МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Лабораторная работа №2

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Учебно-методическое пособие к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Математическое моделирование физических процессов» для студентов ИЯТШ по направлению 14.03.02 «Ядерные физика и технологии»

Томск 2020

1. Цель работы

Цель работы заключается в освоение методов численного интегрирования и дифференцирования функций, в том числе заданных таблицей с применением программного комплекса на примере пакета Matlab.

2. Содержание работы

1) Изучение теоретического материала (задача численного интегрирования и дифференцирования функций, в том числе заданных таблицей).

2) Выполнение индивидуального задания с применением программного комплекса на примере пакета Matlab.

3) Подготовка отчета по лабораторной работе.

3. Задача численного интегрирования

Простейшие квадратурные формулы. Как правило для вычисления значения определенного интеграла применяют специальные вычислительные методы. Наиболее широко используют на практике квадратурные формулы – приближенные равенства вида:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N} A_i f\left(\bar{x}_i\right) \tag{1}$$

В выражение (1) $\bar{x}_i$ – некоторые точки из отрезка $[a, b]$ – узлы квадратурной формулы; A_i – числовые коэффициенты, называемые весами квадратурной формулы; $N \geq 0$ – целое число.

Сумма $\sum_{i=0}^{N} A_i f\left(\bar{x}_i\right)$, которая принимается за приближенное значение интеграла, называется квадратурной формулой. Величина $R = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{N} A_i f\left(\bar{x}_i\right)$ называется **погрешностью** (или **остаточным членом**) квадратурной формулы.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на элементарные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Интеграл I разобьется при этом на сумму элементарных интегралов:

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i, \tag{2}$$

где $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$, что соответствует разбиению исходной криволинейной трапеции на сумму площадей элементарных криволинейных трапеций (см. рисунок 1).

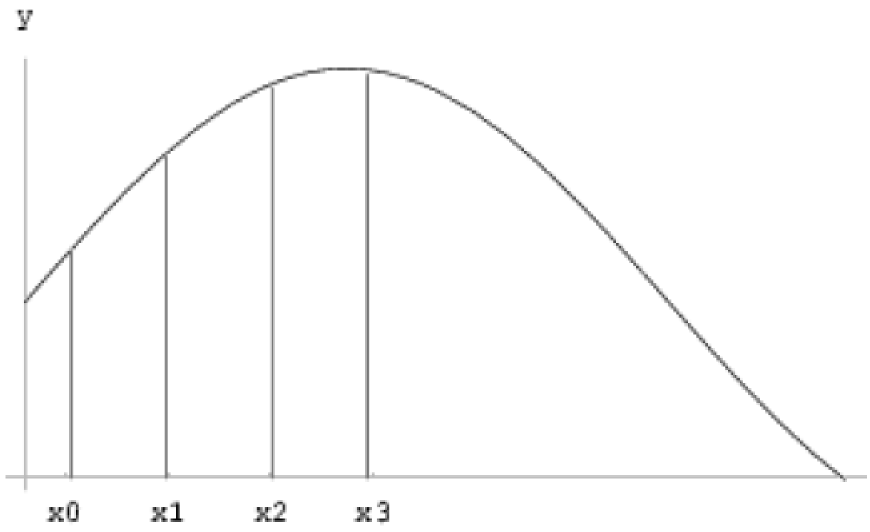


Рисунок 1

Формула прямоугольников. Введем обозначения: $f_i = f(x_i)$, $f_{i\text{-}1/2} = f(x_{i\text{-}1/2})$, где $x_{i\text{-}1/2} = (x_{i\text{-}1} + x_i)/2$ – середина элементарного отрезка. Шаг $x_i - x_{i\text{-}1}$ будем считать постоянным.

Заменим приближенно площадь элементарной криволинейной трапеции площадью прямоугольника, основанием которого является отрезок $[x_{i\text{-}1}, x_i]$, а высота равна значению $f_{i\text{-}1/2}$, $N_{i\text{-}1/2}$ – точка с координатами $(x_{i\text{-}1/2}, f_{i\text{-}1/2})$. В итоге приходим к **элементарной квадратурной формуле прямоугольников**:

$$I_i \approx h \cdot f_{i-1/2} \qquad (3)$$

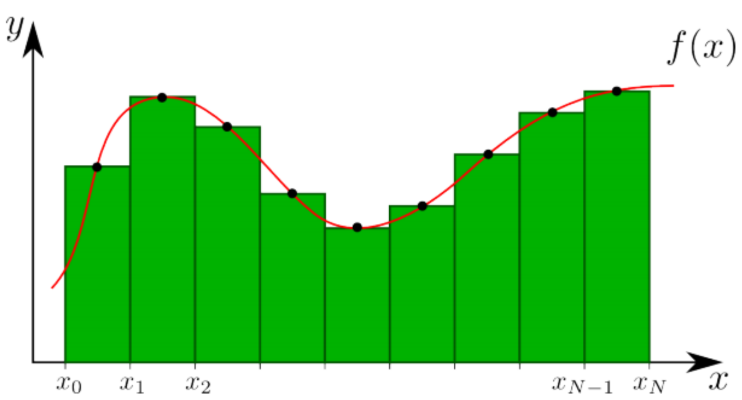


Рисунок 2

Из выражения (3) получаем **составную квадратурную формулу прямоугольников**:

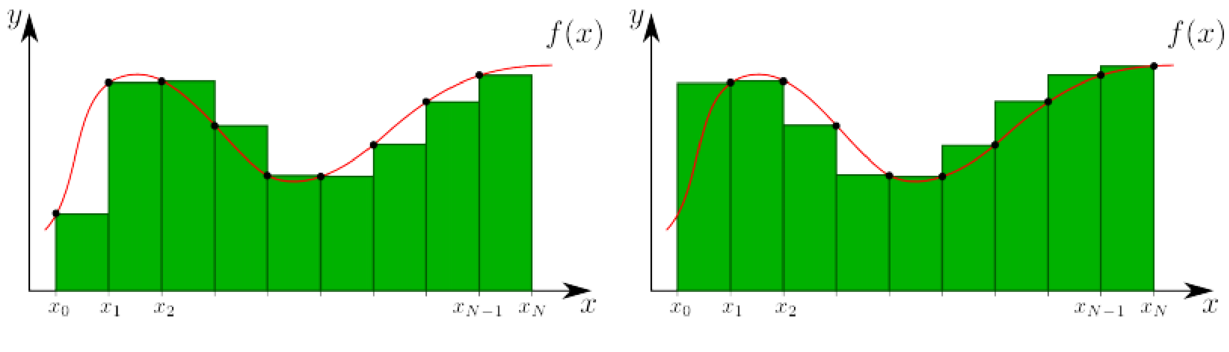
$$I \approx I_{\text{пр}}^{h} = h\left(f_{1/2} + f_{3/2} + \ldots + f_{n-1/2}\right) = h\sum_{i=1}^{n} f_{i-1/2} \tag{4}$$

Выбор в качестве значения функции средней точки интервала не принципиален, можно взять, например, левый или правый конец интервала.

$$I \approx h\sum_{i=0}^{n} f_i, \tag{5}$$

$$I \approx h\sum_{i=1}^{n} f_i, \tag{6}$$

Выражения (5) и (6) называются соответственно составными квадратурными формулами **левых** (см. рисунок 3а) и **правых** (см. рисунок 3б) прямоугольников.



а) б)

Рисунок 3

Квадратурная формула трапеций. Соединив отрезком точки $N_{i-1}(x_{i-1}, f_{i-1})$ и $N_i(x_i, f_i)$ на графике функции $y = f(x)$, получим трапецию. Заменим теперь приближенно площадь элементарной криволинейной трапеции площадью построенной фигуры. Тогда получим элементарную квадратурную формулу трапеций:

$$I_i \approx \frac{h}{2}\left(f_{i-1} + f_i \right) \tag{7}$$

Из выражения (7) получаем **составную квадратурную формулу трапеций**:

$$I \approx I_{\text{тр}}^h = h\left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n} f_i \right) \tag{8}$$

Квадратурная формула Симпсона. Если площадь элементарной криволинейной трапеции заменить площадью фигуры, расположенной под параболой, проходящей через точки N_{i-1}, $N_{i-1/2}$ и N_i, то получим приближенное равенство

$$I_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_2(x)\,dx \tag{9}$$

Здесь $P_2(x)$ – интерполяционный многочлен второй степени с узлами x_{i-1}, $x_{i-1/2}$, x_i.

$$P_2(x) = f_{i-1/2} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h}\left(x - x_{i-1/2}\right) + \frac{f_i - 2f_{i-1/2} + f_{i-1}}{h^2/2}\left(x - x_{i-1/2}\right)^2 \tag{10}$$

Интегрирование $P_2(x)$ приводит к равенству:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} P_2(x)\,dx = \frac{h}{6}\left(f_{i-1} + 4 f_{i-1/2} + f_i \right) \tag{11}$$

