

**А.К. Томилин, Г.А. Байзакова, О.А. Береговая, Е.В. Прокопенко**

**ВИБРАЦИИ КONTИНУАЛЬНЫХ  
ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

2011 г.

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник  
Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, академик  
Академии инженерных наук им. А.М. Прохорова

*Е.И. Нефедов*

Доктор технических наук, профессор кафедры механики Карагандинского го-  
сударственного технического университета, академик Международной акаде-  
мии инженерных наук

*Ж.Б. Бакиров*

**Томилин А.К., Байзакова Г.А., Береговая О.А., Прокопенко Е.В.**

Вибрации континуальных электромеханических систем. - 139 с.: ил.

Изучены поперечные колебания континуальных электропроводных систем (струна, стержень, пружина) с учетом электромагнитного воздействия. Показано, что электромагнитным способом можно управлять частотами колебаний, факторами затухания, амплитудными формами, а так же изменять нелинейные и параметрические свойства указанных систем. Обоснована возможность электромагнитного управления продольными колебаниями стержневых систем.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов, инженеров, занимающихся проблемами теории колебаний и ее приложениями.

Объем - 139 с., иллюстраций - 52, использованных источников – 33.

© А.К. Томилин, Г.А. Байзакова, О.А. Береговая, Е.В. Прокопенко

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие к электронному изданию.....	5
Предисловие.....	5
<b>1 Колебания электропроводной струны в магнитном поле</b>	
1.1 Собственные колебания струны в однородном стационарном магнитном поле.....	6
1.2 Анализ линейной задачи.....	8
1.3 Электромагнитное возбуждение колебаний струны.....	21
1.4 Колебания струны в неоднородном магнитном поле.....	24
1.5 Колебания струны в нестационарном магнитном поле.....	29
<b>2 Поперечные колебания электропроводного стержня в магнитном поле</b>	
2.1 Поперечные колебания однородного призматического стержня в магнитном поле.....	34
2.2 Различные случаи граничных условий.....	38
2.3 Электромагнитное возбуждение поперечных колебаний стержня.....	41
2.4 Колебания стержня в неоднородном магнитном поле.....	42
2.5 Колебания стержня в нестационарном магнитном поле.....	45
<b>3 Электромагнитное управление колебаниями струны и стержня</b>	
3.1 Управление колебаниями при помощи реактивных электрических параметров.....	47
3.2 Электромагнитный способ частотного анализа.....	58
3.3 Активное электромагнитное гашение собственных колебаний одномерных проводящих систем.....	61
3.4 Физическая линеаризация колебаний.....	63
<b>4 Электромагнитное управление поперечными колебаниями стержня при кинематическом возбуждении</b>	
4.1 Постановка задачи.....	65
4.2 Анализ краевой задачи при однородных граничных условиях.....	69
4.3 Случай произвольного активного участка.....	73
4.4 Колебания стержня в магнитном поле при одновременном кинематическом и силовом возбуждении.....	75
<b>5 Колебания электропроводной пружины в магнитном поле</b>	
5.1 Собственные колебания электропроводной пружины в однородном стационарном магнитном поле.....	78
5.2 Влияние емкостного параметра.....	81
5.3 Влияние индуктивного параметра.....	84
5.4 Случай одновременного влияния емкостного и индуктивного параметров.....	87

5.5	Случай неоднородного стационарного магнитного поля.....	88
5.6	Электромагнитное управление колебаниями груза на пружине.....	94
<b>6</b>	<b>Продольные колебания электропроводного стержня в магнитном поле</b>	
6.1	Обобщенный закон электромагнитного взаимодействия.....	99
6.2	Собственные продольные колебания электропроводного стержня в магнитном поле.....	106
6.3	Определение оптимальных размеров активного участка.....	115
6.4	Вынужденные продольные колебания электропроводного стержня в магнитном поле.....	117
6.5	Эксперимент по изучению особенностей продольных колебаний стержня в магнитном поле.....	121
6.6	Продольные колебания составного стержня в магнитном поле.....	126
6.7	Электромагнитный возбудитель продольных колебаний.....	129
	Литература.....	136

## Предисловие к электронному изданию

Настоящее электронное издание представляет собой дополненную и переработанную версию монографии тех же авторов «Колебания континуальных электромеханических систем», изданной в 2010 году в издательстве ВКГТУ, г. Усть-Каменогорск.

Адрес для контакта с авторами: [aktomilin@gmail.com](mailto:aktomilin@gmail.com)

### Предисловие

В 2004 году вышла монография Томилина А.К. «Колебания электромеханических систем с распределенными параметрами» [1], в ней поставлены и исследованы новые модельные задачи управления поперечными колебаниями электропроводных систем при помощи электромагнитного воздействия. Показано, что электромагнитным способом можно избирательно управлять частотами и формами колебаний, изменять нелинейные и параметрические свойства систем. Предложен метод электромагнитной вибродиагностики и способ активного электромагнитного гашения колебаний электропроводных систем.

Упругие системы с распределенными параметрами весьма многочисленны и разнообразны, к ним можно отнести практически все конструкционные технические элементы машин, приборов и аппаратов. Поэтому возникает много задач, требующих исследования вибрационных процессов в континуальных системах. В предлагаемой работе идеи, содержащиеся в названной выше монографии, развиваются применительно к новым задачам. Изучены колебания электропроводного стержня в магнитном поле с учетом кинематического возбуждения [2-4]. Сформулированы и решены новые задачи о поперечных колебаниях электропроводных систем с учетом динамических свойств [5-7]. Рассмотрены задачи о колебаниях цилиндрической электропроводной пружины в магнитном поле [8-9]. На основании новых представлений об электромагнитном взаимодействии сформулированы задачи электромагнитного управления продольными колебаниями стержневых систем [10-13].

Несмотря на то, что все рассмотренные задачи являются модельными, полученные результаты имеют определенные технические приложения. В некоторых случаях колебания являются основой технологических процессов и ими нужно управлять, а в других они являются нежелательными и требуют контроля, гашения или вывода из резонансного режима. Во всех случаях можно применять управляющее электромагнитное воздействие, теоретические основы которого развиты в настоящей монографии.

Первые три главы содержат общую теорию колебаний электромеханических систем с распределенными параметрами. При этом основное внимание уделяется механической сути происходящих процессов. Все задачи сводятся к интегродифференциальным уравнениям в частных производных, к которым применяется метод Фурье. Дальнейший анализ производится на основе системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Такой же подход используется и в последних трех главах, где рассмотрены более сложные задачи. Во всех случаях обращается внимание на возможные технические приложения.

# 1 Колебания электропроводной струны в магнитном поле

## 1.1 Собственные колебания струны в однородном стационарном магнитном поле

Рассмотрим собственные поперечные колебания абсолютно гибкой струны длины  $l$ , изготовленной из немагнитного электропроводного материала (диа- или парамагнетика), в стационарном однородном магнитном поле  $\vec{B} = B\vec{y}^0$ , направленном перпендикулярно плоскости колебаний струны [1]. Пусть магнитное поле действует на участке струны длиной  $\Delta z = z_2 - z_1$ , который будем называть активным (рис. 1). Концы струны закреплены и соединены идеальной электрической цепью, экранированной от внешнего магнитного поля.

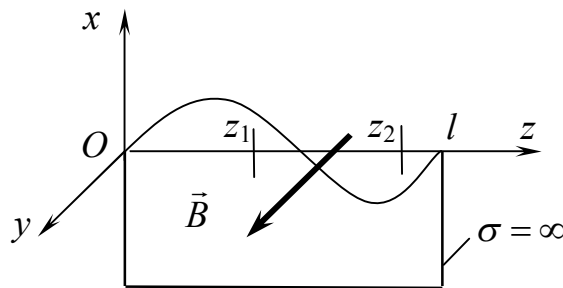


Рис. 1

При вибрациях струны на каждый ее элемент  $dz$  действует сила механического сопротивления, возникающая за счет взаимодействия струны с окружающей средой. Учтем эту силу в рамках линейной гипотезы [14-15]:

$$dF_c = \beta m_0 \frac{\partial u}{\partial t} dz, \quad (1.1.1)$$

где  $\beta$  - коэффициент внешнего демпфирования, зависящий от свойств окружающей среды,  $m_0$  - погонная масса струны (линейная плотность),  $u(z, t)$  - динамическая функция смещений, зависящая от продольной координаты и времени.

Внутренним сопротивлением в динамике струн обычно пренебрегают.

В результате движения проводящей струны в магнитном поле на активном участке создается [16-17] электрическое напряжение:

$$U = B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} dz,$$

и, следовательно, в ней индуцируется ток плотности:

$$j = \frac{\sigma B}{l} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz, \quad (1.1.2)$$

а на каждый элемент  $dz$  активного участка действует поперечная магнитная сила [1], направленная вдоль оси  $Ox$ :

$$dF_M = jABdz = \left( \frac{\sigma \beta^2 A}{l} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz \right) dz, \quad (1.1.3)$$

где  $A$  - площадь поперечного сечения струны.

Известно, что электромагнитные процессы происходят со скоростью света, скорость же механических процессов намного меньше. Поэтому во всех рассмотренных в работе задачах считаем, что электродинамические процессы происходят мгновенно. Иными словами, электродинамические процессы считаются квазистационарными. Эта гипотеза позволяет не рассматривать высокочастотные механические колебания струны и не учитывать ее собственные реактивные параметры (индуктивность и емкость), а, следовательно, не рассматривать процесс электромагнитного излучения.

Сделаем замечание о знаке силы  $\vec{F}_M$ . Пусть для простоты магнитное поле действует по всей длине струны:  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = l$ . Если  $n = 1$ , т.е. рассматривается колебание основного тона, то магнитная сила направлена противоположно скорости движения в любой точке струны. При  $n = 2$  электродвижущие силы, индуцированные на каждой половине струны, взаимно уничтожают друг друга, поэтому результирующий ток равен нулю. Магнитное воздействие в этом случае отсутствует. При  $n = 3$  результирующее напряжение в три раза меньше, чем при  $n = 1$ . Магнитная сила всюду направлена одинаково, поэтому на  $2/3$  длины она является тормозящей, а на  $1/3$  ускоряющей. Таким образом, результирующее электромагнитное воздействие на струну в целом, является демпфирующим. Это означает, что в правой части дифференциального уравнения магнитная сила имеет отрицательный знак, а в левой – положительный. Этот вывод справедлив для любого  $n$  в случае, когда  $\Delta z = l$ . Если  $\Delta z < l$ , то все сказанное тоже справедливо, только под  $n$  понимается количество стоячих волн, укладываемых на активном участке, причем  $n$  в этом случае может быть и не целым числом.

В соответствии с принципом Даламбера составим уравнение движения струны с учетом сил (1.1.1) и (1.1.3):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T_0}{m_0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma \beta^2 A}{m_0 l} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz = 0, \quad (1.1.4)$$

где  $T_0$  - натяжение струны, которое предполагается одинаковым по всей ее длине (гипотеза абсолютно гибкой струны [18]). Именно гипотеза абсолютно

гибкой струны позволяет исключить нелинейные свойства системы, то есть линеаризовать ее. К нелинейным задачам обратимся позднее.

Электромагнитное воздействие на струну определяется последним членом интегро-дифференциального уравнения (1.1.4), изучению именно его свойств и уделено основное внимание в дальнейшем исследовании.

Начальные условия в общем случае можно записать в виде

$$u(z,0) = f_1(z); \quad \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = f_2(z). \quad (1.1.5)$$

Обычно рассматривается струна с закрепленными концами, т. е. при следующих граничных условиях:

$$u(0,t) = 0; \quad u(l,t) = 0. \quad (1.1.6)$$

## 1.2 Анализ линейной задачи

Применим обычную процедуру Фурье [19], представив динамическую функцию смещений в виде бесконечного ряда по собственным амплитудным функциям  $X_n$ :

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(z), \quad (1.2.1)$$

где  $q_n(t)$  - обобщенные координаты системы, механический смысл которых выясним позднее.

Обычно этот метод приводит к системе независимых дифференциальных уравнений, в этом случае координаты называются главными (нормальными), а сам метод называется методом главных координат (МГК) [18]. Как будет показано в дальнейшем, наличие магнитной силы существенно изменяет свойства системы, в частности координаты, введенные в соответствии с (1.2.1), не всегда являются главными. Очевидно, это связано с выбором амплитудных функций  $X_n(z)$ .

После подстановки (1.2.1) в (1.1.4) получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \ddot{q}_n X_n - \frac{T_0}{m_0} \frac{d^2 X_n}{dz^2} q_n + \beta \dot{q}_n X_n + \frac{\sigma \beta^2 A}{m_0 l} \dot{q}_n \int_{z_1}^{z_2} X_n dz \right] = 0. \quad (1.2.2)$$

Для струны с закрепленными концами в отсутствии всех диссипативных процессов собственные амплитудные функции синусоидальны:

$$X_n = \sin \frac{n\pi}{l} z.$$



Эти функции, строго говоря, не точно соответствуют поставленной задаче, поэтому их использование не позволяет свести задачу к главным колебаниям. Вопрос о влиянии электромагнитного воздействия на собственные амплитудные функции и проблема поиска главных амплитудных форм рассмотрена в монографии [1]. Здесь же в качестве первого приближения используем синусоидальные амплитудные функции, поэтому

$$\int_{z_1}^{z_2} X_n dz = \int_{z_1}^{z_2} \left( \sin \frac{n\pi}{l} z \right) dz = \\ = \frac{2l}{n\pi} \sin \frac{n\pi(z_1 + z_2)}{2l} \sin \frac{n\pi(z_2 - z_1)}{2l}.$$

Обозначим

$$\gamma_n = \sin \frac{n\pi(z_1 + z_2)}{2l} \sin \frac{n\pi(z_2 - z_1)}{2l}, \quad (n=1,2,\dots), \quad (1.2.3)$$

тогда (1.2.2) примет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \ddot{q}_n X_n - \frac{T_0}{m_0} \frac{d^2 X_n}{dz^2} q_n + \beta X_n \dot{q}_n + \frac{2\sigma\beta^2 A}{m_0 n\pi} \gamma_n \dot{q}_n \right) = 0. \quad (1.2.4)$$

Принятые собственные амплитудные функции  $X_n$ , как известно, удовлетворяют уравнению:

$$\frac{d^2 X_n}{dz^2} + \frac{p_n^2}{a^2} X_n = 0, \quad (n=1,2,\dots), \quad (1.2.5)$$

где  $p_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{m_0}}$  - собственные частоты,  $a = \sqrt{\frac{T_0}{m_0}}$  - скорость распространения волнового процесса в струне. Поэтому (1.2.4) можно представить в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \ddot{q}_n X_n + p_n^2 q_n X_n + \beta \dot{q}_n X_n + \frac{2\sigma\beta^2 A}{m_0 n\pi} \gamma_n \dot{q}_n \right) = 0. \quad (1.2.6)$$

Умножим уравнение (1.2.6) на  $X_r$  ( $r=1,2,\dots$ ) и проинтегрируем по всей длине струны. В силу ортогональности выбранных собственных амплитудных функций:

$$\int_0^l X_r X_n dz = \begin{cases} l/2; & \text{при } r = n \\ 0; & \text{при } r \neq n \end{cases}$$

получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{4\sigma B^2}{\rho \pi l} \int_{z_1}^{z_2} X_r dz \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \dot{q}_n}{n}, \quad \{r = 1, 2, \dots\}, \quad (1.2.7)$$

где  $\rho = m_0 / A$  - объемная плотность материала струны. Фигурные скобки при записи индексов будем использовать для обозначения систем уравнений.

В магнитном члене, перенесенном в правую часть, интегрирование выполнено в пределах от  $z_1$  до  $z_2$ , так как только в этих пределах действует магнитная сила.

Вводя обозначение

$$\gamma_r = \sin \frac{r\pi(z_1 + z_2)}{2l} \sin \frac{r\pi(z_2 - z_1)}{2l}, \quad (r = 1, 2, \dots),$$

получим

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{8\sigma B^2 \gamma_r}{\rho \pi^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (1.2.8)$$

Таким образом, получилась система взаимосвязанных дифференциальных уравнений, следовательно, введенные обобщенные координаты  $q_n$  не являются главными. Поскольку главные колебания в чистом виде не выделяются, понятия «мода», «форма», «частота», «демпфированная частота» применять для характеристики движения, соответствующего определенному номеру  $r$ , строго говоря, нельзя. Поэтому в дальнейшем будем называть их парциальными.

Введенным обобщенным координатам можно дать определенный механический смысл. Если считать  $X_n$  - безразмерными, то  $q_n$  - имеют размерность и их можно представлять как смещения какой-либо точки струны от положения равновесия. Если же амплитудным функциям приписать размерность длины, то обобщенные координаты будут безразмерными, и их можно трактовать как углы, характеризующие смещение какой-либо точки струны. В качестве этой точки удобно брать первую слева пучность (рис. 2). Обычно будем следовать второму способу выбора обобщенных координат, использование первого способа будет оговариваться специально.

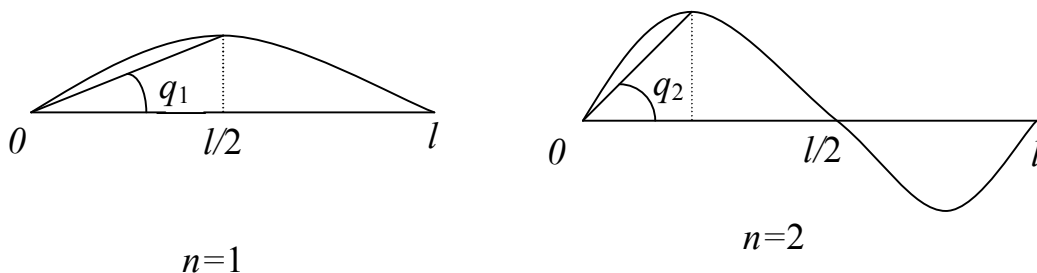


Рис. 2

Из проведенного выше анализа следует, что магнитное воздействие на колебания струны приводит к дополнительной диссипации энергии. Однако, можно выделить группу парциальных колебаний, которые не испытывают электромагнитного воздействия. Из (1.2.3) видно, что при некоторых значениях  $z_1$  и  $z_2$  величина  $\gamma_r$  обращается в нуль. Эти значения определяются из двух соотношений:

$$\frac{r\pi(z_2 - z_1)}{2l} = k\pi, \quad (r = 1, 2, \dots), \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\frac{r\pi(z_1 + z_2)}{2l} = k\pi, \quad (r = 1, 2, \dots), \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

то есть

$$z_2 - z_1 = \frac{2kl}{r}, \quad z_1 + z_2 = \frac{2kl}{r}, \quad (r = 1, 2, \dots), \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Отношение  $l/r$  характеризует длину стоячей волны, соответствующей  $r$ -ому парциальному колебанию. Из первого соотношения вытекает, что

$$\gamma_r = 0,$$

когда на длине активного участка  $\Delta z = z_2 - z_1$  укладывается четное число стоячих волн. При этом посередине активного участка располагается либо узел, либо пучность.

Из второго следует, то же при условии, что на сумме длин  $z_1 + z_2$  укладывается четное число стоячих волн. В этом случае посередине активного участка обязательно располагается узел. Заметим, что при этом соотношение длины активного участка и стоячей волны может быть любым.

Таким образом, электромагнитная сила не воздействует на парциальные колебания струны при следующих условиях:

1) если посередине активного участка располагается узел при любой длине стоячей волны,

2) если посередине активного участка располагается пучность, при условии, что по его длине укладывается четное число стоячих волн.

Эти же выводы подтверждаются соображениями, вытекающими из закона электромагнитной индукции: при выполнении любого из указанных условий площадь контура, образованного струной и замыкающей электрической цепью, остается неизменной, т.е. магнитный поток, пересекающий этот контур, при колебаниях струны остается постоянным.

