ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
ЛЕКЦИЯ №10
«Краевые задачи и математическое моделирование»

Отделение ядерно-топливного цикла

Лектор:
Зав. каф. - руководитель ОЯТЦ ИЯТШ
Горюнов А.Г.

2020

План лекции

10.1 Общие сведения и классификация уравнений в частных производных

10.2 Системы с распределенными параметрами

10.3 Примеры моделирования

Литература:

1. Голубева, Н. В. Математическое моделирование систем и процессов : учебное пособие / Н. В. Голубева. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 192 с.— Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/76825

2. Слабнов, В. Д. Численные методы : учебник / В. Д. Слабнов. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 392 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/133925

Информация по курсу:

https://portal.tpu.ru/SHARED/a/ALEX1479/study/Matmod/Tab

10.1 Общие сведения и классификация уравнений в частных производных

10.1.1 Общие сведения

Дифференциальное уравнение, содержащее частные производные, называется **дифференциальным уравнением в частных производных** (УЧП).

Порядком УЧП называют **наивысший порядок** частных производных, входящих в уравнение.

В отличие от ОДУ, в котором неизвестная функция зависит только от одной переменной, в уравнении с частными производными неизвестная функция зависит от нескольких переменных, например физическая величина *u* зависит от координаты *x* и координаты *y* и/или зависит от координаты времени *t*.

Для упрощения записи в литературе используют следующие обозначения:

$$u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t}; \quad u_{tt} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}; \quad u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y}; \quad u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u_{xy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad u_{yy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (10.1)$$

10.1.1 Общие сведения

Примеры уравнений в частных производных:

$u_t = u_{xx}$ (одномерное уравнение теплопроводности);

$u_t = u_{xx} + u_{yy}$ (двумерное уравнение теплопроводности);

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ (двумерное уравнение Лапласа);

$au_{tt} = u_{xx}$ (одномерное волновое уравнение);

$u_{tt} = u_{xx} + au_t + \beta u$ (телеграфное уравнение).

В приведенных примерах неизвестная функция u зависит более чем от одной переменной, например для одномерного уравнения теплопроводности функция $u(x, t)$ зависит от двух переменных (x – длины стержня и t – времени).

10.1.1 Общие сведения

Функция u, для которой находятся производные, называется **зависимой переменной**, переменные t , x, по которым производится дифференцирование, называются **независимыми переменными**.

Методы решений дифференциальных уравнений в частных производных:

1) метод разделения переменных;
2) метод интегральных преобразований;
3) метод преобразования координат;
4) метод интегральных уравнений;
5) численные методы;
6) вариационные методы;
7) метод конечных элементов (метод Галеркина);
8) метод теории возмущений.

Первые четыре метода являются точными методами решения УЧП, остальные – приближенными методами.

10.1.2 Классификация уравнений в частных производных

Методы классификации УЧП:

1. По порядку уравнения

- $u_t = u_x$ (уравнение первого порядка);
- $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (уравнение второго порядка);
- $u_t = u_{xxx}$ (уравнение третьего порядка).

2. По размерности УЧП

- $u_t = u_{xx}$ (одномерное уравнение);
- $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (двумерное уравнение);
- $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z)$ (трехмерное уравнение).

3. По критерию линейное/нелинейное.

Линейным уравнением второго порядка с двумя независимыми переменными называется уравнение вида:

$$A \cdot u_{xx} + B \cdot u_{xy} + C \cdot u_{yy} + D \cdot u_x + E \cdot u_y + F \cdot u = G, \qquad (10.2)$$

где A, B, C, D, E, F, G – константы или заданные функции переменных x и y .

- $u_{xx} + y \cdot u_{yy} = 0$ (линейное уравнение);
- $u \cdot u_{xx} + u_t = 0$ (нелинейное уравнение).

10.1.2 Классификация уравнений в частных производных

4. По критерию однородное/неоднородное

Уравнение (10.2) называется **однородным**, если правая часть $G(x, y)$ тождественно равна нулю для всех x и y . В противном случае уравнение (10.2) называется **неоднородным**.

5. По виду коэффициентов

Уравнение (10.2) называется уравнением **с постоянными коэффициентами**, если коэффициенты A, B, C, D, E, F, G являются константами. В противном случае уравнение (10.2) называется уравнением **с переменными коэффициентами**.

10.1.2 Классификация уравнений в частных производных

Существует несколько типов линейных уравнений.

