Лекция 4

СМО $M/E_m/1$

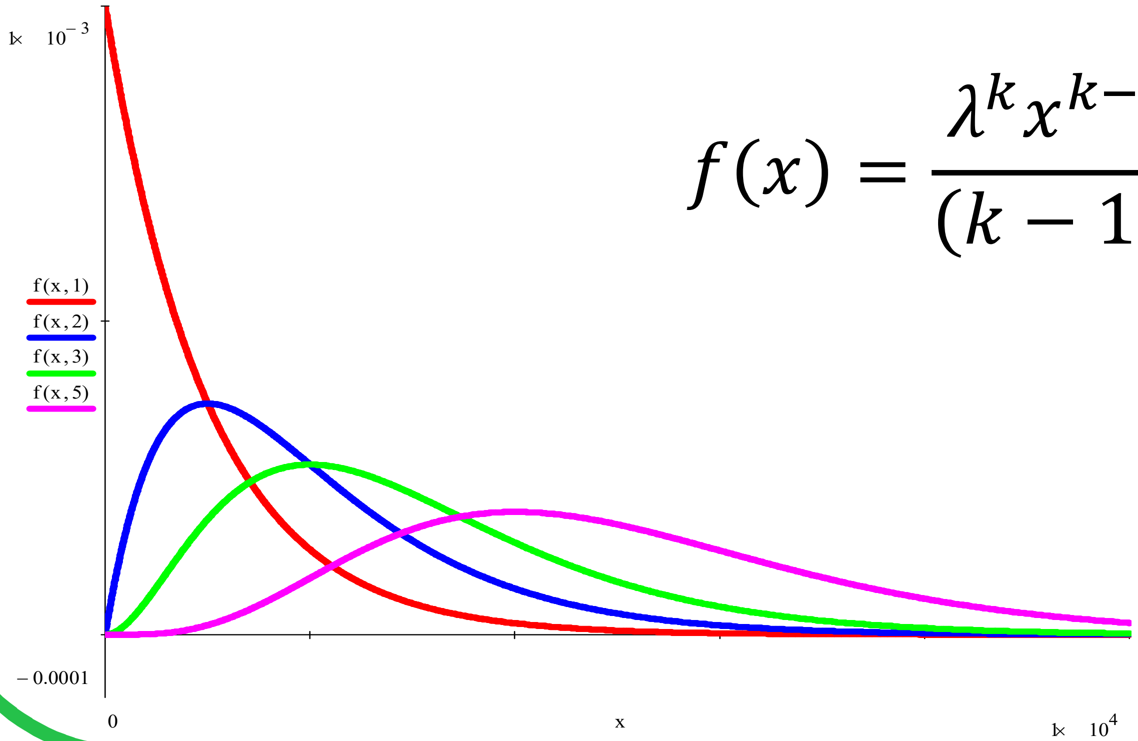
Законы распределения вероятностей

В СМО, у которых в соответствии с классификацией Кендалла на одном из первых мест (или на обоих) стоит либо *E*, либо *H*, число заявок $\nu(t)$ в системе в момент времени t уже не будет марковским процессом.

Однако для таких систем также можно построить марковский процесс с непрерывным временем и дискретным множеством состояний, описывающий их функционирование.

Для этой цели служит *метод «фиктивных фаз»*, основанный на идее вероятностной фазовой интерпретации распределений типа *PH*.

Распределение Эрланга часто используется как в ТМО, так и в других областях техники. Функция плотности распределения Эрланга выглядит следующим образом:



$$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x}$$

k: целое число (параметр формы)

При $k = 1$ распределение Эрланга сводится к экспоненциальному распределению.

Вообще, распределение Эрланга *k*-го порядка можно рассматривать как распределение суммы *k* экспоненциально распределенных случайных величин с параметром λ.

Математическое ожидание распределения Эрланга:

$$M[X] = \frac{k}{\lambda}$$

При моделировании времени обслуживания, распределенного по закону Эрланга *k*-го порядка можно представить, что заявка последовательно проходит *k* фаз обслуживания, причем длительность каждой из них распределена экспоненциально с параметром λ.

Важно понимать, что в действительности никаких фаз может и не быть – это всего лишь удобное представление распределения Эрланга.

СМО $M/E_m/1$

Рассмотрим однолинейную СМО $M/E_m/1$ с накопителем неограниченной емкости.

На вход поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ.
Времена обслуживания заявок независимы и распределены по закону Эрланга с параметрами m и μ.

При анализе и моделировании такой СМО будем полагать, что заявка, заняв сервер, последовательно проходит m фаз обслуживания, и только по окончании всех этих фаз она освобождает сервер.

