ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
ЛЕКЦИЯ №5
«Теория численного интегрирования»

Отделение ядерно-топливного цикла

Лектор:
Зав. каф. - руководитель ОЯТЦ ИЯТШ
Горюнов А.Г.

2020

План лекции

5.1 Задача численного интегрирования.

5.2 Квадратурные формулы прямоугольников.

5.3 Квадратурная формула трапеций.

5.4 Квадратурная формула Симпсона.

5.5 Квадратурные формулы интерполяционного типа.

5.6 Численное и символьное интегрирование в Matlab.

Информация по курсу:

https://portal.tpu.ru/SHARED/a/ALEX1479/study/Matmod/Tab

5.1 Задача численного интегрирования

Задача численного интегрирования заключается в вычислении определенного интеграла заданной функции $f(x)$:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{5.1}$$

Что мы хотим получить от численного метода интегрирования? Желательно, чтобы численный метод обладал следующими характеристиками:

– Универсальность метода: функция f(x) может задаваться в виде «черного ящика» (есть только входные и выходные значения);

– Экономичность метода: количестве вычислений по возможности должно быть сведено к минимуму;

– Обусловленность метода: неустранимые погрешности Δf в значениях приближенно заданной функции $f(x)$ не должны приводить к значительной итоговой ошибке ΔI.

5.1.1 Приложения численного интегрирования

Численное интегрирование, как правило, применяется в следующих случаях:

– интегрирования функций, известных только в некоторых точках (узлах), например, полученных в результате измерений и экспериментальных исследований;

– интегрирования сложных выражений, не имеющих элементарных первообразных, либо имеющих слишком громоздкие выражения для них;

– построения методов численного решения уравнений в обыкновенных и частных производных (методы конечных элементов, интегро-интерполяционные методы).

5.2 Квадратурные формулы прямоугольников

5.2.1 Простейшие квадратурные формулы

Как правило для вычисления значения определенного интеграла применяют специальные вычислительные методы. Наиболее широко используют на практике квадратурные формулы – приближенные равенства вида:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N} A_i f\left(\overline{x}_i\right) \tag{5.2}$$

В выражение (5.2) $\overline{x}_i$ – некоторые точки из отрезка [*a*, *b*] – узлы квадратурной формулы; A_i – числовые коэффициенты, называемые весами квадратурной формулы; $N \geq 0$ – целое число.

Сумма $\sum_{i=0}^{N} A_i f\left(\overline{x}_i\right)$, которая принимается за приближенное значение интеграла, называется квадратурной формулой. Величина $R = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{N} A_i f\left(\overline{x}_i\right)$ называется **погрешностью** (или **остаточным членом**) квадратурной формулы.

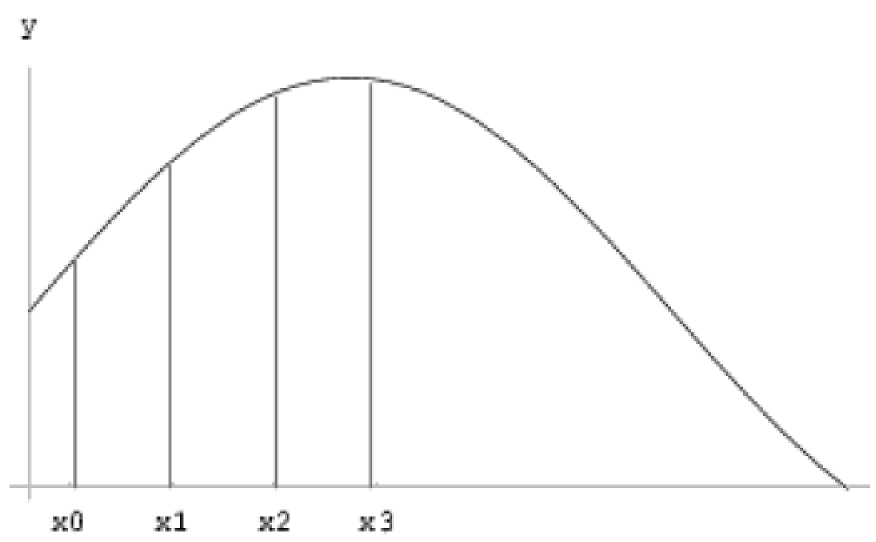
5.2.1 Простейшие квадратурные формулы

Разобьем отрезок $[a, b]$ на элементарные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Интеграл I разобьется при этом на сумму элементарных интегралов:

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i, \tag{5.3}$$

где $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$, что соответствует разбиению исходной криволинейной трапеции на сумму площадей элементарных криволинейных трапеций.

