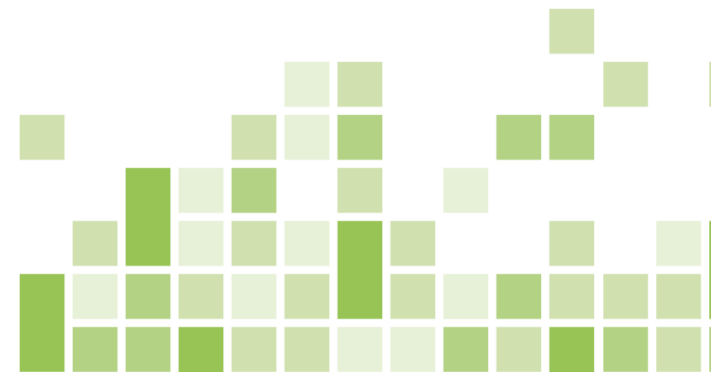




ТОМСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ  
ПРОЦЕССОВ  
ЛЕКЦИЯ №11  
«Метод конечных разностей»

Отделение ядерно-топливного цикла

Лектор:  
Зав. каф. - руководитель ОЯТЦ ИЯТШ  
Горюнов А.Г.

2020

# План лекции

11.1 Общие теоретические сведения о методе конечных разностей.

11.2 Численные методы решения гиперболических уравнений.

11.3 Численные методы решения параболических уравнений.

11.4 Примеры решения моделей в среде Matlab.

Литература:

1. Голубева, Н. В. Математическое моделирование систем и процессов : учебное пособие / Н. В. Голубева. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 192 с.— Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/76825>
2. Слабнов, В. Д. Численные методы : учебник / В. Д. Слабнов. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 392 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/133925>

Информация по курсу:

<https://portal.tpu.ru/SHARED/a/ALEX1479/study/Matmod/Tab>

# 11.1 Общие теоретические сведения о методе конечных разностей

**Метод конечных разностей (МКР)** является достаточно универсальным численным методом ориентированным на решение задач с граничными условиями как в одномерных, так и многомерных системах. Причем МКР является одним из немногих численных методов, который может быть использован для решения математических моделей процессов (объектов) с распределенными параметрами, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. В этом случае переменные исследуемой модели могут зависеть как от времени  $t$ , так и от пространственных координат  $(x, y)$  в двумерном случае и  $(x, y, z)$  в трехмерном.

Общей идеей МКР является сведение исходной задачи с **граничными условиями (краевой задачи)** к более простой задаче решения системы линейных или нелинейных алгебраических уравнений. Вид получаемой системы алгебраических уравнений зависит от вида исходного дифференциального уравнения.

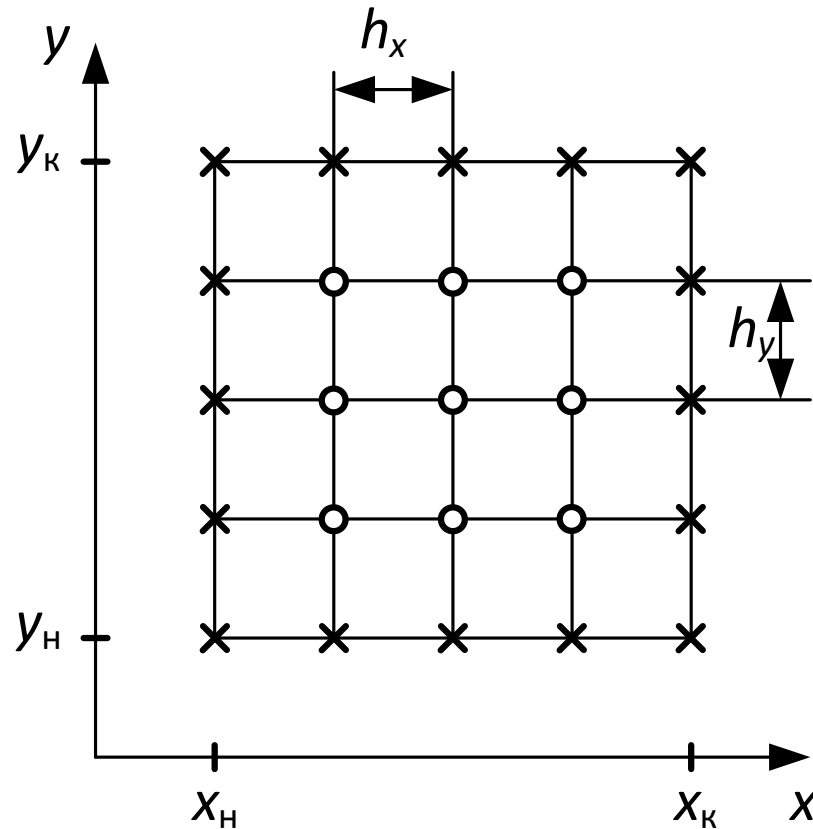
# 11.1 Общие теоретические сведения о методе конечных разностей

В любом случае МКР включает три основных этапа:

- 1) **этап построения сетки** узловых значений искомой функции в области решения;
- 2) **этап построения** на основе исходного дифференциального уравнения системы **конечно-разностных уравнений**, описываю их функциональные связи между соседними узлами сетки;
- 3) **этап решения системы** из конечно-разностных уравнений с  $n$  неизвестными одним из численных методов.

Число неизвестных  $n$  (или порядок решений системы) соответствует числу узловых значений, в которых определяется значение искомой функции. Рассмотрим данные этапы более подробно.

## 11.1.1 Порядок построения сетки в области решения



Исходными данными для построения сетки в области решения являются граничные значения  $(x_H, x_K)$  и  $(y_H, y_K)$  независимых переменных модели, а также необходимая точность решения, заданная шагом  $h$  по каждой из координат. Например, на рисунке данного слайда показана сетка в двумерной области решения задаваемой координатами  $(y, x)$ , при этом шаг решения по координате  $x$  равен  $h_x$ , а по координате  $y$  равен  $h_y$ .

