ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

ЛЕКЦИЯ №7

«Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений»

Отделение ядерно-топливного цикла

Лектор:
Зав. каф. - руководитель ОЯТЦ ИЯТШ
Горюнов А.Г.

2020

План лекции

7.1 Задача Коши.

7.2 Классификация приближенных методов.

7.3 Метод изоклин.

7.4 Метод последовательных приближений.

7.5 Одношаговые численные методы. Метод Эйлера.

7.6 Решения дифференциальных уравнений в Matlab.

Информация по курсу:

https://portal.tpu.ru/SHARED/a/ALEX1479/study/Matmod/Tab

7.1 Задача Коши

7.1.1 Общие сведения и понятия

Дифференциальным уравнением первого порядка в каноническом виде называют уравнение следующего вида:

$$F\left(x, y, y'\right) = 0 \tag{7.1}$$

В свою очередь, дифференциальное уравнение:

$$y' = f\left(x, y\right), \tag{7.2}$$

Где *f*(*x*,*y*) – заданная функция двух переменных, называется **дифференциальным уравнением первого порядка**, разрешенным относительно производной.

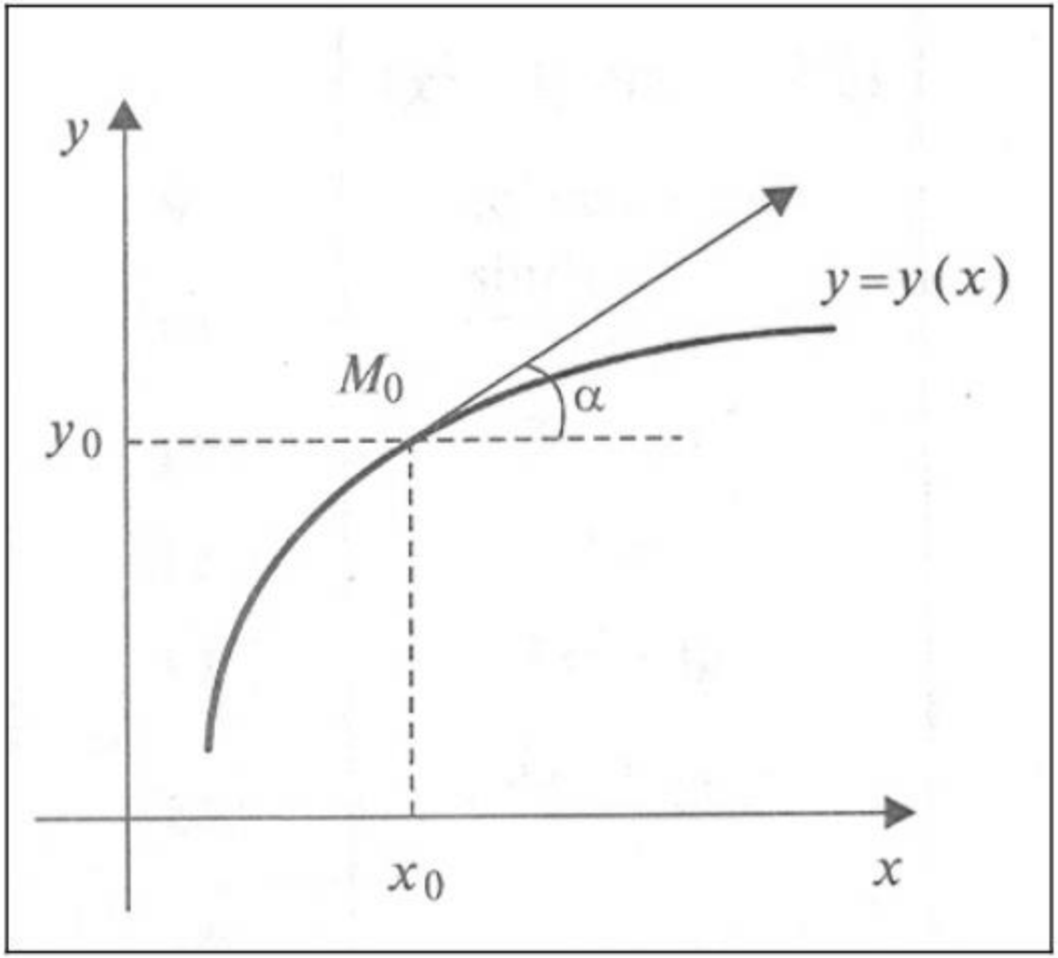
Задача в нахождении решения уравнения (7.2) в виде функции y(x) с начальным условием:

$$y\left(x_0\right) = y_0 \tag{7.3}$$

называется **задачей Коши**.

