МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Томск, 2017

2. ОПЕРАЦИИ ЛОГИКИ БУЛЯ

Пусть $B = \{0,1\}$ – двухэлементное множество, и

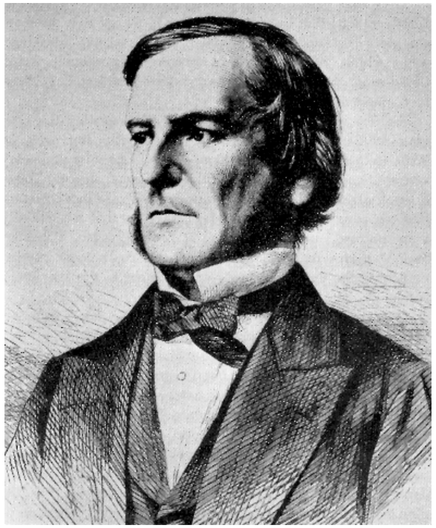
x_1, x_2,…x_n - переменные, принимающие значения

из этого множества.

Логическими (булевыми) операциями над этими

переменными называются все возможные отобра-

жения $B^n \to B,\ n \in \mathbb{N}$.



Джордж Буль
1815-1864

Определение логических операций совпадает с определением функции!

2. ОПЕРАЦИИ ЛОГИКИ БУЛЯ

$$f : B^n \to B,\ n \in \square$$

n – количество аргументов логической операции (функции), также называемое ***арностью.***

n = 0 - нульарные операции (функции)
n = 1 - **унарные** операции (функции)
n = 2 - **бинарные** операции (функции)
n = 3 - тернарные операции (функции 3-х аргументов)

Элементы декартового произведения B^n будем называть ***логическими векторами*** или ***кортежами*** логических переменных.

Число всевозможных кортежей длины n равно 2^n.

Т.к. на каждом кортеже функция может принимать лишь значения 0 или 1,

число всевозможных функций n переменных равно $2^{\left(2^n\right)}$.

Таблицы истинности

n – количество аргументов $\Rightarrow \left(2^n\right)\times\left(n+1\right)$ - размер таблицы

Кортежи в таблице перечислены в порядке возрастания соответствующих двоичных чисел

	x_1	x_2	x_3	$y=f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	
1	0	0	1	
2	0	1	0	
3	0	1	1	
4	1	0	0	
5	1	0	1	
6	1	1	0	
7	1	1	1	

2. ОПЕРАЦИИ ЛОГИКИ БУЛЯ

Нульарные операции (функции)

n = 0 - количество аргументов

количество строк в таблице: $2^0 = 1$

количество возможных функций: $2^{\left(2^0\right)} = 2^1 = 2$

нет аргументов	f_0	f_1
	0	1

Логические константы: $f_0 = 0$ - тождественный нуль

$f_1 = 1$ - тождественная единица, ***тавтология***

Унарные операции (функции)

n = 1 - количество аргументов
количество строк в таблице: $2^1 = 2$
количество возможных функций: $2^{\left(2^1\right)} = 2^2 = 4$

$f_0\left(x_1\right) = 0$

тождественный 0

$f_3\left(x_1\right) = 1$

тождественная 1, тавтология

x_1	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

$f_1\left(x_1\right) = \overline{x_1} = \neg x_1$

отрицание
логическое «НЕ»

$f_2\left(x_1\right) = x_1$

функция повтора

Бинарные операции (функции)

n = 2 - количество аргументов
количество строк в таблице: $2^2 = 4$
количество возможных функций: $2^{\left(2^2\right)} = 2^4 = 16$

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

$$f_0(x_1, x_2) = 0$$

тождественный 0

$$f_{15}(x_1, x_2) = 1$$

тождественная 1,
тавтология

2. ОПЕРАЦИИ ЛОГИКИ БУЛЯ

Бинарные операции (функции)

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

$$f_3(x_1, x_2) = \overline{x}_1$$

отрицание x_1

$$f_5(x_1, x_2) = \overline{x}_2$$

отрицание x_2

$$f_{12}(x_1, x_2) = x_1$$

повтор x_1

$$f_{10}(x_1, x_2) = x_2$$

повтор x_2

Бинарные операции (функции)

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

x_1	x_2	f_8
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

<u>Конъюнкция</u>, логическое «И»,
лог. умножение,
функция минимума

$$f_8(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 =$$
$$= x_1 \cdot x_2 =$$
$$= AND(x_1, x_2) =$$
$$= \min(x_1, x_2)$$

2. ОПЕРАЦИИ ЛОГИКИ БУЛЯ

Бинарные операции (функции)

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Дизъюнкция, логическое «ИЛИ»,
лог. сумма,
функция максимума

$$f_{14}(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 =$$
$$= x_1 + x_2 =$$
$$= OR(x_1, x_2) =$$
$$= \max(x_1, x_2)$$

x_1	x_2	f_{14}
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Бинарные операции (функции)

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Штрих Шеффера,
отрицание конъюнкции,
логическое «НЕ-И»

x_1	x_2	f_7
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f_7(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2 =$$

$$= \overline{x_1 \wedge x_2} =$$

$$= NAND(x_1, x_2)$$

Бинарные операции (функции)

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

x_1	x_2	f_1
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Стрелка Пирса,
отрицание дизъюнкции,
логическое «НЕ-ИЛИ»