Пусть $\nu(t)$ – число заявок в системе в момент t, и, кроме того, пусть $\xi(t)$ – число фаз, которое осталось обслужиться заявке, находящейся в этот момент на обслуживающем устройстве.

Определим процесс $\{\eta(t), t \geq 0\}$ следующим образом:

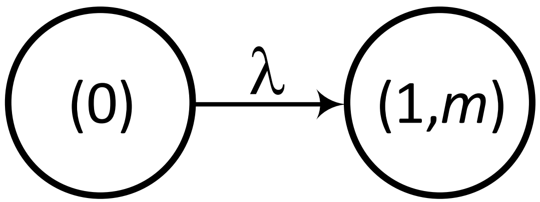
- если в системе в момент t нет заявок, то $\eta(t) = \nu(t) = 0$;
- если в системе в момент t происходит обслуживание (то есть $\nu(t) > 0$), то положим $\eta(t) = (\nu(t), \xi(t))$.

Процесс $\{\eta(t), t \geq 0\}$ будет являться однородным марковским процессом с множеством состояний

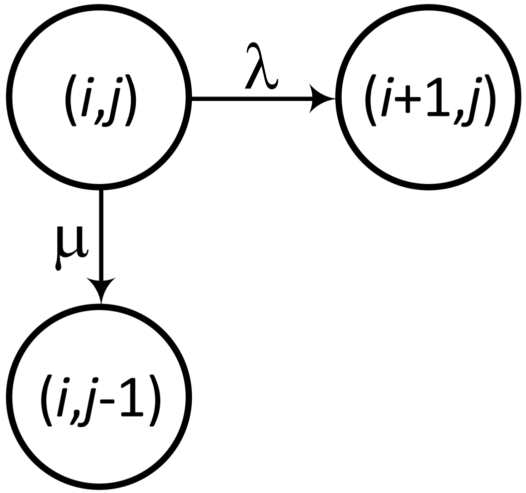
$$X = \{(0);\ (i, j), i = 1, \dots; j = \overline{1, m}\}.$$

Определим вероятности переходов процесса $\{\eta(t), t \geq 0\}$ за бесконечно малый промежуток времени.

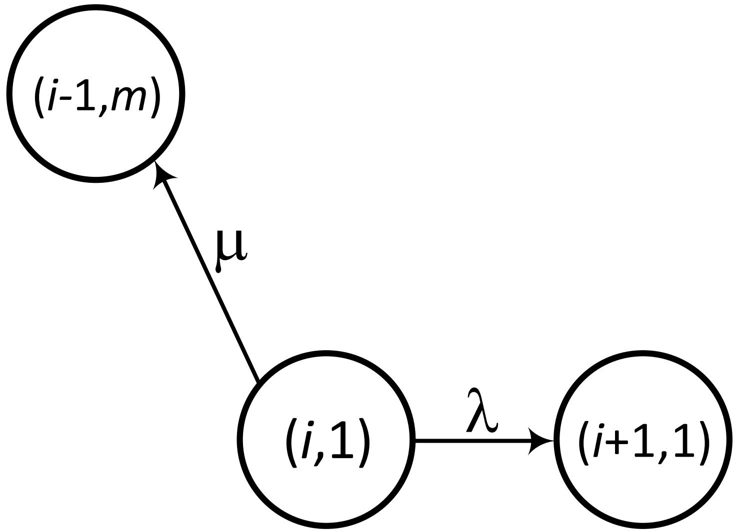
Из состояния (0) возможен переход только в состояние $(1, m)$ с интенсивностью λ.



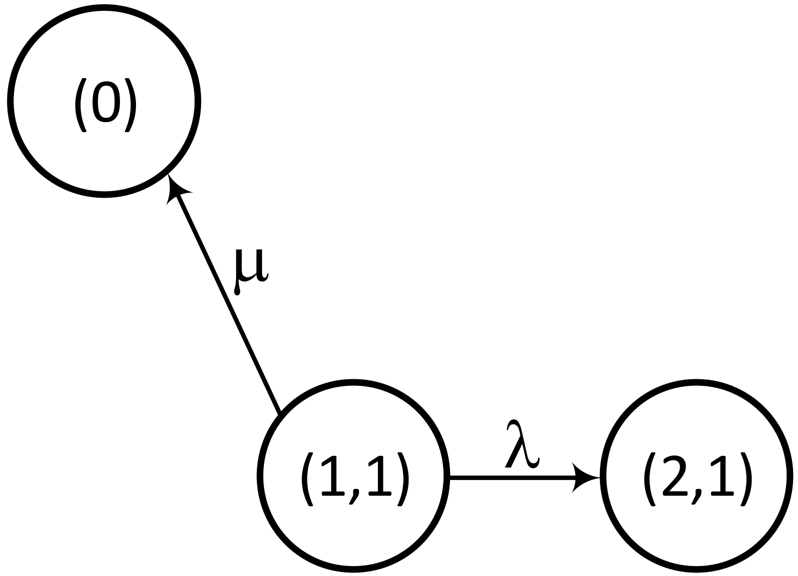
Из состояния $(i,j), i \geq 1, j = \overline{2,m},$ возможны переходы в состояния $(i+1,j)$ с интенсивностью λ (продолжается обслуживание той же фазы заявки, находящейся на обслуживающем устройстве, но поступила еще одна заявка) и $(i,j-1)$ с интенсивностью μ (окончилось обслуживание очередной фазы заявки на сервере).