При произвольных движениях струны, когда присутствуют все возможные парциальные колебания, требуется анализ, учитывающий их взаимодействие. Прежде всего, заметим, что стоящая в правой части уравнений (1.2.8) сумма

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n(t)$  в любой момент времени  $t$  может равняться нулю, так как функ-

ции  $\dot{q}_n(t)$  имеют различные частоты. Поэтому не существует условия, при котором электромагнитное воздействие не проявляется на всех парциальных колебаниях струны одновременно. Однако, изменяя ширину и положение активного участка, можно добиться электромагнитного демпфирования определенных парциальных колебаний, оставляя другие без воздействия со стороны магнитного поля. Электромагнитного демпфирования не испытывает группа парциальных колебаний, для которых  $\gamma_r = 0$ . Колебания, отвечающие этому условию, в дальнейшем будем называть изолированными от электромагнитного воздействия. Поскольку изолированные колебания описываются однородными дифференциальными уравнениями, решениями которых являются простые гармонические функции, то для них термин «мода» можно употреблять в прямом смысле.

В частном случае, когда магнитное поле действует по всей длине струны ( $z_1 = 0, z_2 = l$ ):

$$\gamma_n = \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right); \quad \gamma_r = \sin^2\left(\frac{r\pi}{2}\right).$$

Для четных форм  $\gamma_n = \gamma_r = 0$ , следовательно, уравнения (1.2.8) запишутся в виде:

$$\ddot{q}_r + \beta\dot{q}_r + p_r^2 q_r = 0, \quad \{r = 2, 4, \dots\}.$$

Для нечетных форм  $\gamma_n = \gamma_r = 1$ , поэтому:

$$\ddot{q}_r + \beta\dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{8\sigma B^2}{\rho\pi^2 r} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\dot{q}_n}{n}, \quad \{r = 1, 3, 5, \dots\}.$$

То есть, четные моды в этом случае электромагнитному воздействию не подвергаются и являются изолированными. А все парциальные колебания, соответствующие нечетным  $r$ , взаимосвязаны между собой и демпфируются магнитной силой.

Избирательность (селективность) электромагнитного воздействия в электромеханических системах вибрационного типа представляется одним из самых интересных свойств, как с теоретической, так и с прикладной точек зрения.

Другая важная особенность электромагнитного воздействия заключается в перераспределении энергии между неизолрованными парциальными колебаниями. Именно это свойство не позволяет сделать независимыми дифференциальные уравнения, описывающие колебания струны. Функция плотности индуцированного тока  $j(t)$  складывается из множества периодических составляющих, тем не менее, в каждый момент времени во всей струне ток имеет одно направление. Среди гармоник, составляющих функцию  $j(t)$ , отсутствуют члены с частотами изолированных мод, а все остальные представляют собой

сходящийся ряд, поскольку наиболее значительными являются низкочастотные составляющие.

Обезразмерим [20] уравнения (1.2.8), приняв в качестве характерных масштабов длины  $l^* = l$ , магнитной индукции  $B^* = B$ , проводимости  $\sigma^* = \sigma$ , времени  $t^* = l/p_1$  (где  $p_1$  - частота основного главного собственного колебания струны в отсутствии всех диссипативных сил), линейной плотности  $\rho^* = \rho$ , коэффициента внешней механической диссипации  $\beta^* = 1/t^* = p_1$ . Получим:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + r^2 q_r = -\mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{\pi^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n, \quad \{r = 1, 2, \dots\}, \quad (1.2.9)$$

где  $\mathbf{St} = \frac{\sigma B^2}{\rho p_1}$  - число Стюарта, впервые введенное при рассмотрении задач магнитной гидродинамики [20] и характеризующее отношение магнитной силы к силе инерции.

Число Стюарта в подобных задачах является критерием электромагнитного воздействия. Оценим его значение по одномодовому приближению, которое описывается уравнением:

$$\ddot{q}_1 + \left( \beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{\pi^2} \right) \dot{q}_1 + q_1 = 0.$$

Запишем фактор затухания:

$$\tilde{h}_1 = \frac{1}{2} \left( \beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{\pi^2} \right).$$

С одной стороны, для периодического процесса необходимо, чтобы корни соответствующего характеристического уравнения были комплексными. Из этих соображений находим верхнюю границу значений числа Стюарта:

$$\mathbf{St} < (2 - \beta) \frac{\pi^2}{8\gamma_1^2}.$$

С другой стороны - значение магнитного фактора затухания не должно быть существенно меньше механического, в противном случае нет смысла его учитывать. Будем считать, что магнитным демпфированием можно пренебречь, если оно на порядок меньше механического. Отсюда получим оценку для числа Стюарта снизу:

$$\mathbf{St} > \frac{\pi^2}{80\gamma_1^2} \beta.$$

Итак, число Стюарта в задачах подобного типа по одномодовому приближению может быть задано в пределах:

$$\frac{\pi^2}{80\gamma_1^2} \beta < \mathbf{St} < (2 - \beta) \frac{\pi^2}{8\gamma_1^2}. \quad (1.2.10)$$

Займемся анализом уравнений (1.2.9) для того, чтобы установить характер связи между собой парциальных колебаний посредством электромагнитного взаимодействия. Рассчитаем их факторы затухания  $\tilde{h}_r$  и демпфированные частоты  $\omega_r$  в зависимости от количества учтенных членов ряда, стоящего в правой части. Расчеты нетрудно выполнить при помощи прикладной программы Mathcad 8.

Пусть активный участок занимает три четверти длины струны:  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = \frac{3}{4}$ . Коэффициент механической диссипации примем равным  $\beta = 0,05$ . Значение числа Стюарта возьмем близким к максимальному:  $\mathbf{St} = 2,3$ . Результаты расчетов приведены в Таблице 1.

Таблица 1

	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$	
$r$	$\tilde{h}_r$	$\omega_r$	$\tilde{h}_r$	$\omega_r$	$\tilde{h}_r$	$\omega_r$	$\tilde{h}_r$	$\omega_r$
1	0,695	0,718	0,722	0,713	0,723	0,713	0,730	0,712
2			0,055	1,970	0,056	1,970	0,056	1,970
3					0,027	2,999	0,027	2,999
4							0,074	3,979

Из таблицы видно, что даже при значениях числа Стюарта, близких к максимальному, электромагнитное взаимодействие между парциальными колебаниями довольно слабо влияет на их демпфированные частоты. Это обстоятельство позволяет применить для дальнейшего анализа системы уравнений (1.2.9) метод расщепления (редукции).

Поясним его суть. Представим начальные условия движения в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n(0) X_n(z) = f_1(z); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(0) X_n(z) = f_2(z).$$

То есть начальные значения обобщенных координат и обобщенных скоростей для каждого парциального колебания определяются как коэффициенты ряда при разложении заданных функций  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$  по собственным амплитудным функциям. Если в силу начальных условий наибольшей энергией обладает движение, соответствующее низшему парциальному тону, то расщепление можно произвести следующим образом: оставим в первом уравнении только первый член суммы, стоящей в правой части, во втором – два, и так далее. В ре-

зультате получим систему уравнений, которую можно интегрировать последовательно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_1 + \left( \beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2} \right) \dot{q}_1 + 1^2 q_1 = 0; \\ \ddot{q}_2 + \left( \beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2} \right) \dot{q}_2 + 2^2 q_2 = -\mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_2}{1 \cdot 2 \pi^2} \dot{q}_1; \\ \dots; \\ \ddot{q}_r + \left( \beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right) \dot{q}_r + r^2 q_r = -\mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{r \pi^2} \left( \frac{\gamma_1}{1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\gamma_{r-1}}{r-1} \dot{q}_{r-1} \right); \\ \dots \end{array} \right. \quad (1.2.11)$$

Рассчитаем факторы затухания и демпфированные частоты для нескольких первых уравнений системы (1.2.11) при тех же условиях, что и раньше. Результаты расчетов приведены в Таблице 2.

Таблица 2

$n$	$n=1$		$n=2$		$n=3$		$n=4$	
	$\tilde{h}_r$	$\omega_r$	$\tilde{h}_r$	$\omega_r$	$\tilde{h}_r$	$\omega_r$	$\tilde{h}_r$	$\omega_r$
1	0,695	0,718	0,695	0,719	0,695	0,719	0,695	0,719
2			0,082	1,998	0,082	1,998	0,082	1,998
3					0,027	3,000	0,026	3,000
4							0,083	3,999

Сравнивая значения, приведенные в Таблицах 1 и 2, делаем вывод о достаточно высокой степени точности, которую обеспечивает метод расщепления.

В силу принятых для (1.2.11) начальных условий наибольшую исходную амплитуду имеет основное парциальное колебание, поэтому интегрирование системы дифференциальных уравнений начинается с первого уравнения. Колебания основного тона являются затухающими и в одномодовом приближении с учетом начальных условий описываются решением:

$$q_1 = q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1),$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{1^2 - \tilde{h}_1^2}; \quad \tilde{h}_1 = \frac{1}{2} \left( \beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2} \right),$$

а начальная амплитуда  $q_{01}$  и начальная фаза  $\varepsilon_1$  определяются начальными условиями для основного тона, т.е. выражаются через величины  $q_1(0)$  и  $\dot{q}_1(0)$ .

Решение второго уравнения системы (1.2.11) представляет собой суперпозицию затухающих функций с частотами  $\omega_1$  и

$$\omega_2 = \sqrt{2^2 - \tilde{h}_2^2},$$

где

$$\tilde{h}_2 = \frac{1}{2} \left( \beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2} \right),$$

а именно

$$q_2 = q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2) + \tag{1.2.12}$$

$$+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_2 q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1)}{2\pi^2 \sqrt{(2^2 - 1^2)^2 + 4\tilde{h}_1(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2)(2^2 - 1^2) + 4 \cdot 1^2 (\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2)^2}},$$

причем  $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\tilde{h}_1}{\omega_1}$ , а  $q_{02}$  и  $\varepsilon_2$  определяются начальными условиями  $q_2(0)$  и  $\dot{q}_2(0)$ , соответствующими второму парциальному тону.

При условии малой общей диссипации, когда безразмерные значения всех факторов затухания (в том числе и  $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ ) малы по сравнению с единицей, приближенно можно записать:

$$q_2 = q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2) + \tag{1.2.13}$$

$$+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_2}{2\pi^2 (2^2 - 1^2)} q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1).$$

Заметим, что числовые значения, приведенные в таблицах 1 и 2, не позволяют отнести данный пример к случаю малой общей диссипации, поскольку число Стюарта специально принято близким к его теоретическому максимуму. Фактор затухания  $\tilde{h}_1$  в этом случае близок к единице. Очевидно, что условие малой общей диссипации накладывает дополнительное ограничение на максимальное значение числа Стюарта. Для практики важны именно случаи малой диссипации, так как внешнее сопротивление в механизмах вибрационного типа обычно мало, и технические условия не позволяют достигать больших значений числа Стюарта.

Решение третьего уравнения (1.2.11) является суперпозицией четырех составляющих, два из которых изменяются с частотой  $\omega_1$ , а еще два с частотами  $\omega_2$  и  $\omega_3$  соответственно. Выясним смысл каждого члена с частотой  $\omega_1$ . Один



из них возникает за счет прямой передачи энергии от первого парциального колебания третьему. А другой за счет энергии, полученной вторым парциальным колебанием от первого и частично переданной третьему. Понятно, что этот последний член менее существенен, чем первый, поскольку отражает вторичный процесс перераспределения энергии. Пренебрежение этим членом вполне укладывается в рамки принятой приближенной схемы решения системы уравнений (1.2.11). Таким образом, решение третьего дифференциального уравнения запишем с сохранением трех его составляющих:

$$\begin{aligned}
q_3 = & q_{03} \exp(-\tilde{h}_3 t) \cos(\omega_3 t + \varepsilon_3) + \\
& + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_3 q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1)}{3\pi^2 \sqrt{(3^2 - 1^2)^2 + 4\tilde{h}_1(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_3)(3^2 - 1^2) + 4 \cdot 1^2 (\tilde{h}_1 - \tilde{h}_3)^2}} + \\
& + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2 \gamma_3 q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2 + \theta_2)}{3\pi^2 \sqrt{(3^2 - 2^2)^2 + 4\tilde{h}_2(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_3)(3^2 - 2^2) + 4 \cdot 2^2 (\tilde{h}_2 - \tilde{h}_3)^2}},
\end{aligned} \tag{1.2.14}$$

где

$$\tilde{h}_3 = \frac{1}{2} \left( \beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_3^2}{3^2 \pi^2} \right), \quad \omega_3 = \sqrt{3^2 - \tilde{h}_3^2}, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\tilde{h}_2}{\omega_2},$$

а  $q_{03}$  и  $\varepsilon_3$  находятся из соответствующих начальных условий.

При условии малой общей диссипации, допустимо записать:

$$\begin{aligned}
q_3 = & q_{03} \exp(-\tilde{h}_3 t) \cos(\omega_3 t + \varepsilon_3) + \\
& + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_3}{3\pi^2 (3^2 - 1^2)} q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1) + \\
& + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2 \gamma_3}{3\pi^2 (3^2 - 2^2)} q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2 + \theta_2).
\end{aligned} \tag{1.2.15}$$

В случае рассмотренного выше примера, начиная со второго все факторы затухания существенно меньше единицы, поэтому допустимо третий член в (1.2.15) для этого случая записать приближенно:

$$\begin{aligned}
q_3 &= q_{03} \exp(-\tilde{h}_3 t) \cos(\omega_3 t + \varepsilon_3) + \\
&+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_3 q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1)}{3\pi^2 \sqrt{(3^2 - 1^2) + 4\tilde{h}_1(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_3)(3^2 - 1^2) + 4 \cdot 1^2(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_3)^2}} + \\
&+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_2 \gamma_3 q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2 + \theta_2)}{3\pi^2(3^2 - 2^2)}.
\end{aligned} \tag{1.2.16}$$

Таким образом, при решении прикладных задач необходимо всегда выяснять, начиная с какого парциального колебания допустимо применять условие малой диссипации и соответственно записывать приближенные решения.

Решение  $r$ -го уравнения с учетом только прямых процессов передачи энергии от низших парциальных колебаний к высшим содержит  $r$  членов:

$$\begin{aligned}
q_r &= q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) + \\
&+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{r\pi^2} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\gamma_k q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_k + \theta_k)}{\sqrt{(r^2 - k^2)^2 + 4\tilde{h}_k(\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)(r^2 - k^2) + 4 \cdot k^2(\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)^2}}, \\
&(r = 1, 2, \dots),
\end{aligned} \tag{1.2.17}$$

где

$$\tilde{h}_r = \frac{1}{2} \left( \beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right), \quad \omega_r = \sqrt{r^2 - \tilde{h}_r^2}, \quad \operatorname{tg} \theta_k = \frac{\tilde{h}_k}{\omega_k},$$

а  $q_{0r}$  и  $\varepsilon_r$  находятся из начальных условий для  $r$ -ого дифференциального уравнения (1.2.11).

В случае малой общей диссипации приближенно можно записать:

$$\begin{aligned}
q_r &= q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) + \\
&+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{r\pi^2} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\gamma_k}{r^2 - k^2} q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_k + \theta_k), \\
&(r = 1, 2, \dots).
\end{aligned} \tag{1.2.18}$$

Если же факторы затухания становятся существенно меньше единицы, начиная с номера  $\tilde{n}$ , то решение следует записать в виде:

$$\begin{aligned}
q_r = & q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) + \\
+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{r\pi^2} \sum_{k=1}^{\tilde{n}-1} & \frac{\gamma_k q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_k + \theta_k)}{\sqrt{(r^2 - k^2)^2 + 4\tilde{h}_k(\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)(r^2 - k^2) + 4 \cdot k^2(\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)^2}} + \quad (1.2.19) \\
+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{r\pi^2} \sum_{k=\tilde{n}}^{r-1} & \frac{\gamma_k q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_k + \theta_k)}{r^2 - k^2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, каждое парциальное колебание складывается из собственных затухающих колебаний с частотой  $\omega_r$  и начальной фазой  $\varepsilon_r$  и колебаний со всеми более низкими частотами. Это означает, что в процессе диссипации энергии, которую первоначально имело какое-либо парциальное колебание, принимают участие все более высокие парциальные колебания, кроме изолированных, для которых  $\gamma_r = 0$ . То есть механическая энергия собственных колебаний в электромеханической системе вибрационного типа перераспределяется от низших парциальных колебаний к высшим. Следует заметить, что имеет место и обратный процесс перекачки энергии от высших парциальных колебаний к низшим, но он проявляется меньше и не учтен в уравнениях (1.2.11), а соответствующие ему члены отброшены. Не учтены в этих решениях так же и вторичные процессы перераспределения энергии между парциальными колебаниями.

Обобщая соотношение (1.2.10), получим пределы значений числа Стюарта для  $r$ -ого парциального колебания:

$$\frac{r^2 \pi^2}{80\gamma_r^2} \beta < \mathbf{St} < (2p_r - \beta) \frac{r^2 \pi^2}{8\gamma_r^2}, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (1.2.20)$$

Отсюда видно, что интервал возможных значений числа Стюарта с возрастанием  $r$  сдвигается вправо. Следовательно, существует возможность такого выбора  $\mathbf{St}$ , при котором одно или несколько первых парциальных движений затухают аperiodически, а более высокие колебания являются периодическими. Эта особенность расширяет управляющие возможности электромагнитного воздействия на электромеханические системы вибрационного типа.

Возможен случай, когда в силу начальных условий, наибольшую исходную амплитуду имеет парциальное колебание, соответствующее произвольному  $r^* > 1$ . Тогда при расщеплении системы в правой части первого уравнения следует сохранить первый и  $r^*$ -ый члены, как наиболее значительные. Во втором уравнении сохраняются первые два и  $r^*$ -ый члены, и т.д. В  $r^*$ -ом уравнении сохраняется только  $r^*$ -ый член. В последующих уравнениях число сохраненных членов ряда равно номеру уравнения. Последовательное интегрирование в этом случае начинается с  $r^*$ -ого уравнения. Затем интегрируется первое и далее по порядку все последующие уравнения. Естественно, в

расщепленную систему не включаются уравнения изолированных мод и низших тонов, затухающих аperiodически при заданном  $St$ . При записи решений в этом случае вторичные процессы перекачки энергии между парциальными колебаниями так же не следует учитывать.

Определим логарифмический декремент затухания для собственных колебаний  $r$ -ого парциального тона:

$$\tilde{\delta}_r = \left( \beta + \frac{8St}{\pi^2 r^2} \gamma_r^2 \right) \frac{2\pi}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4} \left( \beta + \frac{8St}{\pi^2 r^2} \gamma_r^2 \right)^2}}, \quad (r=1,2,\dots).$$

Отсюда видно, что логарифмический декремент затухания является частотно-зависимым. На рис. 3 построены графики этой зависимости для трех первых парциальных тонов при условии, что активный участок занимает всю длину струны. Вертикальная ось на этом графике имеет логарифмический масштаб. Верхняя линия соответствует логарифмическому декременту затухания первого парциального тона. Нижняя горизонтальная – второму. Это колебание изолировано от электромагнитного воздействия, поэтому его декремент затухания мал и не зависит от числа Стюарта.

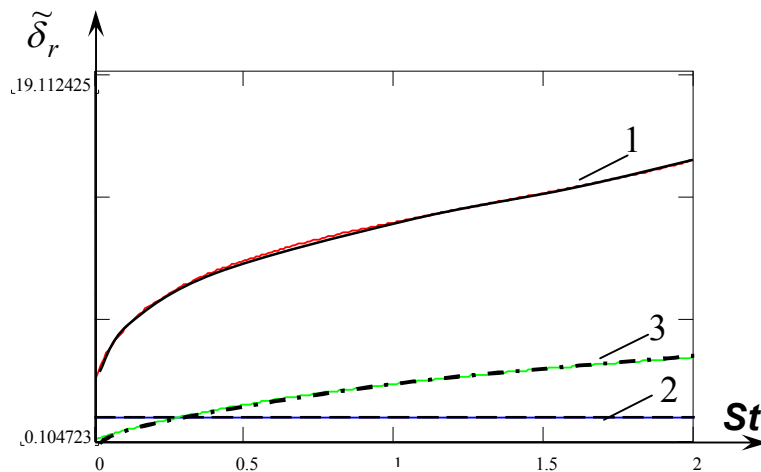


Рис. 3

При

$$r^2 > \frac{1}{4} \left( \beta + \frac{8St}{\pi^2 r^2} \gamma_r^2 \right)$$

приблизительно можно записать

$$\tilde{\delta}_r = \left( \beta + \frac{8St}{\pi^2 r^2} \gamma_r^2 \right) \frac{2\pi}{p_r}, \quad (r=1,2,\dots),$$

то есть получить линейную зависимость  $\tilde{\delta}_r(St)$ .