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2 =$$
$$= \overline{x_1 \vee x_2} =$$
$$= NOR(x_1, x_2)$$

Бинарные операции (функции)

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Эквивалентность,
функция равнозначности,
равенство

x_1	x_2	f_9
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$f_9(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2 =$$
$$= (x_1 = x_2)$$

Бинарные операции (функции)

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

<u>Сумма по mod 2</u>,
функция неравнозначности,
исключающее «ИЛИ»,
неравенство

x_1	x_2	f_6
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f_6(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 =$$

$$= (x_1 \neq x_2) =$$

$$= XOR(x_1, x_2) =$$

$$= \overline{x_1 \leftrightarrow x_2}$$

2. ОПЕРАЦИИ ЛОГИКИ БУЛЯ

Бинарные операции (функции)

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Импликация,
прямая импликация,
функция следования,
меньше или равно

$$f_{11}(x_1, x_2) = x_1 \to x_2 =$$
$$= (x_1 \leq x_2)$$

x_1	x_2	f_{11}
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

2. ОПЕРАЦИИ ЛОГИКИ БУЛЯ

Бинарные операции (функции)

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Обратная импликация,
больше или равно

$$f_{13}(x_1, x_2) = x_1 \leftarrow x_2 =$$
$$= (x_1 \geq x_2)$$

x_1	x_2	f_{13}
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Бинарные операции (функции)

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

x_1	x_2	f_4
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Инверсия импликации, отрицание импликации, больше

$$f_4(x_1, x_2) = \overline{x_1 \to x_2} =$$
$$= (x_1 > x_2)$$

2. ОПЕРАЦИИ ЛОГИКИ БУЛЯ

Бинарные операции (функции)

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

x_1	x_2	f_4
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Инверсия обратной импликации, меньше

$$f_4(x_1, x_2) = \overline{x_1 \leftarrow x_2} =$$

$$= (x_1 < x_2)$$

Полные системы функций (базисы)

Полная система функций – набор функций, с помощью которого можно получить все остальные функции.

Если из такого набора нельзя исключить ни одной функции, то такой набор называется ***базисом***.

$\{\wedge, \vee, \neg\}$ - полная система

$\{\wedge, \neg\}$ - базис

$\{\vee, \neg\}$ - базис

$\{\wedge, \oplus, 1\}$ - базис

3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Многозначность представления

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	$x_1x_3+\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1x_3+\left(x_1\downarrow x_2\right)$	$\left(x_1\to x_3\right)+\left(x_1\leftarrow x_2\right)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Нормальные формы

Литерал – обозначение логической переменной в прямой или инверсной форме.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) – способ представления булевых функций в полной системе функций $\{\wedge, \vee, \neg\}$ в форме дизъюнкции ***элементарных*** *конъюнкций литералов*.

Примеры:

$$x_1\overline{x}_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2$$ - является ДНФ

$$x_1 x_3 + \overline{x_1 x_2}$$ - не является ДНФ!

$$x_1\left(x_3 + x_2\right) + \overline{x}_1\overline{x}_2$$ - не является ДНФ!

3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Нормальные формы

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) – способ представления булевых функций в полной системе функций $\{\wedge, \vee, \neg\}$ в форме конъюнкции ***элементарных*** *дизъюнкций литералов*.

Примеры:

$$\left(x_1 + \overline{x}_3\right) \cdot \left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2\right)$$ - является КНФ

$$\left(x_1 + x_3\right) \cdot \left(\overline{x_1 + x_2}\right)$$ - не является КНФ!

$$\left(x_1\overline{x}_3 + \overline{x}_2\right) \cdot \left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2\right)$$ - не является КНФ!

3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Совершенные формы

ДНФ функции $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ называется ***совершенной (СДНФ)***, если в каждую ее элементарную конъюнкцию входят все n литералов.

Аналогично, КНФ функции $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ называется ***совершенной (СКНФ)***, если в каждую ее элементарную дизъюнкцию входят все n литералов.

Примеры:

$f(x_1, x_2) = \overline{x}_1 x_2 + x_1 x_2$ - является СДНФ

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 + x_1 x_3$ - является ДНФ, но не СДНФ!

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_2 x_3$ - является СДНФ

$f(x_1, x_2) = (\overline{x}_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_2)$ - является СКНФ

$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 + x_3) \cdot (x_2 + x_3)$ - является КНФ, но не СКНФ!

Алгоритм получения СДНФ

Каждой единице в таблице истинности логической функции будет соответствовать **одна элементарная конъюнкция**.

Если в строке таблицы истинности, **содержащей единичное значение** функции, некоторая **переменная равна единице**, то в соответствующей элементарной конъюнкции эта переменная будет участвовать **в прямом виде**.

И наоборот:
Если в строке таблицы истинности, **содержащей единичное значение** функции, некоторая **переменная равна нулю**, то в соответствующей элементарной конъюнкции эта переменная будет участвовать **в инверсном виде**.

Полученные элементарные конъюнкции объединяются знаками дизъюнкции.

3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Пример получения СДНФ

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	1	1	1

$$\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3$$

$$x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3$$

1	0	1	1
x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$

3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Пример получения СДНФ

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	0	1

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3$$

$$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1

Пример получения СДНФ

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f_{СДНФ} = \left(\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3\right) \vee \left(x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3\right) \vee$$
$$\vee \left(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3\right) \vee \left(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3\right)$$

$$f_{СДНФ} = \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \overline{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

Алгоритм получения СКНФ

Каждому нулю в таблице истинности логической функции будет соответствовать **одна элементарная дизъюнкция**.

