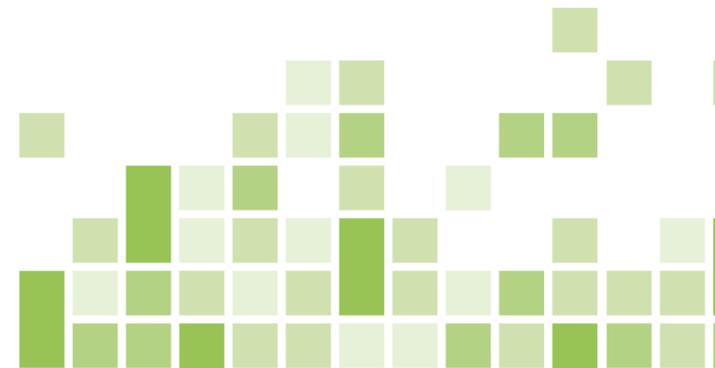




ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ
ЛЕКЦИЯ №14

**«Виды моделирования и классификация математических
моделей. Источники и классификация погрешностей
математического моделирования»**

Отделение ядерно-топливного цикла

Лектор:
Зав. каф. - руководитель ОЯТЦ ИЯТШ
Горюнов А.Г.

2020

План лекции

14.1. Общие положения.

14.2. Виды моделирования.

14.3. Классификация математических моделей.

14.4. Источники погрешности математического моделирования.

14.5. Классификация погрешностей математического моделирования.

Информация по курсу:

<https://portal.tpu.ru/SHARED/a/ALEX1479/study/Matmod/Tab>

14.1 Общие положения

Моделирование – это научный прием, метод изучения, познания реального окружающего мира.

Процесс моделирования включает следующие задачи:

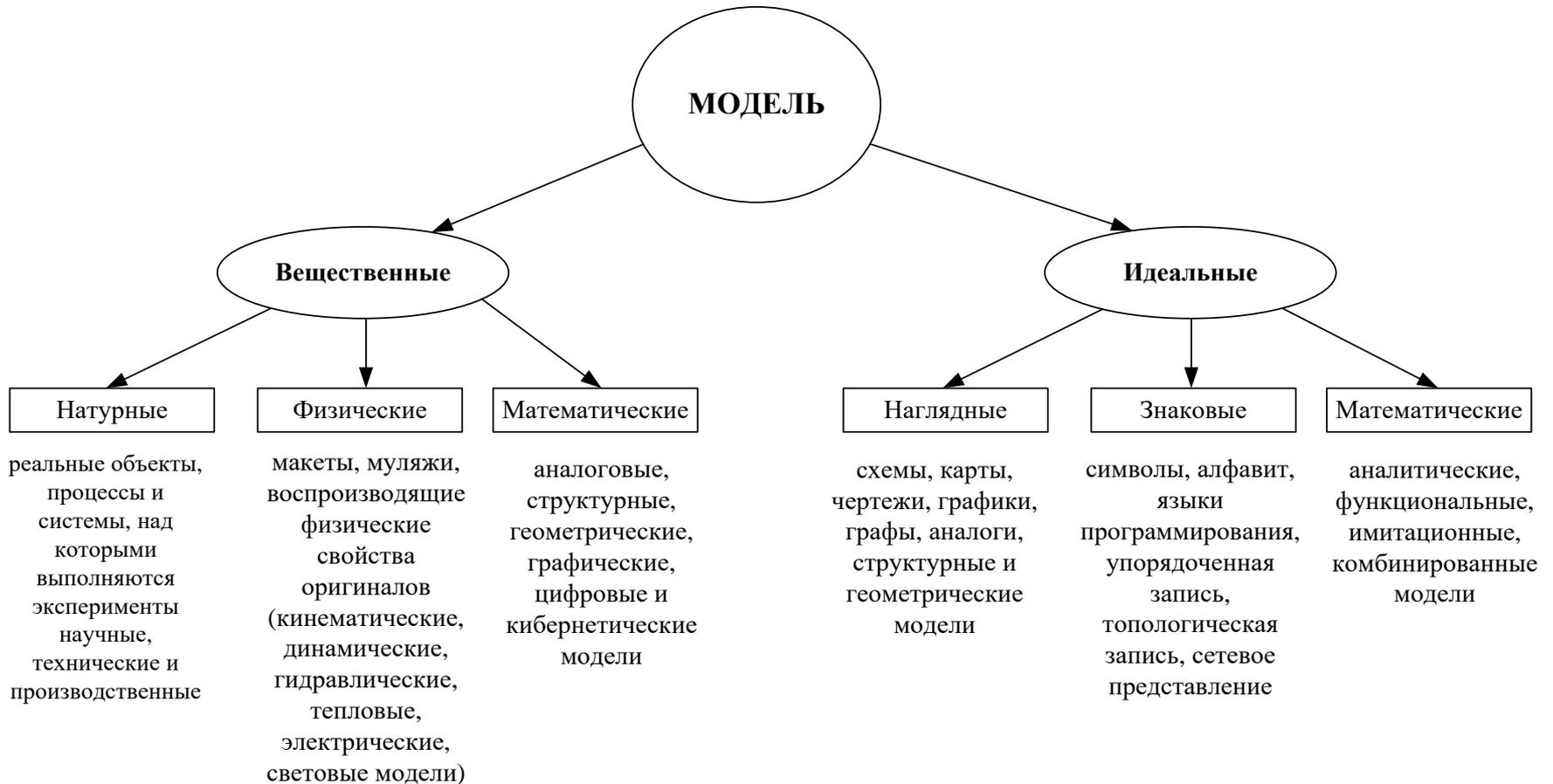
- ✓ реальный изучаемый объект (физическая система, процесс, явление), называемый **оригиналом**, замещается его **моделью** (физическим или абстрактным объектом);
- ✓ модель воспроизводит (имитирует) те свойства и характеристики оригинала, которые существенны для достижения поставленной цели моделирования (для решения конкретной задачи);
- ✓ над моделью проводятся эксперименты и исследования, на основе которых делаются выводы о свойствах объекта – оригинала.