## 11.1.1 Порядок построения сетки в области решения

Изменение значений координат задается следую ими выражениями:

$$x_i = x_H + i \cdot h_x \quad (11.1)$$

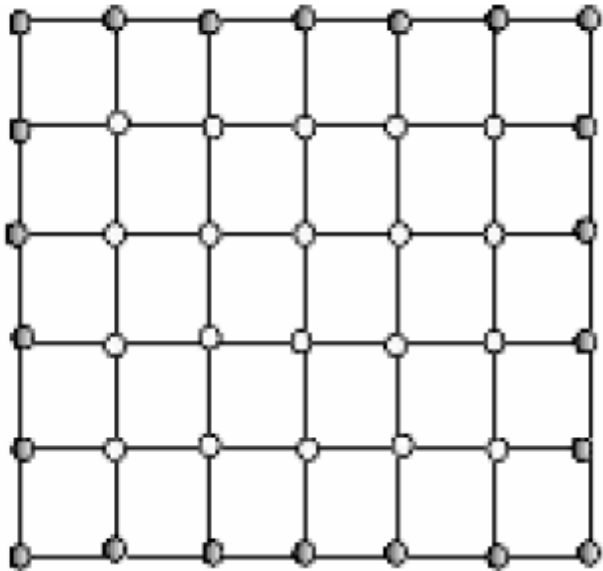
$$y_j = y_H + j \cdot h_y \quad (11.2)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$  - номера узлов соответственно по первой и второй координатам.

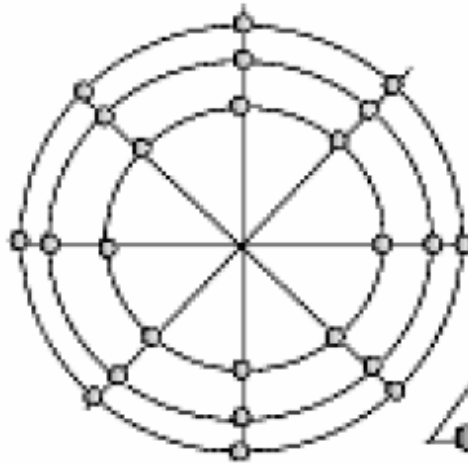
Приведенный пример демонстрирует наиболее распространенный случай, когда сетка строится в декартовой системе координат. В практике моделирования часто используют другие системы координат, обладающие специальными геометрическими свойствами и учитывающие физические особенности рассматриваемой задачи. Существует около 40 различных видов сеток.

## 11.1.1 Порядок построения сетки в области решения

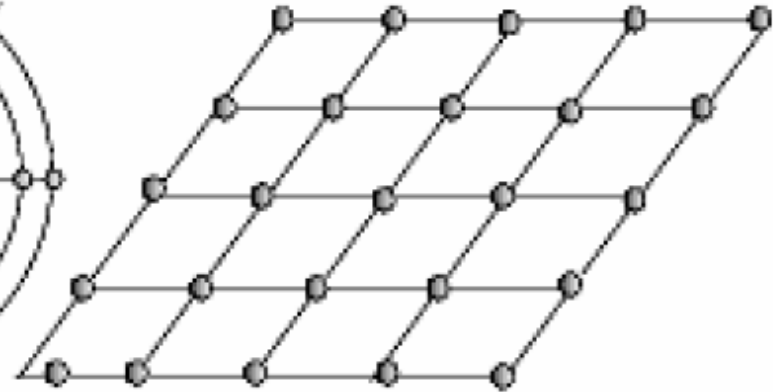
Рассмотрим наиболее часто используемые виды сеток:



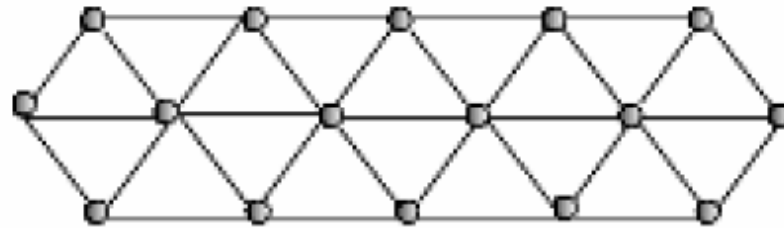
а) прямоугольная



б) полярная



в) скошенная



г) треугольная

## 11.1.2 Построение конечно-разностных уравнений

Конечно-разностные уравнения в МКР получают путем замены производных в исходном дифференциальном уравнении соответствующими конечно-разностными выражениями.

Конечно-разностные выражения для какой-либо частной производной можно получить из разложения функции в ряд **Тейлора** по соответствующей переменной. Например, разложение функции  $u(x, y)$  по координате  $x$  будет иметь вид (11.3).

$$u(x_i + h, y_j) = u(x_i, y_j) + h \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \text{члены более высоких порядков малости} \quad (11.3)$$

где  $h$  – приращение  $x$  в точке.

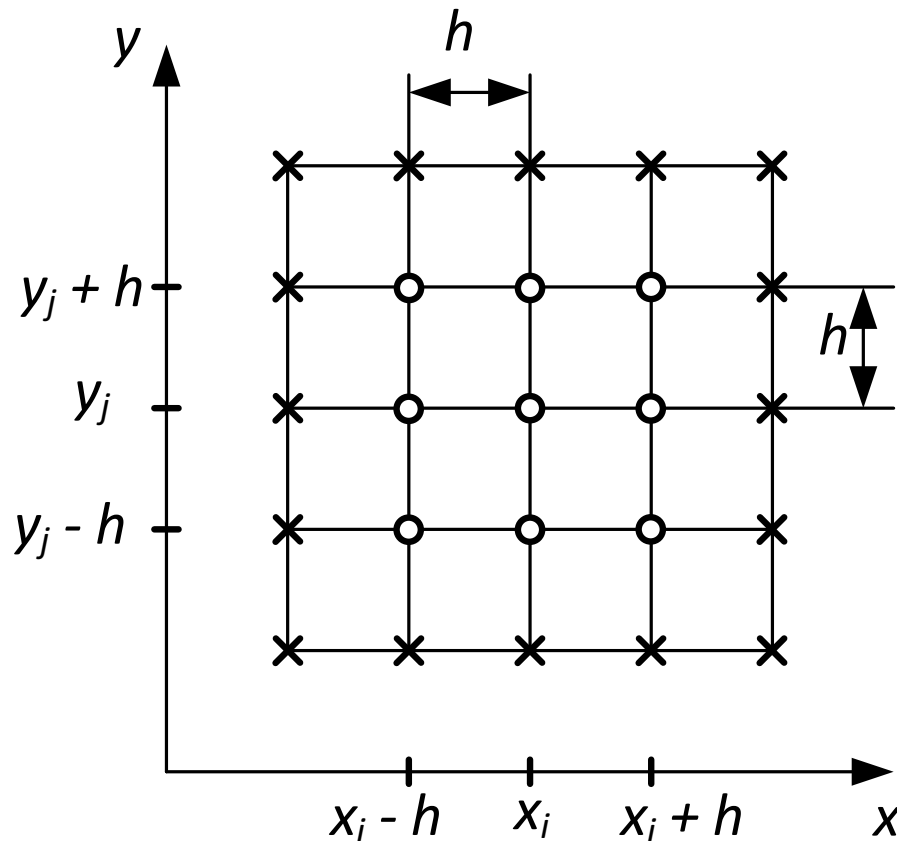
Отбросив члены более высоких порядков малости и выразив частную производную, получим:

$$u_{xx} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i, y_j)}{h} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \quad (11.4)$$



## 11.1.2 Построение конечно-разностных уравнений

Процесс замены частной производной конечной разностью поясняется на рисунке ниже, который показывает разбиение двумерной области решения при условии, что шаг сетки по координатам  $x$  и  $y$  совпадает  $h_x = h_y = h$ .



## 11.1.2 Построение конечно-разностных уравнений

Существует несколько типов конечных разностей в зависимости от того, какие узловые точки взяты для ее вычисления. Различают правые, левые и центральные конечные разности.

Выражение (11.4) в этом смысле является правой конечной разностью для вычисления частной производной функции по координате  $x$ . Правыми конечными разностями для вычисления других частных производных являются:

$$\begin{aligned}
 u_y &\equiv \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u(x_i, y_j + h) - u(x_i, y_j)}{h} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} \\
 u_{xx} &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_i + 2 \cdot h, y_j) - 2 \cdot u(x_i + h, y_j) + u(x_i, y_j)}{h^2} = \frac{u_{i+2,j} - 2 \cdot u_{i+1,j} + u_{i,j}}{h^2} \\
 u_{yy} &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x_i, y_j + 2 \cdot h) - 2 \cdot u(x_i, y_j + h) + u(x_i, y_j)}{h^2} = \frac{u_{i,j+2} - 2 \cdot u_{i,j+1} + u_{i,j}}{h^2} \\
 u_{xy} &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \approx \frac{u(x_i + h, y_j + h) - u(x_i, y_j + h) - u(x_i + h, y_j) + u(x_i, y_j)}{h^2} = \\
 &= \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j} + u_{i,j}}{h^2}
 \end{aligned} \tag{11.5}$$

## 11.1.2 Построение конечно-разностных уравнений

С использованием левых конечных разностей эти же выражения запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
 u_x &\equiv \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{h} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} \\
 u_y &\equiv \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_j - h)}{h} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h} \\
 u_{xx} &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_i, y_j) - 2 \cdot u(x_i - h, y_j) + u(x_i - 2 \cdot h, y_j)}{h^2} = \frac{u_{i,j} - 2 \cdot u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^2} \\
 u_{yy} &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x_i, y_j) - 2 \cdot u(x_i, y_j - h) + u(x_i, y_j - 2 \cdot h)}{h^2} = \frac{u_{i,j} - 2 \cdot u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{h^2} \\
 u_{xy} &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \approx \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_j - h) - u(x_i - h, y_j) + u(x_i - h, y_j - h)}{h^2} = \\
 &= \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1}}{h^2}
 \end{aligned} \tag{11.6}$$

## 11.1.2 Построение конечно-разностных уравнений

Более точно частные производные можно вычислить с помощью центральных конечных разностей (см. выражения (11.7)).

$$\begin{aligned}
 u_x &\equiv \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{2 \cdot h} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2 \cdot h} \\
 u_y &\equiv \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u(x_i, y_j + h) - u(x_i, y_j - h)}{2 \cdot h} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2 \cdot h} \\
 u_{xx} &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_i + h, y_j) - 2 \cdot u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \\
 u_{yy} &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x_i, y_j + h) - 2 \cdot u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - h)}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \\
 u_{xy} &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \approx \frac{u(x_i + h, y_j + h) - u(x_i + h, y_j - h) - u(x_i - h, y_j + h) + u(x_i - h, y_j - h)}{h^2} = \\
 &= \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{h^2}
 \end{aligned} \tag{11.7}$$

## 11.1.3 Методы решения системы конечно-разностных уравнений в МКР

На практике решать системы нелинейных уравнений, получаемые в результате применения МКР, приходится достаточно часто и для этого обычно используется метод Ньютона. Однако, более актуальным является задача решения систем линейных уравнений (СЛАУ). Актуальность решения СЛАУ в данном случае связана с некоторыми их особенностями.

Особенностью СЛАУ при решении задач с граничными условиями методом конечных разностей является то, что матрица коэффициентов левой части системы оказывается сильно разреженной, т.е. содержащей множество нулевых элементов. Это связано с тем, что в конечно-разностных выражениях (см. (11.5), (11.6), (11.7)) для вычисления производной в заданной точке используются лишь несколько соседних узлов, а не все узлы сетки.

И вторая особенность таких систем - это большая размерность, до нескольких тысяч неизвестных, определяемая требуемой точностью решения. Поэтому на практике для решения получаемых в МКР систем используются итерационные методы. Итерации как обычно начинают с задания начального приближения значений функции в узловых точках. Затем начальные значения переменных в узлах сетки последовательно изменяются пока не достигается заданная точность  $\xi$ . Эти условия записываются так:

$$\left| u^{k+1}(x_i, y_j) - u^k(x_i, y_j) \right| \leq \xi \quad (11.8)$$

$k$  – номер итерации.

## 11.1.3 Методы решения системы конечно-разностных уравнений в МКР

Необходимо отметить, что для решения СЛАУ в МКР используют методы подобные методу простых итераций и методу Зейделя. Их называют метод одновременных смещений и метод последовательных смещений.