В заключение сформулируем полученные в данной главе выводы:

1) на собственные парциальные колебания замкнутой проводящей струны однородное стационарное магнитное поле оказывает избирательное демпфирующее воздействие;

2) наибольшему демпфированию подвергаются низшие парциальные колебания, так как магнитная сила обратно пропорциональна  $r^2$ ;

3) электромагнитное взаимодействие перераспределяет механическую энергию между парциальными движениями и проявляется, как слабое, что позволяет расщеплять систему дифференциальных уравнений и не учитывать процессы вторичного перераспределения энергии;

4) при некотором выборе числа Стюарта возможен случай, когда одно или несколько первых парциальных колебаний затухают аperiодически, а более высокие – остаются периодическими.

### 1.3 Электромагнитное возбуждение колебаний струны

При пропускании электрического тока по струне или другой континуальной системе, находящейся в магнитном поле, можно возбудить колебания. Этот принцип давно используется, например, для преобразования электрических сигналов в звуковые. Однако при таком воспроизводстве звука некоторые обертоны всегда теряются, поэтому в современной радиоаппаратуре для ослабления этого дефекта электрический сигнал разлагается на несколько групп, которые преобразуются в звук различными громкоговорителями. Имеются и другие искажения в воспроизводстве звуковых сигналов.

Выясним особенности электромагнитного возбуждения колебаний в проводящих континуальных системах на примере струны [1]. Пусть во внешнюю идеальную электрическую цепь, замыкающую концы струны, включен генератор электрических сигналов с малым внутренним сопротивлением. Тогда, кроме индуцированных токов, определенных по формуле (1.1.2), в струне создается переменный ток плотности  $\vec{j}_B$  от внешнего источника э.д.с. Магнитное поле по-прежнему считаем однородным стационарным и действующим на активном участке шириной  $\Delta z = z_2 - z_1$  и направленным по оси  $Oy$ . При взаимодействии тока  $\vec{j}_B$  с магнитным полем  $\vec{B}$  возникает вынуждающая электромагнитная сила:

$$dF_{\text{ЭМ}} = j_B B A dz. \quad (1.3.1)$$

Вычислим соответствующие силе (1.3.1) обобщенные силы, отнесенные к координатам  $q_n$ :

$$Q_{(\text{ЭМ})r} = \int_{z_1}^{z_2} X_r dF_{\text{ЭМ}} = j_B B A \int_{z_1}^{z_2} \sin \frac{r\pi z}{l} dz = \frac{2j_B B A l}{r\pi} \gamma_r,$$

где по-прежнему используется обозначение

$$\gamma_r = \sin \frac{r\pi(z_2 - z_1)}{2l} \sin \frac{r\pi(z_2 + z_1)}{2l}.$$

Вынужденные колебания струны с учетом механической и магнитной диссипаций описываются системой дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{8\sigma B^2 \gamma_r}{\rho \pi^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n(t) + \frac{4j_B B}{r\pi\rho} \gamma_r, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (1.3.2)$$

В безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{St} \frac{8}{\pi^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n(t) + \mathbf{St} \frac{4j_B}{r\pi} \gamma_r, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (1.3.3)$$

Заметим, что связь между вынужденными парциальными колебаниями происходит только через электромагнитное демпфирование. Эта связь, как показано выше, всегда проявляется достаточно слабо, следовательно, метод расщепления можно применить и для вынужденных колебаний:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_1 + \left( \beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{\pi^2} \right) \dot{q}_1 + 1^2 q_1 = \mathbf{St} \frac{4j_B}{\pi} \gamma_1; \\ \ddot{q}_2 + \left( \beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2} \right) \dot{q}_2 + 2^2 q_2 = -\mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_2}{2\pi^2} \dot{q}_1 + \mathbf{St} \frac{4j_B}{2\pi} \gamma_2; \\ \dots; \\ \ddot{q}_r + \left( \beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right) \dot{q}_r + r^2 q_r = -\mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{r\pi^2} \left( \frac{\gamma_1}{1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\gamma_{r-1}}{r-1} \dot{q}_{r-1} \right) + \mathbf{St} \frac{4j_B}{r\pi} \gamma_r; \\ \dots \end{array} \right. \quad (1.3.4)$$

Уравнения (1.3.4) можно проинтегрировать последовательно и получить рекуррентные формулы, выражающие приближенное аналитическое решение.

В каждое уравнение (1.3.3) и (1.3.4) вошел множитель  $\gamma_r$ , следовательно, электромагнитным способом невозможно возбудить те же парциальные колебания, которые являются изолированными при собственных колебаниях струны. Это означает, что условия отсутствия магнитного демпфирования, полученные в предыдущем разделе, совпадают с условиями отсутствия электромагнитного возбуждения.

В частном случае, когда магнитное поле действует по всей длине струны ( $z_1=0, z_2=1$ ), возбуждаются лишь колебания, соответствующие нечетным  $r$ .

Обобщим задачу о вынужденных колебаниях проводящей струны на случай  $N$  активных участков. Вычислим обобщенную электромагнитную силу, отнесенную к обобщенной координате  $q_r$ :

$$\begin{aligned}
 Q_{(\mathcal{E}M)r} &= \int_0^l X_r dF_{\mathcal{E}M} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} X_r dF_{\mathcal{E}M(k)} = \\
 &= j_B A \sum_{k=1}^N \left( B_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} X_r dz \right) = \frac{2l}{r\pi} j_B A \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr}, \\
 &\quad (r = 1, 2, \dots).
 \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Вынужденные колебания струны при электромагнитном возбуждении описываются системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r &= \\
 = -\frac{8\sigma}{r\rho\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\dot{q}_n}{n} \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{kr} \gamma_{mn} \right) + \frac{4j_B}{r\pi\rho} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr}, \\
 &\quad \{r = 1, 2, \dots\}.
 \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

В безразмерном виде имеем:

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r &= \\
 = -\mathbf{St} \frac{8}{r\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\dot{q}_n}{n} \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{kr} \gamma_{mn} \right) + \mathbf{St} \frac{4j_B}{r\pi} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr}, \\
 &\quad \{r = 1, 2, \dots\}.
 \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Из правых частей этих уравнений видно, что при условии

$$\sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} = 0, \quad (r = 1, 2, \dots). \tag{1.3.8}$$

электромагнитным способом колебание  $r$ -ой моды не возбуждается. Сравним (1.3.8) с условием отсутствия электромагнитного демпфирования, записанным в форме:

$$\sum_{m=1}^N B_m \gamma_{mn} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} = 0, \quad (r = 1, 2, \dots), (n = 1, 2, \dots). \tag{1.3.9}$$

Видно, что набор колебаний, удовлетворяющих (1.3.8), совпадает с колебаниями, подчиненными условию (1.3.9), ибо, если

$$\sum_{m=1}^N B_m \gamma_{mn} = 0, \quad (n=1,2,\dots),$$

т.е. индуцированные токи в системе не возникают, то и

$$\sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} = 0, \quad (r=1,2,\dots),$$

т. е. силовое воздействие тоже отсутствует. Таким образом, изолированные моды не только не демпфируются магнитным полем, но и не возбуждаются электромагнитным способом.

Выводы, полученные в этой главе легко проверить на простейшей лабораторной установке, состоящей из нихромовой или медной струны, к закрепленным концам которой подключен звуковой генератор. Используя подковообразные постоянные магниты, в зависимости от их расположения и полярности, можно добиться возбуждения колебания, соответствующего заданному  $r$ . Например, два одинаковых магнита, расположенные симметрично относительно середины струны, при одинаковой полярности возбуждают колебания нечетных  $r$ , а при различной полярности - четных. Если есть возможность создать достаточно широкий активный участок, то нетрудно убедиться, что таким магнитным полем невозможно возбудить колебания, длина бегущей волны которых равна ширине этого активного участка. Этот вывод распространяется на все колебания, при которых посередине активного участка образуется узел.

#### 1.4 Колебания струны в неоднородном магнитном поле

В реальных условиях магнитные поля, в силу своей вихревой природы, даже в небольших объемах редко бывают однородными. В связи с этим возникают актуальные задачи о собственных и вынужденных колебаниях проводящих систем с распределенными параметрами в неоднородных стационарных магнитных полях [1].

Рассмотрим плоские линейные колебания абсолютно гибкой проводящей струны, описанной в разделах 1.1–1.2, считая, что на активном участке  $\Delta z = z_2 - z_1$  действует магнитное поле с продольной неоднородностью:

$$\vec{B}(z) = B(z)\vec{y}^0.$$

В результате движения проводящей струны в магнитном поле на активном участке создается электрическое напряжение:



$$U = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} B(z) dz ,$$

Индукцированные в струне токи интегрируются внешней электрической цепью, замыкающей концы струны, и определяются по формуле:

$$j = \frac{\sigma}{l} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} B(z) dz. \quad (1.4.1)$$

При этом на элемент струны  $dz$  действует магнитная сила:

$$dF_M = \left[ \frac{\sigma AB(z)}{l} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} B(z) dz \right] dz.$$

С учетом внешнего вязкого сопротивления получим интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T_0}{m_0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma AB(z)}{lm_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} B(z) dz = 0. \quad (1.4.2)$$

Воспользовавшись представлением функции смещений в виде бесконечного ряда по синусоидальным амплитудам функциям и производя те же преобразования, что и в параграфе 1.2, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \ddot{q}_n X_n + \beta X_n \dot{q}_n + p_n^2 q_n X_n + \dot{q}_n \frac{\sigma A}{lm_0} B(z) \int_{z_1}^{z_2} X_n B(z) dz \right] = 0. \quad (1.4.3)$$

Имея в виду ортогональность амплитудных функций, приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = - \frac{\sigma A}{lm_0} \int_{z_1}^{z_2} X_r(z) B(z) dz \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \dot{q}_n \int_{z_1}^{z_2} X_n(z) B(z) dz \right],$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}.$$

Вводя обозначения

$$\gamma_r^* = \int_{z_1}^{z_2} X_n(z) B(z) dz, \quad \gamma_r = \int_{z_2}^{z_1} X_r(z) B(z) dz,$$

получим

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{\sigma A}{lm_0} \gamma_r^* \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^* \dot{q}_n), \quad \{r=1,2,\dots\}. \quad (1.4.4)$$

Условие отсутствия электромагнитного демпфирования колебаний в неоднородном магнитном поле, действующем на одном активном участке, записывается в виде

$$\gamma_r^* = \int_{z_1}^{z_2} X_r(z) B(z) dz = 0, \quad (r=1,2,\dots). \quad (1.4.5)$$

Используя это условие можно, задав  $B(z)$ , определить положение и ширину активного участка, при котором  $r$ -ое парциальное колебание струны является изолированным.

Рассмотрим вынужденные колебания струны, возникающие при пропускании по ней переменного электрического тока плотности  $\vec{j}_B$ , как описано в разделе 1.3, но при условии неоднородности магнитного поля. Запишем выражение для вынуждающей электромагнитной силы, действующей на элементарный участок струны:

$$dF_{\text{ЭМ}} = j_B B(z) A dz$$

и вычислим соответствующую ей обобщенную силу, отнесенную к координате  $q_n$ :

$$Q_n = \int_{z_1}^{z_2} X_n dF_{\text{ЭМ}} = j_B A \int_{z_1}^{z_2} B(z) \sin \frac{n\pi z}{l} dz = j_B A \gamma_n^*, \quad (n=1,2,\dots). \quad (1.4.6)$$

Получим систему неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + \frac{\sigma A}{lm_0} \gamma_r^* \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^* \dot{q}_n) + p_r^2 q_r = \frac{2A\gamma_r^*}{m_0 l} j_B(t), \quad \{r=1,2,\dots\}. \quad (1.4.7)$$

В правую часть уравнения (1.4.7) входит в виде множителя  $\gamma_r^*$ , следовательно, при  $\gamma_r^* = 0$  данное парциальное колебание электромагнитным способом не возбуждается. Таким образом, условия отсутствия электромагнитного демпфирования и электромагнитного возбуждения совпадают и в случае неоднородного магнитного поля.

Условие (1.4.5) является более общим по отношению к полученному в параграфе 1.2. Как и в случае однородного магнитного поля, невозможно создать условия, при которых не было бы электромагнитного воздействия на все парциальные колебания одновременно.

Обезразмерив уравнения (1.4.4) тем же способом, что и в 1.2 соответственно получим:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{St} \gamma_r^* \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^* \dot{q}_n), \quad \{r = 1, 2, \dots\}, \quad (1.4.8)$$

где  $\mathbf{St} = \frac{\sigma B^2}{\rho p_1}$  - число Стюарта. В качестве характерного размера индукции магнитного поля принимается ее значение в какой либо фиксированной точке  $B(z^*)$ .

Уравнения (1.4.7) в безразмерных переменных имеют вид:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + \mathbf{St} \gamma_r^* \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^* \dot{q}_n) + p_r^2 q_r = 2\mathbf{St} \gamma_r^* j_B(t), \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (1.4.9)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда неоднородное магнитное создается линейным током  $I$ , направленным по оси  $Ox$  и проходящим через один из концов струны перпендикулярно к ней (рис. 4).

В этом случае магнитное поле действует по всей длине струны, исключая небольшой начальный участок, равный радиусу проводника  $r_0$ , причем  $r_0 \ll l$ . Индукция магнитного поля при этом выражается следующей зависимостью от координаты  $z$ :

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi z}, \quad z \geq r_0,$$

где  $\mu_0$  - магнитная постоянная.

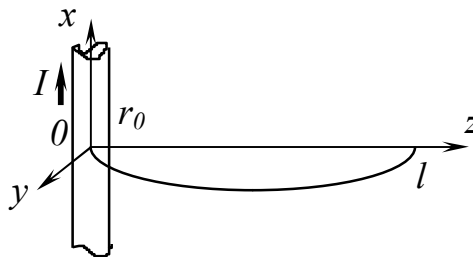


Рис. 4

Приняв в качестве характерного значения магнитной индукции ее значение на правом конце струны:

$$B(l) = \frac{\mu_0 I}{2\pi l},$$

в безразмерном виде получим

$$B(z) = \frac{1}{z}, \quad z \geq r_0, \quad r_0 \ll 1,$$

где  $z$  - безразмерная координата.

Вычислив  $\gamma_n^*$  в безразмерном виде, имеем:

$$\gamma_n^* = \int_{r_0}^1 \frac{\sin \pi n z}{z} dz = \left( n\pi z - \frac{(n\pi z)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(n\pi z)^5}{5 \cdot 5!} - \dots \right) \Big|_{r_0}^1. \quad (1.4.10)$$

Полученное значение  $\gamma_n^*$  ни при каких  $n$  не обращается в нуль, следовательно, электромагнитному воздействию в указанном магнитном поле подвергаются все парциальные колебания.

Рассмотрим случай, когда проводник с током проходит через середину струны параллельно оси  $Ox$  (рис. 5).

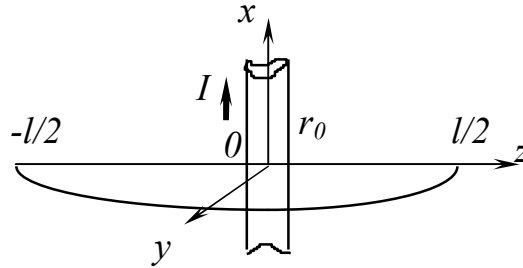


Рис. 5

В этом случае систему отсчета удобно связать с серединой струны, тогда

$$B(z) = \frac{1}{z}, \quad \text{причем } r_0 < z < -r_0, \quad r_0 \ll 1.$$

Вычислим  $\gamma_n^*$  для левой половины струны, имея в виду, что в выбранной системе отсчета

$$X_n(z) = \sin \left[ n\pi \left( \frac{1}{2} + z \right) \right],$$

$$\gamma_n^{*(1)} = \int_{-\frac{1}{2}}^{-r_0} \frac{1}{z} \sin \left[ n\pi \left( \frac{1}{2} + z \right) \right] dz =$$

$$= \begin{cases} \sin \frac{n\pi}{2} \left[ \ln |n\pi z| - \frac{(n\pi z)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(n\pi z)^4}{4 \cdot 4!} - \dots \right] \Big|_{r_0}^{\frac{1}{2}}; & (n = 1, 3, 5, \dots); \\ \cos \frac{n\pi}{2} \left[ n\pi z - \frac{(n\pi z)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(n\pi z)^5}{5 \cdot 5!} - \dots \right] \Big|_{r_0}^{\frac{1}{2}}; & (n = 2, 4, 6, \dots). \end{cases} \quad (1.4.11)$$

Для правой половины:

$$X_n(z) = \sin \left[ n\pi \left( \frac{1}{2} - z \right) \right]; \quad B(z) = -\frac{1}{z}. \quad (1.4.12)$$

Для струны в целом:

$$\gamma_n^* = \gamma_n^{(1)} + \gamma_n^{*(2)} = 2 \cos \frac{\pi n}{2} \left[ n\pi z - \frac{(n\pi z)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(n\pi z)^5}{5 \cdot 5!} - \dots \right] \Big|_{r_0}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.4.13)$$

$$(n = 2, 4, 6, \dots).$$

При нечетных  $n$   $\gamma_n^* = 0$ , следовательно, в данном случае выделяются изолированные моды, а электромагнитным способом демпфируются и возбуждаются только четные парциальные колебания.

Еще раз подчеркнем, что полученные результаты теряют смысл, если не удовлетворяется условие

$$r_0 < l/n,$$

или в безразмерном виде

$$r_0 < 1/n,$$

т. к. в этом случае длина стоячей волны сравнима с диаметром проводника, создающего магнитное поле.

Заметим, что аналогичный результат следует ожидать при любом симметричном относительно середины струны расположении магнитного поля с противоположным направлением вектора  $\vec{B}$  на левой и правой ее половинах.

## 1.5 Колебания струны в нестационарном магнитном поле

Переходим к исследованию вибраций континуальных проводящих систем в нестационарном магнитном поле, оставаясь, однако, в рамках гипотезы квазистационарности электромагнитных процессов. Нестационарность внешнего магнитного поля делает вибрационные процессы параметрическими, для которых важнейшим является вопрос об устойчивости положений равновесия. При неустойчивом положении равновесия возникает параметрический резонанс, т. е. самовозбуждение колебаний системы какого-либо параметра, в данном случае индукции внешнего магнитного поля.

Рассмотрим задачу о собственных поперечных колебаниях упругой проводящей абсолютно гибкой струны, изготовленной из немагнитного материала, в нестационарном однородном магнитном поле  $\vec{B} = B(t)\vec{y}^0$ , действующим на активном участке  $\Delta z = z_2 - z_1$  [1].

Для определенности считаем, что идеальная электрическая цепь, замыкающая закрепленные концы струны образует прямоугольный контур. Размеры контура указаны на рис. 6. Рассмотрим два случая: *а)* замыкающий контур расположен в плоскости  $Oxz$ ; *б)* замыкающий контур расположен в плоскости  $Oyz$ . При произвольных форме и расположении контура в пространстве эти два случая объединяются. Колебания струны по-прежнему совершаются в плоскости  $Oxz$ .

В общем случае магнитный поток, пересекающий контур, изменяется вследствие двух факторов: 1) за счет нестационарности вектора  $\vec{B}$ ; 2) за счет вибраций струны.