Математическое моделирование предполагает описание исследуемых явлений, процессов, систем различной физической природы языком математических соотношений.

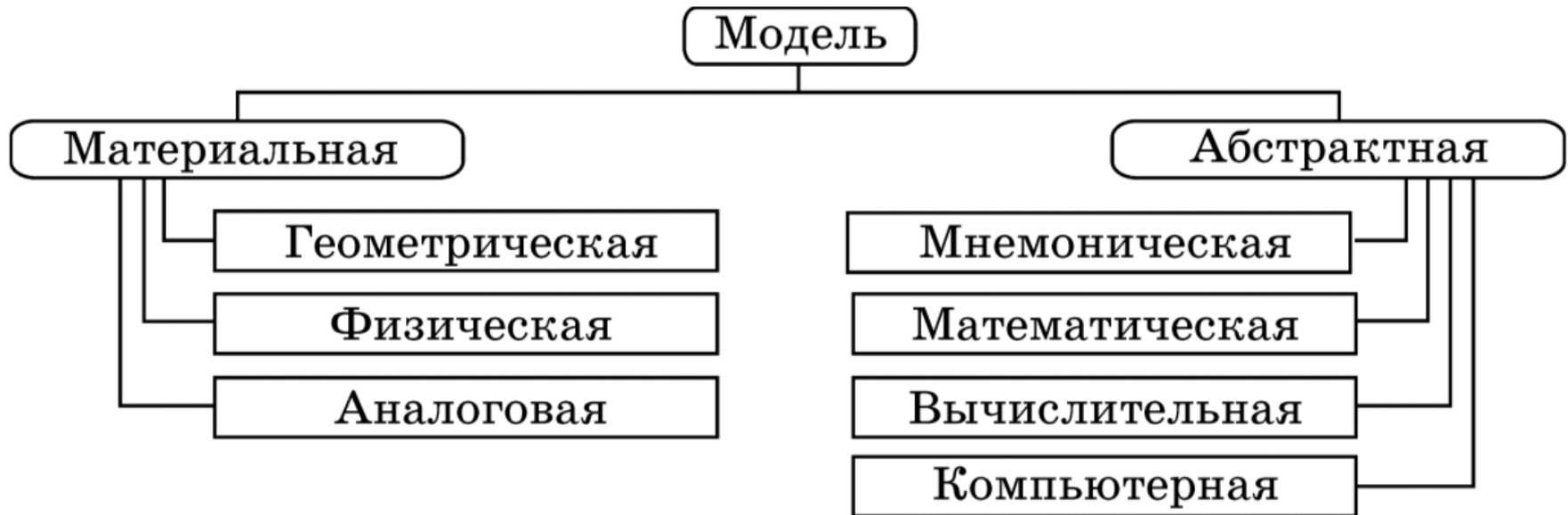
14.2 Виды моделирования



14.2.1 Виды моделей



14.2.2 Классификация моделей по степени их абстрагирования от оригинала



Голубева, Н. В. Математическое моделирование систем и процессов : учебное пособие / Н. В. Голубева. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 192 с.— Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/76825> (дата обращения: 03.03.2020). — Режим доступа: для авториз. Пользователей.