7.1.1 Общие сведения и понятия

Графическая интерпретация заключается в том, что требуется найти интегральную кривую $y = y(x)$, которая проходит через заданную точку $M_0 = M(x_0,y_0)$ при выполнении равенства (7.2).



Доказано существование единственного решения задачи Коши (**Теорема Пикара**) для дифференциальных уравнений (7.1) и (7.2)

7.1.2 Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

Дифференциальным уравнением *n*-го порядка в каноническом виде называют соотношение вида:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

или

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{7.4}$$

для которого задача Коши состоит в нахождении решения y=y(x), которое удовлетворяет начальным условиям:

$$y\left(x_0\right) = y_0,\ y'\left(x_0\right) = y'_0,\ y^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_0^{(n-1)}, \tag{7.5}$$

где $y_0,\ y'_0,\ y_0^{(n-1)}$ – заданные числа.

Решением уравнения (7.4) является некоторая функциональная зависимость *y*(*x*), которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Существует множество решений (частных решений) дифференциального уравнения (7.4), которые могут быть объединены в общее решение вида:

$$y = y\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right), \tag{7.6}$$

где C_1, C_2, …, C_n – произвольные константы.

7.1.2 Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

Задача Коши для дифференциального уравнения (7.4) n-го порядка может быть сведена к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y'(x) = y_1(x) \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(y'(x)\right)' = y_1'(x) = y_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y_{n-2}'(x) = y_{n-1}(x) \\ \dfrac{d^n y}{dx^n} = y_{n-1}'(x) = f\left(x, y, y_1(x), \ldots, y_{n-1}(x)\right) \end{cases} \tag{7.7}$$

с начальными условиями:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

7.1.2 Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

Пример уравнения второго порядка:

$$y'' = f\left(x, y, y'\right)$$

можно записать в виде системы двух уравнений:

$$\begin{cases} y' = y_1\left(x\right) \\ y_1' = f\left(x, y, y_1\left(x\right)\right) \end{cases} \qquad (7.8)$$

7.1.3 Методы решений дифференциальных уравнений

Методы решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) подразделяются на три основные группы

1) Аналитические методы

2) Графические методы

3) Численные методы

Задачу нахождения решений дифференциального уравнения называют **задачей интегрирования дифференциального уравнения**.

7.2 Классификация приближенных методов

7.2.1 Приближенно-аналитические методы

Приближенно-аналитическими называются методы, позволяющие получить приближенное решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения.

Среди методов этого класса следует выделить **асимптотические методы**, базирующиеся на разложении искомого решения в формальный ряд по степеням некоторого малого параметра, последующем усечении ряда и использовании его частичных сумм в качестве приближенных решений (метод малого параметра, возмущений, осреднения, пограничного слоя, методы Ляпунова, Пуанкаре и др.).

Целью асимптотических методов является получение приближенной аналитической формулы, позволяющей качественно оценить поведение решения дифференциального уравнения на некотором конечном интервале изменения независимой переменной.

К классу приближенно-аналитических относятся также **метод последовательных приближений** (Пикара), **метод разложения в ряд Тейлора** по независимой переменной, методы Чаплыгина, Ньютона — Канторовича и др.

7.2.2 Численные методы

Численные методы предполагают получение приближенного решения дифференциального уравнения в виде таблицы приближенных значений искомой функции $y(x)$ для ряда значений независимой переменной х из интервала $[x_0, x_n]$.

Для численного решения краевых задач применяются **конечно-разностные методы**, проекционные методы Ритца и Галеркина, **метод конечных элементов** и др.

Численные методы позволяют получить искомое решение $y(x)$ дифференциального уравнения (7.2) или (7.4) в форме таблицы его приближенных значений $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ для заданной последовательности значений аргумента x_0, x_1, $x_2, ..., x_n$.

Непрерывный отрезок $[x_0, x_n]$, на котором требуется получить решение дифференциального уравнения (7.2) заменяют конечной последовательностью дискретных x_0, x_1, $x_2, ..., x_n$, называемых узлами (узлами сетки). Величина $h = x_i - x_{i-1}$ – расстояние между соседними узлами – называется шагом интегрирования (шагом сетки).