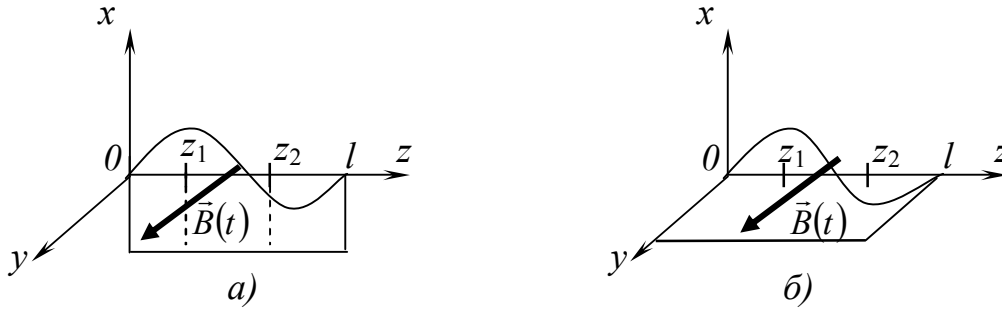


Рис. 6

Изменение магнитного потока, пересекающего контур, приводит к возникновению в нем индуцированных токов плотности:

$$j = \frac{\sigma}{l} \left[ B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB}{dt} \left( \int_{z_1}^{z_2} u dz + a \Delta z \right) \right]. \quad (1.5.1)$$

Заметим, что формула (1.5.1) записана для случая *a*). При этом выражение в круглых скобках представляет собой площадь контура, лежащего в плоскости  $Oxz$ , и ограниченного замыкающей цепью и струной. Понятно, что за счет вибраций струны площадь контура изменяется. В случае *б*) последнее слагаемое в круглой скобке отсутствует, т. к. вектор  $\vec{B}$  лежит в плоскости контура. Это замечание относится и к последующим формулам.

На каждый элемент  $dz$  активного участка струны действует электромагнитная сила:

$$dF_M = \frac{\sigma AB}{l} \left[ B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB}{dt} \left( \int_{z_1}^{z_2} u dz + a \Delta z \right) \right] dz. \quad (1.5.2)$$

С учетом внешнего вязкого сопротивления получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma AB}{lm_0} \left[ B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB}{dt} \left( \int_{z_1}^{z_2} u dz + a \Delta z \right) \right] - \frac{T_0}{m_0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (1.5.3)$$

Оставаясь в рамках гипотезы абсолютно гибкой струны, считаем натяжение  $T_0$  постоянным и одинаковым во всех точках.

Используем разложение функции смещений  $u(z, t)$  в ряд по синусоидальным амплитудным функциям, с учетом их ортогональности приходим к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \\ & = -\frac{4\sigma BA}{r\pi m_0} \gamma_r \left[ \frac{2B}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \dot{q}_n}{n} + \frac{dB}{dt} \left( \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n q_n}{n} + \frac{a\Delta z}{l} \right) \right], \quad (1.5.4) \\ & \{r = 1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

В безразмерном виде:

$$\begin{aligned} & \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \\ & - \mathbf{St} \frac{4}{r\pi} \gamma_r \left[ \frac{2B}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \dot{q}_n}{n} + \frac{dB}{dt} \left( \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n q_n}{n} + a\Delta z \right) \right], \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (1.5.5) \end{aligned}$$

В систему (1.5.5) входят взаимозависимые дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами в правых частях. Заметим, что электромагнитное воздействие на колебание отдельного  $r$ -го парциального тона отсутствует при условии:

$$\gamma_r = 0, \quad (r = 1, 2, \dots),$$

которое совпадает с аналогичным условием для стационарного магнитного поля.

Исследуем линейную задачу о параметрическом возбуждении колебаний основного тона в случае б). В этом случае достаточно одномодового приближения:

$$\ddot{q}_1 + \left( \beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{\pi^2} B^2 \right) \dot{q}_1 + \left( 1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{\pi^2} B \frac{dB}{dt} \right) q_1 = 0. \quad (1.5.6)$$

В этом уравнении отброшены члены, учитывающие передачу энергии колебаниям более высоких тонов. Иными словами, в уравнении (1.5.6) не учтены малые диссипативные силы.

Пусть индукция магнитного поля изменяется по гармоническому закону:

$$B = \cos \omega t.$$

В качестве характерного здесь принято амплитудное значение магнитной индукции. Тогда из уравнения (1.5.6) получим:

$$\ddot{q}_1 + \left( \beta + \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \gamma_1^2 \cos^2 \omega t \right) \dot{q}_1 + \left( 1 - \mathbf{St} \frac{4}{\pi^2} \gamma_1^2 \omega \sin 2\omega t \right) q_1 = 0. \quad (1.5.7)$$

С помощью подстановки Хилла [15, 18]:

$$q_1 = \frac{1}{2} \xi_1 \exp \left[ - \int_0^t \left( \beta + \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \gamma_1^2 \cos^2 \omega t \right) dt \right],$$

уравнение (1.5.7) сводится к уравнению типа Хилла [21]:

$$\ddot{\xi}_1 + P_1^2(t) \xi_1 = 0, \quad (1.5.8)$$

где  $P_1^2(t) = 1 - \frac{1}{4} \left( \beta + St \frac{8}{\pi^2} \gamma_1^2 \cos^2 \omega t \right)^2$ .

Общий вид полученного уравнения можно представить в форме:

$$\ddot{\xi}_1 + \left( f_1 + h_1 \cos^2 \omega t + k_1 \cos^4 \omega t \right) \xi_1 = 0, \quad (1.5.9)$$

где постоянные коэффициенты имеют значения

$$f_1 = 1 - \frac{1}{4} \beta^2; \quad h_1 = -\mathbf{St} \frac{4}{\pi^2} \beta \gamma_1^2; \quad k_1 = -\mathbf{St}^2 \frac{16}{\pi^4} \gamma_1^4.$$

Когда можно пренебречь внешним сопротивлением ( $\beta = 0$ ), получим дифференциальное уравнение типа

$$\ddot{\xi}_1 + \left( 1 - \mathbf{St}^2 \frac{16}{\pi^4} \gamma_1^4 \cos^4 \omega t \right) \xi_1 = 0. \quad (1.5.10)$$

По своим свойствам уравнение (1.6.10) близко к уравнению Матье [21], однако, для него следует строить свою диаграмму устойчивости типа Айнса-Стретта. Обычно производят преобразование уравнения, вводя обозначение:

$$\omega t = 2\tau.$$

Тогда уравнение (1.5.10) примет вид:

$$\frac{d^2 \xi_1}{d\tau^2} + \left( \alpha_1 - \varepsilon_1 \cos^4 2\tau \right) \xi_1 = 0, \quad (1.5.11)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{4}{\omega^2}; \quad \varepsilon_1 = \mathbf{St}^2 \frac{64 \gamma_1^4}{\pi^4 \omega^2}.$$

Методом гармонического баланса получены следующие уравнения граничных линий на диаграмме устойчивости (рис. 7):

$$\alpha_1^{(1)} = -\frac{3}{8} \varepsilon_1 + \frac{21}{256} \varepsilon_1^2; \quad \alpha_1^{(2)} = 1 - \frac{3}{8} \varepsilon_1 + \frac{29}{512} \varepsilon_1^2;$$



$$\alpha_1^{(3)} = 1 - \frac{3}{8}\varepsilon_1 - \frac{1}{16}\varepsilon_1^2; \quad \alpha_1^{(4)} = 4 - \frac{5}{8}\varepsilon_1 - \frac{3}{160}\varepsilon_1^2;$$

$$\alpha_1^{(5)} = 4 - \frac{5}{8}\varepsilon_1 - \frac{105}{768}\varepsilon_1^2; \quad \alpha_1^{(6)} = 9 - \frac{1}{3}\varepsilon_1 - \frac{97}{2880}\varepsilon_1^2.$$

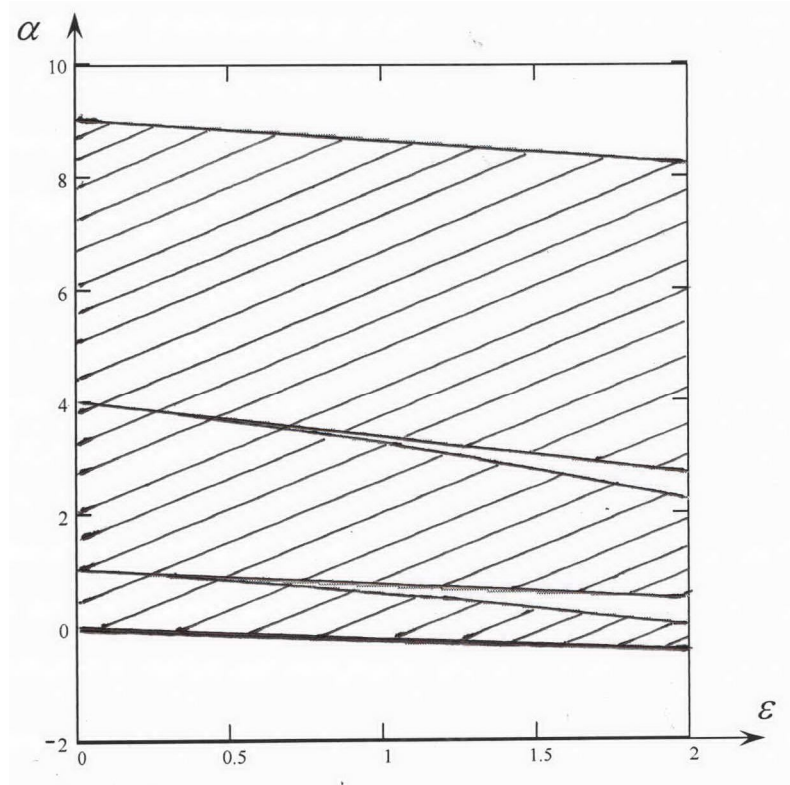


Рис. 7

Светлые поля соответствуют зонам параметрического резонанса, а заштрихованные - зонам устойчивых положений равновесия. Заметим, что здесь построены только три устойчивых и две неустойчивых зоны.

Так как учет диссипативных процессов приводит к расширению областей устойчивости и сужению областей параметрического резонанса, то диаграммой изображенной на рис. 7 можно пользоваться и для уравнения (1.6.9), приведя его к соответствующему виду, но точки в неустойчивых областях следует брать вдали от границ.

## 2 Поперечные колебания электропроводного стержня в магнитном поле

### 2.1 Поперечные колебания однородного призматического стержня в магнитном поле

Рассмотрим линейные поперечные (изгибные) колебания однородного стержня, изготовленного из электропроводного немагнитного материала, при однородных классических граничных условиях [1]. Под классическими понимаются краевые условия, при которых собственные амплитудные функции выражаются функциями А. Н. Крылова [14-15]:

$$X_n(\alpha_n z) = C_1 K_1(\alpha_n z) + C_2 K_2(\alpha_n z) + C_3 K_3(\alpha_n z) + C_4 K_4(\alpha_n z), \quad (n=1,2,\dots), \quad (2.1.1)$$

где  $C_1 \dots C_4$  - произвольные константы,  $\alpha_n^4 = \frac{p_n^2 m_0}{EJ}$  - волновое число,  $p_n$  - частоты собственных незатухающих колебаний,  $m_0$  - погонная масса,  $EJ$  - изгибная жёсткость стержня.

Как и в случае со струной, полагаем, что концы стержня замкнуты идеальной электрической цепью, а на участке  $\Delta z = z_2 - z_1$ , действует однородное стационарное магнитное поле, причем вектор  $\vec{B}$  направлен перпендикулярно плоскости колебаний стержня.

При составлении дифференциального уравнения колебаний стержня учтем внешний и внутренний факторы демпфирования. Как и для струны считаем внешнее сопротивление вязким, т. е. воспользуемся формулой (1.1.1.). Учет внутренней диссипации в системах с распределенными параметрами является весьма сложной проблемой. Существует несколько гипотез [14, 18], применяемых в зависимости от свойств материала стержня. Воспользуемся [18] зависимостью, обычно применяемой для металлических сред:

$$dF_C^* = \beta^* EJ \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} dz, \quad (2.1.2)$$

где демпфирующий коэффициент  $\beta^*$  зависит от свойств материала стержня. Магнитоупругий эффект не учитывается, поэтому  $\beta^*$  не является функцией магнитной индукции. Важным является вопрос о зависимости  $\beta^*$  от частоты. Если  $\beta^*$  зависит от частоты, то для систем с распределенными параметрами следует использовать только главные координаты [18]. Как следует из предыдущих параграфов, введение магнитной силы не позволяет найти главные координаты при помощи процедуры Фурье. Ограничимся случаем, когда  $\beta^*$  не зависит от частоты.

С учетом сказанного изгибные колебания стержня описываются дифференциальным уравнением:

$$EJ \left( \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \beta * \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} \right) + m_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\sigma B^2 A}{l} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz = 0.$$

Следует заметить, что это уравнение справедливо лишь для длинных балок, когда длина волны деформации значительно больше размеров поперечного сечения балки, т.е. для малых частот [18].

Как отмечено выше, рассматриваются только случаи однородных граничных условий или приводимые к ним. При этом собственные амплитудные функции (2.1.1) обладают свойством ортогональности, что позволяет применить метод Фурье и свести уравнение в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta * p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \frac{Q_r}{m_r^*}, \quad \{r = 1, 2, \dots\}, \quad (2.1.3)$$

где  $m_r^* = \int_0^l m_0 X_r^2 dz$  - обобщенные массы,  $Q_r = \int_{z_1}^{z_2} X_r dF_M$  - обобщенные магнитные силы, отнесенные к соответствующим обобщенным координатам.

Представим введенные обозначения в виде:

$$m_r^* = m_0 \int_0^l X_r^2 dz = m_0 Y_r^*, \quad \text{где } Y_r^* = \int_0^l X_r^2 dz,$$

$$Q_r = -\frac{\sigma B^2 A}{l} \int_{z_1}^{z_2} X_r dz \sum_{n=1}^{\infty} \left( \dot{q}_n \int_{z_1}^{z_2} X_n dz \right) = -\frac{\sigma B^2 A \gamma_r}{l \alpha_r} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \dot{q}_n \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \right),$$

где  $\gamma_n = \int_{z_1}^{z_2} X_n d(\alpha_n z)$ ,  $\gamma_r = \int_{z_1}^{z_2} X_r d(\alpha_r z)$ .

Таблица значений интеграла  $Y_r^*$  при различных граничных условиях приведена в [15].

В соответствии с введенными обозначениями запишем (2.1.3) в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta * p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{st} \frac{\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \dot{q}_n, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (2.1.4)$$

Из (2.1.4) видно, что введенные обобщенные координаты не являются главными, поскольку дифференциальные уравнения зависимы между собой. Однако эта зависимость является линейной и легко устраняется при помощи

метода последовательных приближений. Основанием для применения этого метода, как и в случае со струной, служит слабая взаимосвязь между парциальными колебаниями посредством электромагнитного взаимодействия. Таким образом, систему уравнений (2.1.4) можно заменить системой расщепленных уравнений, интегрируемых последовательно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_1 + \left( \beta + \beta^* 1^2 + \mathbf{St} \frac{\gamma_1^2}{\alpha_1^2 Y_1^*} \right) \dot{q}_1 + 1^2 q_1 = 0; \\ \ddot{q}_2 + \left( \beta + \beta^* 2^2 + \mathbf{St} \frac{\gamma_2^2}{\alpha_2^2 Y_2^*} \right) \dot{q}_2 + 2^2 q_2 = -\mathbf{St} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\alpha_1 \alpha_2 Y_2^*} \dot{q}_1; \\ \dots\dots\dots; \\ \ddot{q}_r + \left( \beta + \beta^* r^2 + \mathbf{St} \frac{\gamma_r^2}{\alpha_r^2 Y_r^*} \right) \dot{q}_r + r^2 q_r = -\mathbf{St} \frac{\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \left( \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \dot{q}_1 + \dots\dots \frac{\gamma_{r-1}}{\alpha_{r-1}} \dot{q}_{r-1} \right); \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad (2.1.5)$$

Так как применяемая теория справедлива только для малых частот, эту систему уравнений следует усечь, оставив конечное число уравнений.

Как и в случае со струной, начальные условия следует представить в виде ряда по собственным амплитудным функциям. Коэффициенты этого ряда определяют начальные условия для каждого из дифференциальных уравнений системы (2.1.5).

В результате последовательного интегрирования этих уравнений получим рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} q_r &= q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) + \\ &+ \mathbf{St} \frac{\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\gamma_k k^2}{\alpha_k \Omega_{rk}} q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_r + \theta_k), \\ &\quad (r = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

где использованы обозначения:

$$\begin{aligned} \Omega_{rk} &= \sqrt{(k^2 - r^2)^2 + 4\tilde{h}_k(\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)(k^2 - r^2) + 4 \cdot k^2(\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)^2}, \\ \tilde{h}_r &= \frac{1}{2} \left( \beta + \beta^* r^2 + \mathbf{St} \frac{\gamma_r^2}{\alpha_r^2 Y_r^*} \right), \end{aligned}$$

$$\tilde{h}_k = \frac{1}{2} \left( \beta + \beta * k^2 + \mathbf{St} \frac{\gamma_k^2}{\alpha_k^2 Y_k^*} \right),$$

$$\omega_r = \sqrt{r^2 - \tilde{h}_r^2} \quad (r=1,2,\dots);$$

$$\omega_k = \sqrt{k^2 - \tilde{h}_k^2}; \quad (k=1,2,\dots,r-1).$$

Из уравнений (2.1.5) и их решений (2.1.6) видно, что электромагнитное воздействие на парциальные колебания отсутствует при

$$\gamma_r = 0, \text{ т. е. } \int_{z_1}^{z_2} X_r dz = 0, \quad (r=1,2,\dots), \quad (2.1.7)$$

следовательно, оно является избирательным по отношению к парциальным колебаниям, соответствующим различным  $r$ , а соотношения (2.1.7) являются условиями выделения изолированных мод. Из анализа полученных решений также следует вывод о перераспределении энергии от низших мод ко всем высшим, для которых не выполняются условия (2.1.7).

При условии малой общей диссипации решения (2.1.6) можно записать приближенно:

$$q_r = q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) +$$

$$+ \mathbf{St} \frac{\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\gamma_k k^2}{\alpha_k (k^2 - r^2)} q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_r + \theta_k),$$

$$(r=1,2,\dots).$$

Если же факторы затухания становятся существенно меньше единицы, начиная с номера  $\tilde{n}$ , то решение следует записать в виде:

$$q_r = q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) +$$

$$+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{k=1}^{\tilde{n}-1} \frac{\gamma_k k^2 q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_k + \theta_k)}{\alpha_k \Omega_{rk}} +$$

$$+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{k=\tilde{n}}^{r-1} \frac{\gamma_k k^2 q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_k + \theta_k)}{\alpha_k (k^2 - r^2)},$$

$$(r=1,2,\dots).$$

Из соображений, аналогичных приведенным в параграфе 1.2, устанавливаем пределы значений числа Стюарта:

$$\frac{(\beta + \beta * r^2) \alpha_r^2 Y_r^*}{10 \gamma_r^2} < \mathbf{St} < \frac{\alpha_r^2 Y_r^*}{\gamma_r^2} (2r - \beta * r^2 - \beta), \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Отсюда следует, что правая часть этого неравенства при возрастании  $r$  проходит через максимум при  $r = r_{\max}$  и затем убывает. Если выбрать  $\mathbf{St}$  больше, чем правая часть неравенства при  $r = r_{\max}$ , то первые члены в решениях (2.1.6) для всех неизолированных колебаний затухают аperiodически. При любом выборе числа  $\mathbf{St}$  существует ограниченное число движений, первые члены которых в (2.1.6) периодические. Например, если выбрать число Стюарта, близким к предельному по одномодовому приближению:

$$\mathbf{St} \approx \frac{\alpha_1^2 Y_1^*}{\gamma_1^2} (2 - \beta * -\beta),$$

то при всех  $r$ , отвечающих условию

$$\frac{\alpha_1^2 Y_1^*}{\gamma_1^2} (2 - \beta * -\beta) > \frac{\alpha_r^2 Y_r^*}{\gamma_r^2} (2r - \beta * r^2 - \beta),$$

первые члены в решениях (2.1.6) выражаются аperiodическими функциями.

## 2.2 Различные случаи граничных условий

Рассмотрим несколько частных случаев при конкретных концевых условиях.

