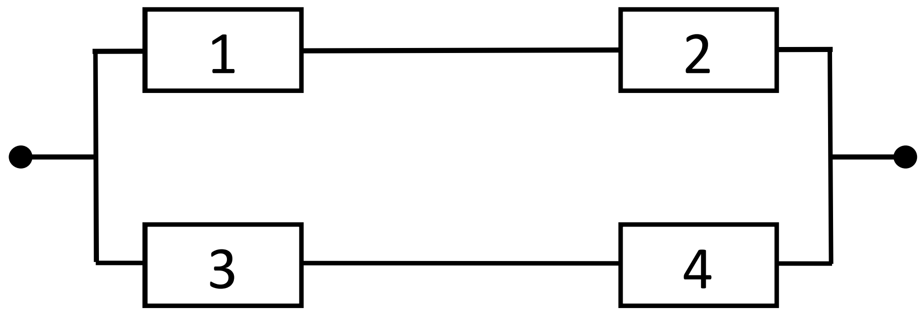
После этого рассчитывается надежность системы при допущениях об абсолютно надежном и абсолютно ненадежном ключевом элементе.



Компонент 5
работоспособен



Компонент 5
не работоспособен



После этого ВБР системы определяется по формуле полной вероятности:

$$P_S = P(S|P_K) \cdot P_K + P(S|Q_K) \cdot (1 - P_K)$$

где P_K - ВБР ключевого элемента;

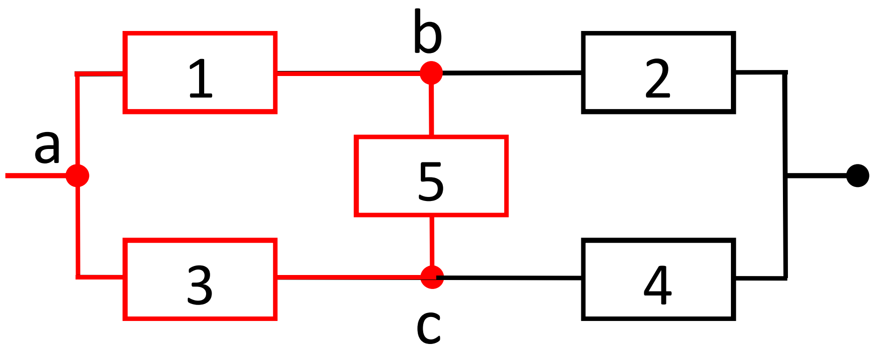
$P(S|P_K)$ - ВБР системы при работоспособном ключевом элементе;

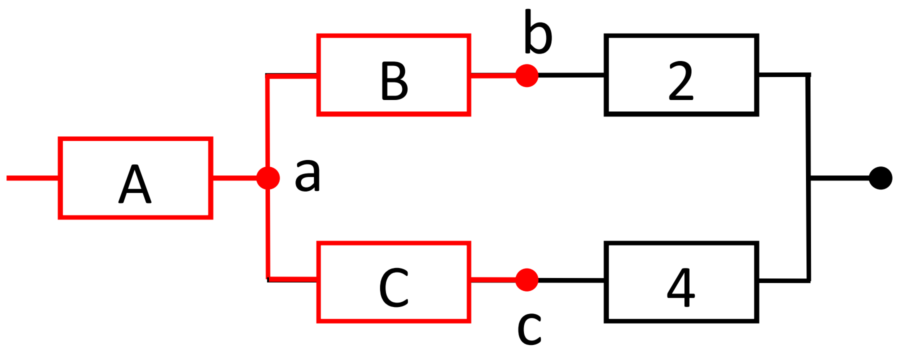
$P(S|Q_K)$ - ВБР системы при неработоспособном ключевом элементе.

Удачный выбор ключевого элемента позволяет свести расчет надежности сложной схемы к расчету надежности двух более простых схем.

При этом, ключевых элементов может быть несколько. Выбор n ключевых элементов означает рассмотрение 2^n схем.

Метод преобразования «треугольник» - «звезда» является приближенным, и поэтому применяется реже.





$$P_A P_B = 1 - (1 - P_1)(1 - P_3 P_5)$$
$$P_A P_C = 1 - (1 - P_3)(1 - P_1 P_5)$$
$$P_B P_C = 1 - (1 - P_5)(1 - P_1 P_3)$$

Решая полученную систему уравнений относительно вероятностей P_A, P_B, P_C элементов преобразованной структурной схемы надёжности, находим:

$$P_A = \sqrt{\frac{\big(1-(1-P_1)(1-P_3P_5)\big)\big(1-(1-P_3)(1-P_1P_5)\big)}{1-(1-P_5)(1-P_1P_3)}}$$

$$P_B = \sqrt{\frac{\big(1-(1-P_1)(1-P_3P_5)\big)\big(1-(1-P_5)(1-P_1P_3)\big)}{1-(1-P_3)(1-P_1P_5)}}$$

$$P_B = \sqrt{\frac{\big(1-(1-P_3)(1-P_1P_5)\big)\big(1-(1-P_5)(1-P_1P_3)\big)}{1-(1-P_1)(1-P_3P_5)}}$$