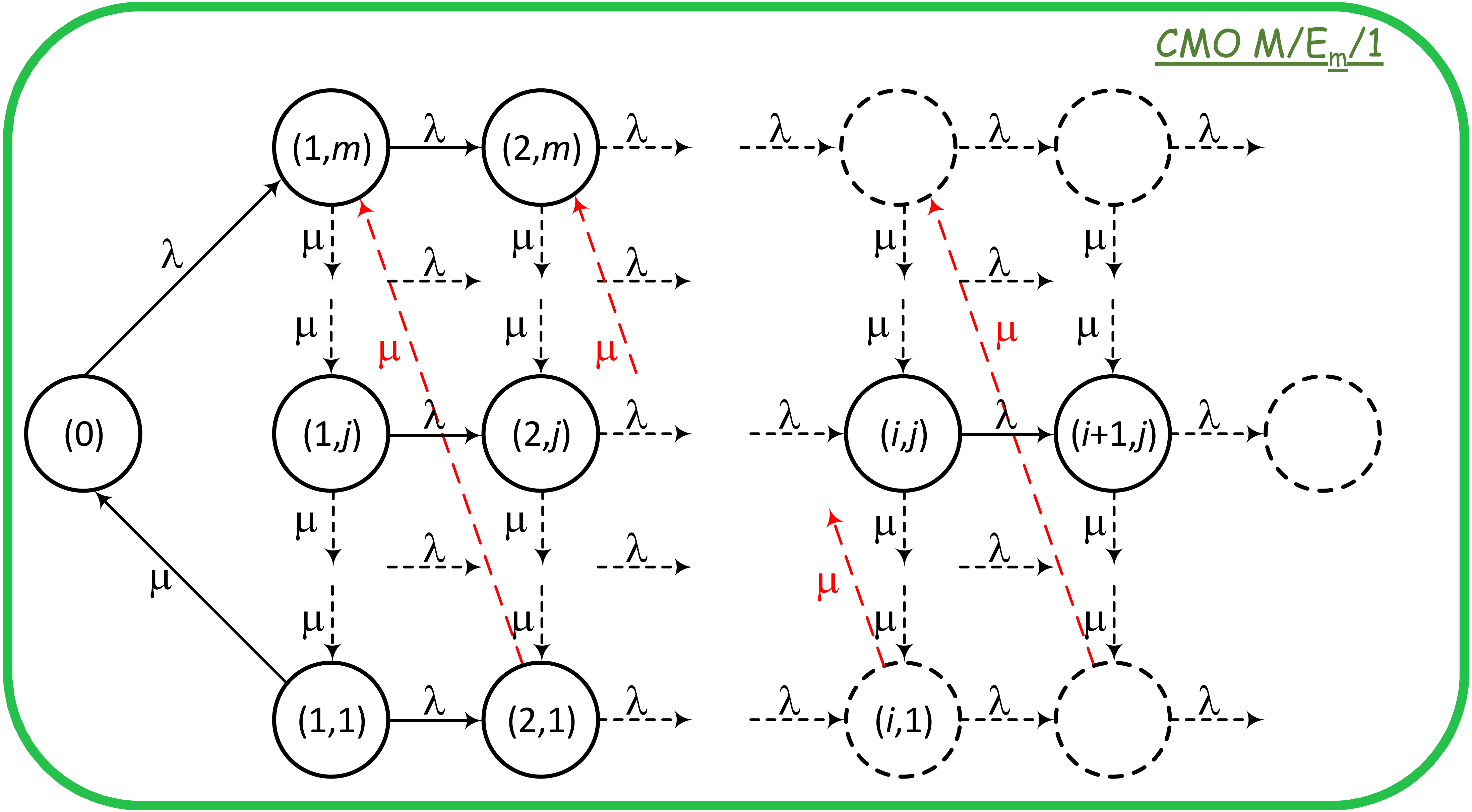


Из состояния $(i, 1), i \geq 1,$ переходы могут произойти в состояние $(i+1, 1)$ с интенсивностью λ (поступила новая заявка) и в состояние $(i-1, m)$ с интенсивностью μ (окончилось обслуживание последней фазы заявки на обслуживающем устройстве, а вновь поступившей заявке нужно пройти все m фаз).