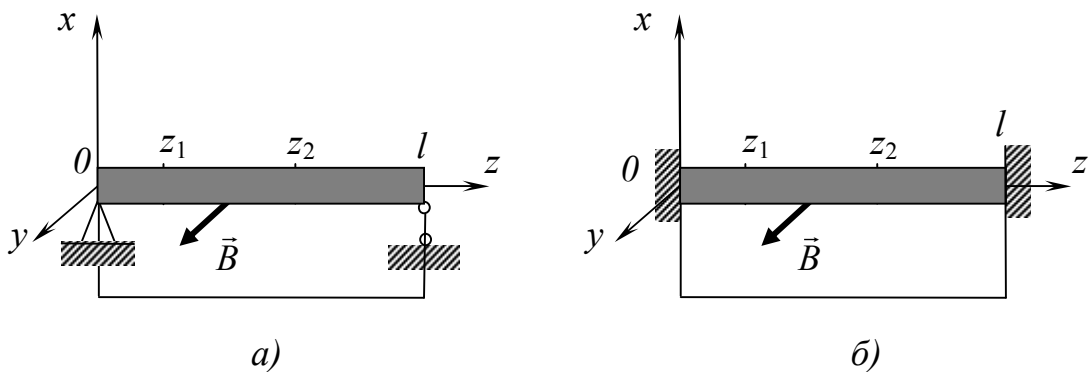


Рис. 8

Для двухопорной балки (рис. 8а), как и для струны амплитудные функции синусоидальные:

$$X_r = \sin \frac{r\pi z}{l}, \quad X_n = \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad (n = r = 1, 2, \dots),$$

поэтому  $\gamma_r$  имеет такой же вид, как и в параграфе 1.2:

$$\gamma_r = \sin \frac{r\pi(z_1 + z_2)}{2l} \sin \frac{r\pi(z_2 - z_1)}{2l},$$

поэтому все выводы, сделанные для струны, относятся и к этому случаю.

Пусть оба конца стержня жестко закреплены (рис. 8б), а магнитное поле действует по всей его длине. Из граничных условий:

$$\begin{aligned} X_r(0) &= 0; & X_r'(0) &= 0; \\ X_r(l) &= 0; & X_r'(l) &= 0; \end{aligned}$$

(здесь штрихи означают производные по  $z$ ) получим:

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = -\frac{K_4(\lambda_r)}{K_3(\lambda_r)}; \quad C_4 = 1,$$

где  $\lambda_r = \alpha_r l$ .

Из условия (2.1.7) получим уравнение частот для изолированных мод в функциях А. Н. Крылова:

$$K_4^2(\lambda_r) - K_1(\lambda_r)K_3(\lambda_r) + K_3(\lambda_r) = 0, \quad (r = 1, 2, \dots), \quad (2.2.1)$$

или в другой форме:

$$\operatorname{sh} \lambda_r \sin \lambda_r - \operatorname{ch} \lambda_r + \cos \lambda_r = 0, \quad (r = 1, 2, \dots), \quad (2.2.2).$$

Уравнение собственных частот для балки с заземленными концами имеет вид:

$$\cos \lambda_r = \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_r}, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (2.2.3)$$

Его корнями являются:  $\lambda_1 = 4,73$ ,  $\lambda_2 = 7,85, \dots$  Начиная с  $r = 2$ , его корни можно вычислить по формуле

$$\lambda_r = \frac{2r-1}{2} \pi.$$

Для определения группы собственных частот, не подвергающихся магнитному демпфированию, рассмотрим совместно уравнения (2.2.2) и (2.2.3), вводя вместо  $r$  индекс  $k$ . Получим:

$$\operatorname{sh} \lambda_k (\sin \lambda_k - \operatorname{th} \lambda_k) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Так как  $\operatorname{sh} \lambda_k = 0$  только при  $\lambda_k = 0$ , то берем уравнение:

$$\sin \lambda_k = \operatorname{th} \lambda_k, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.2.4)$$

Графическое решение этого уравнения представлено на рис. 9, откуда видно, что, начиная со второго ненулевого корня, решение уравнения (2.2.4) совпадает с решениями уравнения (2.2.3) при четных значениях  $r$ . Следовательно, магнитное демпфирование испытывают лишь собственные колебания при нечетных  $r$ .

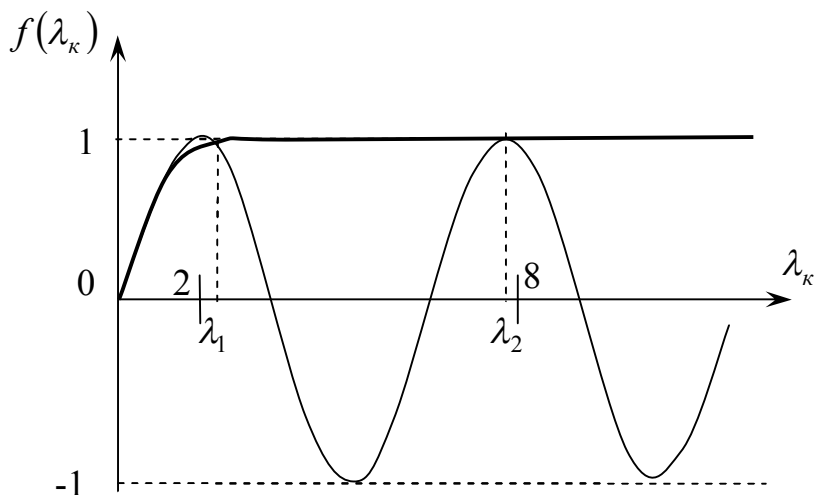


Рис. 9.

Рассмотрим колебания проводящего консольного стержня в магнитном поле при  $\Delta z = l$  [1] (рис. 10).

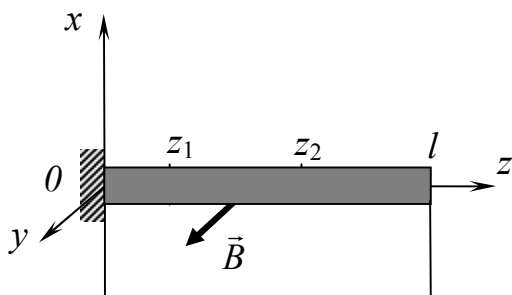


Рис. 10

Из граничных условий:

$$\begin{aligned} X_r(0) &= 0; & X_r'(0) &= 0; \\ X_r''(l) &= 0; & X_r'''(l) &= 0, \end{aligned}$$

получим:

$$C_1=0; \quad C_2=0; \quad C_3 = \frac{K_2(\lambda_r)}{K_1(\lambda_r)}; \quad C_4=1.$$

Условие (2.1.7) в этом случае приводит к уравнению:

$$K_2(\lambda_r)K_4(\lambda_r) - K_1^2(\lambda_r) + K_1(\lambda_r) = 0, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (2.2.5)$$



Уравнение собственных частот в данном случае записывается в виде:

$$K_2(\lambda_r)K_4(\lambda_r) - K_1^2(\lambda_r) = 0, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (2.2.6)$$

Решая (2.2.5) и (2.2.6) совместно, получим:

$$K_1(\lambda_r) = 0.$$

Это уравнение ненулевых корней не имеет, следовательно, в этом случае все собственные колебания испытывают магнитное демпфирование, изолированных мод нет.

Из рассмотренных случаев можно сделать общий вывод: если однородное стационарное магнитное поле действует по всей длине стержня, то изолированные моды существуют только при симметричных концевых условиях.

### 2.3 Электромагнитное возбуждение поперечных колебаний стержня

Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях однородного призматического стержня с током, создаваемым внешним источником э.д.с., при однородных (или приводимых к ним) граничных условиях. Вычислим обобщенные внешние электромагнитные силы:

$$Q_{(ЭМ)r} = j_B AB \int_{z_1}^{z_2} X_r(\alpha_r, z) dz = \frac{j_B AB \gamma_r}{\alpha_r}, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (2.3.1)$$

где  $\gamma_r$  и  $\alpha_r$  имеют те же выражения, что и в 2.1. Запишем дифференциальные уравнения, описывающие вынужденные колебания электропроводной балки под действием электромагнитной силы с учетом внешнего и внутреннего факторов затухания:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{\sigma B^2 \gamma_r}{l \alpha_r \rho Y_r^*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \dot{q}_n}{\alpha_n} + \frac{j_B AB \gamma_r}{\alpha_r m_0 Y_r^*}, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (2.3.2)$$

В безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{St} \frac{\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \dot{q}_n}{\alpha_n} + \mathbf{St} \frac{j_B \gamma_r}{\alpha_r Y_r^*}, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (2.3.3)$$

Из этих уравнений следует, что при  $\gamma_r = 0$  колебания данной моды не возбуждаются.

Для случая  $N$  активных участков для стержня получим обобщенную силу в виде:

$$Q_r = \int_0^l X_r dF_{\mathcal{M}(k)} = j_B A \sum_{k=1}^N B_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} X_r dz = j_B A \sum_{k=1}^N \frac{B_k \gamma_{kr}}{\alpha_r}, \quad (r=1,2,\dots),$$

а дифференциальные уравнения соответственно в форме:

$$\begin{aligned} & \ddot{q}_r + (\beta + \beta * p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \\ & = -\frac{\sigma}{\rho l \alpha_r Y_r * } \sum_{m,k=1}^N \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{q}_n}{\alpha_n} B_k B_m \gamma_{kr} \gamma_{mn} \right) + \frac{j_B}{\rho \alpha_r Y_r * } \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr}; \\ & \quad \{r=1,2,\dots\}. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Или в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} & \ddot{q}_r + (\beta + \beta * p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \\ & = -\frac{\mathbf{St}}{\alpha_r Y_r * } \sum_{m,k=1}^N \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{q}_n}{\alpha_n} B_k B_m \gamma_{kr} \gamma_{mn} \right) + \mathbf{St} \frac{j_B}{\alpha_r Y_r * } \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr}; \\ & \quad \{r=1,2,\dots\}. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Анализ уравнений, описывающих колебания стержня, показывает, что выводы, сделанные для струны, применимы и здесь.

Полученные в этой главе результаты указывают на дефекты акустических систем с электромагнитным воспроизводством звука. Один из них состоит в том, что для любой из систем существует определенный набор не воспроизводимых ею колебаний. Другой дефект, приводящий к образованию шумов, связан с зависимостью магнитной силы от всех обобщенных скоростей  $\dot{q}_n$ , входящих в первые члены правой части уравнений (1.4.7) и (2.3.5).

## 2.4 Колебания стержня в неоднородном магнитном поле

Рассмотрим плоские линейные вибрации проводящего однородного призматического стержня в неоднородном стационарном магнитном поле:

$$\vec{B} = B(z) \vec{y}^0.$$

Составив дифференциальные уравнения собственных колебаний стержня с учетом внутреннего и внешнего факторов затухания и электромагнитной силы, получим уравнение типа (2.1.3) из параграфа 2.1. Однако, входящая в него обобщенная сила теперь будет иметь несколько иной вид:

$$Q_r = -\frac{\sigma A}{l} \gamma_r^* \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^* \dot{q}_n), \quad (r = 1, 2, \dots),$$

где использованы прежние обозначения:

$$\gamma_n^* = \int_{z_1}^{z_2} X_n(\alpha_n z) B(z) dz, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\gamma_r^* = \int_{z_1}^{z_2} X_r(\alpha_r z) B(z) dz, \quad (r = 1, 2, \dots),$$

с той лишь разницей, что собственные амплитудные функции теперь в общем случае выражаются в функциях А.Н Крылова. Обобщенная масса имеет вид, записанный в параграфе 2.1, и зависит от граничных условий.

В результате получим систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{\gamma_r^* \sigma}{Y_r^* l \rho} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^* \dot{q}_n), \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (2.4.1)$$

Запишем эти уравнения в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{St} \frac{\gamma_r^*}{Y_r^*} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^* \dot{q}_n), \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (2.4.2)$$

При электромагнитном способе возбуждения колебаний приходим соответственно к дифференциальным уравнениям:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{St} \frac{\gamma_r^*}{Y_r^*} \sum_{n=1}^N (\gamma_n^* \dot{q}_n) + \mathbf{St} \frac{\gamma_r^* j_B(t)}{Y_r^*}, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (2.4.3)$$

Из полученных уравнений видно, что изолированные моды отвечают условиям

$$\gamma_r^* = 0, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (2.4.4)$$

Понятно, что эти условия всегда выполняется при симметричных концевых условиях и симметричном относительно середины стержня распределении магнитного поля, либо для четных, либо нечетных мод в зависимости от взаимной ориентации вектора  $\vec{B}$  слева и справа от середины.

Покажем для примера, что в несимметричном случае тоже можно подобрать такое распределение магнитного поля  $\vec{B}(z)$ , при котором выделяются изолированные моды. Рассмотрим консольную балку, для которой, как известно [26]:

$$X_k = C_3 K_3(\alpha_k z) + C_4 K_4(\alpha_k z), \quad (r = n = k = 1, 2, \dots), \quad (2.4.5)$$

причем 
$$C_3 = -\frac{K_2(\alpha_k)}{K_1(\alpha_k)}, \quad C_4 = 1.$$

В соответствии с условием (2.1.4) получим

$$K_2(\alpha_k) \int_0^1 K_3(\alpha_k z) B(z) dz = K_1(\alpha_k) \int_0^1 K_4(\alpha_k z) B(z) dz, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.4.6)$$

Каждую часть этого выражения можно приравнять какой-либо константе, например единице. Тогда получим систему двух интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \int_0^1 K_3(\alpha_k z) B(z) dz = 1/K_2(\alpha_k) \\ \int_0^1 K_4(\alpha_k z) B(z) dz = 1/K_1(\alpha_k) \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.4.7)$$

Представим искомую функцию распределения магнитного поля в виде:

$$B(z) = a_1^* \psi_1(z) + a_2^* \psi_2(z), \quad (2.4.8)$$

где  $\psi_1(z)$ ,  $\psi_2(z)$ - любые аналитические функции, выбираемые произвольно,  $a_1^*$ ,  $a_2^*$ . - неопределенные пока коэффициенты. В качестве  $\psi_1(z)$ ,  $\psi_2(z)$  можно взять функции, не имеющие особенностей в пределах от 0 до 1, например, степенные, тригонометрические, гиперболические или функции Крылова А.Н. При выборе этих функций учитываются условия (если таковые существуют), накладываемые на значение и знаки функции  $B(z)$  в конкретных точках. После подстановки (4.2.8) в (2.4.7) получим для каждой моды систему двух алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_1^* \int_0^1 K_3(\alpha_k z) \psi_1(z) dz + a_2^* \int_0^1 K_3(\alpha_k z) \psi_2(z) dz = 1/K_2(\alpha_k); \\ a_1^* \int_0^1 K_4(\alpha_k z) \psi_1(z) dz + a_2^* \int_0^1 K_4(\alpha_k z) \psi_2(z) dz = 1/K_1(\alpha_k); \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

из которых определяются коэффициенты  $a_1^*$  и  $a_2^*$ .

## 2.5 Колебания стержня в нестационарном магнитном поле

Переходим к рассмотрению задачи о линейных колебаниях однородного призматического стержня в нестационарном однородном магнитном поле [1]. Пусть магнитное поле  $\vec{B} = B(t)\vec{y}^0$  действует на активном участке  $\Delta z = z_2 - z_1$ , причем, как и в случае струны возможны два варианта расположения замыкающего контура: а) в плоскости  $Oxz$  и б) в плоскости  $Oyz$ . В случае а) индуцированные в стержне токи и соответствующие им магнитные силы выражаются соответственно формулами (1.6.1) и (1.6.2).

Запишем дифференциальное уравнение поперечных вибраций стержня с учетом внешнего и внутреннего демпфирующих факторов:

$$EJ \left( \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \beta * \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} \right) + m_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\sigma AB}{l} \left[ B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB}{dt} \left( \int_{z_1}^{z_2} u dz + a \Delta z \right) \right] = 0.$$

Это уравнение сводится к бесконечной системе линейных дифференциальных уравнений, которую запишем в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta * p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = - \frac{St}{Y_r} \gamma_r \sum_{n=1}^{\infty} \left[ B \gamma_n \dot{q}_n + \frac{dB}{dt} (\gamma_n q_n + a \Delta z) \right], \quad (2.5.1)$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}.$$

Условие отсутствия электромагнитного воздействия на колебание  $r$ -ого тона выражается тем же равенством, что и для струны.

При рассмотрении параметрического резонанса основного тона в случае б) достаточно использовать лишь уравнение:

$$\ddot{q}_1 + \left( \beta + \beta * p_1^2 + St \frac{\gamma_1^2}{Y_1} B^2 \right) \dot{q}_1 + \left( 1 + St \frac{\gamma_1^2}{Y_1} B \frac{dB}{dt} \right) q_1 = 0.$$

Для случая гармонического изменения магнитной индукции получим уравнение:

$$\ddot{q}_1 + \left( \beta + \beta * + St \frac{\gamma_1^2}{Y_1} \cos^2 \omega t \right) \dot{q}_1 + \left( 1 - St \frac{\gamma_1^2}{2Y_1} \omega \sin 2\omega t \right) q_1 = 0.$$

Приводим его к уравнению Хилла:

$$\ddot{\xi}_1 + \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \beta + \beta^* + \frac{\mathbf{St}}{Y_1} \gamma_1^2 \cos^2 \omega t \right)^2 \right] \xi_1 = 0. \quad (2.5.2)$$

Введенная здесь новая переменная  $\xi_1$  связана с  $q_1$  соотношением:

$$q_1 = \frac{1}{2} \xi_1 \exp \left[ - \int_0^t \left( \beta + \beta^* + \frac{\mathbf{St}}{Y_1} \gamma_1^2 \cos^2 \omega t \right) dt \right].$$

После перехода к независимой переменной  $\tau$ , получим:

$$\frac{d^2 \xi_1}{d\tau^2} + \left[ \frac{4}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \left( \beta + \beta^* + \frac{\mathbf{St}}{Y_1} \gamma_1^2 \cos^2 2\tau \right)^2 \right] \xi_1 = 0. \quad (2.5.3)$$

Уравнение (2.5.2) относится к типу (1.6.9). Если возможно пренебречь одновременно внешним и внутренним сопротивлениями, то получим уравнения типа (1.6.10) и, следовательно, можно воспользоваться результатами предыдущей главы.

### 3. Электромагнитное управление колебаниями струны и стержня

#### 3.1 Управление колебаниями при помощи реактивных электрических параметров

Считается, что система обладает динамическими свойствами, если имеется возможность контроля над какой-либо ее собственной частотой. В монографии [1] приведены две задачи о линейных колебаниях проводящей струны во внешнем нестационарном магнитном поле при наличии в замыкающем контуре конденсатора или катушки индуктивности. Воспроизведем их с тем, чтобы в последующих главах развить идею динамического управления колебаниями электропроводных систем при помощи внешнего магнитного поля.

Пусть закрепленные концы струны замкнуты идеальной электрической цепью, содержащей конденсатор емкости  $C$ . Образованный при этом электрический контур для простоты будем считать прямоугольным с размерами, указанными на рис. 11.

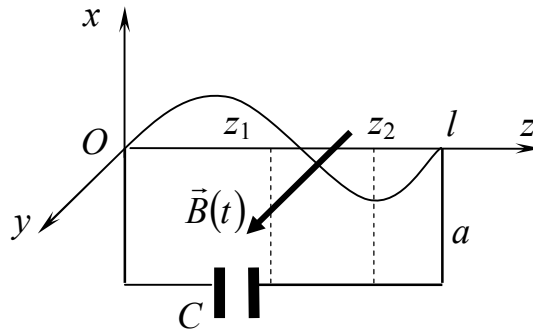


Рис. 11

Как и в главе 1.6 имеем в виду два случая расположения внешнего замыкающего контура.

Пренебрегая активным сопротивлением струны и подводящих проводов по сравнению с емкостным сопротивлением, считаем, что напряжение на конденсаторе  $U_c$  совпадает с напряжением на концах струны, возникающим за счет изменения магнитного потока, пересекающего контур:

$$U_c = B(t) \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB(t)}{dt} \int_{z_1}^{z_2} u dz + a \Delta z \frac{dB(t)}{dt}, \quad (3.1.1)$$

где  $a$  - размер контура по оси  $Ox$ .