Метод одновременных смещений заключается в следующем:

1. Задается начальное значение узлам  $u^0(x_j, y_j)$ , например используя линейную интерполяцию в области, задаваемой граничными условиями.
2. Последовательно вычисляется функция во всех узлах, используя начальное приближение, пока не будут получены новые значения функции во всех узлах.
3. Одновременно заменяются начальные значения на новые, полученные на предыдущем шаге. И вновь повторяется итерационный процесс до тех пор пока изменение значений функции не будет меньше некоторой заданной величины.

Метод последовательных смещений аналогичен методу Зейделя в том смысле, что каждое вычисленное значение в узле сразу же используется для вычисления следующего узлового значения. В данном случае, важно учитывать, что ход решения дифференциального уравнения зависит от того, в каком порядке выполняется обход узлов сетки. Порядок обхода узлов определяется физическим смыслом задачи и существенно может влиять на скорость сходимости итерационного процесса.

# 11.2 Численные методы решения гиперболических уравнений

Примером гиперболического уравнения является уравнение, описывающее колебания натянутой струны, или волновое уравнение.

## 11.2.1 Постановка задачи

Имеется струна длиной  $L$ . Натяжение струны равно  $T$ . Отклонение струны от положения равновесия описывается уравнением гиперболического типа.

$$u_{xx}(x,t) - a^2 \cdot u_{tt}(x,t) = 0, \quad (11.9)$$

где  $a^2 = \omega / (T \cdot g)$ ,  $\omega$  – вес струны на единицу длины;  $g$  – ускорение свободного падения.

Необходимо численно решить уравнение (11.9) с начальными и граничными условиями. Для простоты будем считать, что  $a^2 = 1$ , что достигается масштабированием времени  $t = a^2 \cdot \tau$ . Тогда уравнение имеет следующий вид:

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (11.10)$$

## 11.2.1 Постановка задачи

Начальными условиями являются положение струны в начальный момент времени и начальная скорость каждой точки струны:

$$u(x, 0) = u|_{t=0} = f(x) \quad (11.11)$$

$$u_t(x, 0) = u_t|_{t=0} = \varphi(x). \quad (11.12)$$

Так как концы струны закреплены, то имеем граничные условия вида:

$$u(0, t) = u|_{x=0} = u(L, t) = u|_{x=L} = 0. \quad (11.13)$$

## 11.2.2 Решение гиперболического уравнения

Получим явную разностную схему для нахождения численного решения УЧП гиперболического типа. Построим прямоугольную разностную сетку с шагом  $h$  по оси  $x$  и с шагом  $\tau$  по оси  $t$ :

$$x_i = i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad t_j = j \cdot \tau, \quad j = 0, 1, \dots$$



## 11.2.2 Решение гиперболического уравнения

Пусть  $u_{ij} = u(x_i, t_j)$ . Заменяя производные в уравнении (11.10) конечными разностями, получим конечно-разностный аналог уравнения:

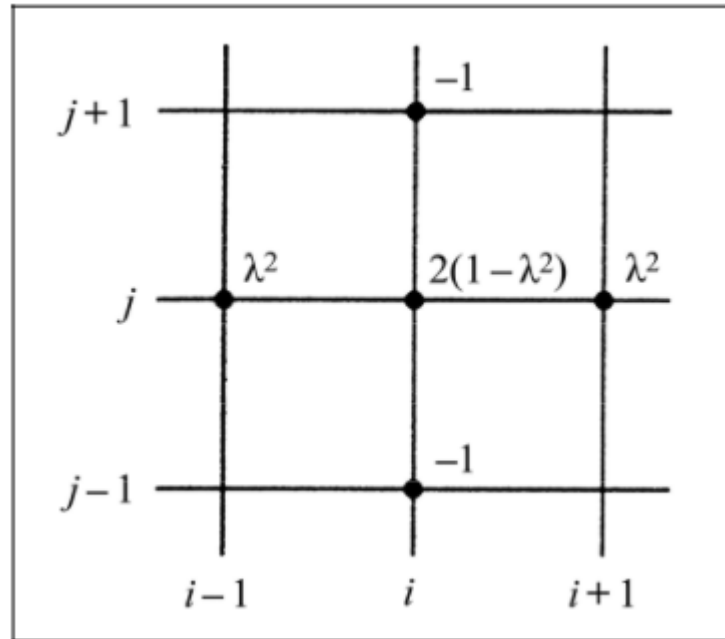
$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2}. \quad (11.14)$$

Разрешая этот аналог относительно  $u_{i,j+1}$ , получим

$$u_{i,j+1} = \lambda^2 u_{i+1,j} + 2(1 - \lambda^2) u_{i,j} + \lambda^2 u_{i-1,j} - u_{i,j-1}, \quad \lambda = \frac{\tau}{h}. \quad (11.15)$$

## 11.2.2 Решение гиперболического уравнения

Явная разностная схема (11.15) позволяет выразить значение функции  $u$  в момент времени  $t_{j+1}$ , зная ее значения в моменты времени  $t_{j-1}$  и  $t_j$ . Конечно-разностный аналог (11.15) краевой задачи (11.10)–(11.13) удобно представить в виде коэффициентов пяти-точечного шаблона, показанного на рисунке:



$$u_{i,j+1} = \lambda^2 u_{i+1,j} + 2(1-\lambda^2) u_{i,j} + \lambda^2 u_{i-1,j} - u_{i,j-1} \quad (11.16)$$

Явная разностная схема (11.15) устойчива, если  $\tau/h < 1$

# 11.3 Численные методы решения параболических уравнений

Примером параболического уравнения является уравнение теплопроводности.

## 11.3.1 Постановка задачи

Имеется длинный тонкий стержень, лежащий вдоль оси  $x$ . На концах стержня, т.е. в точках  $x = 0$ ,  $x = L$ , температура стержня постоянна и равна  $u(0, t) = g_0(t)$ ,  $u(L, t) = g_1(t)$  соответственно. Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  распределение температуры вдоль стержня определяется функцией  $u(x, 0) = f(x)$ . Тогда распределение температуры в стержне для всех последующих моментов времени описывается уравнением параболического типа:

$$u_{xx}(x, t) - a \cdot u_t(x, t) = 0, \quad (11.17)$$

где 
$$a = \frac{c \cdot \rho}{k}$$

$c$  – коэффициент теплоемкости материала стержня,  $k$  – коэффициент теплопроводности материала стержня. Необходимо численно решить уравнение (11.17) с начальными и граничными условиями.