Наконец, из состояния $(1,1)$ возможны переходы в состояние $(2,1)$ с интенсивностью λ (поступила новая заявка) и в состояние (0) с интенсивностью μ (окончилось обслуживание последней фазы единственной находившейся в системе заявки).





CMO M/E$_m$/1
(0)
(1,m)
(2,m)
(1,j)
(2,j)
(i,j)
(i+1,j)
(1,1)
(2,1)
(i,1)
λ
μ

Система дифференциальных уравнений:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_{1,1}(t);$$

$$P_{1,j}'(t) = -(\lambda + \mu) P_{1,j}(t) + \mu P_{1,j+1}(t), \qquad j = \overline{1, m-1};$$

$$P_{1,m}'(t) = -(\lambda + \mu) P_{1,m}(t) + \lambda P_0(t) + \mu P_{2,1}(t);$$

$$P_{i,j}'(t) = -(\lambda + \mu) P_{i,j}(t) + \lambda P_{i-1,j}(t) + \mu P_{i,j+1}(t), \qquad i \geq 2, j = \overline{1, m-1};$$

$$P_{i,m}'(t) = -(\lambda + \mu) P_{i,m}(t) + \lambda P_{i-1,m}(t) + \mu P_{i+1,1}(t), \qquad i \geq 2.$$

СМО M/E$_m$/1

Уравнения стационарного режима:

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_{1,1};$$

$$0 = -(\lambda + \mu) P_{1,j} + \mu P_{1,j+1}, \qquad j = \overline{1, m-1};$$

$$0 = -(\lambda + \mu) P_{1,m} + \lambda P_0 + \mu P_{2,1};$$

$$0 = -(\lambda + \mu) P_{i,j} + \lambda P_{i-1,j} + \mu P_{i,j+1}, \qquad i \geq 2, j = \overline{1, m-1};$$

$$0 = -(\lambda + \mu) P_{i,m} + \lambda P_{i-1,m} + \mu P_{i+1,1}, \qquad i \geq 2.$$

СМО $M/E_m/1$

Используя принцип локального баланса, можно получить:

$\lambda P_0 = \mu P_{1,1};$ $\mu P_{*,j} = \mu P_{*,j+1}, \quad j = \overline{1, m-1};$

$\lambda P_{i,*} = \mu P_{i+1,1}, \quad i \geq 1;$ $\mu P_{*,m} = \mu P_{*,1};$

условие нормировки

$$P_{*,1} = P_{*,2} = \cdots = P_{*,m}; \qquad P_0 + P_{*,*} = 1; \qquad \lambda = \mu P_{*,1};$$

где символом « $*$ » обозначается суммирование по всем возможным значением дискретного аргумента.

СМО M/E$_m$/1

Из уравнений

$$P_{*,1} = P_{*,2} = \cdots = P_{*,m}; \qquad \lambda = \mu P_{*,1};$$

получаем:

$$P_{*,j} = \hat{\rho}, \qquad j = \overline{1,m}, \qquad \hat{\rho} = \frac{\lambda}{\mu};$$

а также,

$$P_0 = 1 - \rho, \qquad \rho = \frac{m\lambda}{\mu} = \lambda b;$$

где b – среднее время обслуживания.

Величина ρ называется загрузкой системы, а условием существования стационарного режима является $\rho < 1$.

CMO $M/E_m/1$

$$Q = \frac{\rho^2\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{2(1-\rho)}$$

$$N = Q + \rho = \rho + \frac{\rho^2\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{2(1-\rho)}$$

$$w = \frac{\rho(m+1)}{2\mu(1-\rho)} = \frac{Q}{\lambda}$$

$$v = w + \frac{m}{\mu} = \frac{N}{\lambda}$$

Числовая величина X, значение которой меняется в зависимости от случая, называется случайной величиной (СВ).

Различают два основных типа случайных величин:

- дискретные;
- непрерывно распределенные.

Законом распределения СВ называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и соответствующими им вероятностями.

Для количественного описания непрерывного распределения вероятностей удобно воспользоваться не вероятностью события $X = x$, а вероятностью события $X \leq x$, где x - некоторое значение СВ.