Заряд  $Q$  на обкладках конденсатора связан с напряжением соотношением:

$$Q = CU_c,$$

а сила тока, индуцированного в цепи, определяется выражением:

$$I = \dot{Q} = C \left( 2 \frac{dB}{dt} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz + \frac{d^2 B}{dt^2} \int_{z_1}^{z_2} u dz + a \Delta z \frac{d^2 B}{dt^2} \right). \quad (3.1.2)$$

При взаимодействии с магнитным полем этот ток создает электромагнитную силу, действующую на каждый элемент  $dz$  активного участка струны, и направленную вдоль оси  $Ox$

$$dF_M = B \cdot I \cdot dz.$$

Учтем также силу внешнего механического сопротивления, действующую по всей длине струны, и запишем систему дифференциальных уравнений в виде:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \frac{Q_r}{m^*}, \quad \{r = 1, 2, \dots\}, \quad (3.1.3)$$

где  $Q_r$  - обобщенные силы, отнесенные к соответствующей обобщенной координате, а  $m_r^* = \int_0^l m_0 X_r^2 dz = \frac{m_0 l}{2}$  - обобщенные массы.

Вычислим обобщенную силу  $Q_r$  в случае периодического изменения магнитной индукции по закону:

$$B = B_0 \cos \omega t, \quad (3.1.4)$$

получим

$$\begin{aligned} Q_r &= - \int_{z_1}^{z_2} X_r dF_M = \\ &= \frac{4l^2 C B_0^2}{r\pi^2} \gamma_r \left[ \omega \sin 2\omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n \right) - \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\gamma_n}{n} \ddot{q}_n \right) + \right. \\ &\quad \left. + \omega^2 \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\gamma_n}{n} q_n \right) \right] + \frac{4l^2 C B_0^2 \gamma_r}{r\pi} a \Delta z \omega^2 \cos^2 \omega t, \\ &\quad \{r = 1, 2, \dots\}. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

После подстановки (3.1.5) в (3.1.3) имеем систему взаимосвязанных дифференциальных уравнений, поскольку правая часть каждого из них содержит все обобщенные координаты, а также их первые и вторые производные:



$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \\
& = \frac{8lCB_0^2}{r\pi^2 m_0} \gamma_r \left[ \omega \sin 2\omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n \right) - \right. \\
& \left. - \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\gamma_n}{n} \ddot{q}_n \right) + \omega^2 \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\gamma_n}{n} q_n \right) \right] + \\
& + \frac{8lCB_0^2}{r\pi m_0} \gamma_r a \Delta z \omega^2 \cos^2 \omega t; \quad \{r = 1, 2, \dots\}.
\end{aligned}$$

Полученные уравнения с одной стороны носят параметрический характер, так как содержат переменные коэффициенты, а с другой – присутствует силовое возбуждение, выраженное последним членом в правой части. Следовательно, в такой системе возможны два типа резонанса: обычный и параметрический. При расположении замыкающего контура в плоскости  $Oyz$ , возможен только параметрический резонанс. Заметим, что при  $\gamma_r = 0$  электромагнитное воздействие на колебание, соответствующее данному номеру  $r$ , не проявляется, то есть, выделяются изолированные моды.

В безразмерном виде имеем:

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \\
& = \mathbf{St}_c \frac{8}{r\pi^2} \gamma_r \left[ \omega \sin 2\omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n \right) - \right. \\
& \left. - \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\gamma_n}{n} \ddot{q}_n \right) + \omega^2 \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\gamma_n}{n} q_n \right) \right] + \\
& + \mathbf{St}_c \frac{8}{r\pi} \gamma_r a \Delta z \omega^2 \cos^2 \omega t; \quad \{r = 1, 2, \dots\}.
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Здесь  $\mathbf{St}_c = \frac{lCB_0^2}{m_0}$  - емкостное число Стюарта.

Если магнитное поле стационарно, т. е.  $B = \text{const}$ , приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{St}_c \frac{8}{\pi^2 r} \gamma_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \ddot{q}_n, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \tag{3.1.7}$$

На значения числа Стюарта в этом случае ограничения не накладываются. Выясним, как влияют электромагнитные члены, стоящие в правой части уравнений (3.1.7), на свойства системы, в частности на набор парциальных частот и факторов затухания. Этот вопрос необходимо исследовать, чтобы решить проблему усечения бесконечной системы уравнений (3.1.7). В Таблице 3 приведены результаты численных расчетов для нескольких первых приближений при следующих условиях:

$$z_1 = 0; \quad z_2 = \frac{3}{4}; \quad \beta = 0,1; \quad \mathbf{St}_c = 3,$$

$$\gamma_1 = 0,84; \quad \gamma_2 = 0,5; \quad \gamma_3 = 0,146; \quad \gamma_4 = 1.$$

Таблица 3

$r$	$\tilde{N} = 1$		$\tilde{N} = 2$		$\tilde{N} = 3$	
	$\omega_r$	$\tilde{h}_r$	$\omega_r$	$\tilde{h}_r$	$\omega_r$	$\tilde{h}_r$
1	0,371	0,018	0,604	0,018	0,630	0,018
2			1,955	0,049	1,954	0,049
3					2,997	0,50
4					3,904	0,049

Из таблицы видно, что первая парциальная частота  $\omega_1$  существенно меньше единицы, в то время как остальные парциальные частоты близки соответственно к 2, 3 и 4. Следовательно, можно сделать вывод, что электромагнитное воздействие в данном случае существенно воздействует только на первую парциальную частоту. Но одномодовым приближением для расчета  $\omega_1$  пользоваться нельзя, т. к. учет последующих парциальных колебаний увеличивает это значение почти вдвое. Достаточно близкие к истинным значения частот получаются в данном случае при  $\tilde{N} = 4$ . Очевидно, проблема усечения исходной системы уравнений решается в зависимости от значения числа Стюарта и требуемой точности вычисления частот.

Таким образом, наличие конденсатора во внешней электрической цепи при  $B = \text{const}$  приводит к увеличению квазинерционных коэффициентов уравнений (3.1.7). Электромагнитное воздействие в этом случае может существенно повлиять на частоты нескольких первых тонов.

Влияние электромагнитных членов на парциальные демпфированные частоты изолированных колебаний можно произвести и на основе расщепленной системы дифференциальных уравнений. Если в силу начальных условий наибольшим является колебание основного парциального тона, то в результате расщепления получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\left(1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2}\right) \ddot{q}_1 + \beta \dot{q}_1 + 1^2 q_1 = 0; \\
\left(1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2}\right) \ddot{q}_2 + \beta \dot{q}_2 + 2^2 q_2 = -\mathbf{St}_c \frac{8\gamma_1 \gamma_2}{1 \cdot 2 \pi^2} \ddot{q}_1; \\
\left(1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_3^2}{3^2 \pi^2}\right) \ddot{q}_3 + \beta \dot{q}_3 + 3^2 q_3 = -\mathbf{St}_c \frac{8\gamma_1 \gamma_3}{1 \cdot 3 \pi^2} \ddot{q}_1 - \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_2 \gamma_3}{2 \cdot 3 \pi^2} \ddot{q}_2; \\
\cdots; \\
\left(1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2}\right) \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + r^2 q_r = -\mathbf{St}_c \frac{8\gamma_r}{r \pi^2} \left( \frac{\gamma_1}{1} \ddot{q}_1 + \frac{\gamma_2}{2} \ddot{q}_2 + \dots + \frac{\gamma_{r-1}}{r-1} \ddot{q}_{r-1} \right); \\
\cdots
\end{array} \right. \quad (3.1.8)$$

Проинтегрировав систему уравнений (3.1.8) последовательно, получим рекуррентные формулы. Для первого парциального колебания:

$$q_1 = q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1),$$

где

$$\omega_1 = \frac{1}{1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2}} \sqrt{1^2 \left(1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2}\right) - \frac{\beta^2}{4}}, \quad \tilde{h}_1 = \frac{\beta}{2 \left(1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2}\right)},$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\tilde{h}_1}{\omega_1}$$

Для второго:

$$q_2 = q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2) +$$

$$+ \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_1 \gamma_2 q_{01} p_1^2 \exp(-\tilde{h}_1 t) \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1 - \theta_1)}{1 \cdot 2 \pi^2 \left(1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2}\right) \sqrt{(2^2 - 1^2)^2 + 4\tilde{h}_1(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2)(2^2 - 1^2) + 4 \cdot 1^2 (\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2)^2}},$$

где

$$p_1^2 = \frac{1^2}{1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{\tilde{h}_2}{\omega_2},$$

$$\omega_2 = \frac{1}{1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2}} \sqrt{2^2 \left(1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2}\right) - \frac{\beta^2}{4}}, \quad \tilde{h}_2 = \frac{\beta}{2 \left(1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2}\right)}.$$

Для третьего без учета вторичных процессов передачи энергии имеем:

$$\begin{aligned}
q_3 &= q_{03} \exp(-\tilde{h}_3 t) \cos(\omega_3 t + \varepsilon_3) + \\
&+ \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_1 \gamma_3 q_{01} p_1^2 \exp(-\tilde{h}_1 t) \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1 - \theta_1)}{1 \cdot 3\pi^2 \left(1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_3^2}{3^2 \pi^2}\right) \sqrt{(3^2 - 1^2)^2 + 4\tilde{h}_1(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_3)(3^2 - 1^2) + 4 \cdot 1^2(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_3)^2}} + \\
&+ \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_2 \gamma_3 q_{02} p_2^2 \exp(-\tilde{h}_2 t) \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2 - \theta_2)}{2 \cdot 3\pi^2 \left(1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_3^2}{3^2 \pi^2}\right) \sqrt{(3^2 - 2^2)^2 + 4\tilde{h}_2(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_3)(3^2 - 2^2) + 4 \cdot 2^2(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_3)^2}},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
p_2^2 &= \frac{2^2}{1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2}}, & \operatorname{tg} \varepsilon_3 &= \frac{\tilde{h}_3}{\omega_3}, \\
\omega_3 &= \frac{1}{1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_3^2}{3^2 \pi^2}} \sqrt{3^2 \left(1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_3^2}{3^2 \pi^2}\right) - \frac{\beta^2}{4}}, & \tilde{h}_3 &= \frac{\beta}{2 \left(1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_3^2}{3^2 \pi^2}\right)}.
\end{aligned}$$

Для  $r$ -ого парциального колебания:

$$\begin{aligned}
q_r &= q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) + \\
&+ \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_1 \gamma_r q_{01} p_1^2 \exp(-\tilde{h}_1 t) \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1 - \theta_1)}{1 \cdot r\pi^2 \left(1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2}\right) \sqrt{(r^2 - 1^2)^2 + 4\tilde{h}_1(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_r)(r^2 - 1^2) + 4 \cdot 1^2(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_r)^2}} + \\
&+ \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_2 \gamma_r q_{02} p_2^2 \exp(-\tilde{h}_2 t) \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2 - \theta_2)}{2 \cdot r\pi^2 \left(1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2}\right) \sqrt{(r^2 - 2^2)^2 + 4\tilde{h}_2(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_r)(r^2 - 2^2) + 4 \cdot 2^2(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_r)^2}} + \\
&+ \dots + \\
&+ \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_{r-1} \gamma_r q_{0r-1} p_{r-1}^2 \exp(-\tilde{h}_{r-1} t) \cos(\omega_{r-1} t + \varepsilon_{r-1} - \theta_{r-1})}{(r-1) \cdot r\pi^2 \left(1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2}\right)} \times \\
&\times \frac{1}{\sqrt{\left[r^2 - (r-1)^2\right]^2 + 4\tilde{h}_{r-1}(\tilde{h}_{r-1} - \tilde{h}_r)\left[r^2 - (r-1)^2\right] + 4 \cdot (r-1)^2(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_{r-1})^2}},
\end{aligned}$$

где

$$p_{r-1}^2 = \frac{(r-1)^2}{1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_{r-1}^2}{(r-1)^2 \pi^2}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_r = \frac{\tilde{h}_r}{\omega_r},$$

$$\omega_r = \frac{1}{1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2}} \sqrt{r^2 \left( 1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right) - \frac{\beta^2}{4}}, \quad \tilde{h}_r = \frac{\beta}{2 \left( 1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right)}.$$

Из этих формул видно, что вследствие электромагнитного воздействия, демпфированные парциальные частоты уменьшаются по сравнению с частотами затухающих колебаний при наличии только механического сопротивления. Причем наиболее существенному изменению подвергаются низшие частоты неизолированных парциальных колебаний.

Обычно в подобных задачах  $\beta \ll 1$ , следовательно, выполняется условие малой общей диссипации. Это позволяет записать решения (3.1.9) короче:

$$q_r = q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) +$$

$$+ \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_1 \gamma_r q_{01} p_1^2 \exp(-\tilde{h}_1 t) \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1 - \theta_1)}{1 \cdot r \pi^2 \left( 1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right) (r^2 - 1^2)} +$$

$$+ \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_2 \gamma_r q_{02} p_2^2 \exp(-\tilde{h}_2 t) \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2 - \theta_2)}{2 \cdot r \pi^2 \left( 1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right) (r^2 - 2^2)} + \dots + \quad (3.1.10)$$

$$+ \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_{r-1} \gamma_r q_{0r-1} p_{r-1}^2 \exp(-\tilde{h}_{r-1} t) \cos(\omega_{r-1} t + \varepsilon_{r-1} - \theta_{r-1})}{(r-1) \cdot r \pi^2 \left( 1 + \mathbf{St}_c \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right) \left[ (r^2 - (r-1)^2) \right]},$$

$$(r = 1, 2, \dots).$$

Заметим, что, аperiodическое гашение парциальных колебаний за счет электромагнитного воздействия, в этом случае невозможно, поскольку  $\beta \ll 1$ , а  $\mathbf{St}$  принимает только положительные значения.

Вернемся к параметрической задаче, описываемой уравнениями (3.1.6). Рассмотрим ее для случая, когда замыкающий контур расположен в плоскости  $Oyz$ , в одномодовом приближении ( $r = 1$ ), т.е. на основе уравнения:

$$\ddot{q}_1 + \frac{\beta - \mathbf{St}_c \frac{8}{\pi^2} \gamma_1^2 2\omega \sin 2\omega t}{1 + \mathbf{St}_c \frac{8}{\pi^2} \gamma_1^2 \cos^2 \omega t} \dot{q}_1 + \frac{1 - \mathbf{St}_c \frac{8}{\pi^2} \gamma_1^2 \omega^2 \cos^4 \omega t}{1 + \mathbf{St}_c \frac{8}{\pi^2} \gamma_1^2 \cos^2 \omega t} q_1 = 0. \quad (3.1.11)$$

Пусть  $\gamma_1 = 1$ , тогда уравнение (3.1.11) запишется в виде:

$$\ddot{q}_1 + \frac{\beta - \mathbf{St}_c \frac{8}{\pi^2} 2\omega \sin 2\omega t}{1 + \mathbf{St}_c \frac{8}{\pi^2} \cos^2 \omega t} \dot{q}_1 + \frac{1 - \mathbf{St}_c \frac{8}{\pi^2} \omega^2 \cos^4 \omega t}{1 + \mathbf{St}_c \frac{8}{\pi^2} \cos^2 \omega t} q_1 = 0. \quad (3.1.12)$$

Отсюда можно найти ограничения, которые накладываются на число Стюарта:

$$\frac{\beta \pi^2}{160\omega} < \mathbf{St}_c < \frac{\pi^2}{8\omega^2}. \quad (3.1.13)$$

Уравнение (3.1.12) приводится к типу Хилла [23-27], которое в свою очередь, путем разложения коэффициентов в усеченные ряды Фурье, сводится к уравнению Матье. Пользуясь диаграммой Айнса-Стретта для заданных условий, можно определить тип движения (затухающие колебания, незатухающие колебания или параметрический резонанс).

Переходим к рассмотрению второй задачи: о колебаниях проводящей струны, концы которой замкнуты на катушку индуктивности  $L$ . В общем случае магнитное поле считаем нестационарным, и действующим на участке  $\Delta l = z_2 - z_1$  (рис. 12).

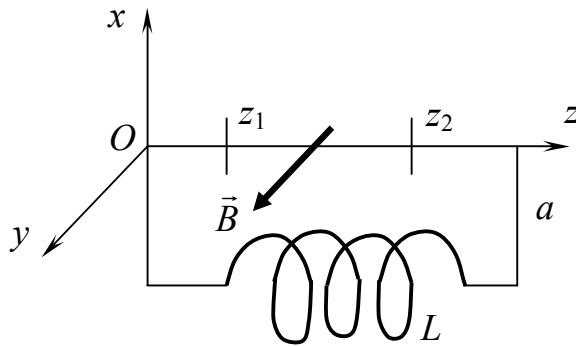


Рис. 12

Считаем, что индуктивное сопротивление  $\omega L$  значительно превосходит омическое  $R$ . За счет изменения магнитного потока, лежащего в плоскости  $Oxz$ , на концах катушки создается напряжение:

$$U_L = B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB}{dt} \int_{z_1}^{z_2} u dz + a \Delta z \frac{dB}{dt}.$$

В случае контура, лежащего в плоскости  $Oyz$ , последний член в этом выражении отсутствует.

С другой стороны:

$$U_L = L \frac{dI}{dt},$$

тогда

$$dI = \frac{1}{L} \left( B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB}{dt} \int_{z_1}^{z_2} u dz + a \Delta z \frac{dB}{dt} \right) dt.$$

Причем здесь  $L \neq 0$  в силу условия  $\omega L \gg R$ . Выражение для силы индуцированного тока при периодическом изменении индукции магнитного поля по закону:

$$B = B_0 \cos \omega t$$

и синусоидальных амплитудных формах запишется в виде:

$$I = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2B_0 l \gamma_n}{n\pi} q_n + a \Delta z B_0 \right) \cos \omega t.$$

При взаимодействии этих токов с внешним магнитным полем возникает электромагнитная сила, действующая на активном участке:

$$dF_{\text{ЭМ}} = \frac{B_0}{L} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2B_0 l \gamma_n}{n\pi} q_n + a \Delta z B_0 \right) \cos^2 \omega t \cdot dz.$$

Ей соответствует обобщенная сила, отнесенная к  $r$ -ой обобщенной координате:

$$Q_r = -\frac{2B_0^2 l \gamma_r}{r\pi L} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l \gamma_n}{n\pi} q_n + a \Delta z \right) \cos^2 \omega t, \quad (r = 1, 2, \dots).$$

В результате получим систему взаимосвязанных дифференциальных уравнений параметрического типа:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{4B_0^2 \gamma_r}{m_0 r \pi L} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l \gamma_n}{n\pi} q_n + a \Delta z \right) \cos^2 \omega t, \quad \{r = 1, 2, \dots\}.$$

Переходя к безразмерным величинам, получим:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{St}_L \frac{4\gamma_r}{r\pi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\gamma_n}{n\pi} q_n + a \Delta z \right) \cos^2 \omega t, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (3.1.14)$$

здесь  $\mathbf{St}_L = \frac{B_0^2 l}{m_0 L p_1^2}$  - индуктивное число Стюарта.

Отсюда видно, что электромагнитное воздействие на струну является одновременно и параметрическим и силовым. Исследование колебаний такого типа проведено в монографии [23]. В случае, когда замыкающий контур расположен в плоскости  $Oyz$ , электромагнитное воздействие является чисто параметрическим.

Если  $B = \text{const}$ , получим систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{St}_L \frac{8\gamma_r}{r\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} q_n, \quad \{r=1,2,\dots\}. \quad (3.1.15)$$

Исследуем вопрос усечения этой системы уравнений. В Таблице 4 приведены результаты расчетов частот для нескольких первых приближений при тех же условиях, что и в случае с конденсатором. Видно, что электромагнитное воздействие в этом случае приводит к увеличению парциальных частот. Самым значительным образом оно влияет только на первую частоту, причем одномодовое приближение, очевидно, не всегда может быть удовлетворительным. Выбор приближения зависит от числа Стюарта и требуемой точности расчетов.