## 11.3.2 Решение параболического уравнения

Сделаем замену времени так, чтобы в новых единицах времени  $\alpha = 1$ . Тогда уравнение теплопроводности примет вид:

$$u_{xx} - u_t = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (11.18)$$

с начальными и граничными условиями вида:

$$u(x, 0) = u|_{t=0} = f(x), \quad (11.19)$$

$$u(0, t) = u|_{x=0} = g_0(t), \quad u(L, t) = u|_{x=L} = g_l(t). \quad (11.20)$$

Получим явную вычислительную схему для нахождения численного решения УЧП параболического типа. Построим прямоугольную разностную сетку с шагом  $h$  по оси  $x$  и с шагом  $\tau$  по оси  $t$ :

$$x_i = i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad t_j = j \cdot \tau, \quad j = 0, 1, \dots$$

Пусть  $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$ . Заменяя производные в уравнении (11.18) конечными разностями, получим конечно-разностный аналог уравнения:

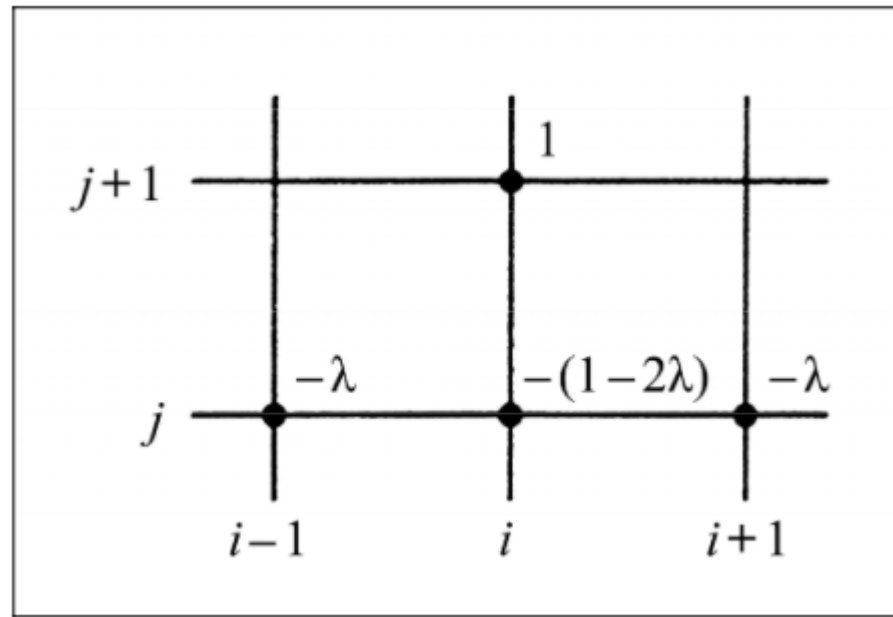
$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau}. \quad (11.21)$$

## 11.3.2 Решение параболического уравнения

Разрешая этот аналог относительно  $u_{i,j+1}$ , получим

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i+1,j} + (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i-1,j}, \quad \lambda = \frac{\tau}{h^2}. \quad (11.22)$$

Явная разностная схема (11.22) позволяет выразить значение функции  $u$  в момент времени  $t_{j+1}$ , зная ее значение в момент времени  $t_j$ . Конечно-разностный аналог (11.22) краевой задачи (11.18)–(11.20) удобно представить в виде коэффициентов трехточечного шаблона, показанного на рисунке:



Явная разностная схема (11.22) устойчива, если

$$\frac{\tau}{h^2} \leq 0,5 \quad (11.23)$$

## 11.3.2 Решение параболического уравнения

Существуют неявные разностные схемы, которые являются устойчивыми при любом отношении  $\tau / h^2$ . При их применении можно основываться только на точности разностной схемы.

Получим **неявную вычислительную схему** для нахождения численного решения УЧП параболического типа. Заменяя производные в уравнении (11.10) левыми конечными разностями (в части производной по времени), получим конечно-разностный аналог уравнения:

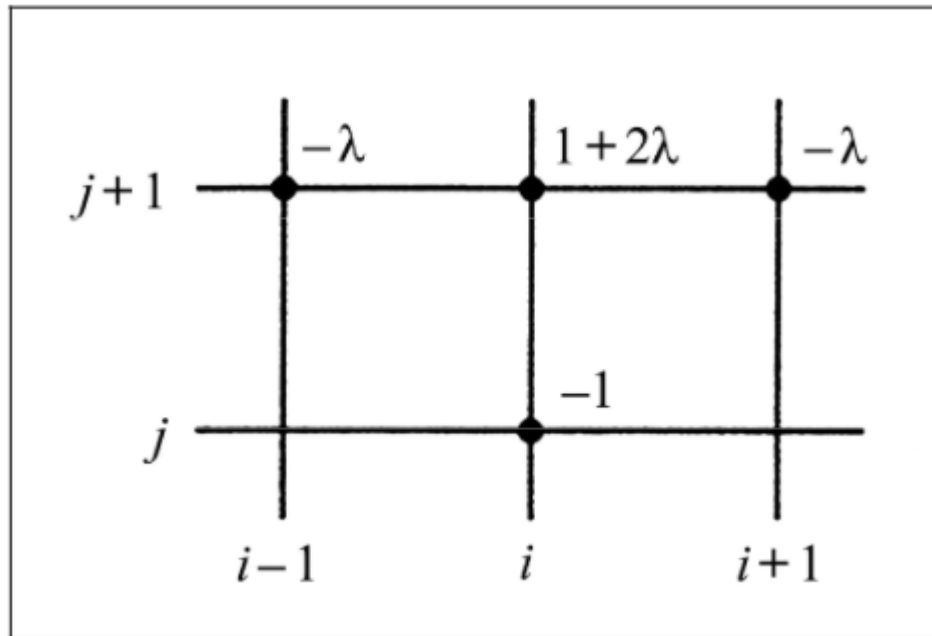
$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau}. \quad (11.24)$$