14.3 Классификация математических моделей

Признак классификации	Математические модели
Характер отображаемых свойств объекта	Структурные; функциональные
Принадлежность к иерархическому уровню	Микроуровня; макроуровня; метауровня
Степень детализации описания внутри одного уровня	Полные; макромодели
Способ представления свойств объекта	Аналитические, алгоритмические, имитационные
Способ получения модели	Теоретические, эмпирические

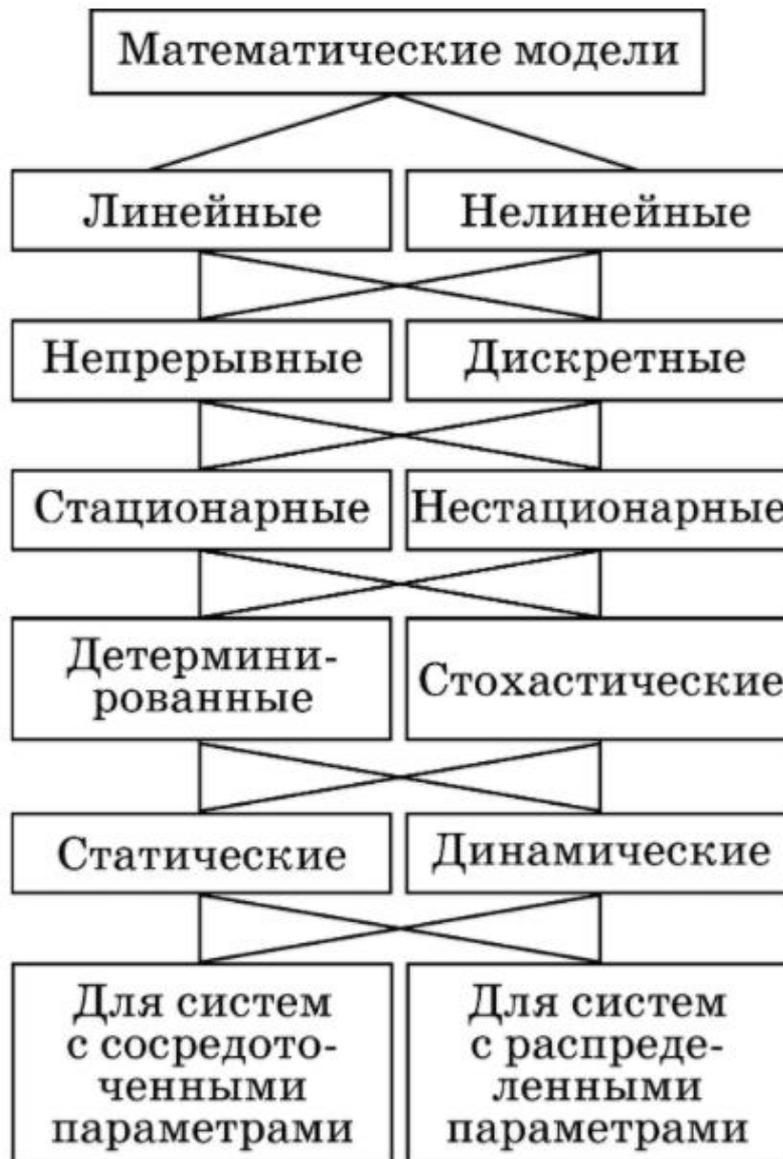
Аналитическая модель – математическая **модель**, представляющая собой совокупность **аналитических** выражений и зависимостей, позволяющих оценивать те или иные свойства моделируемого объекта.

Имитационная модель – универсальное средство исследования сложных систем, представляющее собой логико-алгоритмическое описание поведения отдельных элементов системы и правил их взаимодействия, отображающих последовательность событий, возникающих в моделируемой системе.