Если в строке таблицы истинности, **содержащей нулевое значение** функции, некоторая **переменная равна нулю**, то в соответствующей элементарной дизъюнкции эта переменная будет участвовать **в прямом виде**.

И наоборот:
Если в строке таблицы истинности, **содержащей нулевое значение** функции, некоторая **переменная равна единице**, то в соответствующей элементарной дизъюнкции эта переменная будет участвовать **в инверсном виде**.

Полученные элементарные дизъюнкции объединяются знаками конъюнкции.

3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Пример получения СКНФ

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3$$

$$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3$$

0	0	1	0
x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$

3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Пример получения СКНФ

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	1	0	0

$$x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$$

$$\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$$

1	0	0	0
x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$

Пример получения СКНФ

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f_{СКНФ} = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge$$
$$\wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

$$f_{СКНФ} = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \overline{x}_3)(x_1 + \overline{x}_2 + x_3)(\overline{x}_1 + x_2 + x_3)$$

3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Совершенные формы

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) \equiv f_{СДНФ} \equiv f_{СКНФ}$$

СДНФ можно найти для любой булевой функции, тождественно не равной нулю, причем для каждой функции СДНФ является единственной (с точностью до перестановки конъюнкций и литералов).

СКНФ можно найти для любой булевой функции, тождественно не равной единице, причем для каждой функции СКНФ является единственной (с точностью до перестановки дизъюнкций и литералов).

3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Совершенные формы

Совершенная полиномиальная нормальная форма (СПНФ) - способ представления булевых функций в полной системе функций $\{\wedge, \oplus, \neg\}$ в форме суммы по mod2 ***элементарных*** *конъюнкций литералов*.

СПНФ можно получить, заменив в СДНФ функции все знаки дизъюнкции на знаки суммы по mod 2.

A	B	$A \vee B$	$A \oplus B$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

$$A \vee B \equiv A \oplus B,$$

$$\text{если } A \neq 1 \text{ и } B \neq 1$$

3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Пример получения СПНФ

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f_{СДНФ} = \left(\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3\right) \vee \left(x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3\right) \vee$$
$$\vee \left(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3\right) \vee \left(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3\right)$$

$$f_{СДНФ} = \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \overline{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

$$\boxed{f_{СПНФ} = \overline{x}_1 x_2 x_3 \oplus x_1 \overline{x}_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \overline{x}_3 \oplus x_1 x_2 x_3}$$

3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Полином Жегалкина

A	1	A⊕1	¬A
0	1	1	1
1	1	0	0

Отрицание переменной *A* можно заменить на A⊕1

A	A	A⊕A	A⊕A⊕A
0	0	0	0
1	1	0	1

$$\underbrace{A \oplus A \oplus \ldots \oplus A}_{n\ раз} = \begin{cases} 0,\ если\ n - четное \\ A,\ если\ n - нечетное \end{cases}$$

Полином Жегалкина

Пример:

$$f_{СПНФ} = \overline{x}_1 x_2 x_3 \oplus x_1 \overline{x}_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \overline{x}_3 \oplus x_1 x_2 x_3 =$$

$$= (x_1 \oplus 1) x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 (x_2 \oplus 1) \oplus x_1 x_2 (x_3 \oplus 1) \oplus x_1 x_2 x_3 =$$

$$= \cancel{x_1 x_2 x_3} \oplus x_2 x_3 \oplus \cancel{x_1 x_2 x_3} \oplus x_1 x_3 \oplus \cancel{x_1 x_2 x_3} \oplus x_1 x_2 \oplus \cancel{x_1 x_2 x_3} =$$

$$= x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 = G(f)$$ - полином Жегалкина

Полином Жегалкина

Пример:

$$f_{СПНФ} = \overline{x}_1 x_2 x_3 \oplus x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \oplus \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 =$$

$$= \underline{(x_1 \oplus 1) x_2 x_3} \oplus \underline{x_1 (x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1)} \oplus \underline{(x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1)} =$$

$$= \underline{(x_1 \oplus 1) x_2 x_3} \oplus \underline{x_1 (x_2 x_3 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1)} \oplus \underline{(x_1 \oplus 1)(x_2 x_3 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1)} =$$

$$= \cancel{x_1 x_2 x_3} \oplus \cancel{x_2 x_3} \oplus \cancel{x_1 x_2 x_3} \oplus \cancel{x_1 x_2} \oplus \cancel{x_1 x_3} \oplus \cancel{x_1} \oplus \underline{x_1 x_2 x_3} \oplus \cancel{x_1 x_2} \oplus \cancel{x_1 x_3} \oplus \cancel{x_1} \oplus$$

$$\oplus \cancel{x_2 x_3} \oplus \underline{x_2 \oplus x_3 \oplus 1} =$$

$$= x_1 x_2 x_3 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1 = G(f)$$

Карты Карно

Карта Карно – визуально-матричный способ пред-

ставления булевых функций.

Для функции n переменных карта Карно – это прямоугольник с соотношением сторон

1x1 (если n - четное),

1x2 (если n - нечетное),

разбитый на 2^n элементарных квадратов (клеток).