Таблица 4

	$\tilde{N} = 1$	$\tilde{N} = 2$	$\tilde{N} = 4$
$r$	$\omega_r$	$\omega_r$	$\omega_r$
1	1,64	1,597	1,592
2		2,077	2,075
3			3,001
4			4,021

Запишем систему уравнений (3.1.15) в расщепленном виде при тех же начальных условиях, что в предыдущем случае:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_1 + \beta \dot{q}_1 + \left( 1^2 + \mathbf{St}_L \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2} \right) q_1 = 0; \\ \ddot{q}_2 + \beta \dot{q}_2 + \left( 2^2 + \mathbf{St}_L \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2} \right) q_2 = -\mathbf{St}_L \frac{8\gamma_1}{\pi^2} \frac{\gamma_2}{1 \cdot 2} q_1; \\ \ddot{q}_3 + \beta \dot{q}_3 + \left( 3^2 + \mathbf{St}_L \frac{8\gamma_3^2}{3^2 \pi^2} \right) q_3 = -\mathbf{St}_L \frac{8\gamma_1 \gamma_3}{1 \cdot 3 \pi^2} q_1 - \mathbf{St}_L \frac{8\gamma_2 \gamma_3}{2 \cdot 3 \pi^2} q_2; \\ \dots; \\ \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + \left( r^2 + \mathbf{St}_L \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right) q_r = -\mathbf{St}_L \frac{8\gamma_r}{r\pi^2} \left( \frac{\gamma_1}{1} q_1 + \frac{\gamma_2}{2} q_2 + \dots + \frac{\gamma_{r-1}}{r-1} q_{r-1} \right); \\ \dots \end{array} \right. \quad (3.1.16)$$



Эту систему уравнений нетрудно проинтегрировать последовательно, получив рекуррентные формулы, описывающие парциальные колебания с соответствующим набором частот.

Факторы затухания всех парциальных колебаний в этом случае одинаковы:

$$\tilde{h}_1 = \tilde{h}_2 = \dots = \tilde{h}_r = \frac{\beta}{2},$$

а демпфированные частоты соответственно:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\left(1^2 + \mathbf{St}_L \frac{8\gamma_1^2}{\pi^2}\right) - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}; \\ \omega_2 &= \sqrt{\left(2^2 + \mathbf{St}_L \frac{8\gamma_2^2}{\pi^2}\right) - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}; \\ &\dots\dots\dots; \\ \omega_r &= \sqrt{\left(r^2 + \mathbf{St}_L \frac{8\gamma_r^2}{\pi^2}\right) - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Из этих формул видно, что электромагнитное воздействие в этом случае изменяет жесткость системы, что позволяет увеличить демпфированные частоты неизолированных парциальных колебаний в зависимости от числа Стюарта. Аперриодическое гашение колебаний за счет изменения числа Стюарта в этом случае невозможно.

Таким образом, применение реактивных электрических элементов расширяет управляющие возможности электромагнитного воздействия на колебания электромеханических систем, избирательным образом изменяя их механические свойства. При постоянном магнитном поле емкость увеличивает квазиинерционный коэффициент, а индуктивность - квазиупругий. В нестационарном магнитном поле эти элементы создают параметрическое и силовое воздействие на систему. При этом имеется возможность существенно воздействовать указанным образом на низкочастотные колебания струны за исключением изолированных движений.

Заметим, что здесь рассмотрены только случаи линейных реактивных параметров, поэтому обобщенная координата и ее производные входят в дифференциальные уравнения линейно. В принципе возможно использование нелинейных реактивных параметров, что приведет к нелинейным задачам.

### 3.2 Электромагнитный способ частотного анализа

Установленные теоретически особенности электромагнитного воздействия на колебания электропроводных систем с распределенными параметрами можно использовать при решении некоторых прикладных вопросов динамики сложных систем. Например, при проектировании многих ответственных конструкций необходимо производить расчеты собственных частот, либо определять их экспериментально. Для этого существует много приближенных методов, однако, теория не позволяет учесть все особенности данной конструкции: неоднородность, дефекты соединений и концевых креплений и так далее. Это обстоятельство делает актуальными экспериментальные способы частотного анализа и требует их развития.

На основе изложенной в предыдущих главах теории предложим идею экспериментального способа частотного анализа проводящих одномерных конструкций с однородными граничными условиями, или приводимыми к ним хотя бы приближенно. Суть его покажем вначале на примере струны [1].

Допустим, что требуется определить спектр собственных демпфированных частот при колебаниях электропроводящей струны с закрепленными концами в среде с неопределенной механической диссипацией. Для экспериментального решения задачи замкнем концы струны электрической цепью, электрическое сопротивление которой ничтожно мало по сравнению с сопротивлением самой струны. Пусть струна совершает собственные колебания в однородном стационарном магнитном поле, вектор индукции которого направлен по нормали к плоскости колебаний струны. Плотность индуцированных при этом в струне токов можно выразить через обобщенные скорости парциальных колебаний:

$$j = \frac{\sigma B}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \dot{q}_n \int_{z_1}^{z_2} X_n dz \right) = \frac{2\sigma B}{\pi l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n. \quad (3.2.1)$$

При вычислении  $\gamma_n$  здесь использованы синусоидальные амплитудные функции. Как показано в первом разделе, парциальные частоты при этом близки к демпфированным частотам главных колебаний при условии одновременного действия механической и магнитной диссипации.

Индукцированные в струне токи при ее собственных колебаниях в магнитном поле легко регистрировать, включив в цепь частотный анализатор. Резонансным способом этот прибор определяет любое количество собственных частот:  $\omega_1, \dots, \omega_n, \dots$ , входящих в функцию тока  $j(t)$ . Так как электромагнитное воздействие на струну является избирательным, в каждом случае расположения активного участка выделяются изолированные моды. Поэтому этот набор включает в себя только частоты неизолированных парциальных колебаний. Чтобы определить все частоты необходимо несколько раз изменить ширину и расположение активного участка. Заметим, что присутствие магнитного поля само по себе влияет на демпфированные частоты колебаний системы, так как

создает магнитную диссипацию. Следовательно, необходимо установить соотношение между определяемыми экспериментально частотами в присутствии магнитного поля  $\omega_r$  и собственными частотами системы  $p_r^*$ , с учетом только механической диссипации. Используем систему (1.2.11) расщепленных дифференциальных уравнений, описывающую колебания струны в магнитном поле при наличии одного активного участка, запишем факторы затухания для колебания каждого парциального колебания:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1 &= \frac{1}{2} \left( \beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2} \right); \\ \tilde{h}_2 &= \frac{1}{2} \left( \beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2} \right); \\ &\dots\dots\dots; \\ \tilde{h}_r &= \frac{1}{2} \left( \beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Вторые слагаемые в правых частях этих выражений представляют собой факторы магнитной диссипации.

Известно, что собственные частоты колебаний системы  $p_r$ , определенные без учета всех видов сопротивления, соотносятся с демпфированными частотами  $\omega_r$  реальной системы следующим образом:

$$p_r = \sqrt{\omega_r^2 + \tilde{h}_r^2} = \sqrt{\omega_r^2 + \left( \frac{\beta}{2} + \mathbf{St} \frac{4\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right)^2}, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (3.2.3)$$

Колебания системы только при наличии механического сопротивления совершаются с частотами:

$$p_r^* = \sqrt{p_r^2 - \frac{\beta^2}{4}}, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (3.2.4)$$

Входящий в (3.2.4) и (3.2.5) коэффициент внешней механической диссипации  $\beta$  имеет одно значение при всех  $r$  и легко определяется экспериментально. Обычно по изменению амплитуды колебаний струны за определенное время вначале вычисляют логарифмический декремент затухания  $\delta_r$ , который, например, при линейной зависимости сопротивления от скорости связан с демпфированной частотой и фактором затухания соотношением:

$$\tilde{\delta}_r = \frac{2\pi\tilde{h}_r}{\sqrt{p_r^2 - \tilde{h}_r^2}} = \frac{2\pi\tilde{h}_r}{\omega_r}, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (3.2.5)$$

Затем отсюда можно найти  $h_r$ , так как  $\tilde{\delta}_r$  и  $\omega_r$  определены экспериментально:

$$\tilde{h}_r = \frac{\tilde{\delta}_r \omega_r}{2\pi}. \quad (3.2.6)$$

С учетом (3.2.2) находим коэффициент механической диссипации:

$$\beta = \frac{\tilde{\delta}_r \omega_r}{\pi} - \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi}. \quad (3.2.7)$$

Все входящие в правую часть этого выражения величины известны, так как часть из них задается, а часть определяется экспериментально. Значение  $\beta$  удобно находить по основному тону, для которого

$$\beta = \frac{\tilde{\delta}_1 \omega_1}{\pi} - \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{\pi}. \quad (3.2.8)$$

Теперь, пользуясь формулой (3.2.4), нетрудно вычислить демпфированные частоты колебаний реальной системы, в которой действует только механическое сопротивление.

Аналогичным способом можно определить собственные частоты колебаний реальных стержневых конструкций при однородных концевых условиях, или приводимых к ним.

В отличие от струны для стержня учтем внутреннее трение. Используем систему расщепленных дифференциальных уравнений (2.1.5) и запишем факторы затухания для каждого парциального колебания:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1 &= \frac{1}{2} \left( \beta + \beta^* + \mathbf{St} \frac{\gamma_1^2}{\alpha_1^2 Y_1^*} \right); \\ \tilde{h}_2 &= \frac{1}{2} \left( \beta + \beta^* p_2^2 + \mathbf{St} \frac{\gamma_2^2}{\alpha_2^2 Y_2^*} \right); \\ &\dots; \\ \tilde{h}_r &= \frac{1}{2} \left( \beta + \beta^* p_r^2 + \mathbf{St} \frac{\gamma_r^2}{\alpha_r^2 Y_r^*} \right); \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Факторы затухания для стержня, как и для струны, определяются по найденным экспериментально значениям  $\omega_r$  и  $\tilde{\delta}_r$ . Формулы (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5) и (3.2.6) справедливы и в этом случае при значениях  $\tilde{h}_r$ , определяемых из (3.2.9). Тогда суммарный фактор механического сопротивления (внешнего и внутреннего) вычисляется по формуле

$$\beta + \beta^* p_r^2 = \frac{\tilde{\delta}_r \omega_r}{\pi} - \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi}, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (3.2.10)$$

Механический фактор в этом случае является частотно-зависимым и его следует определять для каждого парциального колебания. Частоты колебаний реальной системы находятся по формуле:

$$p_r^* = \sqrt{p_r^2 - \frac{(\beta + \beta^* p_r^2)^2}{4}}, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (3.2.11)$$

Если требуется произвести частотный анализ неэлектропроводного стержня, то вдоль него можно наклеить тонкую проводящую пленку (сенсор) и ее подключить к частотному анализатору.

### 3.3 Активное электромагнитное гашение собственных колебаний одномерных проводящих систем

Иногда в технологических целях возникает необходимость устранения вибраций определенных парциальных тонов (частот) конкретных механических систем, сохранив при этом вибрации других тонов. В частности, такая проблема возникает в акустической звуковоспроизводящей технике, в отношении фоновых шумов. Избирательность электромагнитного воздействия на проводящие системы позволяет решать эту задачу. Изложим вначале идею метода применительно к струне [1].

Включим во внешнюю цепь, замыкающую концы струны, источник э.д.с., создающий переменный ток плотности  $j_B(t)$ , который в общем случае можно представить в виде гармонического ряда с любым набором частот при любых начальных фазах. В частности разложение функции  $j_B(t)$  можно произвести по частотам  $\omega_r$ , способ экспериментального определения которых изложен в предыдущем параграфе. Тогда обобщенные силы (все или их часть) совпадут с соответствующими диссипативными магнитными силами и увеличат факторы затухания всех или нескольких колебаний. Иными словами, при помощи усилителя с электронным частотным анализатором можно за счет внешнего источника э.д.с. увеличить индуцированные токи. В отличие от пассивной магнитной диссипации (за счет только индуцированных токов), предложенный способ электромагнитного демпфирования назовем активным.

Предположим, что при помощи устройства с частотным электронным анализатором удастся отфильтровать из всех индуцированных токов ток, с частотой  $r$ -ого парциального колебания и усилить его в  $\nu$  раз, одновременно скомпенсировав токи остальных частот. Тем самым мы исключим влияние на данное парциальное колебание со стороны остальных парциальных колебаний и увеличим его магнитный демпфирующий фактор. Тогда дифференциальное уравнение  $r$ -ого парциального колебания можно рассматривать отдельно от других, оно имеет вид:

$$\ddot{q}_r + \left( \beta + \nu \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = 0; \quad (r=1,2,\dots). \quad (3.3.1)$$

Увеличенный фактор затухания  $r$ -ого парциального колебания при этом составит:

$$\tilde{h}_r = \frac{1}{2} \left( \beta + \nu \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right), \quad (r=1,2,\dots). \quad (3.3.2)$$

Это, конечно, приводит к изменению собственной  $r$ -ой демпфированной частоты по сравнению с соответствующей частотой пассивной диссипации. Она уменьшится:

$$\omega_r = \sqrt{p_r^2 - \tilde{h}_r^2}.$$

Именно на эту частоту следует настраивать ток от внешнего источника э.д.с. Соответствующим подбором коэффициента усиления  $\nu$  можно добиться даже апериодического затухания  $r$ -ого колебания. Конечно, все вышеизложенное сделано в предположении, что  $\gamma_r \neq 0$ , в противном случае активное электромагнитное гашение данного колебания невозможно. Заметим, что активным образом можно гасить не только отдельные парциальные колебания, но и определенную группу или даже все колебания.

Аналогичную задачу рассмотрим для однородного призматического проводящего стержня с классическими однородными граничными условиями. После фильтрации токов и усиления тока с частотой  $r$ -ого парциального колебания в  $\nu$  раз получим уравнение:

$$\ddot{q}_r + \left( \beta + \beta^* p_r^2 + \nu \mathbf{St} \frac{\gamma_r^2}{\alpha_r^2 Y_r^*} \right) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = 0, \quad (r=1,2,\dots). \quad (3.3.3)$$

Из (3.3.3) следует, что фактор затухания  $r$ -ого парциального колебания составит:

$$\tilde{h}_r^* = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^*}{2} p_r^2 + \nu \mathbf{St} \frac{\gamma_r^2}{2\alpha_r^2 Y_r^*}. \quad (3.3.4)$$

Колебание  $r$ -ого тона при этом происходит с частотой:

$$\omega_r^* = \sqrt{p_r^2 - \tilde{h}_r^{*2}}.$$

Предложенный способ активного электромагнитного гашения вибраций можно применять для сложных электромеханических систем составного типа с однородными (или приводимыми к ним) граничными условиями. Если исследуемая конструкция не является электропроводной, активное гашение ее колебаний возможно при помощи наклеенных вдоль нее проводящих пленок (актуаторов), по которым пропускается электрический ток.

### 3.4 Физическая линейризация колебаний

Рассмотрим вынужденные нелинейные колебания ферромагнитной струны, в продольном магнитном поле. Пусть на струну действует поперечная вынуждающая сила интенсивности  $F(z, t)$ . С учетом магнитострикционного натяжения получим дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{EA}{2lm_0} \left[ \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz \right] \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \mp \frac{T^* \cos^2 \omega t}{m_0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F(z, t). \quad (3.4.1)$$

Из (3.4.1) получим систему неоднородных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r + \frac{E\pi^4 r^2}{4} q_r \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q_n^2 \pm \frac{T^*}{m_0} \left( \frac{r\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \omega t \cdot q_r = f_r(t), \quad (3.4.2)$$

$$\{r = 1, 2, \dots\},$$

где  $f_r(t)$ - обобщенная вынуждающая сила, отнесенная к соответствующей обобщенной координате.

В одномодовом приближении рассматривается только одно уравнение:

$$\ddot{q}_1 + \beta \dot{q}_1 + p_1^2 q_1 + \frac{E\pi^4}{4\rho l^4} q_1^3 \pm \frac{T^*}{m_0} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \omega t \cdot q_1 = f_1(t). \quad (3.4.3)$$

При положительной магнитострикции, приводящей к удлинению ферромагнитного образца, в этом уравнении последний член берется со знаком минус. В этом случае при некоторых условиях в установившемся режиме колебаний можно уравновесить члены:

$$\frac{E\pi^4}{4\rho l^4} q_1^3 \quad \text{и} \quad \frac{T^* \pi^2}{m_0 l^2} q_1 \cos^2 \omega t.$$

Таким образом, имеется возможность физически линейризовать уравнение (3.4.3). Очевидно, это возможно, если установившееся решение линейризованной системы выражается простой гармонической функцией той же частоты, что и периодическое изменение магнитного поля:

$$q_1 = q_{01} \cos \omega t.$$

При этом относительное магнитострикционное растяжение струны должно иметь амплитудное значение

$$\frac{\Delta l^*}{l} = \left( \frac{q_{01}\pi}{2l} \right)^2. \quad (3.4.4)$$

Полученное значение относительной амплитудной деформации зависит от  $q_{01}$ , поэтому необходимо, чтобы установившийся режим колебаний был устойчив. С энергетической точки зрения это возможно, так как имеются возбуждающая и диссипативная силы. Причем, энергия, вносимая в систему возбуждающей силой, пропорциональна первой степени амплитуды колебаний  $q_{01}$ , а диссипативная функция пропорциональна второй степени  $q_{01}$ . При этих условиях образуется устойчивый предельный цикл. Не скомпенсированные нелинейные члены так же влияют на энергетическое состояние системы, но в силу сходимости ряда, их можно рассматривать как малое возмущение, не нарушающее устойчивости колебаний. Величина  $q_{01}$  определяется из условия баланса энергии:

$$\int_0^{T_1} [f_1(t) - \beta \dot{q}_1] \dot{q}_1 dt = 0,$$

где  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ .

В соответствие амплитудному значению относительной магнитострикционной деформации можно поставить амплитудное значение магнитной индукции  $B_0$ , воспользовавшись графиком зависимости [28]

$$B_0 = f\left(\frac{\Delta l^*}{l}\right)$$

для данного ферромагнетика.

Итак, в качестве вывода отметим, что магнитострикционные свойства вибрационных систем можно использовать для физической линеаризации основного тона колебаний.



## 4. Электромагнитное управление поперечными колебаниями стержня при кинематическом возбуждении

### 4.1 Постановка задачи

В монографии [1] решена частная задача об электромагнитном демпфировании колебаний стержня при кинематическом возбуждении. Исследуем подобную задачу в общей постановке.

Рассмотрим линейные поперечные колебания однородного электропроводного стержня, изготовленного из немагнитного материала, при однородных классических граничных условиях в случае, когда основа, на которой находится стержень, совершает колебательные движения по закону  $x = x(t)$  [2]. Собственные амплитудные функции в общем случае выражаются функциями А.Н. Крылова:

$$X_n(z) = C_1 K_1(\alpha_n z) + C_2 K_2(\alpha_n z) + C_3 K_3(\alpha_n z) + C_4 K_4(\alpha_n z), \quad \{n = 1, 2, \dots\}.$$

Будем полагать, что концы стержня соединяются замкнутой идеальной электрической цепью, а по всей длине стержня действует однородное магнитное поле, стационарное в рассматриваемой системе отсчета, а вектор индукции  $\vec{B}$  магнитного поля направлен перпендикулярно плоскости колебаний стержня по оси  $Oy$  (рис. 13). На рисунке для определенности изображен двухопорный стержень, хотя рассматривается пока общий случай и граничные условия не конкретизируются. Пусть магниты, создающие поле, располагаются на той же основе, что и стержень. Система отсчета  $Oxyz$ , связанная с основой, при этом является неинерциальной.

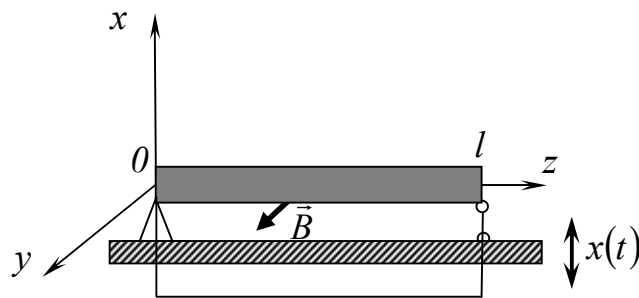


Рис. 13

При составлении дифференциального уравнения колебаний стержня учтем внешний и внутренний факторы демпфирования. Внешнее сопротивление будем считать вязким, т.е. предположим, что на элемент стержня действует сила трения  $\beta m_0 \frac{\partial u}{\partial t} dz$ , пропорциональная скорости движения.