Функция дискретного аргумента $y[x_i]$, определенная только в узлах сетки, называется сеточной функцией.

Численные приближенные методы делятся на два класса:

1) **одношаговые;**
2) **многошаговые.**

7.2.2 Численные методы

Одношаговые методы действуют по принципу:

$$y_{i+1} = F\left(y_i\right), \qquad (7.9)$$

т. е. для расчета следующего значения решения y_{i+1} в точке i+1 достаточно знать только одно текущее значение y_i в точке i (**методы Эйлера, Рунге - Кутта**, Кутта - Мерсона, Фельберга и др.).

Многошаговые методы действуют по принципу:

$$y_{i+1} = F\left(y_{i-k}, y_{i-k+1}, \ldots, y_{i-1}, y_i\right), \qquad (7.10)$$

т. е. для расчета следующего значения решения y_{i+1} используется k+1 значений решения y_i, вычисленных на предыдущих шагах. К многошаговым относятся методы Адамса — Мултона, Адамса - Башфорта, Милна, Гира, прогноза-коррекции и т. д.

7.3 Метод изоклин

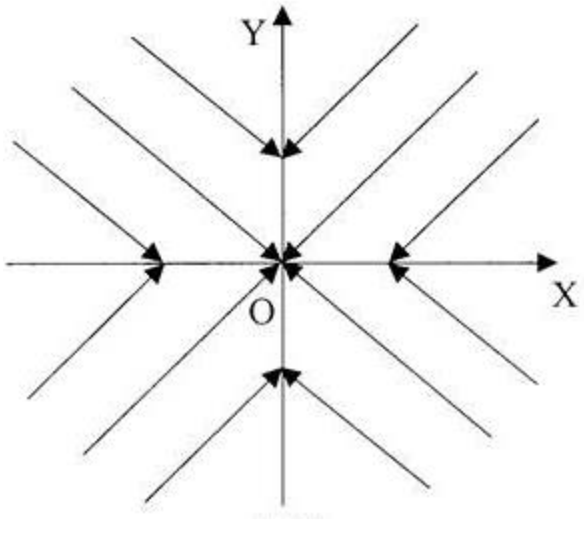
Метод изоклин – это метод графического решения дифференциального уравнения. Семейство изоклин дифференциального уравнения (7.2) определяется уравнением:

$$f(x, y) = C, \qquad (7.11)$$

где C – параметр.

Метод изоклин заключается в построении семейства изоклин с нанесенными на них отрезками касательных.

Множество отрезков касательных образует поле направлений касательных интегральных кривых. Главное соединение касательных дает семейство интегральных кривых.



7.3 Метод изоклин

Рассмотрим решение методом изоклин дифференциального уравнения:

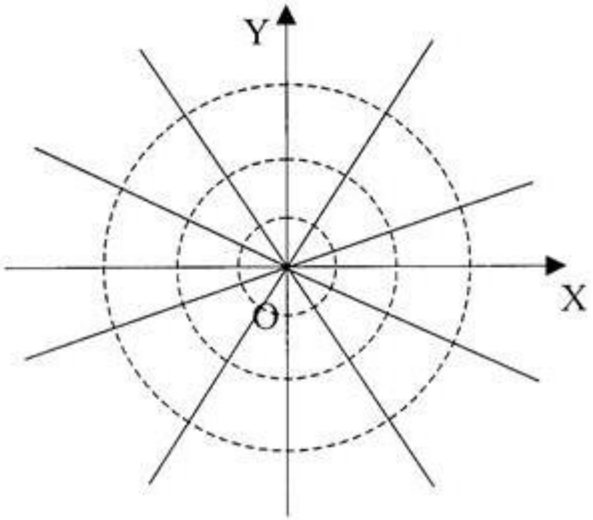
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Уравнение изоклины (-*x*/*y*) = *k*. В данном случае уравнение изоклины совпадает с уравнением нормали *y* = (-1/*k*)*x*. Запишем несколько уравнений изоклин для фиксированных угловых коэффициентов касательных, если

$$k = \pm\infty \;\Rightarrow\; y = 0$$

$$k = \pm 1 \;\Rightarrow\; y = \pm x$$

$$k = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{x} = 0$$



Поле направлений касательных дает семейство интегральных кривых в виде окружностей.