Вероятность этого события, очевидно, зависит от x , и является некоторой функцией от x. Эта функция называется *функцией распределения случайной величины* X и обозначается $F(x)$:

$$F(x) = \Pr\{X \leq x\}.$$

Функцию $F(x)$ иногда называют *интегральной функцией распределения*, или *интегральным законом распределения*.

- Функция распределения $F(x)$ есть неубывающая функция своего аргумента, то есть при $x_2 > x_1$

$$F(x_2) \geq F(x_1).$$

- $$F(-\infty) = 0; \qquad F(\infty) = 1.$$

- $$\Pr\{x_1 \leq X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Функция

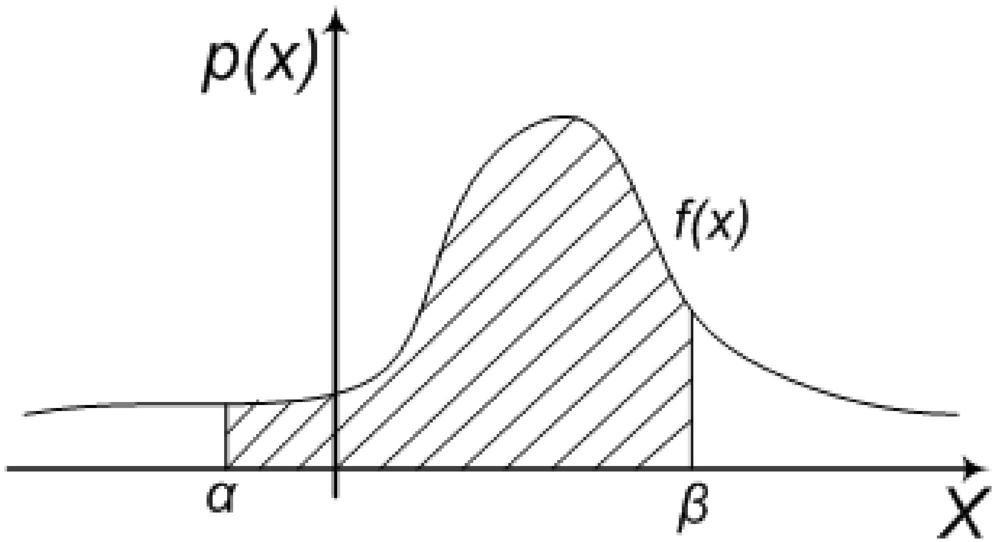
$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

называется *плотностью распределения вероятности* непрерывной СВ X.

Плотность распределения является одной из форм закона распределения – дифференциальный закон.

Выразим вероятность попадания СВ X на отрезок от α до β через плотность распределения. Очевидно, она равна интегралу:

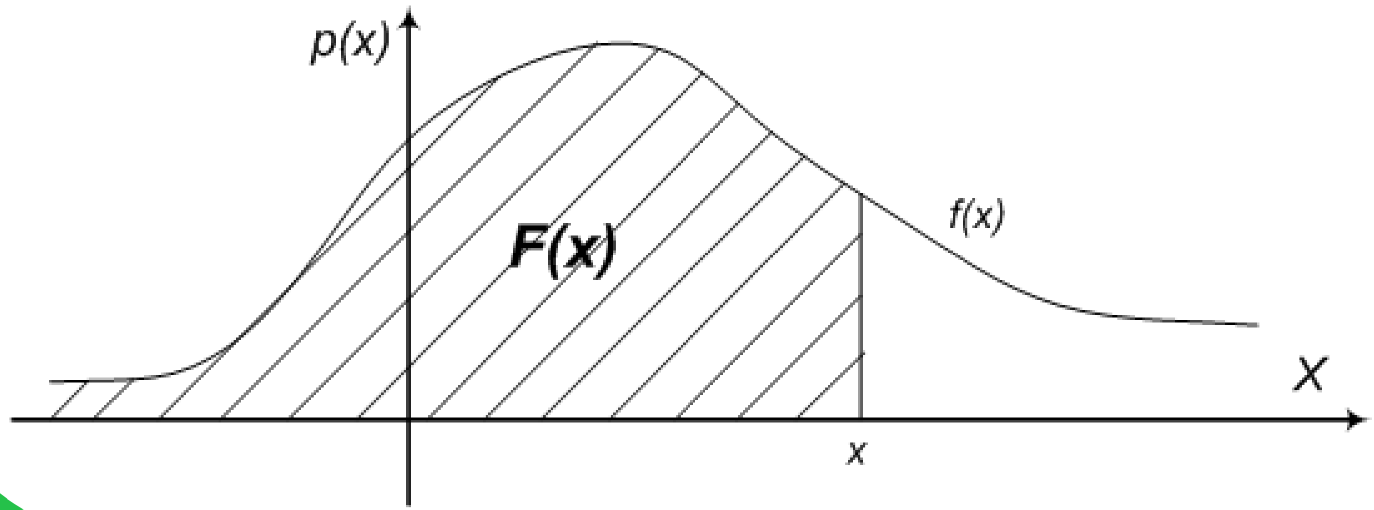
$$\Pr\{\alpha \le X \le \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\,.$$