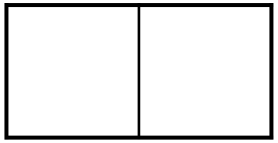
Морис Карно
род. 1924

Карта Карно позволяет в более компактной форме представлять булеву функцию и предлагает простой способ ее минимизации для $n \leq 6$.

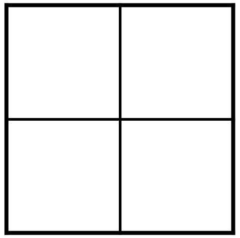
3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Карты Карно

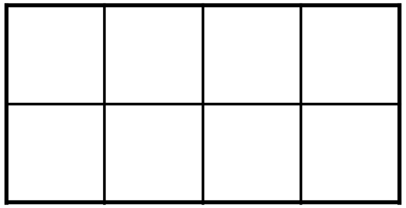
n=1
2 клетки



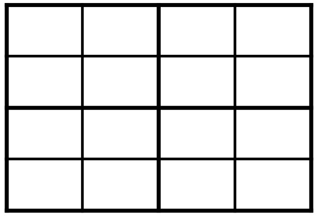
n=2
4 клетки



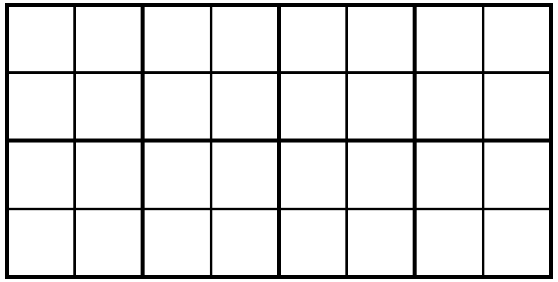
n=3
8 клеток



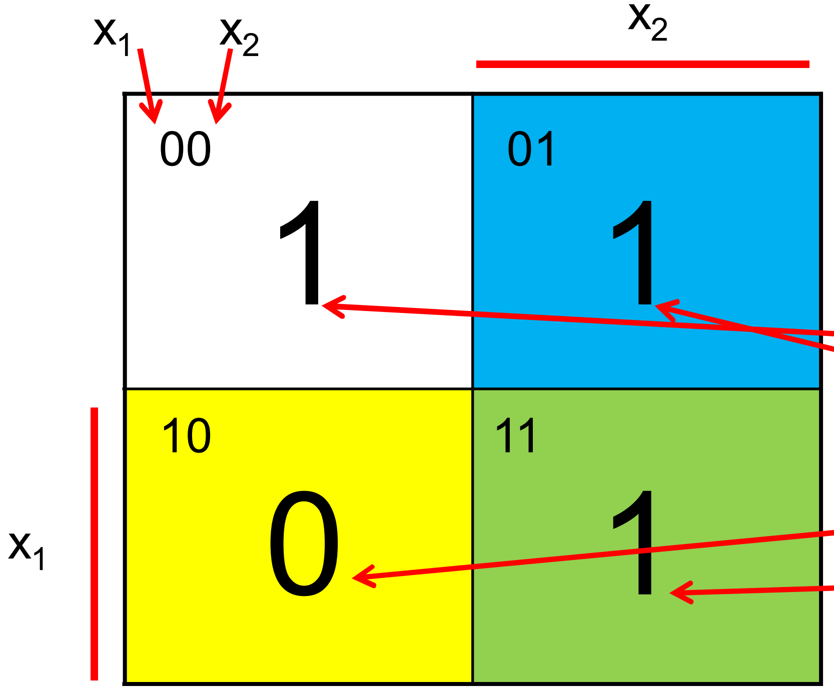
n=4
16 клеток



n=5
32 клетки



Карты Карно



f	x_1	x_2
1	0	0
1	0	1
0	1	0
1	1	1

Карты Карно

$x_1 x_2 x_3$			x_2	
	000	001	011	010
x_1	100	101	111	110
		x_3		

Карты Карно

x_3

0000	0001	0011	0010
0100	0101	0111	0110
1100	1101	1111	1110