7.4 Метод последовательных приближений

Метод итераций относится к классу аналитических методов. Дифференциальное уравнение (7.2) преобразуется в интегральное уравнение с учетом начального условия (7.3):

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, y(x)\right) dx \qquad (7.12)$$

Действительно, для $x = x_0$ имеем

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f\left(x, y(x_0)\right) dx = y_0$$

Интегральное уравнение (7.12) позволяет использовать метод последовательных приближений (итераций). Пусть $y(x) = y_0$ является начальным приближением. Используя (7.12), получим первое приближение (итерацию) искомой функции $y(x)$:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, y_0\right) dx \qquad (7.13)$$

7.4 Метод последовательных приближений

Интеграл, стоящий в правой части (7.13), содержит только переменную x. После нахождения этого интеграла будет получено аналитическое выражение приближения $y_1(x)$ как функции переменной x. Далее заменим в правой части уравнения (7.12) $y(x)$ найденным значением $y_1(x)$ и получим второе приближение (итерацию):

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, y_1(x)\right)dx \qquad (7.14)$$

и т.д. В общем случае итерационная формула имеет вид

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, y_{n-1}(x)\right)dx, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (7.15)$$

Итерационный процесс по формуле (7.15) дает последовательность функций

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x) \qquad (7.16)$$

Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока модуль разности значений функций на $(k-1)$-й и k-й итерациях станет не больше заданной точности ε :

$$\left|y_k(x) - y_{k-1}(x)\right| \le \varepsilon$$

7.5 Одношаговые численные методы. Метод Эйлера.

7.5.1 Одношаговые методы

В основе одношаговых методов лежит следующая идея: искомое решение y_i дифференциального уравнения в окрестности текущей точки $x = x_i$ можно представить в виде ряда Тейлора.

Учитывая, что $y(x_i) = y_i$, получим:

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{y_i''}{2!} h^2 + \frac{y_i'''}{3!} h^3 + \ldots \qquad (7.17)$$

Далее производится усечение ряда Тейлора. Количество оставшихся членов ряда определяет порядок численного метода и, соответственно, его точность.

При этом операция вычисления производных y', y'', y''', ..., $y^{(k)}$ заменяется последовательностью простейших алгебраических операций над значениями функции $f(x, y)$ в нескольких точках интервала $[x_i, x_i + h]$.

Таким образом, исходная дифференциальная задача заменяется конечно-разностной. Численный метод задает порядок действий (вычислительную схему) для перехода от уже найденного значения решения y_i (или начального) к следующему y_{i+1}. Разностная вычислительная схема строится на основе рекуррентных соотношений.

Численные методы позволяют найти частное решение дифференциального уравнения.

7.5.2 Метод Эйлера

Метод Эйлера состоит в приближенной замене производной в уравнении $y' = f(x, y)$ ее разностным аналогом. Тогда дифференциальное уравнение можно записать в виде:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = f\left(x_i, y_i\right) \qquad (7.18)$$

Расчетная формула метода Эйлера имеет следующий вид:

$$\boxed{\begin{aligned} & y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i, y_i\right) \\ & x_{i+1} = x_i + h, \qquad \left(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1\right) \end{aligned}} \qquad (7.19)$$

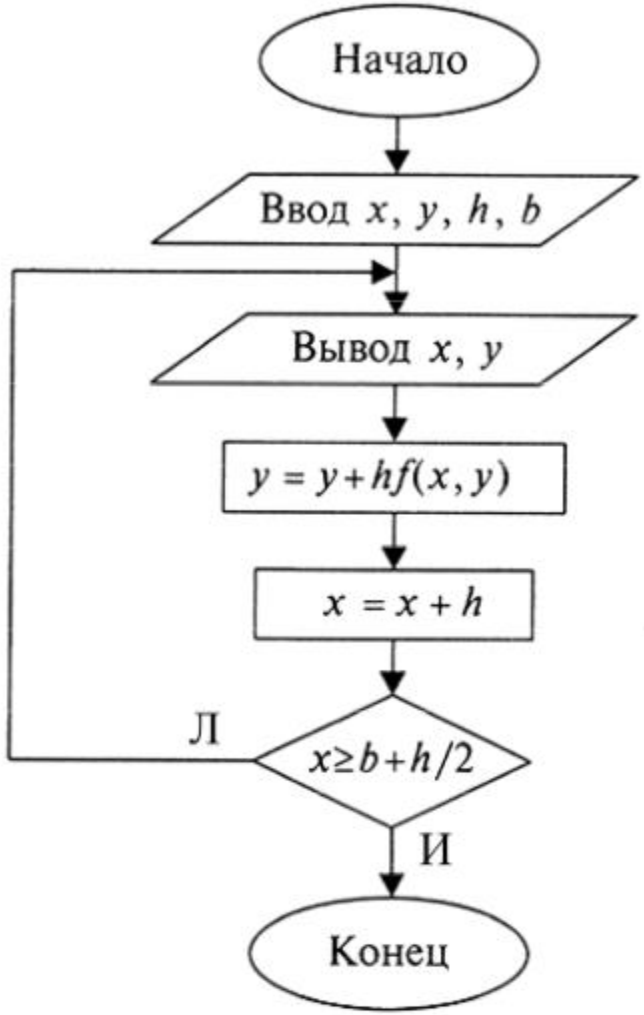
Результатом численного решения задачи Коши будет таблица значений:

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
y	y_0	y_1	y_2	...	y_n

Локальная погрешность метода Эйлера, которая присутствует на каждом шаге, определяется разностью между точным значением функции и соответствующим значением касательной пропорциональна h^2.

7.5.2 Метод Эйлера

Схема алгоритма метода Эйлера:



7.6 Решения дифференциальных уравнений в Matlab.

7.6.1 Аналитическое решение дифференциальных уравнений в Matlab

Найдем аналитическое решение задачи Коши для дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = x^3 - 2y \qquad (7.20)$$

$$y(0) = 0$$

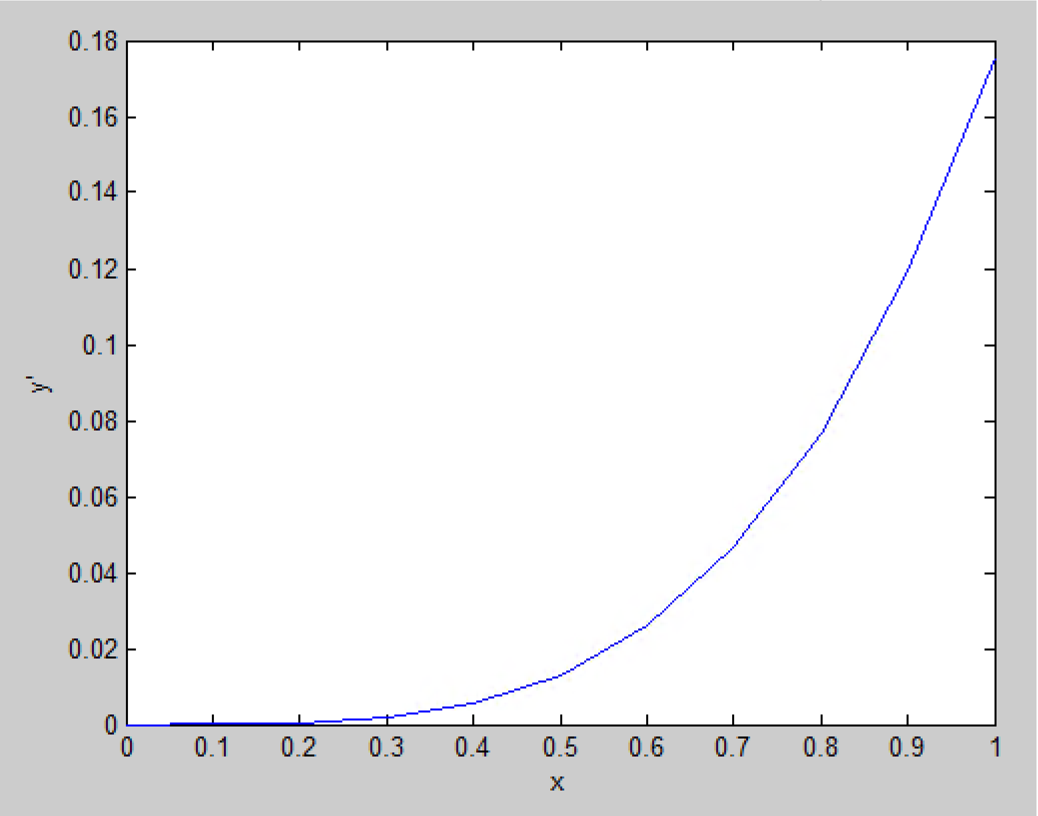
```
clc;
dsolve('Dy = x^3 - 2*y','x') % Определяем аналитическое
                              % решение дифференциального уравнения
%Определяем частное решение диф.ур. при y(0) = 0 (решение задачи Коши)
dsolve('Dy = x^3 - 2*y','y(0) = 0','x')
```