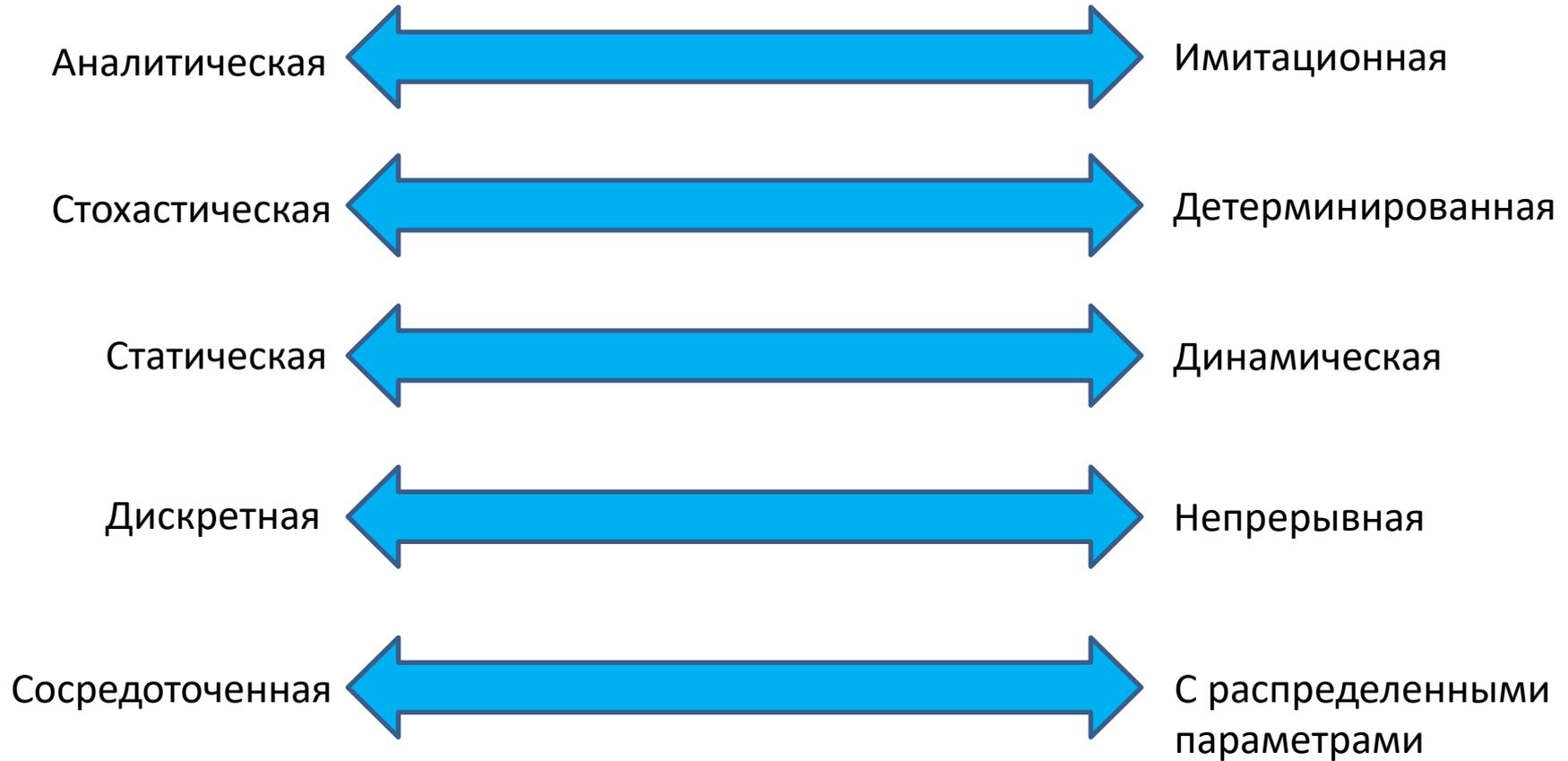
14.3.1 Классификация математических моделей по форме представления