1000	1001	1011	1010

x_2

x_1

x_4

3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Карты Карно

x_3

0000	0001	0011	0010
0100	0101	0111	0110
1100	1101	1111	1110
1000	1001	1011	1010

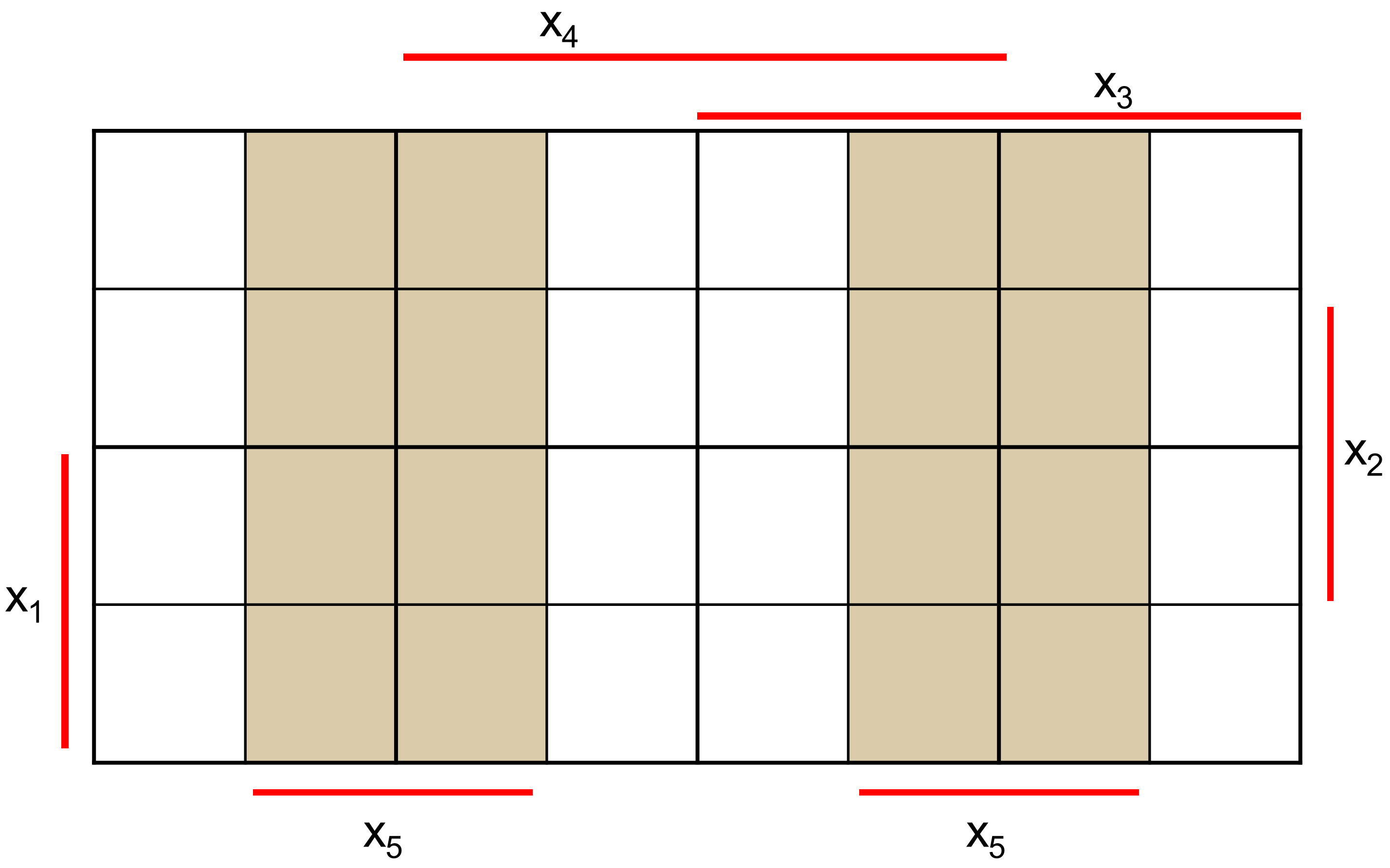
x_2

x_1

x_4

3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Карты Карно



3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Минимизация булевых функций

Целью минимизации является получение ДНФ (КНФ), содержащих наименьшее количество дизъюнкций (конъюнкций) и литералов.

Минимизация с помощью карт Карно заключается в построении контуров, содержащих единичные (для МДНФ) или нулевые (для МКНФ) значения функции.

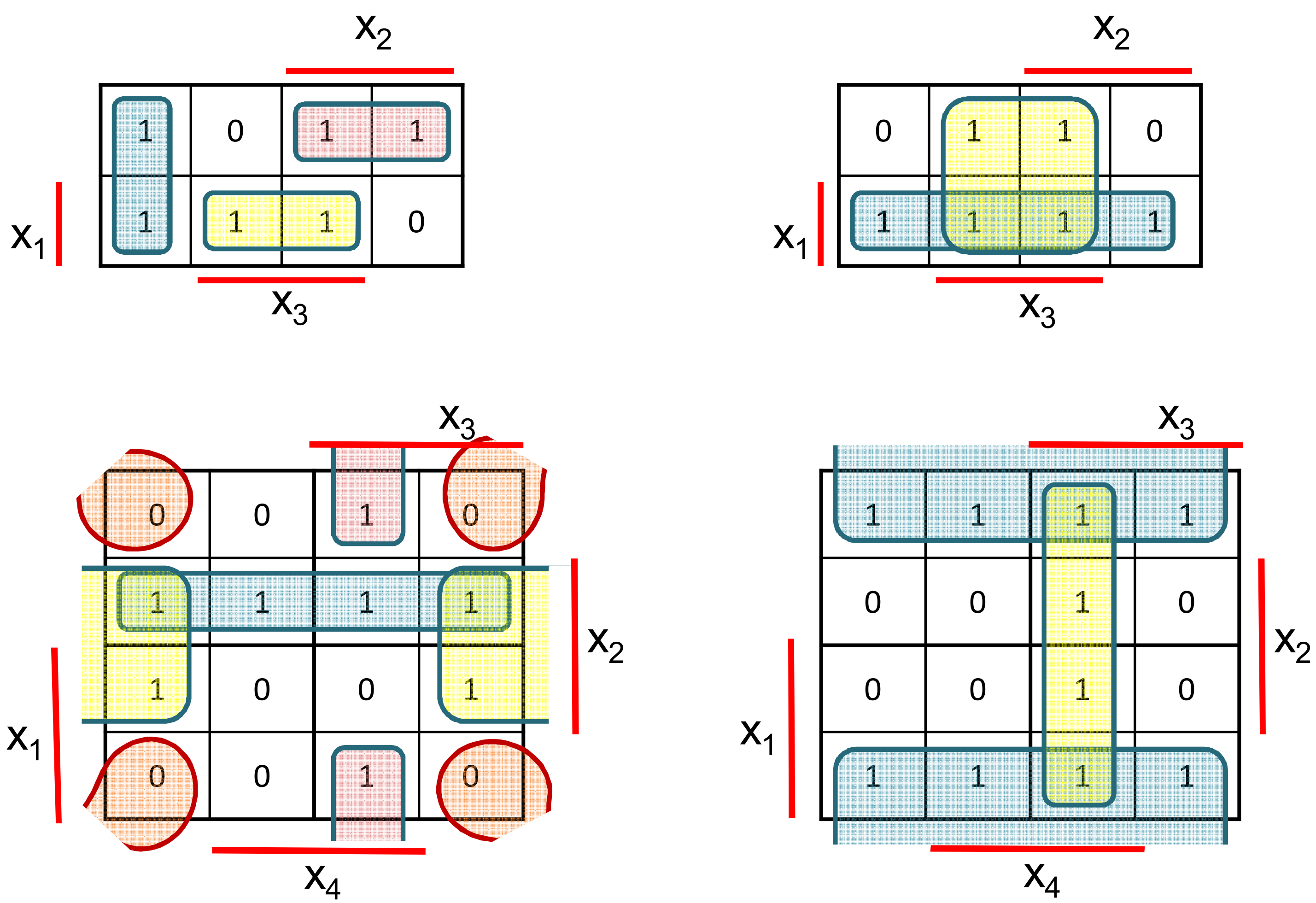
3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Минимизация булевых функций