Параболический тип. Уравнения параболического типа описывают процессы теплопроводности или диффузии и определяются условием:

$$B^2 - 4AC = 0 \tag{10.3}$$

Гиперболический тип. Уравнения гиперболического типа описывают колебательные системы или волновые движения и определяются условием:

$$B^2 - 4AC > 0 \tag{10.4}$$

Эллиптический тип. Уравнения эллиптического типа описывают установившиеся процессы и определяются условием:

$$B^2 - 4AC < 0 \tag{10.5}$$

10.1.2 Классификация уравнений в частных производных

Примеры линейных уравнений разных типов:

- $u_t = u_{xx}$, $B^2 - 4AC = 0$ (параболический тип);
- $u_{tt} = u_{xx}$, $B^2 - 4AC > 0$ (гиперболический тип);
- $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $B^2 - 4AC = -4 < 0$ (эллиптический тип);
- $y \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0$, $B^2 - 4AC = -4y$ (параболический тип при $y = 0$, гиперболический тип при $y < 0$, эллиптический тип при $y > 0$).

10.2 Системы с распределенными параметрами

В системах с распределенными параметрами физические процессы являются не только функциями времени, но и функциями пространственных координат.

Математические модели для систем с распределенными параметрами формируются на основе дифференциальных уравнений с частными производными (УЧП). УЧП связывают неизвестную функцию нескольких независимых переменных и ее частные производные.

К математическому описанию в форме УЧП приводят многие задачи математической физики. Предметом математической физики является математический аппарат моделирования и исследования основных закономерностей различных классов физических явлений и процессов.

В основу уравнений математической физики положены фундаментальные законы природы — законы сохранения массы, энергии, заряда, импульса и др.

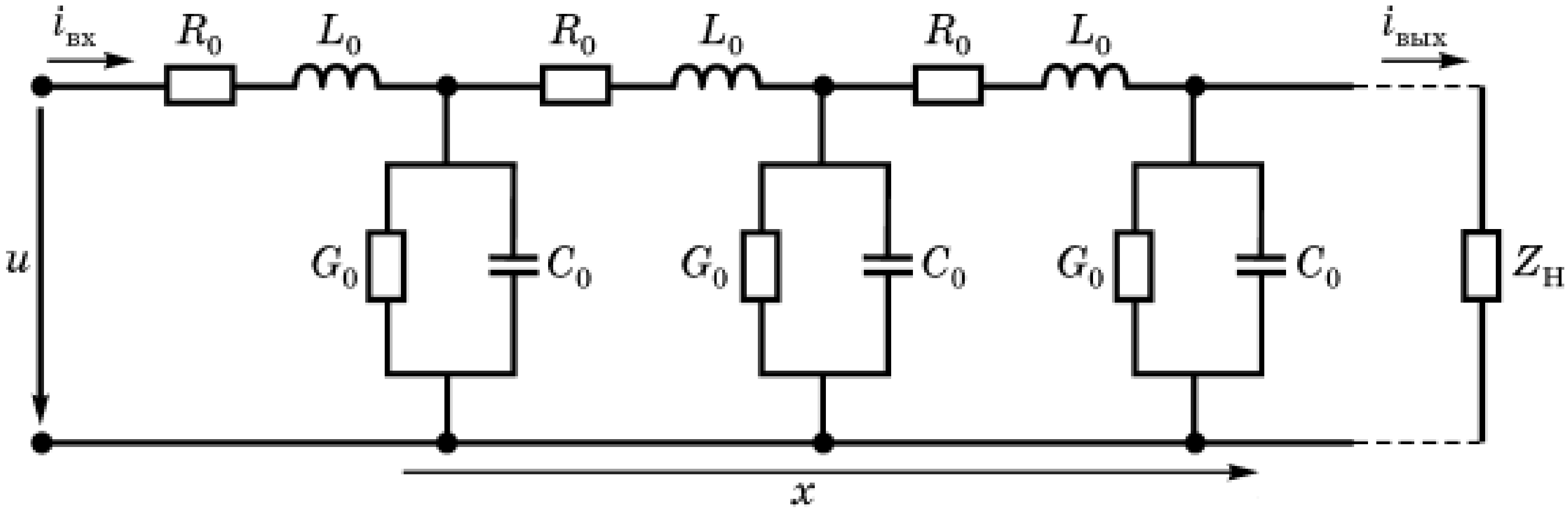
10.2 Системы с распределенными параметрами

Модели на основе УЧП являются основой:

- для решения задач механики сплошных сред (анализ напряженно-деформированного состояния несущих элементов технических объектов),
- для моделирования процессов теплопередачи в элементах конструкций и технологического оборудования,
- для исследования течений сплошных потоков жидкостей и газов в трубопроводах,
- для количественного анализа процесса индукционного нагрева металлических деталей (за счет вихревых токов) и т. д.