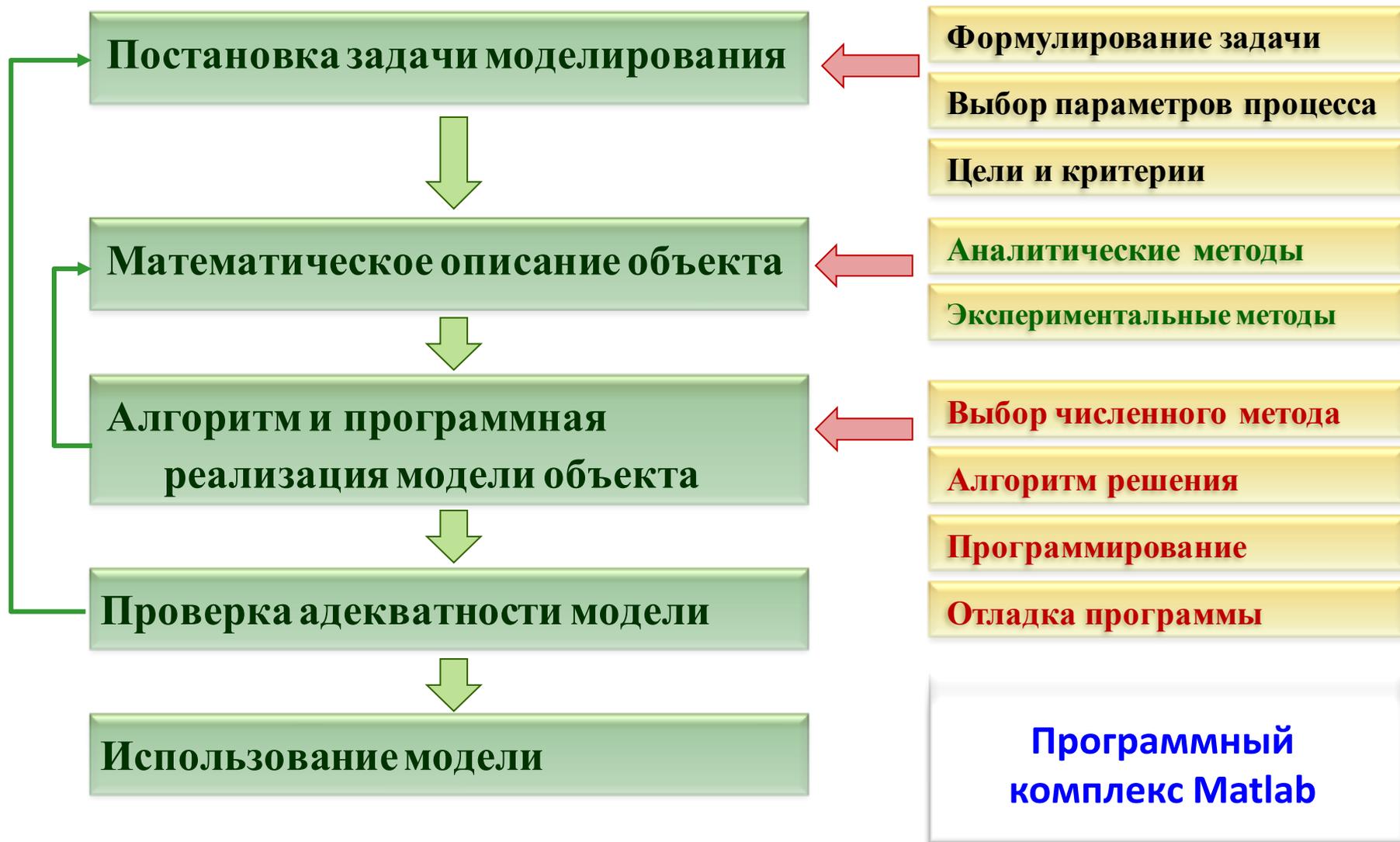
14.3.2 Классификация математических моделей по характеру моделирования



14.3.3 Типы математических моделей моделей



14.3.4 Подход к математическому моделированию процессов



14.3.5 Процесс создания математической модели



14.3.6 Основные этапы моделирования



14.3.7 Достоинства и недостатки

- Позволяет выделить для исследования наиболее важные свойства объекта, абстрагируясь от несущественных его характеристик
- Часто позволяет сформулировать новые гипотезы и получить новые знания об объекте
- Дает возможность избежать слишком больших затрат
- Позволяет устранить пробелы в знаниях об объекте и выявить новые качественные проблемы

- Предопределенность результатов моделирования свойствами выбранного метода моделирования
- Аддитивный подход неприменим для анализа многих сложных явлений в моделировании биологических систем
- Запрограммированность результата свойствами самой модели

14.4 Источники погрешности математического моделирования

Применение методов математического моделирования приводит к следующим источникам погрешностей:

- 1) погрешность математической модели;
- 2) погрешность исходных данных (неустраняемая погрешность);
- 3) погрешность численного метода;
- 4) вычислительная погрешность.