Правила составления контуров:

1. Контуры должны охватывать клетки, содержащие одинаковые значения;
2. В контуры могут входить только соседние клетки;
3. Размер контуров должен быть 2^k, где $k = 0,1,2,3,\ldots$;
4. Контуры могут пересекаться, но не входить друг в друга;
5. Контуры должны быть по возможности максимальными;
6. Контурами должны быть охвачены все единичные (нулевые) значения;
7. Контуры могут быть разорванными (для $n \geq 3$);
8. Контуры должны располагаться симметрично относительно осей симметрии карты или находиться по одну сторону от них (для $n \geq 5$).

Минимизация булевых функций

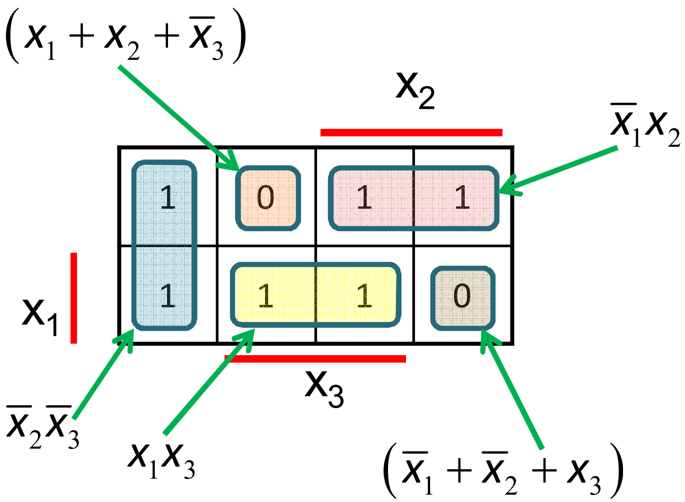


Минимизация булевых функций

Правила составления логических выражений для контуров:

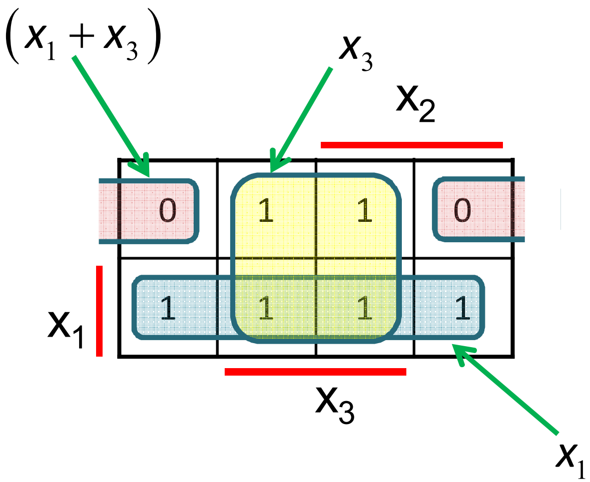
- Каждому контуру, охватывающему клетки с единицами будет соответствовать конъюнкция литералов; охватывающему клетки с нулями – дизъюнкция литералов;
- Если контур пересекает границу изменения некоторой переменной (т.е.находится одновременно и в области единичных, и в области нулевых значений переменной), то эта переменная **не будет участвовать** в конъюнкции (дизъюнкции);
- Если контур, содержащий единицы, целиком находится в области единичных значений некоторой переменной, то эта переменная будет участвовать в конъюнкции в прямом виде; если в области нулевых значений – в инверсном;
- Если контур, содержащий нули, целиком находится в области единичных значений некоторой переменной, то эта переменная будет участвовать в дизъюнкции в инверсном виде; если в области нулевых значений – в прямом;
- Полученные конъюнкции объединяем знаками дизъюнкции (МДНФ); полученные дизъюнкции объединяем знаками конъюнкции (МКНФ).