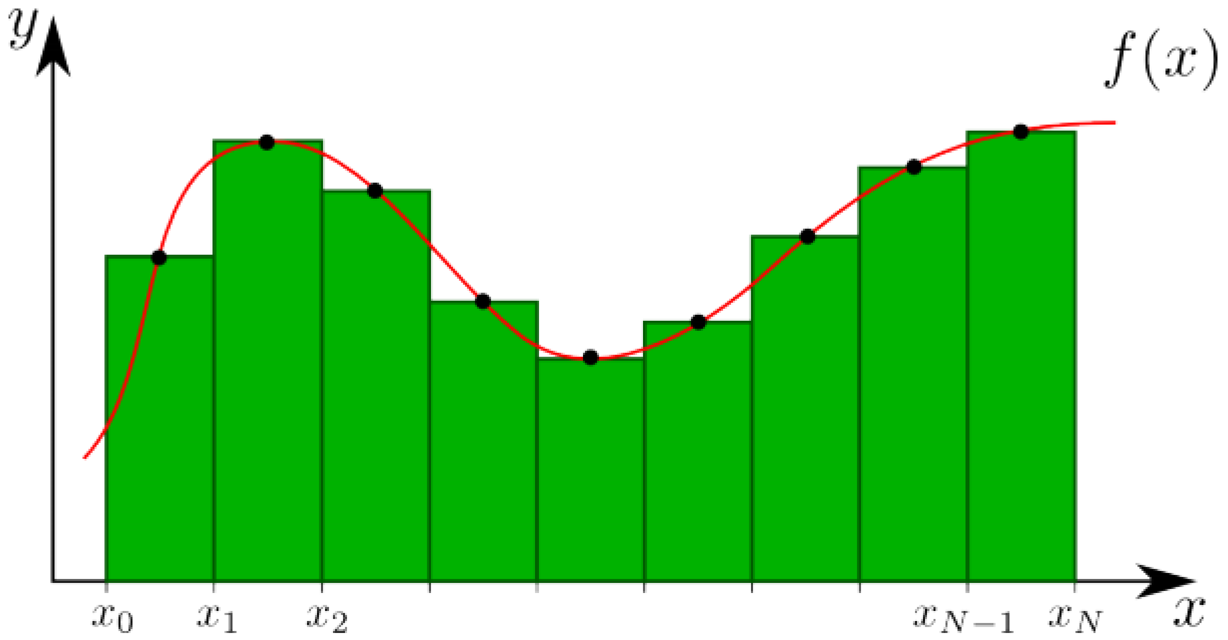


5.2.2 Формула прямоугольников

Введем обозначения: $f_i = f(x_i)$, $f_{i\text{-}1/2} = f(x_{i\text{-}1/2})$, где $x_{i\text{-}1/2} = (x_{i\text{-}1} + x_i)/2$ – середина элементарного отрезка. Шаг $x_i - x_{i\text{-}1}$ будем считать постоянным.

Заменим приближенно площадь элементарной криволинейной трапеции площадью прямоугольника, основанием которого является отрезок $[x_{i\text{-}1}, x_i]$, а высота равна значению $f_{i\text{-}1/2}$, $N_{i\text{-}1/2}$ – точка с координатами $(x_{i\text{-}1/2}, f_{i\text{-}1/2})$. В итоге приходим к **элементарной квадратурной формуле прямоугольников**:

$$I_i \approx h \cdot f_{i-1/2} \qquad (5.4)$$



5.2.2 Формула прямоугольников

Из выражения (5.4) получаем **составную квадратурную формулу прямоугольников**:

$$I \approx I_{\text{пр}}^{h} = h\left(f_{1/2} + f_{3/2} + \ldots + f_{n-1/2}\right) = h\sum_{i=1}^{n} f_{i-1/2} \qquad (5.5)$$