10.3 Примеры моделирования

10.3.1 Двухпроводная однородная линия



Однородной называют **длинную линию**, параметры которой (сопротивление, индуктивность, проводимость изоляции и емкость) распределены вдоль провода равномерно (неизменны по всей длине линии).

Схема замещения линии с потерями представлена на данном слайде, где x — пространственная координата, $i_{вых} \neq i_{вх}$ из-за утечки тока через изоляцию между проводами.

10.3.1 Двухпроводная однородная линия

Линия характеризуется параметрами, задаваемыми на единицу длины:
R_0, L_0 — продольные активное сопротивление и индуктивность;
G_0, C_0 — поперечные проводимость и емкость — параметры изоляции между проводами. Проводимость G_0 обусловлена несовершенством изоляции.

Математическая модель в общем случае имеет вид:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial x} = R_0 \cdot i + L_0 \dfrac{\partial i}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x} = G_0 \cdot u + C_0 \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \qquad (10.6)$$

Система (10.6) состоит из двух дифференциальных уравнений 1-го порядка в частных производных, называемая системой телеграфных уравнений, где
$u = u(t, x)$ и $i = i(t, x)$.

В результате решения модели (10.6) определяются процессы

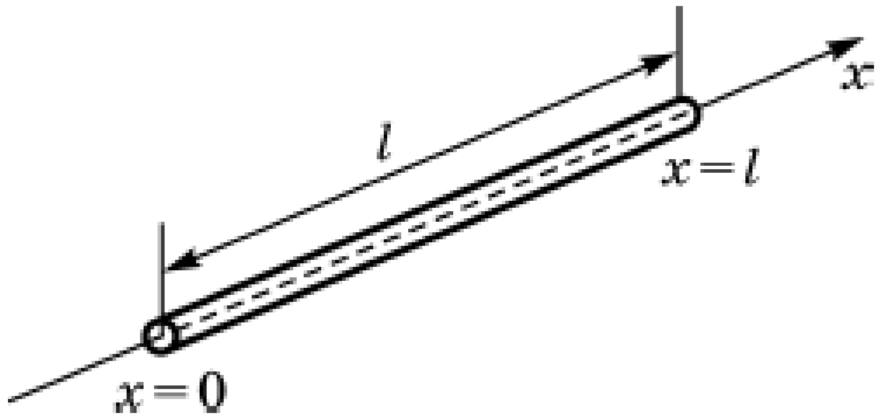
$u = u(t, x)$ и $i = i(t, x)$,

т. е. напряжение между проводами и ток как функции времени t и пространственной координаты x.

10.3.2 Уравнение теплопроводности

В данном случае математическая модель описывает процесс распространения тепла и представляет собой УЧП, относящееся к уравнениям параболического типа.

Рассмотрим простейший вариант (линейная задача).



Тонкий однородный стержень длиной *l*, изолированный в тепловом отношении от окружающей среды (т. е. через боковую поверхность не происходит теплообмена с окружающей средой). Стержень достаточно тонкий, поэтому температуру *T* во всех точках поперечного сечения x можно считать одинаковой в любой момент времени *t*. На концах стержня поддерживается некоторая температура — постоянная или меняющаяся во времени по какому-либо заданному закону. Тепло может распространяться только вдоль оси *x*.

Требуется определить закон распределения температуры *T* в любой точке стержня *x* в любой момент времени *t*.

10.3.2 Уравнение теплопроводности

В случае тонкого однородного стержня (слайд 14) применяют математическую модель вида:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad (10.7)$$

где *a* — коэффициент температуропроводности, определяемый как

$$a = \sqrt{\frac{\lambda}{c \cdot \rho}}, \qquad (10.8)$$

где λ — коэффициент теплопроводности, *c* — удельная теплоемкость, ρ — плотность материала стержня.

Для получения единственного частного решения уравнения (10.7) в частных производных необходимо задать **начальные** и **граничные (краевые) условия**, соответствующие физическим условиям данной задачи.

10.3.2 Уравнение теплопроводности

Начальные условия:

$$T(x,0) = T\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \tag{10.9}$$

где $\varphi_0(x)$ — распределение температуры в стержне в начальный момент времени $t = 0$.

Граничные условия должны выполняться на торцевых сечениях стержня:

$$T(0,t) = T\big|_{x=0} = \alpha(t) \tag{10.10}$$

$$T(l,t) = T\big|_{x=l} = \beta(t) \tag{10.11}$$

где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — законы изменения температуры соответственно в левом и правом концах стержня.