Минимизация булевых функций



$$f_{МДНФ} = x_1 x_3 + \overline{x}_1 x_2 + \overline{x}_2 \overline{x}_3$$

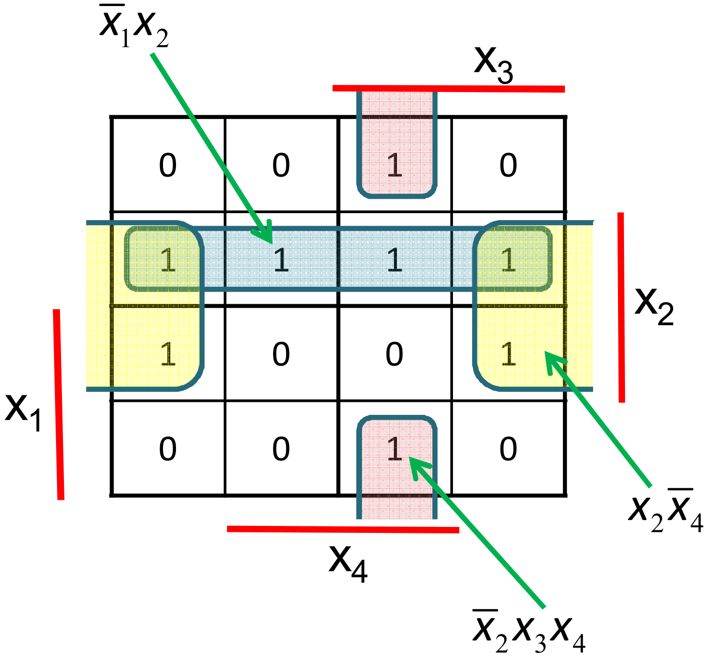
$$f_{МКНФ} = (x_1 + x_2 + \overline{x}_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3)$$