Выразим функцию распределения через плотность. Согласно определению

$$F(x) = \Pr\{X \leq x\} = \Pr\{-\infty < X \leq x\}.$$

Учитывая, что $\Pr\{\alpha \leq X \leq \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, получим



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

- Так как функция распределения $F(x)$ - неубывающая функция, то

$$f(x) \geq 0.$$

- Общая площадь под функцией плотности распределения всегда равна 1:

$$\Pr\{-\infty < X < \infty\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Математическим ожиданием (или *средним значением*) случайной величины X называется постоянное число, обозначаемое символами m_X, $\bar{X}$ или $M[X]$, и определяемое равенством:

$$M[X] = \begin{cases} \sum_{-\infty}^{\infty} x_i p_i & \text{– для дискретных СВ;} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & \text{– для непрерывных СВ.} \end{cases}$$

Математическое ожидание константы равно самой константе:

$$M[C] = C$$

Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

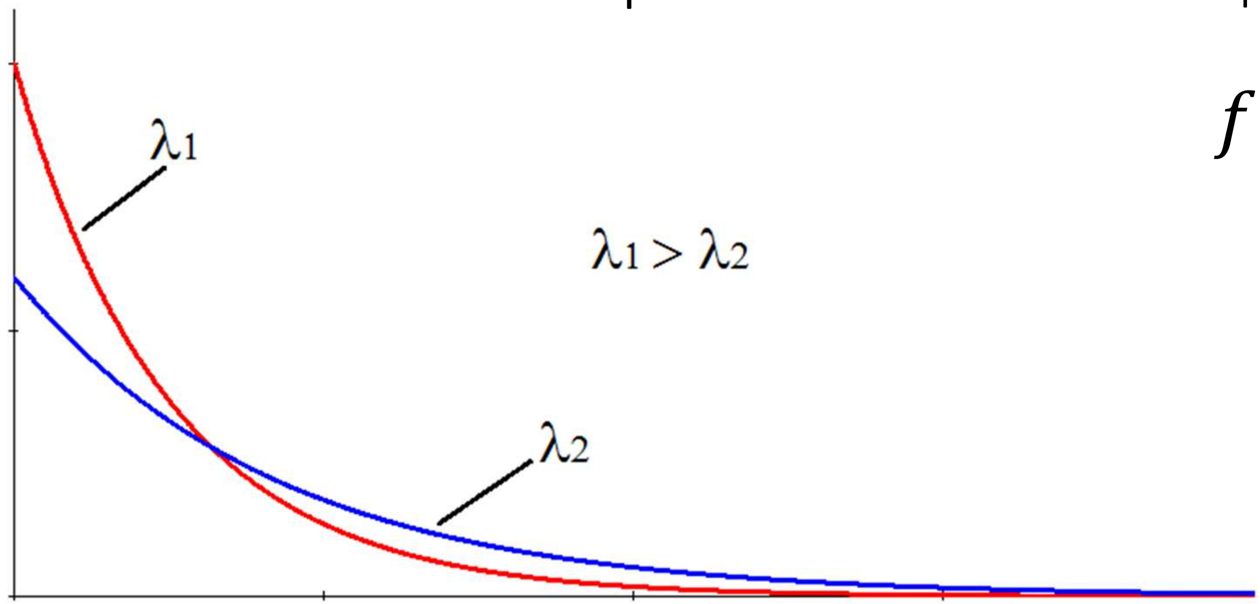
$$M[k \cdot X] = k \cdot M[X]$$

Математическое ожидание алгебраической суммы (произведения) конечного числа независимых случайных величин равно сумме (произведению) их математических ожиданий:

$$M\left[\sum X_i\right] = \sum M[X_i] \qquad M\left[\prod X_i\right] = \prod M[X_i]$$

Экспоненциальное (показательное) распределение

Непрерывная случайная величина X имеет показательный (экспоненциальный) закон распределения с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность вероятности имеет вид:

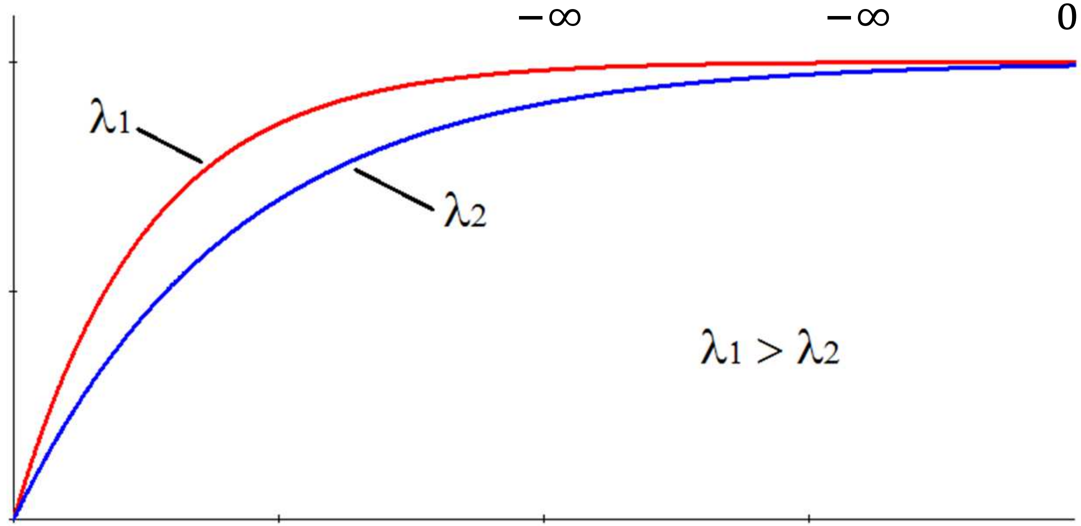


$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Экспоненциальное (показательное) распределение

Найдем интегральную функцию показательного распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt = 1 - e^{-\lambda x}.$$



$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Экспоненциальное (показательное) распределение

Математическое ожидание:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Генератор случайных чисел в AnyLogic:

exponential(λ)

Распределение Вейбулла

Непрерывная случайная величина X имеет распределение Вейбулла с параметрами $\alpha, \beta > 0$, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}, x \geq 0; \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad x < 0. \end{cases}$$

Распределение Вейбулла

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}, x \geq 0; \\ 0, \qquad\qquad x < 0. \end{cases}$$

Математическое ожидание:

$$M[X] = \beta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right),$$

где $\Gamma(x)$ - гамма-функция.

Генератор случайных чисел в AnyLogic:

weibull(β,α)

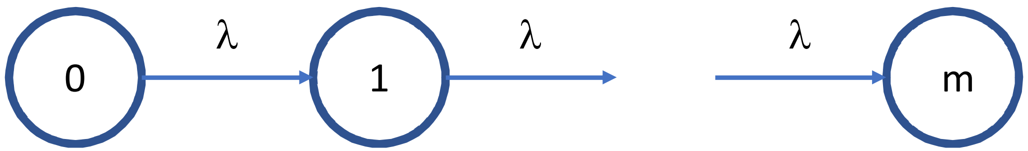
Распределение Эрланга

Непрерывная случайная величина X имеет распределение Эрланга (порядка m) с параметрами $\beta > 0, m \in \mathbb{Z}^+$, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{m-1}}{\beta^m (m-1)!} e^{-\frac{x}{\beta}}, x \geq 0; \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad x < 0. \end{cases}$$

Распределение Эрланга

Случайное время, распределенное в соответствии с распределением Эрланга порядка m, можно представить как последовательность m фаз, каждая из которых имеет случайную длительность, распределенную экспоненциально с параметром $\lambda = \frac{1}{\beta}$.



Распределение Эрланга

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{i} e^{-\frac{x}{\beta}}, x \geq 0; \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad x < 0. \end{cases}$$

Математическое ожидание:

$$M[X] = k \cdot \beta,$$

Генератор случайных чисел в AnyLogic:

```
erlang(β,m)
```

Гамма-распределение

Непрерывная случайная величина X имеет гамма-распределение с параметрами $\alpha, \beta > 0$, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

где $\Gamma(x)$ - гамма-функция.

Гамма-распределение

Математическое ожидание:

$$M[X] = k \cdot \beta,$$

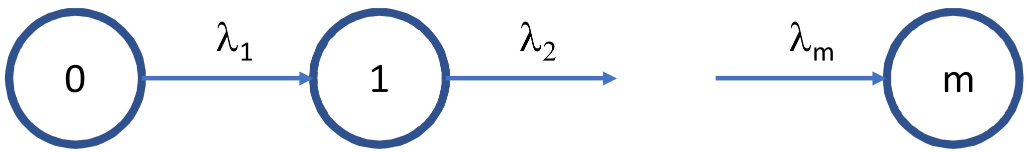
Генератор случайных чисел в AnyLogic:

```
gamma(α,β)
```

Гипоэкспоненциальное распределение

(Обобщенное распределение Эрланга)

Рассмотрим случайный процесс, состоящий из выполнения m фаз, каждая из которых имеет случайную длительность, распределенную экспоненциально с параметром λ_i.