В этом случае решение $T(x, t)$ уравнения (10.9) будет функцией двух переменных — пространственной координаты x и времени t.

10.3.2 Уравнение теплопроводности

В случае, если внутри стержня имеются источники или поглотители тепла, то математическая модель усложняется:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Q_\vartheta}{c \cdot \rho}, \qquad (10.12)$$

где Q_ϑ — объемная плотность теплового источника.

Математическая модель, описывающая процесс передачи тепла в однородной среде (в трехмерном пространстве), представляет собой трехмерное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Q_\vartheta}{c \cdot \rho}. \qquad (10.13)$$

Решением уравнения (10.13) будет функция T(x, y, z, t), позволяющая определить температуру T в любой точке среды с координатами (x, y, z) в любой момент времени t.

10.3.2 Уравнение теплопроводности

Уравнение (10.13) часто записывают в краткой форме:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \nabla^2 T + \frac{Q_\vartheta}{c \cdot \rho}, \tag{10.14}$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – **оператор Лапласа**.

Начальные условия:

$$T(x, y, z, 0) = T\big|_{t=0} = \varphi_0(x, y, z), \tag{10.15}$$

где $\varphi_0(x, y, z)$— начальное распределение температуры во всех точках тела при $t = 0$.

Граничные условия:

$$T(x, y, z, t)_{\text{на } S} = f(x, y, z, t), \tag{10.16}$$

где $f(x, y, z, t)$ — функция, определяющая закон распределения температуры во всех точках на поверхности S, ограничивающей тело, в любой момент времени t.

Модель (10.14) описывает и ряд других процессов различной физической природы: диффузию одного вещества в другое, фильтрацию жидкости и газа в пористой среде, проникновение магнитного поля в плазму, поведение нейтронов в ядерном реакторе и т. д.

10.3.3 Волновое уравнение

Математическое моделирование процесса движения сжимаемого газа, распространения возмущений электромагнитных полей, исследование колебаний приводит к так называемому волновому уравнению (**уравнению гиперболического типа**):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u, \tag{10.17}$$

где *a* — скорость распространения возмущений.

Волновое уравнение (10.17) описывает процесс распространения возмущений в некоторой среде. Оно является базовой математической моделью в акустике.

10.3.4 Неустановившейся во времени конвективная диффузия с переходом вещества из одной фазы в другую

Уравнения неустановившейся во времени конвективной диффузии с переходом вещества из одной фазы в другую имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t} = D_1 \cdot \dfrac{\partial^2 X}{\partial h^2} - U_1 \cdot \dfrac{\partial X}{\partial h} - W \\ \dfrac{\partial Y}{\partial t} = D_2 \cdot \dfrac{\partial^2 Y}{\partial h^2} + U_2 \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial h} + W \end{cases} \quad (10.18)$$

где U_1, U_2 – скорость течения 1-ой и 2-ой фаз, X, Y – концентрации компонент в 1-ой и 2-ой фазах, D_1, D_2 – коэффициенты диффузии в соответствующих фазах,

$$W = \beta_1 \cdot \alpha \cdot \left(X - X^* \right) = \beta_2 \cdot \alpha \cdot \left(Y^* - Y \right), \quad (10.19)$$

β_1, β_2 – коэффициенты массопередачи от одной фазы к другой (от 1-ой ко 2-ой),
α – поверхность соприкосновения двух фаз на единицу объема,
X^*, Y^* – равновесные значения концентрации в 1-ой и 2-ой фазах.

Уравнения диффузии (10.18) – уравнения в частных производных в первом приближении описывают процессы в противоточных аппаратах (колонны, колонные экстракторы и т.д.).

10.3.5 Заключительные положения

Явное (точное аналитическое) решение УЧП возможно найти только для очень ограниченного круга одномерных задач. К точным методам решения линейных УЧП относятся метод разделения переменных, методы интегральных преобразований (Лапласа, Фурье и др.), метод функций Грина, метод характеристик. Для точного решения нелинейных УЧП применяют методы поиска симметрии, прямой метод Кларксона — Крускала, метод дифференциальных связей и т. д.

Среди методов приближенного решения выделяют приближенные аналитические (однопараметрические интегральные методы, метод равнодоступной поверхности, методы линеаризации и др.), асимптотические (методы возмущений) и **численные**.

Особую значимость для решения прикладных задач имеют численные методы (различные схемы **методов конечных разностей**, **конечных элементов** и др.).