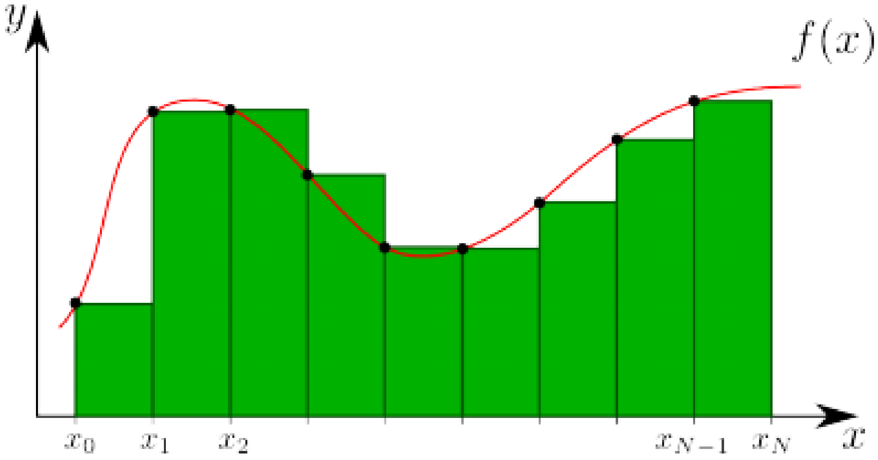
Выбор в качестве значения функции средней точки интервала не принципиален, можно взять, например, левый или правый конец интервала.

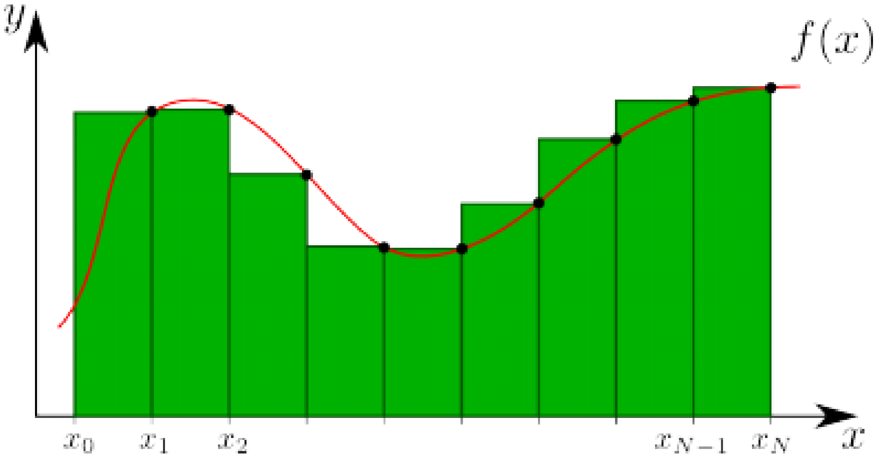
$$I \approx h\sum_{i=0}^{n} f_i, \qquad (5.6)$$

$$I \approx h\sum_{i=1}^{n} f_i, \qquad (5.7)$$

Выражения (5.6) и (5.7) называются соответственно составными квадратурными формулами **левых** и **правых** прямоугольников.

5.2.2 Формула прямоугольников





5.3 Квадратурная формула трапеций

Соединив отрезком точки $N_{i-1}(x_{i-1}, f_{i-1})$ и $N_i(x_i, f_i)$ на графике функции $y = f(x)$, получим трапецию. Заменим теперь приближенно площадь элементарной криволинейной трапеции площадью построенной фигуры. Тогда получим элементарную квадратурную формулу трапеций:

$$I_i \approx \frac{h}{2}\left(f_{i-1} + f_i \right) \tag{5.8}$$

Из выражения (5.8) выводим **составную квадратурную формулу трапеций**:

$$I \approx I_{\text{тр}}^{h} = h\left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n} f_i \right) \tag{5.9}$$

5.4 Квадратурная формула Симпсона.