Тогда общее время выполнения всех m фаз будет случайной величиной, распределенной в соответствии с *гипоэкспоненциальным распределением*.

Гипоэкспоненциальное распределение

(Обобщенное распределение Эрланга)

В частном случае, для $m = 2$

Функция плотности:

$$f(x) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 x} - e^{-\lambda_1 x}\right)$$

Функция распределения:

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

Математическое ожидание:

$$M[X] = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$

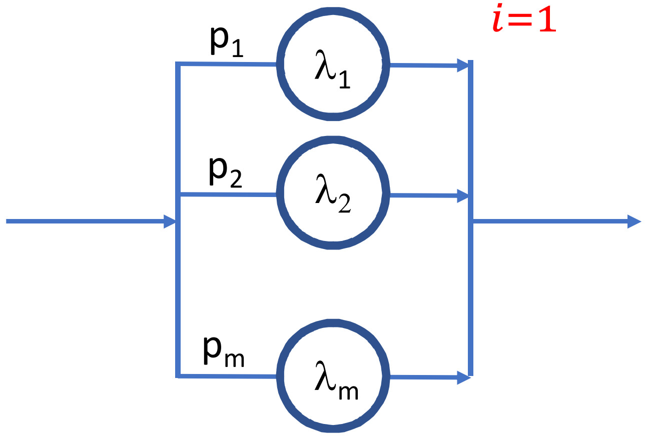
AnyLogic: **exponential(λ1)+exponential(λ2)**

Гиперэкспоненциальное распределение

Пусть случайный процесс заключается в выборе одной из m фаз, каждая из которых имеет случайную длительность, распределенную экспоненциально с параметром λ_i и может быть выбрана с вероятностью p_i.

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

Время выполнения такого процесса будет случайной величиной, имеющей гиперэкспоненциальное распределение с параметрами $\lambda_i > 0$ и $p_i > 0, i = \overline{1..m}$.



Гиперэкспоненциальное распределение

Функция плотности:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}$$

Функция распределения:

$$F(x) = 1 - \sum_{i=1}^{m} p_i e^{-\lambda_i x}$$

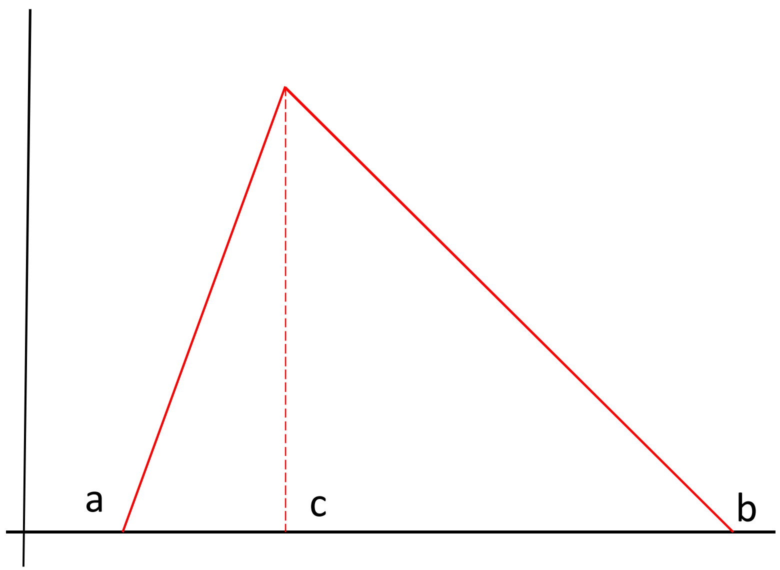
Математическое ожидание:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{\lambda_i}$$

Реализация в AnyLogic должна выполняться структурно, с использованием блоков *Select*.

Треугольное распределение

Непрерывная случайная величина X имеет треугольное распределение с параметрами $a \leq c \leq b, a < b$, если ее плотность вероятности имеет вид:



$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, a \leq x \leq c; \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, c < x \leq b; \\ 0, (x < a) \vee (x > b). \end{cases}$$

Треугольное распределение

Математическое ожидание:

$$M[X] = \frac{a+b+c}{3}$$

AnyLogic: **`triangular(a,b,c)`**