Разрешая этот аналог относительно  $u_{i,j+1}$ , получим

$$-\lambda u_{i+1,j} + (1 + 2\lambda)u_{i,j} - \lambda u_{i-1,j} = u_{i,j-1}, \quad \lambda = \frac{\tau}{h^2}. \quad (11.25)$$

## 11.3.2 Решение параболического уравнения

Неявная разностная схема (11.25) позволяет выразить значение функции  $u$  в момент времени  $t_j$ , зная ее значение в момент времени  $t_{j-1}$ . Конечно-разностный аналог (11.25) краевой задачи (11.18)–(11.20) удобно представить в виде коэффициентов трехточечного шаблона, показанного на рисунке, где слой  $j-1$  заменяется слоем  $j$ , а слой  $j$  – слоем  $j+1$ .



## 11.3.2 Решение параболического уравнения

На трехточечном шаблоне точками выделены узлы, которые участвуют в разностной схеме (11.25) с весами, которые отмечены соответствующими выражениями.

В отличие от явного метода, в каждом уравнении разностной схемы (23) для внутренних узлов на первом временном слое ( $j = 1$ ) присутствуют три неизвестных значения температуры, поэтому вместо одного уравнения нужно решать систему уравнений на каждом временном слое.

Эта система для первого временного слоя имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + 2\lambda)u_{1,1} - \lambda u_{2,1} = f(h) + \lambda g_0(\tau) \\ -\lambda u_{1,1} + (1 + 2\lambda)u_{2,1} - \lambda u_{3,1} = f(2h) \\ -\lambda u_{2,1} + (1 + 2\lambda)u_{3,1} - \lambda u_{4,1} = f(3h) \\ \dots\dots\dots \\ -\lambda u_{n-2,1} + (1 + 2\lambda)u_{n-1,1} = f(n \cdot h - h) + \lambda g_l(\tau) \end{array} \right. \quad (11.26)$$



## 11.3.2 Решение параболического уравнения

Система (11.26) содержит  $(n - 2)$  линейных уравнений для  $(n - 2)$  неизвестных значений температуры внутренних узлов разностного аналога. Данную систему можно переписать в векторном виде:

$$A \cdot x = b,$$

где матрица  $A$  системы и вектора неизвестных  $x$  и правых частей  $b$  системы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ \vdots \\ u_{n-2,1} \\ u_{n-1,1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} u_{1,0} + \lambda g_0(\tau) \\ u_{2,0} \\ u_{3,0} \\ \vdots \\ u_{n-2,0} \\ u_{n-1,0} + \lambda g_1(\tau) \end{pmatrix}.$$

## 11.3.2 Решение параболического уравнения

Решив выше приведенную систему с трехдиагональной матрицей, получим значение температуры на первом временном слое при  $t = \tau$ . Для второго временного слоя при  $t = 2\tau$  ( $j = 2$ ) снова составляется аналогичная система уравнений и т.д. до конечного момента времени.

Для решения системы уравнений (11.26) можно использовать метод прогонки, который обладает достаточно хорошей точностью в зависимости от размерности задачи.

# 11.4 Примеры решения моделей в среде Matlab.

## 11.4.1 Расчет стационарного профиля температуры в пластине методом конечных разностей

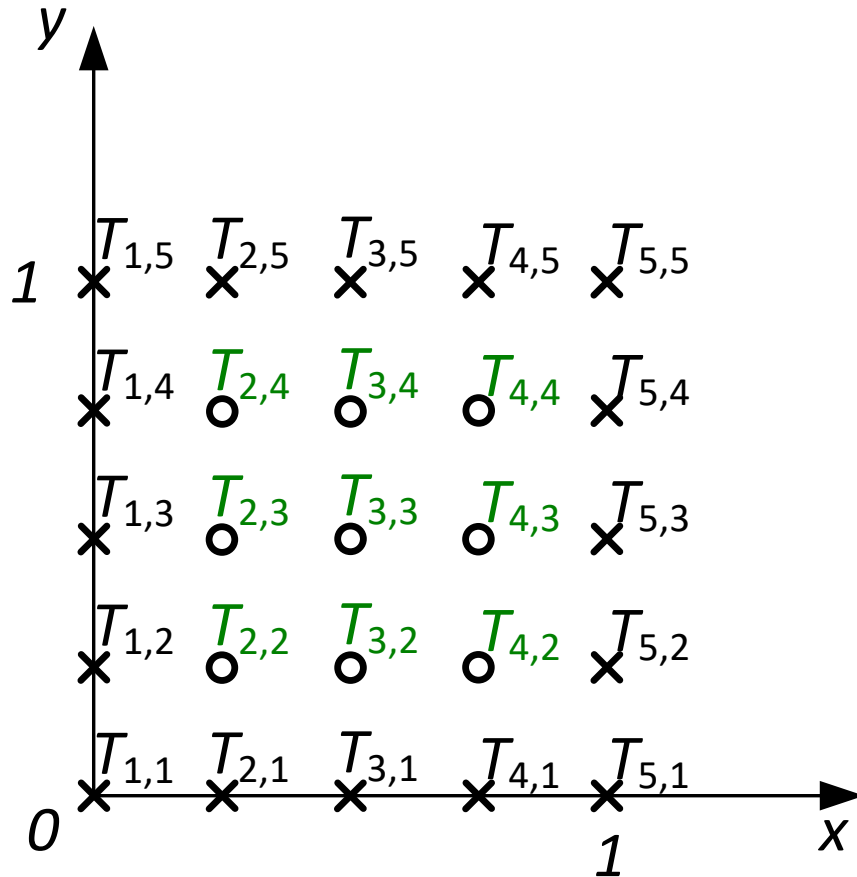
Пусть требуется найти стационарное (не зависящее от времени) распределение температуры в квадратной пластине размером 1x1 м, для которой заданы граничные условия (11.27).

$$\begin{cases} x = 0, T = 0^\circ\text{C} \\ x = 1, T = 100^\circ\text{C} \\ y = 0, T = 100 \cdot x \\ y = 1, T = 100 \cdot x^2 \end{cases} \quad (11.27)$$