14.4.1 Погрешность математической модели

Погрешность математической модели присутствует из-за стремления обеспечить сравнительную простоту ее технической реализации и доступности исследования, т.е. по причине применения **системы допущений**.

Допущения – это те факторы, которые существенны для достижения цели проекта, но на которые мы, как исполнители, не можем по каким-то причинам повлиять.

Необходимо понимать, что конкретная математическая модель, эффективно работающая в одних условиях, может быть неприменима в других. С точки зрения исследователя важным является правильная **оценка области применения** математической модели.

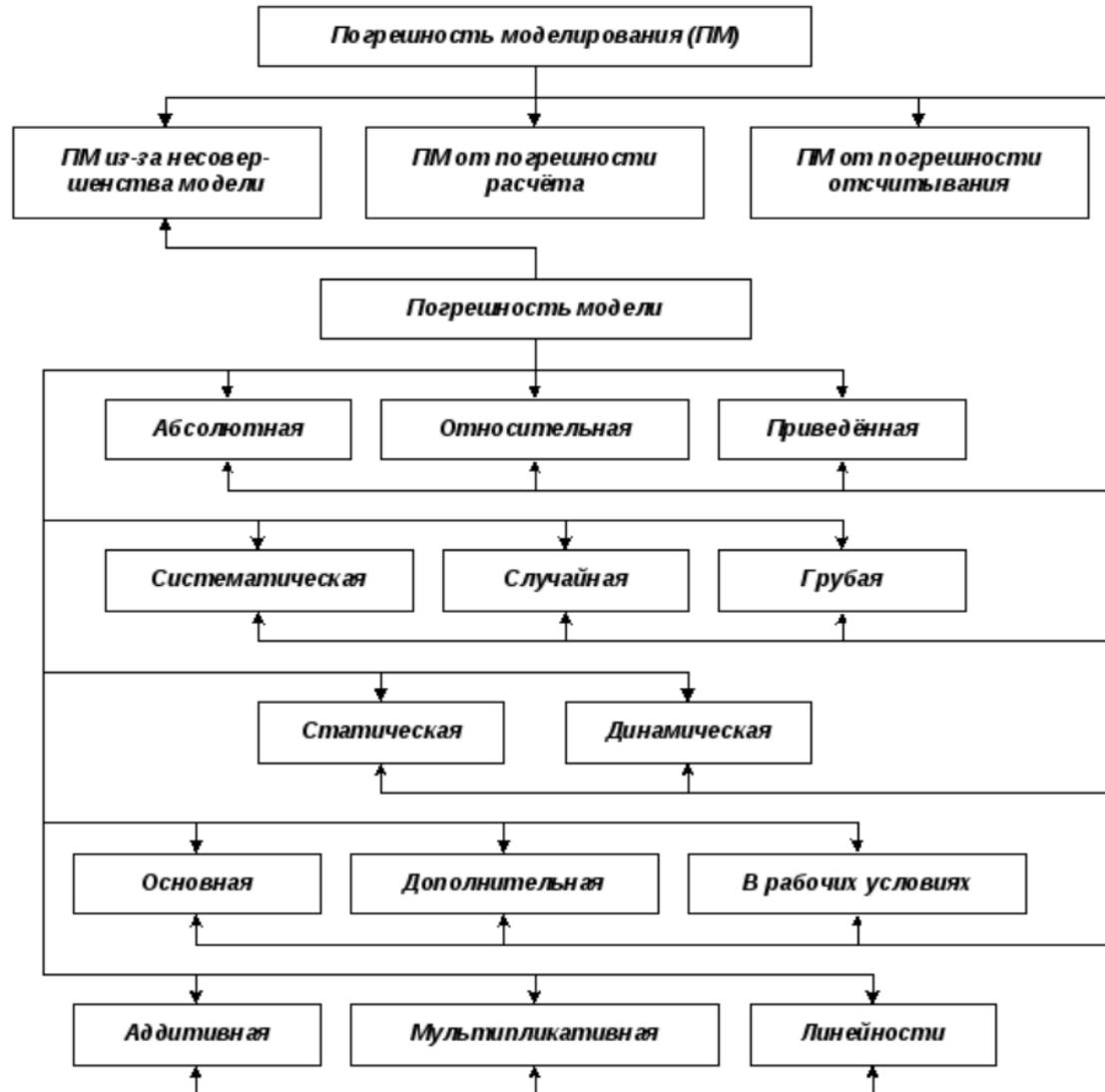
14.4.2 Погрешность численного метода

Погрешность численного метода (погрешность аппроксимации) связана, например, с заменой интеграла суммой, усечением рядов при вычислении функций, интерполированием табличных значений функциональных зависимостей, дискретизацией по уровню и времени и т. п. Как правило, погрешность численного метода регулируема и может быть уменьшена до любого разумного значения путем изменения некоторого параметра (шага решения и т.д.).

14.4.3 Вычислительная погрешность

Вычислительная погрешность присутствует из-за округления чисел, промежуточных и окончательных результатов счета. Она зависит от правил и необходимости округления, а также от алгоритмов численного решения.

14.5 Классификация погрешностей математического моделирования.



14.5.1 Адекватность и погрешность модели

Соответствие результатов моделирования исследуемым свойствам объекта на качественном уровне описывается понятием **адекватность**.

В общем случае **адекватность** включает полноту, правильность и точность модели.

В настоящее время осуществляются попытки перенесения **понятий погрешности** из науки "метрология" на моделирование.

Метрология – это наука об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах обеспечения требуемой точности.

Количественной мерой точности измерения в метрологии принята **погрешность измерения**. По аналогии с понятиями из метрологии, логично использовать понятие "**погрешность моделирования**". Основной вопрос состоит в том, что принять за истинное значение моделируемой величины. Обычно таковым считают результат, полученный с помощью измерений на реальном процессе.

1. Грановский В.А., Сирая Т.Н. Проблема адекватности моделей в измерениях // Измерения, контроль, Автоматизация. Датчики и Системы, №10, 2007, С. 52-61