Если площадь элементарной криволинейной трапеции заменить площадью фигуры, расположенной под параболой, проходящей через точки N_{i-1}, $N_{i-1/2}$ и N_i, то получим приближенное равенство

$$I_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_2(x)\,dx$$

Здесь $P_2(x)$ – интерполяционный многочлен второй степени с узлами x_{i-1}, $x_{i-1/2}$, x_i.

$$P_2(x) = f_{i-1/2} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h}\left(x - x_{i-1/2}\right) + \frac{f_i - 2f_{i-1/2} + f_{i-1}}{h^2/2}\left(x - x_{i-1/2}\right)^2$$

Интегрирование $P_2(x)$ приводит к равенству:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} P_2(x)\,dx = \frac{h}{6}\left(f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i\right)$$

В результате получаем **элементарную квадратичную формулу Симпсона**:

$$I_i \approx \frac{h}{6}\left(f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i\right) \qquad (5.10)$$

5.4 Квадратурная формула Симпсона.

Применяя формулу (5.10) на каждом элементарном отрезке, выводим **составную квадратурную формулу Симпсона**:

$$I \approx I_{\text{C}}^{h} = \frac{h}{6}\left(f_0 + f_n + 4\sum_{i=1}^{n} f_{i-1/2} + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i \right) \qquad (5.11)$$

В случае, когда число элементарных отрезков разбиения четно ($n = 2m$), в формуле Симпсона можно использовать лишь узлы с целыми индексами:

$$I \approx I_{\text{C}}^{h} = \frac{h}{3}\left(f_0 + f_{2m} + 4\sum_{i=1}^{m} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} f_{2i} \right)$$

5.4.1 Оценка погрешности

Если функция f дважды непрерывно дифференцируема на отрезке [a, b], то для составных квадратурных формул прямоугольников и трапеций справедливы следующие оценки погрешности:

$$\left|I - I_{\text{пр}}^{h}\right| \le \frac{M_2 \left(b-a\right)}{24} h^2 \qquad (5.12)$$

$$\left|I - I_{\text{тр}}^{h}\right| \le \frac{M_2 \left(b-a\right)}{24} h^2 \qquad (5.13)$$

Если функция f имеет на отрезке [a, b] непрерывную производную 4-го порядка $f^{(4)}$, то для формулы Симпсона справедлива оценка погрешности:

$$\left|I - I_{\text{С}}^{h}\right| \le \frac{M_4 \left(b-a\right)}{2880} h^4 \qquad (5.14)$$

5.5 Квадратурные формулы интерполяционного типа

Для приближенного вычисления определенных интегралов часто используется следующий естественный для методов приближения функций прием – подинтегральную функцию *f* аппроксимируют на отрезке [*a, b*] некоторой функцией *g*, интеграл от которой вычисляется аналитически, а затем полагают:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx \tag{5.15}$$

Точность формулы (5.15) можно повышать за счет усложнения метода глобальной аппроксимации, что весьма затруднительно и не всегда возможно.

Как правило, используется другой подход. Интеграл *I* представляют в виде суммы интегралов по элементарным отрезкам [x_{i-1}, x_i]. На каждом таком *i*-м отрезке функцию $f(x)$ аппроксимируют некоторой легко интегрируемой функцией $g_i(x)$. В результате получается составная формула:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx$$

5.5 Квадратурные формулы интерполяционного типа

Аппроксимируем функцию $f(x)$ на i-м элементарном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ интерполяционным многочленом $P_{m,i}(x)$ с узлами интерполяции

$$z_j^{(i)} = x_{i-1/2} + t_j h_i / 2, \quad j = 0,1,2,\ldots,m; \;\; t_0, t_1, \ldots, t_m \in [-1,1],$$

воспользовавшись записью интерполяционного многочлена в форме Лагранжа. Вычислив интеграл от $P_{m,i}$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ и просуммировав получим следующую составную квадратурную формулу интерполяционного типа:

$$I \approx I^h = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_{m,i}(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} h_i \sum_{j=0}^{m} a_j f\left(x_{i-1/2} + t_j h_i / 2\right)$$

$$a_j = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{m} \frac{t - t_k}{t_j - t_k}\,dt \qquad (5.16)$$

Квадратурные формулы интерполяционного типа, построенные на основе равноотстоящих значений $t_0, t_1, \ldots, t_m$, называются формулами Ньютона-Котеса.