Command Window

```
ans =

(3*x)/4 - (3*x^2)/4 + x^3/2 + C4*exp(-2*x) - 3/8


ans =

(3*x)/4 + (3*exp(-2*x))/8 - (3*x^2)/4 + x^3/2 - 3/8
```

7.6.2 Аналитическое решение задачи Коши для (7.20) на интервале [0,1] по *x*

```
clc;
dsolve('Dy = x^3 - 2*y','x'); % Определяем аналитическое
                             % решение дифференциального уравнения
%Определяем частное решение диф.ур. при y(0) = 0 (решение задачи Коши)
FDY = dsolve('Dy = x^3 - 2*y','y(0) = 0','x');
FDY
v = symvar(FDY); % получаем список переменых
dya = @(X) double(subs(FDY,v,X)); % создаем функцию - аналитического решения

% Решаем на интервале [0,1] по x
x = 0:0.1:1;
dya_x = dya(x);
plot(x,dya_x);
```



7.6.3 Решение задачи Коши для (7.20) на интервале [0,1] по *x* методом Эйлера

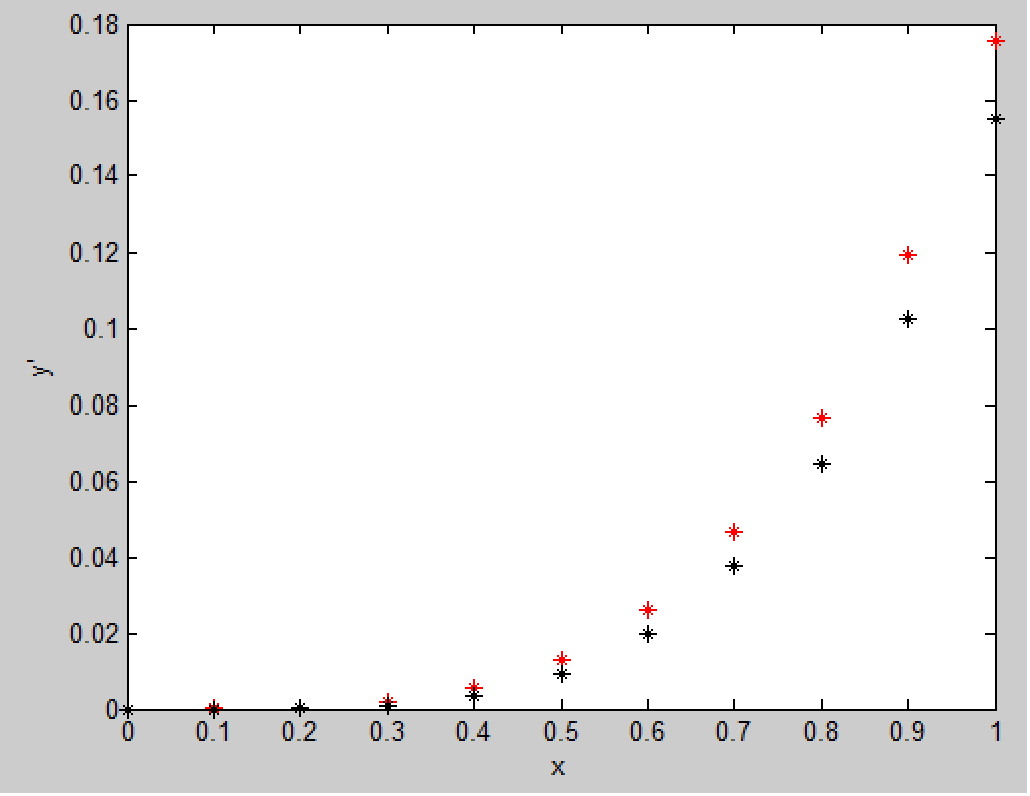
```
clc;
dsolve('Dy = x^3 - 2*y','x'); % Определяем аналитическое
                             % решение дифференциального уравнения
%Определяем частное решение диф.ур. при y(0) = 0 (решение задачи Коши)
FDY = dsolve('Dy = x^3 - 2*y','y(0) = 0','x');
FDY

v = symvar(FDY); % получаем список переменых
dya = @(X) double(subs(FDY,v,X)); % создаем функцию - аналитического решения

FY = sym('x^3 - 2*y'); %%правая часть диф.ур.
v2 = symvar(FY); % получаем список переменых
f = @(X,Y) double(subs(FY,v2,{X,Y})); % создаем функцию - аналитического решения

% Решаем на интервале [0,1] по x
x = 0:0.1:1;
dya_x = dya(x);
%plot(x,dya_x);

%Решаем методом Эйлера
y0 = 0; % начальные условия

dye_x = [];
dye_x(1) = y0;
n = length(x);
h = x(2) - x(1);
for i=1:n-1
    dye_x(i+1) = dye_x(i) + h*f(x(i),dye_x(i));
end
plot(x,dya_x,'r*',x,dye_x,'k*');