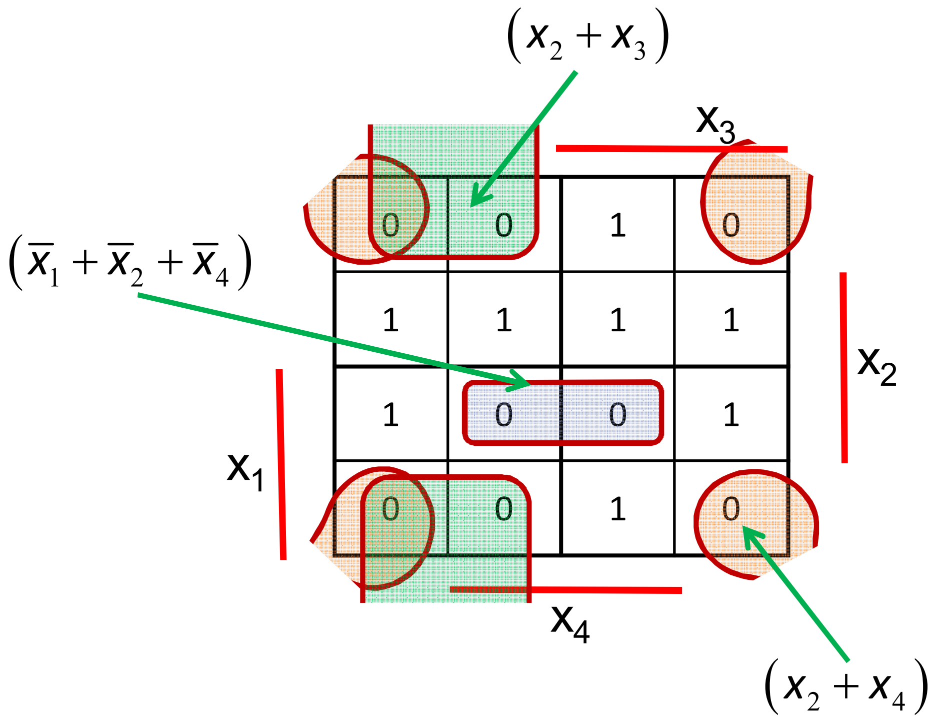


$$f_{МДНФ} = x_1 + x_3$$

$$f_{МКНФ} = x_1 + x_3$$

Минимизация булевых функций

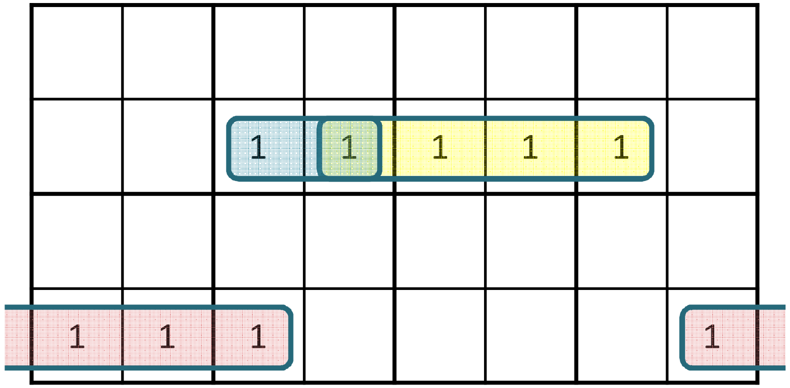




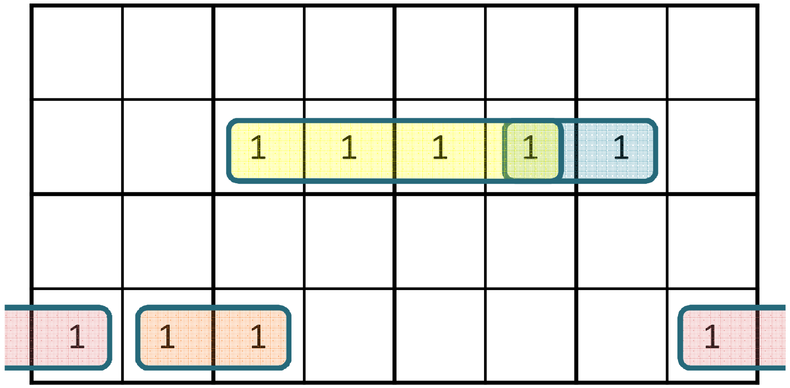
$$f_{МДНФ} = \bar{x}_1 x_2 + x_2\bar{x}_4 + \bar{x}_2 x_3 x_4$$

$$f_{МКНФ} = (x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_4)$$

Минимизация булевых функций



НЕ ВЕРНО!



ВЕРНО

Аксиоматический и конструктивный подходы

При доказательствах в логике Буля широко используют два подхода – *аксиоматический* и *конструктивный*.

При аксиоматическом доказательстве используется жесткая система аксиом, при конструктивном - используют систему конструктов, примером которых являются диаграммы Эйлера-Венна и таблицы истинности.

$$F\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = G\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$$

4. МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА В ЛОГИКЕ БУЛЯ

Законы нуля и единицы

$$\overline{0} = 1 \qquad \overline{1} = 0$$

$$x \wedge 0 = 0 \qquad x \wedge 1 = x$$

$$x \vee 0 = x \qquad x \vee 1 = 1$$

$$x \to 0 = \overline{x} \qquad x \to 1 = 1$$

$$0 \to x = 1 \qquad 1 \to x = x$$

$$x \oplus 0 = x \qquad x \oplus 1 = \overline{x}$$

$$x \leftrightarrow 0 = \overline{x} \qquad x \leftrightarrow 1 = x$$

4. МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА В ЛОГИКЕ БУЛЯ

Законы де Моргана

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

A	B	¬(A∧B)	¬A ∨ ¬B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

A	B	¬(A∨B)	¬A ∧ ¬B
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Снятие двойного отрицания

$$\bar{\bar{A}} = A$$

4. МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА В ЛОГИКЕ БУЛЯ

Замена импликаций, эквивалентностей и сумм по mod 2

A	B	A→B	
0	0	1	
0	1	1	
1	0	0	$\overline{A}+B$
1	1	1	

$$A \to B = \overline{A} + B$$

A	B	A↔B	
0	0	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}$
0	1	0	$A+\overline{B}$
1	0	0	$\overline{A}+B$
1	1	1	$A\cdot B$

$$A \leftrightarrow B = \overline{A}\overline{B} + AB$$

$$A \leftrightarrow B = \left(A+\overline{B}\right)\left(\overline{A}+B\right)$$

A	B	A⊕B	
0	0	0	$A+B$
0	1	1	$\overline{A}\cdot B$
1	0	1	$A\cdot\overline{B}$
1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}$

$$A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$$

$$A \oplus B = \left(A+B\right)\left(\overline{A}+\overline{B}\right)$$

4. МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА В ЛОГИКЕ БУЛЯ

Закон идемпотентности

$$\boxed{X \circ X = X}$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \vee A = A$$

проявляют свойство

$$A \to A = 1$$

$$A \leftrightarrow A = 1$$

не проявляют свойство!

$$\underbrace{A \oplus A \oplus \ldots \oplus A}_{n\ раз} = \begin{cases} 0,\ если\ n - четное \\ A,\ если\ n - нечетное \end{cases}$$

Закон коммутативности (переместительный закон)

$$X \circ Y = Y \circ X$$

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

$$A \oplus B = B \oplus A$$

$$A \leftrightarrow B = B \leftrightarrow A$$

проявляют свойство

$$A \rightarrow B \neq B \rightarrow A$$

не проявляет свойство!

4. МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА В ЛОГИКЕ БУЛЯ

Закон ассоциативности
(сочетательный закон)

$$X \circ (Y \circ Z) = (X \circ Y) \circ Z$$

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$

$$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$$

проявляют свойство

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \neq (A \rightarrow B) \rightarrow C$$

не проявляет свойство!

4. МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА В ЛОГИКЕ БУЛЯ

Закон дистрибутивности
(распределительный закон)

$$X \square (Y+Z) = X \square Y + X \square Z$$

$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	конъюнкция относ. дизъюнкции
$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	дизъюнкция относ. конъюнкции
$A \rightarrow (B \rightarrow C) = (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	импликация
$A \rightarrow (B \leftrightarrow C) = (A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow C)$	импликация относ. эквивалентности
$A \vee (B \leftrightarrow C) = (A \vee B) \leftrightarrow (A \vee C)$	дизъюнкция относ. эквивалентности

4. МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА В ЛОГИКЕ БУЛЯ

Законы склеивания и поглощения

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) = A \wedge (B \vee \overline{B}) = A$$

$$A \vee (A \wedge B) = A \wedge (1 \vee B) = A$$

$$AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A$$

$$A + AB = A(1 + B) = A$$