В результате получаем **элементарную квадратичную формулу Симпсона**:

$$I_i \approx \frac{h}{6}\left(f_{i-1} + 4 f_{i-1/2} + f_i \right) \tag{12}$$

Применяя формулу (12) на каждом элементарном отрезке, выводим **составную квадратурную формулу Симпсона**:

$$I \approx I_{\text{C}}^{h} = \frac{h}{6}\left(f_0 + f_n + 4\sum_{i=1}^{n} f_{i-1/2} + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i \right) \tag{13}$$

В случае, когда число элементарных отрезков разбиения четно ($n = 2m$), в формуле Симпсона можно использовать лишь узлы с целыми индексами:

$$I \approx I_{\text{C}}^{h} = \frac{h}{3}\left(f_0 + f_{2m} + 4\sum_{i=1}^{m} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} f_{2i} \right) \tag{14}$$

4. Задача численного дифференцирования приближенно заданных функций

Простейшие формулы численного дифференцирования. Пусть функция f дифференцируема достаточное количество раз в окрестности точки x. Из определения производной:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \tag{15}$$

получим две простейшие приближенные формулы:

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{16}$$

$$f'(x)\approx\frac{f(x)-f(x-h)}{h}, \tag{17}$$

соответствующие выбору фиксированных значений $\Delta x = h$ и $\Delta x = -h$, $h > 0$ – малый параметр (шаг). Разностные отношения в правых частях формул (16) и (17) называют **правой** и **левой** разностными производными. Данные формулы имеют первый порядок точности. Для повышения точности можно использовать формулу центральной разностной производной:

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}. \tag{18}$$

Для вычисления производной f ’(x) можно получить формулы любого порядка точности, но в таких формулах с ростом порядка точности возрастает и число используемых значений функции. Например, формула, имеющая четвертый порядок точности, будет иметь вид:

$$f'(x) \approx \frac{f(x-2h)-8f(x-h)+8f(x+h)-f(x+2h)}{12h}. \qquad (19)$$

5. Выполнение индивидуального задания с применением программного комплекса на примере пакета Matlab.

1) Получить исходную таблицу данных (xi, yi) в пакете Matlab

Варианты:

1) y = Log[x], {x от 1 до 10, шаг 0.2}

2) y = exp[x], {x от 0 до 5, шаг 0.1}

3) y = 1/x, {x от 0.2 до 5.2, шаг 0.1}

4) y = x^2, {x от 0 до 10, шаг 0.2}

5) y = x^3, {x от 0, до 5, шаг 0.1}

6) y = x + x^2, {x от 0 до 5, шаг 0.1}

7) y = sin[x], {x от 0 до pi, шаг pi/50}

8) y =(sin[x])^2, {x от 0 до pi, шаг pi/50}

9) y = sqrt[x], {x от 0 до 10, шаг 0.2}

10) y = cos[x], {x от 0 до pi, шаг pi/50}

11) y = log[x], {x от 1 до 10, шаг 0.2}

12) y = exp[x], {x от 0 до 5, шаг 0.2}

13) y = 1/x, {x от 5 до 10, шаг 0.1}

14) y = x^2, {x от 10 до 20, шаг 0.2}

15) y = x^3, {x от 5 до 10, шаг 0.1}

16) y = x + x^2, {x от 5 до 10, шаг 0.1}

17) y = sin[x], {x от pi до 2*pi, шаг pi/50}

18) y = (sin[x])^2, {x от pi до 2*pi, шаг pi/50}

19) y = sqrt[x], {x от 10 до 20, шаг 0.5}

20) y = cos[x], { x от pi до 2*pi, шаг pi/50}

2) Найти аналитически значение определенного интеграла для функции п.п. 1, используя встроенную функцию int() пакета Matlab.

3) Вычислить значения определенного интеграла, используя формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона.

4) Выполнить п.п. 3 при увеличении шага в 2-раза, уменьшении шага в 2-раза и в 10-й раз. Сравнить результаты.

5) Выполнить символьное дифференцирование функции п.п. 1, используя функцию diff() пакета Matlab, рассчитать аналитически значение производной в узловых значениях.

6) Вычислить значения производной функции, использую формулы численного дифференцирования 1-го, 2-го и 4-го порядка точности. Построить графики численных и истинных значений производной в узлах, рассчитать среднеквадратические отклонения численных от истинных значений производной.

7) Выполнить п.п. 6 при увеличении шага в 2-раза, уменьшении шага в 2-раза и в 10-й раз. Сравнить результаты.

8) Подготовить отчет. Сделать выводы.