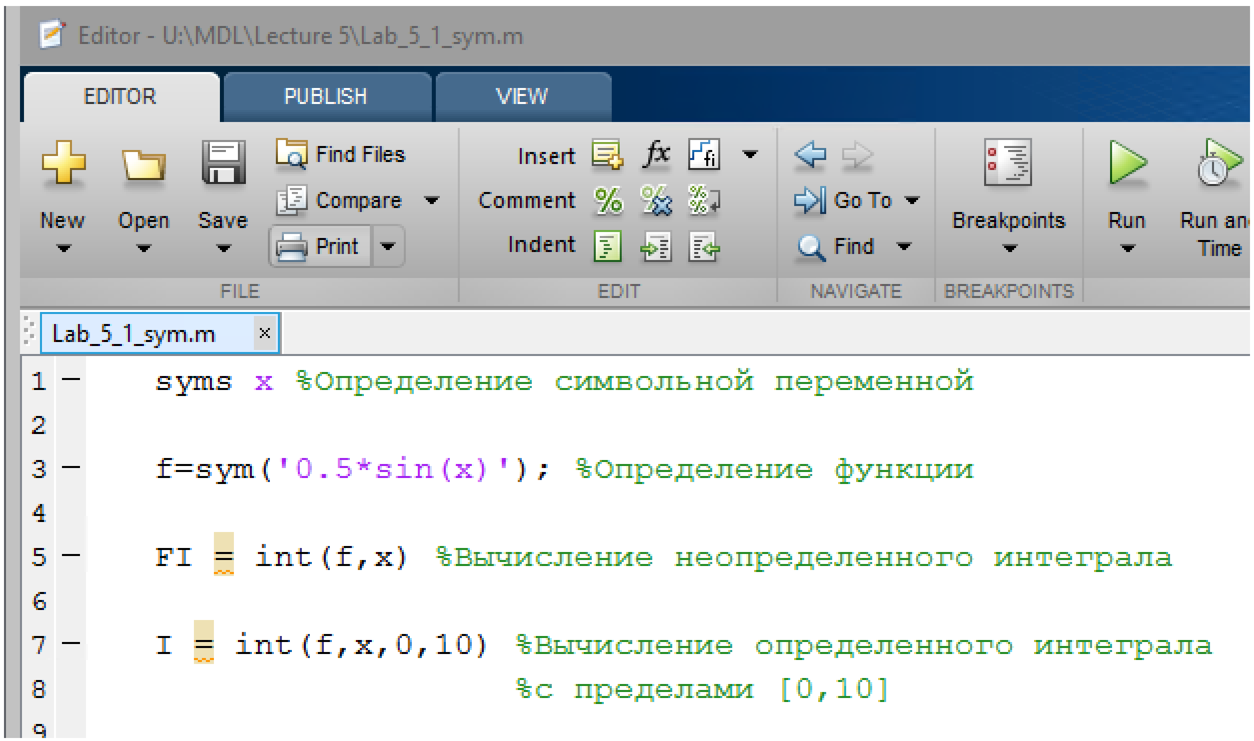
Рассмотренные выше простейшие квадратурные формулы являются формулами интерполяционного типа и относятся к классу формул Ньютона-Котеса. Формулы прямоугольников (5.5), трапеций (5.9) и Симпсона (5.11) отвечают использованию интерполяционных многочленов соответственно нулевой, первой и второй степени.

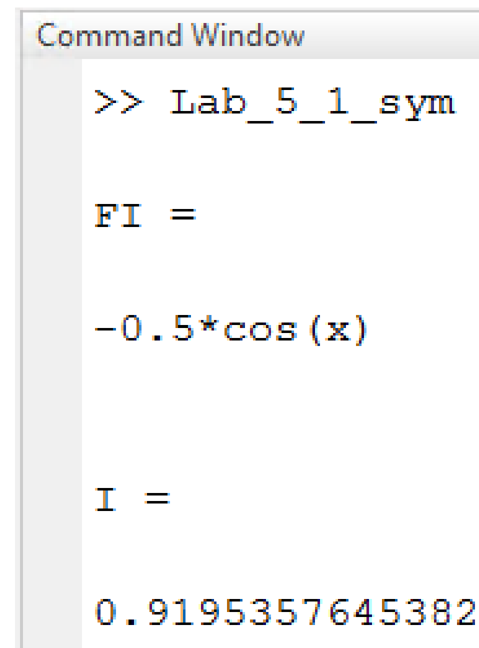
5.6 Численное и символьное интегрирование в Matlab.