```

7.6.3 Решение задачи Коши для (7.20) на интервале [0,1] по *x* методом Эйлера

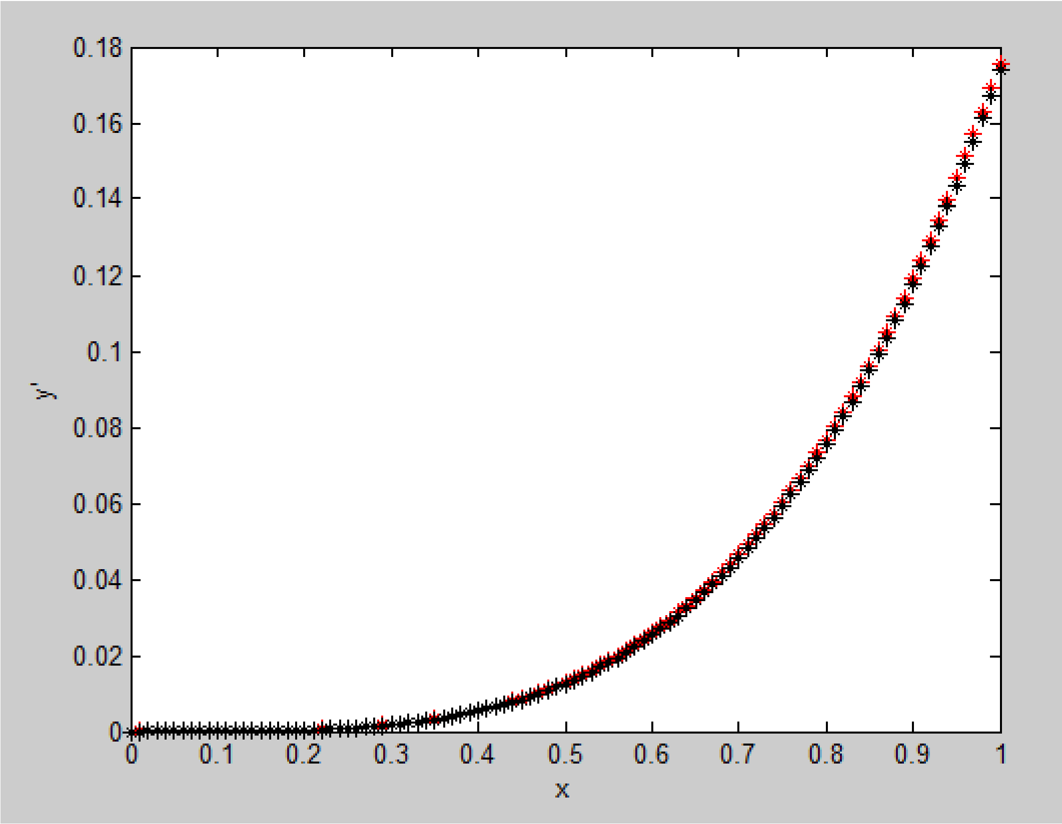
```
%% Определяем СКО
delta = [];
sko = 0;
for i=1:n
    delta(i) = dya_x(i) - dye_x(i);
    sko = sko + (delta(i))^2;
end
sko = sqrt(sko/(n));
sko = 100*sko/(max(dya_x) - min(dya_x))
```

Command Window

```
FDY =

(3*x)/4 + (3*exp(-2*x))/8 - (3*x^2)/4 +


sko =

    5.4104
```



7.6.3 Решение задачи Коши для (7.20) на интервале [0,1] при уменьшении шага в 10 раз



Command Window

```
sko =

    0.4939
```