2. Сергеев А.Г., Крохин В.В. Метрология. Учебное пособие. - М.: Логос, 2001, 376 С.

14.5.1 Адекватность и погрешность модели

В ряде случаев **точность моделирования** необходимо оценивать на стадии проектирования технологического оборудования. В следствие чего экспериментальные результаты для оценки адекватности моделирования недоступны.

В этом случае возможно использование результатов моделирования на более точных моделях, принимаемых в качестве **эталонных**.

Эти модели (как правило, **первопринципные модели**) могут потребовать гораздо большего времени моделирования, а потому используются только в некоторых опорных точках.

Если эталонные модели недоступны, то рекомендуется провести моделирование разными методами. Близость полученных результатов моделирования является косвенным подтверждением адекватности моделирования.

В качестве оценки адекватности модели может применяться **сходимость результатов моделирования** к определённым числам при увеличении числа точек выборок.

14.5.2 Погрешность модели

Точность моделирования – близость результата моделирования к истинному значению моделируемой величины.

Погрешность моделирования – разность между результатом моделирования и истинным значением моделируемой величины.

По способу выражения погрешность моделирования может быть представлена как **абсолютная, относительная и приведённая**.

Абсолютная погрешность моделирования определяется как разность между результатом моделирования и истинным (или действительным) значением моделируемой величины.

Относительная погрешность моделирования определяется как отношение абсолютной погрешности к истинному значению (в безразмерной форме, процентах, децибелах и т.д.).

Приведённая погрешность моделирования вычисляется как отношение абсолютной погрешности моделирования к нормирующему значению моделируемой величины (например, диапазон изменения величины, максимальное или номинальное значение. Стационарное значение и т.д.).

14.5.2 Погрешность модели

Среднеквадратичная погрешность моделирования:

$$S_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (U_i^* - U_i)^2}{n-1}}, \quad (14.1)$$

где U_i^* – истинное или экспериментальное значение величины, U_i – модельное значение величины (вычисленное с помощью модели), n – количество экспериментальных точек или модельных точек.

Среднеквадратичная погрешность моделирования:

$$S_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{U} - U_i)^2}{n-1}}, \quad (14.2)$$

$$\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^n U_i}{n}. \quad (14.3)$$