5.6.1 Символьное интегрирование в Matlab

Рассмотрим символьное интегрирование на примере функции:

$$y = 0.5 \cdot \sin(x), \quad \{x \text{ от } 0 \text{ до } 10, \text{ шаг } 1\} \tag{5.17}$$





5.6.2 Символьные вычисления в Matlab

Command Window

```
>> syms x y;
>> f = (x+2)*(x+3) + (y+5);
>> f = expand(f)

f =

x^2 + 5*x + y + 11
```

Command Window

```
>> syms x y;
>> f = (x*y^3 + 2*y + x^4*y)/(y);
>> f = simplify(f)

f =

x^4 + x*y^2 + 2
```

Command Window

```
>> syms x;
>> f = (x+4)^4 + x^2 + (x-2)^3;
>> f = factor(f)

f =

x^4 + 17*x^3 + 91*x^2 + 268*x + 248
```

5.6.3 Численное интегрирование методом прямоугольников

```
syms xs %Определение символьной переменной
f=sym('0.5*sin(xs)');%Определение функции
Is = int(f,xs,0,10); %Вычисление определенного интеграла
                     %с пределами [0,10];
I = double(Is)       %Преобразуем в скалярную переменную
                     %Получаем истинное значение интеграла

% Создаем исходную таблицу для численного интегрирования
x = 0:1:10;
y = 0.5*sin(x);
% Рассчитываем интрграл методом прямоугольников
h = x(2)-x(1);
nbuf = size(x); n = nbuf(2);
Ipr = 0;
for i=1:n
    Ipr = Ipr + h * y(i);
end
Ipr % Выводим полученное значение численного интегрирования
Epr = 100*abs((Ipr - I)/I) % Расчет относительной ошибки
                           % интегрирования методом прямоугольников
```

Command Window

```
>> Lab_5_1

I =

    0.9195


Ipr =

    0.7056


Epr =

   23.2663
```

5.6.3 Численное интегрирование методом трапеций

```
syms xs %Определение символьной переменной
f=sym('0.5*sin(xs)');%Определение функции
Is = int(f,xs,0,10); %Вычисление определенного интеграла
                     %с пределами [0,10];
I = double(Is)       %Преобразуем в скалярную переменную
                     %Получаем истинное значение интеграла

% Создаем исходную таблицу для численного интегрирования
x = 0:1:10;
y = 0.5*sin(x);
% Рассчитываем интграл методом трапеций
h = x(2)-x(1);
nbuf = size(x); n = nbuf(2);
Itr = 0;
for i=2:n
    Itr = Itr + (h/2) * (y(i-1) + y(i));
end
Itr % Выводим полученное значение численного интегрирования
trapz(y) % Расчет встроенной ункцией trapz()
Etr = 100*abs((Itr - I)/I) % Расчет относительной ошибки
                           % интегрирования методом трапеций
```

Command Window

```
>> Lab_5_2

I =

    0.9195


Itr =

    0.8416


ans =

    0.8416


Etr =

    8.4756
```

5.6.4 Численное интегрирование методом Симпсона

```
syms xs %Определение символьной переменной
f=sym('0.5*sin(xs)');%Определение функции
Is = int(f,xs,0,10); %Вычисление определенного интеграла
                     %с пределами [0,10];
I = double(Is)       %Преобразуем в скалярную переменную

% Создаем исходную таблицу для численного интегрирования
x = 0:1:10;
y = 0.5*sin(x);
% Рассчитываем интграл методом Симпсона
h = x(2)-x(1);
nbuf = size(x); n = nbuf(2);
a = x(1);
b = x(n);
N = ((b - a)/h) + 1;

Is=0;
for i=2:N-1
    if i-2*ceil(i/2)==0
        k=4;
    else
        k=2;
    end
    Is=Is+k*y(i);
end;
Is =(y(1)+Is+y(N))*h/3;
Is
Es = 100*abs((Is - I)/I) % Расчет относительной ошибки
                         % интегрирования методом Симпсона
```

Command Window

```
>> Lab_5_4

I =

    0.9195


Is =

    0.9253


Es =

    0.6294
```