Распределение температуры в данном случае описывается уравнением:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (11.28)$$

# 11.4.1 Расчет стационарного профиля температуры в пластине методом конечных разностей



$$T_{1,1} = T_{1,2} = T_{1,3} = T_{1,4} = T_{1,5} = 0$$

$$T_{5,1} = T_{5,2} = T_{5,3} = T_{5,4} = T_{5,5} = 100$$

$$T_{2,1} = 25; T_{3,1} = 50; T_{4,1} = 75$$

$$T_{2,5} = 6.25; T_{3,5} = 25; T_{4,5} = 56.25$$

$$h = h_x = h_y = 0.25$$

# 11.4.1 Расчет стационарного профиля температуры в пластине методом конечных разностей

Представим (11.28) в конечно-разностной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T_{3,2} - 2T_{2,2} + T_{1,2}}{h^2} + \frac{T_{2,3} - 2T_{2,2} + T_{2,1}}{h^2} = 0 \\ \frac{T_{4,2} - 2T_{3,2} + T_{2,2}}{h^2} + \frac{T_{3,3} - 2T_{3,2} + T_{3,1}}{h^2} = 0 \\ \frac{T_{5,2} - 2T_{4,2} + T_{3,2}}{h^2} + \frac{T_{4,3} - 2T_{4,2} + T_{4,1}}{h^2} = 0 \\ \frac{T_{3,3} - 2T_{2,3} + T_{1,3}}{h^2} + \frac{T_{2,4} - 2T_{2,3} + T_{2,2}}{h^2} = 0 \\ \frac{T_{4,3} - 2T_{3,3} + T_{2,3}}{h^2} + \frac{T_{3,4} - 2T_{3,3} + T_{3,2}}{h^2} = 0 \\ \frac{T_{5,3} - 2T_{4,3} + T_{3,3}}{h^2} + \frac{T_{4,4} - 2T_{4,3} + T_{4,2}}{h^2} = 0 \\ \frac{T_{3,4} - 2T_{2,4} + T_{1,4}}{h^2} + \frac{T_{2,5} - 2T_{2,4} + T_{2,3}}{h^2} = 0 \\ \frac{T_{4,4} - 2T_{3,4} + T_{2,4}}{h^2} + \frac{T_{3,5} - 2T_{3,4} + T_{3,3}}{h^2} = 0 \\ \frac{T_{5,4} - 2T_{4,4} + T_{3,4}}{h^2} + \frac{T_{4,5} - 2T_{4,4} + T_{4,3}}{h^2} = 0 \end{array} \right. \quad (11.29)$$

## 11.4.1 Расчет стационарного профиля температуры в пластине методом конечных разностей

$$\lambda = \frac{1}{h^2} \quad (11.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda T_{3,2} - 2\lambda T_{2,2} + \lambda T_{1,2} + \lambda T_{2,3} - 2\lambda T_{2,2} + \lambda T_{2,1} = 0 \\ \lambda T_{4,2} - 2\lambda T_{3,2} + \lambda T_{2,2} + \lambda T_{3,3} - 2\lambda T_{3,2} + \lambda T_{3,1} = 0 \\ \lambda T_{5,2} - 2\lambda T_{4,2} + \lambda T_{3,2} + \lambda T_{4,3} - 2\lambda T_{4,2} + \lambda T_{4,1} = 0 \\ \lambda T_{3,3} - 2\lambda T_{2,3} + \lambda T_{1,3} + \lambda T_{2,4} - 2\lambda T_{2,3} + \lambda T_{2,2} = 0 \\ \lambda T_{4,3} - 2\lambda T_{3,3} + \lambda T_{2,3} + \lambda T_{3,4} - 2\lambda T_{3,3} + \lambda T_{3,2} = 0 \\ \lambda T_{5,3} - 2\lambda T_{4,3} + \lambda T_{3,3} + \lambda T_{4,4} - 2\lambda T_{4,3} + \lambda T_{4,2} = 0 \\ \lambda T_{3,4} - 2\lambda T_{2,4} + \lambda T_{1,4} + \lambda T_{2,5} - 2\lambda T_{2,4} + \lambda T_{2,3} = 0 \\ \lambda T_{4,4} - 2\lambda T_{3,4} + \lambda T_{2,4} + \lambda T_{3,5} - 2\lambda T_{3,4} + \lambda T_{3,3} = 0 \\ \lambda T_{5,4} - 2\lambda T_{4,4} + \lambda T_{3,4} + \lambda T_{4,5} - 2\lambda T_{4,4} + \lambda T_{4,3} = 0 \end{array} \right. \quad (11.31)$$

## 11.4.1 Расчет стационарного профиля температуры в пластине методом конечных разностей

$$\left\{ \begin{array}{l} -4\lambda T_{2,2} + \lambda T_{3,2} + \lambda T_{2,3} = -\lambda T_{1,2} - \lambda T_{2,1} \\ \lambda T_{2,2} - 4\lambda T_{3,2} + \lambda T_{4,2} + \lambda T_{3,3} = -\lambda T_{3,1} \\ -2\lambda T_{4,2} + \lambda T_{3,2} + \lambda T_{4,3} - 2\lambda T_{4,2} = -\lambda T_{5,2} - \lambda T_{4,1} \\ \lambda T_{2,2} - 4\lambda T_{2,3} + \lambda T_{3,3} + \lambda T_{2,4} = -\lambda T_{2,2} \\ \lambda T_{3,2} + \lambda T_{2,3} - 4\lambda T_{3,3} + \lambda T_{4,3} + \lambda T_{3,4} = 0 \\ \lambda T_{3,3} + \lambda T_{4,2} - 4\lambda T_{4,3} + \lambda T_{4,4} = -\lambda T_{5,3} \\ \lambda T_{2,3} - 4\lambda T_{2,4} + \lambda T_{3,4} = -\lambda T_{1,4} - \lambda T_{2,5} \\ \lambda T_{3,3} + \lambda T_{2,4} - 4\lambda T_{3,4} + \lambda T_{4,4} = -\lambda T_{3,5} \\ \lambda T_{4,3} + \lambda T_{3,4} - 4\lambda T_{4,4} = -\lambda T_{4,5} - \lambda T_{5,4} \end{array} \right. \quad (11.32)$$

## 11.4.1 Расчет стационарного профиля температуры в пластине методом конечных разностей

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -4\lambda T_{2,2} + \lambda T_{3,2} + 0T_{4,2} + \lambda T_{2,3} + 0T_{3,3} + 0T_{4,3} + 0T_{2,4} + 0T_{3,4} + 0T_{4,4} = -\lambda T_{1,2} - \lambda T_{2,1} \\
 \lambda T_{2,2} - 4\lambda T_{3,2} + \lambda T_{4,2} + 0T_{2,3} + \lambda T_{3,3} + 0T_{4,3} + 0T_{2,4} + 0T_{3,4} + 0T_{4,4} = -\lambda T_{3,1} \\
 0T_{2,2} + \lambda T_{3,2} - 4\lambda T_{4,2} + 0T_{2,3} + 0T_{3,3} + \lambda T_{4,3} + 0T_{2,4} + 0T_{3,4} + 0T_{4,4} = -\lambda T_{5,2} - \lambda T_{4,1} \\
 \lambda T_{2,2} + 0T_{3,2} + 0T_{4,2} - 4\lambda T_{2,3} + \lambda T_{3,3} + 0T_{4,3} + \lambda T_{2,4} + 0T_{3,4} + 0T_{4,4} = -\lambda T_{2,2} \\
 0T_{2,2} + \lambda T_{3,2} + 0T_{4,2} + \lambda T_{2,3} - 4\lambda T_{3,3} + \lambda T_{4,3} + 0T_{2,4} + \lambda T_{3,4} + 0T_{4,4} = 0 \\
 0T_{2,2} + 0T_{3,2} + \lambda T_{4,2} + 0T_{2,3} + \lambda T_{3,3} - 4\lambda T_{4,3} + 0T_{2,4} + 0T_{3,4} + \lambda T_{4,4} = -\lambda T_{5,3} \\
 0T_{2,2} + 0T_{3,2} + 0T_{4,2} + \lambda T_{2,3} + 0T_{3,3} - 0T_{4,3} - 4\lambda T_{2,4} + \lambda T_{3,4} + 0T_{4,4} = -\lambda T_{1,4} - \lambda T_{2,5} \\
 0T_{2,2} + 0T_{3,2} + 0T_{4,2} + 0T_{2,3} + \lambda T_{3,3} + 0T_{4,3} + \lambda T_{2,4} - 4\lambda T_{3,4} + \lambda T_{4,4} = -\lambda T_{3,5} \\
 0T_{2,2} + 0T_{3,2} + 0T_{4,2} + 0T_{2,3} + 0T_{3,3} + \lambda T_{4,3} + 0T_{2,4} + \lambda T_{3,4} - 4\lambda T_{4,4} = -\lambda T_{4,5} - \lambda T_{5,4}
 \end{array} \right. \quad (11.33)$$



## 11.4.1 Расчет стационарного профиля температуры в пластине методом конечных разностей

$$A = \begin{pmatrix} -4\lambda & \lambda & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -4\lambda & \lambda & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -4\lambda & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & -4\lambda & \lambda & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda & -4\lambda & \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \lambda & -4\lambda & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -4\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \lambda & -4\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \lambda & -4\lambda \end{pmatrix} \quad (11.34)$$

$$b = \begin{pmatrix} -\lambda T_{1,2} - \lambda T_{2,1} \\ -\lambda T_{3,1} \\ -\lambda T_{5,2} - \lambda T_{4,1} \\ -\lambda T_{2,2} \\ 0 \\ -\lambda T_{5,3} \\ -\lambda T_{1,4} - \lambda T_{2,5} \\ -\lambda T_{3,5} \\ -\lambda T_{4,5} - \lambda T_{5,4} \end{pmatrix} \quad (11.35)$$

## 11.4.2 Решение в Matlab

```

1 -   clc;
2 -   T = zeros(5,5);
3
4 -   T(1,1) = 0; T(1,2) = 0; T(1,3) = 0; T(1,4) = 0; T(1,5) = 0;
5 -   T(5,1) = 100; T(5,2) = 100; T(5,3) = 100; T(5,4) = 100; T(5,5) = 100;
6 -   T(2,1) = 25; T(3,1) = 50; T(4,1) = 75;
7 -   T(2,5) = 6.25; T(3,5) = 25; T(4,5) = 56.25;
8
9 -   h = 0.25;
10 -  lm = 1/h;
11
12 -  A=[-4*lm lm 0 lm 0 0 0 0 0
13       lm -4*lm lm 0 lm 0 0 0 0
14       0 lm -4*lm 0 0 lm 0 0 0
15       lm 0 0 -4*lm lm 0 lm 0 0
16       0 lm 0 lm -4*lm lm 0 lm 0
17       0 0 lm 0 lm -4*lm 0 0 lm
18       0 0 0 lm 0 0 -4*lm lm 0
19       0 0 0 0 lm 0 lm -4*lm lm
20       0 0 0 0 0 lm 0 lm -4*lm];
21
22 -  b = [-lm*T(1,2)-lm*T(2,1)
23        -lm*T(3,1)
24        -lm*T(5,2)-lm*T(4,1)
25        -lm*T(2,2)
26         0
27        -lm*T(5,3)
28        -lm*T(1,4)-lm*T(2,5)
29        -lm*T(3,5)
30        -lm*T(4,5)-lm*T(5,4)];
31
32 -  X = (A^-1)*b;
33
34 -  T(2,2) = X(1); T(3,2) = X(2); T(4,2) = X(3);
35 -  T(2,3) = X(4); T(3,3) = X(5); T(4,3) = X(6);
36 -  T(2,4) = X(7); T(3,4) = X(8); T(4,4) = X(9);
37 -  T

```

## 11.4.2 Решение в Matlab

```
ans =
```

```
0    25.0000    50.0000    75.0000   100.0000
0    23.4933    47.8795    73.4933   100.0000
0    21.0938    44.5313    71.0938   100.0000
0    16.3504    38.0580    66.3504   100.0000
0     6.2500    25.0000    56.2500   100.0000
```