Для учета внутреннего трения воспользуемся зависимостью (2.1.2) и будем считать, что коэффициент внутреннего сопротивления  $\beta^*$  не зависит от частоты и не является функцией магнитной индукции.

Пользуясь принципом Даламбера, составим дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня с учетом внешнего и внутреннего сопротивления, электромагнитной силы и сил инерции:

$$EJ \left( \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \beta^* \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} \right) + m_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\sigma B^2 A}{l} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial z} dz = -m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}. \quad (4.1.1)$$

где  $u(z, t)$  – динамическая функция смещений в направлении оси  $Ox$ .

Начальные условия в общем случае можно записать в виде:

$$u(z, 0) = f_1(z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{z=0} = f_2(z).$$

Применим к дифференциальному уравнению (4.1.1) процедуру Фурье, представив функцию смещения в виде ряда по собственным амплитудным функциям  $X_n(z)$ :

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(z)$$

тогда начальные условия примут вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n(0) X_n(z) = f_1(z), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(0) X_n(z) = f_2(z). \quad (4.1.2)$$

После преобразований, с учетом ортогональности амплитудных функций учитывая, что  $\alpha_n^4 = \frac{p_n^2 m_0}{EJ}$ , уравнение (4.1.1) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{m_0 \chi_r}{m_r^*} + \frac{Q_r}{m_r^*}, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (4.1.3)$$

Здесь, как и в разделе 2, использованы обозначения обобщенных масс:

$$m_r^* = m_0 \int_0^l X_r^2 dz = m_0 Y_r^*, \quad \text{где } Y_r^* = \int_0^l X_r^2 dz,$$

обобщенных сил инерции:

$$\chi_r = \ddot{x} \int_0^l X_r dz$$

и обобщенных электромагнитных сил:

$$Q_r = -\frac{\sigma B^2 A}{l} \int_0^l X_r dz \sum_{n=1}^{\infty} \left( \dot{q}_n \int_0^l X_n dz \right) = -\frac{\sigma B^2 A \gamma_r}{l \alpha_r} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \dot{q}_n \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \right),$$

где  $\gamma_n = \int_0^l X_n dz$ ,  $\gamma_r = \int_0^l X_r dz$ .

Запишем уравнения (4.1.3) в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{\chi_r \gamma_r}{Y_r^*} - \mathbf{St} \frac{\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \dot{q}_n, \quad \{r=1,2,\dots\}, \quad (4.1.4)$$

где  $\mathbf{St} = \frac{\sigma B^2}{\rho p_1}$  - число Стюарта.

Введенные обобщенные координаты не являются главными, поскольку дифференциальные уравнения зависимы между собой. Однако эта зависимость является линейной и легко может быть устранена при помощи метода последовательных приближений. Основанием для применения этого метода служит слабая взаимосвязь между парциальными колебаниями посредством электромагнитного взаимодействия.

Представим функцию кинематического возбуждения  $x(t)$  в виде тригонометрического ряда:

$$x(t) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin \omega k t + b_k \cos \omega k t) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \sin(\omega_k^* t + \alpha_k),$$

где  $b_0$ ,  $a_k$  и  $b_k$  - коэффициенты ряда Фурье для функции  $x(t)$ , или

$$a_k^* = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \omega_k^* = k\omega, \quad \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{a_k}{b_k}, \quad (k=1,2,\dots).$$

С учетом этого система (4.1.4) примет вид:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{\gamma_r}{Y_r^*} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \omega_k^* \sin(\omega_k^* t + \alpha_k) - \mathbf{St} \frac{\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \dot{q}_n, \quad (4.1.5)$$

$$\{r=1,2,\dots\}.$$

Уравнения (4.1.5) можно приближенно заменить системой расщепленных уравнений, которую можно интегрировать последовательно:

$$\begin{cases}
\ddot{q}_1 + \left( \beta + \beta^* 1^2 + \mathbf{St} \frac{\gamma_1^2}{\alpha_1^2 Y_1^*} \right) \dot{q}_1 + q_1 = -\frac{\gamma_1}{Y_1^*} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \sin(\omega_k^* t + \alpha_k), \\
\ddot{q}_2 + \left( \beta + \beta^* 2^2 + \mathbf{St} \frac{\gamma_2^2}{\alpha_2^2 Y_2^*} \right) \dot{q}_2 + 2^2 q_1 = -\frac{\gamma_2}{Y_2^*} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \sin(\omega_k^* t + \alpha_k) - \mathbf{St} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\alpha_1 \alpha_2 Y_2^*} \dot{q}_1, \\
\cdots \\
\ddot{q}_r + \left( \beta + \beta^* r^2 + \mathbf{St} \frac{\gamma_r^2}{\alpha_r^2 Y_r^*} \right) \dot{q}_r + r^2 q_r = -\frac{\gamma_r}{Y_r^*} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \sin(\omega_k^* t + \alpha_k) - \mathbf{St} \frac{\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{n=1}^{r-1} \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \dot{q}_n.
\end{cases}
\tag{4.1.6}$$

Следует отметить, что применяемый метод справедлив только для малых частот, поэтому в усеченной системе следует оставить конечное число уравнений.

Начальные амплитуды и фазы для каждого из дифференциальных уравнений системы (4.1.6) определяются из начальных условий (4.1.2).

Последовательно интегрируя уравнения системы (4.1.6), получим рекуррентные формулы. Оставив только незатухающую часть решения, при условии малой диссипации запишем:

$$\begin{aligned}
q_r = \mathbf{St} \frac{\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{n=1}^{r-1} \frac{\gamma_n n^2}{\alpha_n (n^2 - r^2)} q_{on} \exp(-\tilde{h}_n t) \sin(\omega_n t + \varepsilon_n + \theta_n) + \\
+ \frac{\gamma_r}{Y_r^*} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^*}{\omega_k^{*2} - r^2} \sin(\omega_k^* t + \alpha_k + \theta_k),
\end{aligned}
\tag{4.1.7}$$

$$(r = 1, 2, \dots).$$

При записи знаменателей суммируемых членов в (4.1.7) отброшены величины, малые по сравнению с безразмерными частотами  $r^2$  и  $k^2$ . Факторы затухания  $\tilde{h}_r$  определяются выражениями, введенными в разделе 2.1. Значения  $\theta_r$  и  $\theta_n$  определяются из соотношений:

$$\operatorname{tg} \theta_n = \frac{\tilde{h}_n}{\omega_n^*} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \theta_k = \frac{\tilde{h}_k}{\omega_k^*}.$$

Из уравнений (4.1.6) и их решений (4.1.7) видно, что электромагнитное воздействие и кинематическое возбуждение на парциальные колебания одновременно отсутствуют при выполнении условия:

$$\gamma_r = 0, \quad \text{т. е.} \quad \int_0^l X_r dz = 0, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (4.1.8)$$

Следовательно, они являются избирательными по отношению к парциальным колебаниям, соответствующим  $r$ , а полученные соотношения (4.1.8) являются условиями выделения изолированных мод. Из анализа полученных решений также следует вывод о перераспределении энергии от низших мод ко всем высшим, для которых не выполняются условия (4.1.8).

При решении системы необходимо учесть интервал значений числа Стюарта, которое является критерием электромагнитного воздействия и существенно влияет на фактор затухания и демпфированные частоты колебаний. Ограничения для числа Стюарта записываются в таком же виде, как и в главе 2.1.

Таким образом, в случае поперечных колебаний однородного призматического стержня при кинематическом возбуждении, когда магнитное поле действует по всей длине стержня, можно сделать вывод о совпадении условий отсутствия электромагнитного и кинематического воздействия для каждого парциального колебания.

## 4.2 Анализ краевой задачи при однородных граничных условиях

Приступим к рассмотрению линейных поперечных колебаний однородного электропроводного стержня, изготовленного из немагнитного материала в нескольких конкретных случаях граничных условиях, когда основа, на которой находится стержень, совершает колебательные движения по закону:

$$x = x_0 \sin \omega t.$$

Для двухопорного стержня:

$$\begin{aligned} X_n(0) = 0; & \quad X_n''(0) = 0; \\ X_n(l) = 0; & \quad X_n''(l) = 0. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Амплитудные функции при этом синусоидальны:

$$X_n = \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Действующее магнитное поле по-прежнему считаем однородным, стационарным и распределенным по всей длине стержня. С учетом этого, после преобразований уравнение (4.1.1) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* r^2) \dot{q}_r + r^2 q_r = \frac{4x_0 \omega^2 \sin \omega t}{\pi r} \gamma_r - \mathbf{st} \frac{8\gamma_r}{\pi^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n, \quad \{r = 1, 2, 3, \dots\}, \quad (4.2.2)$$



$$q_3 = \frac{4x_0\omega^2 \sin(\omega t + \alpha_3)}{3\pi\sqrt{(\omega^2 - 3^2)^2 + 4\tilde{h}_3^2\omega^2}} + \quad (4.2.6)$$

$$+ \mathbf{St} \frac{8 \cdot 4x_0\omega^3 \cos(\omega t + \alpha_1 + \alpha_3)}{1 \cdot 3\pi^3 \sqrt{\left[ (\omega^2 - 1^2)^2 + 4\tilde{h}_1^2\omega^2 \right] \cdot \left[ (\omega^2 - 3^2)^2 + 4\tilde{h}_3^2\omega^2 \right]}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{2\tilde{h}_3\omega}{\omega^2 - 3^2}, \quad \tilde{h}_3 = \frac{1}{2} \left( \beta + \beta * 3^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_3^2}{3^2 \pi^2} \right).$$

Последовательное интегрирование системы (4.2.4) можно продолжить. Однако из записанных выше решений уже можно сделать определенные выводы. Во-первых, из (4.2.5) вытекает условие возникновения резонанса первого порядка:

$$\omega^2 = 1^2 - 2\tilde{h}_1^2. \quad (4.2.7)$$

Видно, что при резонансе первого порядка в решении (4.2.6) резонирующим является последний член. Можно сделать и общий вывод: резонанс первого порядка проявляется во всех последующих парциальных колебаниях.

Во-вторых, в случае возникновения резонанса третьего порядка использованный выше способ усечения системы дифференциальных уравнений, очевидно, не подходит. В этом случае усечение системы следует начинать с третьего уравнения, оставив в его правой части вынуждающую силу и член содержащий  $\dot{q}_3$ . В первом уравнении при этом необходимо, кроме вынуждающей силы, сохранить два члена суммы, стоящей в правой части (4.2.4). Интегрирование системы в этом случае начинается с уравнения, соответствующего третьему парциальному колебанию.

Таким образом, проанализировав полученные решения, можно сказать, что способ усечения системы в резонансном случае зависит не от начальных условий, а от порядка возникающего резонанса.

В резонансных случаях следует обращать внимание и на проблему вторичных процессов перекачки энергии между парциальными колебаниями. Очевидно, в этом случае следует проводить сравнительный анализ членов, возникающих при вторичной передаче энергии от резонирующего движения, с другими функциями, стоящими в правой части данного дифференциального уравнения.

Очевидно, резонанс  $r$ -ого порядка происходит при условии:

$$\omega = \sqrt{r^2 - 2\tilde{h}_r^2}, \quad (\kappa = 1, 3, 5, \dots). \quad (4.2.8)$$

Заметим, что в фактор затухания  $\tilde{h}_r$  входит число Стюарта, следовательно, при помощи электромагнитного воздействия можно регулировать (подстраивать) резонансную частоту.

При помощи метода энергетического баланса определим значение числа Стюарта, при котором для первого парциального колебания энергия кинематического возбуждения компенсируется работой диссипативных сил. При ненулевых начальных условиях, в этом случае, получим периодическое решение:

$$q_1 = c_1 \sin t,$$

где  $c_1$  - амплитуда установившихся колебаний.

Приравниваем работу сил инерции за счет кинематического воздействия, совершаемую за один период, к работе диссипативных сил за то же время:

$$4 \int_0^{T_1/4} \left( \beta + \beta^* + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{\pi^2} \right) c_1^2 \cos^2 t dt = 4 \int_0^{T_1/4} \frac{4x_0 \omega^2 \sin \omega t}{\pi} c_1 \cos t dt,$$

где  $T_1 = 2\pi$ .

После интегрирования полученного выражения и преобразований имеем:

$$\mathbf{St} = \frac{\pi^2}{8\gamma_1^2} \left( \frac{16x_0 \omega}{c_1 \pi^2} - \beta - \beta^* \right).$$

Полученная формула устанавливает однозначную связь между числом Стюарта и амплитудой установившихся колебаний  $c_1$ .

Рассмотренную выше постановку задачи можно отнести к случаю пассивного электромагнитного демпфирования колебаний, вызванных кинематическим возбуждением. Однако более эффективным на практике может оказаться активное электромагнитное гашение нежелательных вибраций. Принципиальная его суть состоит во взаимной компенсации двух вынуждающих факторов: кинематического и электромагнитного.

Запишем дифференциальное уравнение колебаний стержня с учетом кинематического и электромагнитного факторов возбуждения в случае, когда активный участок совпадает с длиной стержня [4]:

$$\begin{aligned} EJ \left( \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \beta^* \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} \right) + m_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\sigma B^2 A}{l} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} dz = \\ = m_0 x_0 \omega^2 \sin \omega t + j_B B A l. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что кинематическое воздействие полностью компенсируется электромагнитным, когда плотность внешнего тока изменяется по закону:

$$j_B = - \frac{m_0 x_0 \omega^2}{B A l} \sin \omega t.$$



### 4.3 Случай произвольного активного участка

Рассмотрим случай, когда при постановке задачи магнитное поле действует на участке  $\Delta z = z_2 - z_1$ , где  $0 < z_1 < z_2 < l$ . При записи уравнения поперечных колебаний стержня по сравнению с (4.1.1) изменятся только пределы интегрирования в электромагнитном члене:

$$EJ \left( \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \beta^* \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} \right) + m_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\sigma B^2 A}{l} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz = -m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}. \quad (4.3.1)$$

Такая постановка задачи приобретает большую общность, поскольку возникает дополнительная возможность управляющего электромагнитного воздействия за счет изменения положения и длины активного участка.

Обобщенные электромагнитные силы в этом случае записываются в виде:

$$Q_r = -\frac{\sigma B^2 A}{l} \int_{z_1}^{z_2} X_r dz \sum_{n=1}^{\infty} \left( \dot{q}_n \int_0^l X_n dz \right) = -\frac{\sigma B^2 A \gamma_r^*}{l \alpha_r} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \dot{q}_n \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \right),$$

где  $\gamma_n = \int_0^l X_n dz$ ,  $\gamma_r^* = \int_{z_1}^{z_2} X_r dz$ .

Уравнение (4.3.1) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые запишем в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{\chi_r \gamma_r}{Y_r^*} - \mathbf{St} \frac{\gamma_r^*}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \dot{q}_n, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (4.3.2)$$

Из уравнений (4.3.2) вытекают, условие отсутствия электромагнитного воздействия:

$$\gamma_r^* = \int_{z_1}^{z_2} X_r dz = 0, \quad (4.3.3)$$

а также условие отсутствия кинематического воздействия:

$$\gamma_r = \int_0^l X_r dz = 0. \quad (4.3.4)$$

Получается, что в общем случае условия отсутствия электромагнитного и кинематического воздействия различаются.

Рассмотрим пример двухопорного стержня при синусоидальном законе кинематического возбуждения:

$$x = x_0 \sin \omega t.$$

Уравнение поперечных колебаний стержня в этом случае имеет вид:

$$EJ \left( \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \beta^* \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} \right) + m_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\sigma B^2 A}{l} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz = -m_0 x_0 \omega^2 \sin \omega t. \quad (4.3.5)$$

С учетом синусоидальности собственных амплитудных функций после соответствующих преобразований уравнение (4.3.5) приводится к системе дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{4x_0 \omega^2 \sin \omega t}{\pi r} \gamma_r - \frac{8\sigma B^2 A}{m_0 \pi^2 r} \gamma_r^* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{q}_n}{n} \gamma_n, \quad (4.3.6)$$

$$\{r = 1, 2, \dots\},$$

где

$$\gamma_r = \sin \frac{r\pi(z_1 + z_2)}{2l} \sin \frac{r\pi(z_2 - z_1)}{2l},$$

$$\gamma_n = \sin \frac{n\pi(z_1 + z_2)}{2l} \sin \frac{n\pi(z_2 - z_1)}{2l},$$

$$\gamma_r^* = \sin^2 \frac{\pi r}{2}.$$

Или в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* r^2) \dot{q}_r + r^2 q_r = -\frac{4x_0 \omega^2 \sin \omega t}{\pi r} \gamma_r^* - \mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{\pi^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (4.3.7)$$

От (4.3.7) переходим к системе расцепленных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_1 + \left( \beta + \beta^* 1^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2} \right) \dot{q}_1 + 1^2 q_1 = \frac{4x_0 \omega^2 \sin \omega t}{1\pi} \gamma_1^*, \\ \ddot{q}_2 + \left( \beta + \beta^* 2^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2} \right) \dot{q}_2 + 2^2 q_2 = \frac{4x_0 \omega^2 \sin \omega t}{2\pi} \gamma_2^* - \mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_2}{2\pi^2} \dot{q}_1, \\ \dots \\ \ddot{q}_r + \left( \beta + \beta^* r^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right) \dot{q}_r + r^2 q_r = \frac{4x_0 \omega^2 \sin \omega t}{\pi r} \gamma_r^* - \mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{\pi^2 r} \sum_{n=1}^{r-1} \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n, \\ \dots \end{array} \right. \quad (4.3.8)$$

В результате последовательного интегрирования получим рекуррентные формулы, которые запишем, сохранив только незатухающие члены. Для первого тона:

$$q_1 = \frac{4x_0\omega^2\gamma_1^* \sin(\omega t + \alpha_1)}{1\pi\sqrt{(\omega^2 - 1)^2 + 4\tilde{h}_1^2\omega^2}}, \quad (4.3.9)$$

$$\text{где } \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{2\tilde{h}_1\omega}{\omega^2 - 1^2}, \quad \tilde{h}_1 = \frac{1}{2}\left(\beta + \beta * 1^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{1^2\pi^2}\right).$$

Для третьего:

$$q_3 = \frac{4x_0\omega^2\gamma_3^* \sin(\omega t + \alpha_3)}{3\pi\sqrt{(\omega^2 - 3^2)^2 + 4\tilde{h}_3^2\omega^2}} +$$

$$+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_1\gamma_2 \cdot 4x_0\omega^3 \cos(\omega t + \alpha_1 + \alpha_3)}{1 \cdot 3\pi^3 \sqrt{\left[ (\omega^2 - 1^2)^2 + 4\tilde{h}_1^2\omega^2 \right] \cdot \left[ (\omega^2 - 3^2)^2 + 4\tilde{h}_3^2\omega^2 \right]}}, \quad (4.3.10)$$

$$\operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{2\tilde{h}_3\omega}{\omega^2 - 3^2}, \quad \tilde{h}_3 = \frac{1}{2}\left(\beta + \beta * 3^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_3^2}{3^2\pi^2}\right).$$

При записи решений (4.3.9) и (4.3.10) не учитывались слагаемые, содержащие разность факторов затухания, представляющие собой малые величины.

Анализ системы уравнений (4.3.8) и полученных решений позволяет сделать следующие выводы:

- 1) электромагнитное воздействие на  $r$ -ю моду отсутствует при условии  $\gamma_r = 0$ ;
- 2) четные моды кинематическим способом не возбуждаются так как  $\gamma_r^* = 0$ .

#### 4.4 Колебания стержня в магнитном поле при одновременном кинематическом и силовом воздействии

Рассмотрим задачу, когда кроме кинематического возбуждения стержень подвергается силовому воздействию со стороны распределенной нагрузки (рис. 14) [3]:

$$Q(z, t) = f(z)\tilde{q}(t).$$

Пусть магнитное поле является неоднородным, нестационарным и действует по всей длине стержня. Для данной постановки задачи дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня имеет вид:

$$\begin{aligned}
EJ \left( \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \beta^* \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} \right) + m_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\sigma B^2 A}{l} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} dz = \\
= -m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + f(z) \tilde{q}(t).
\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

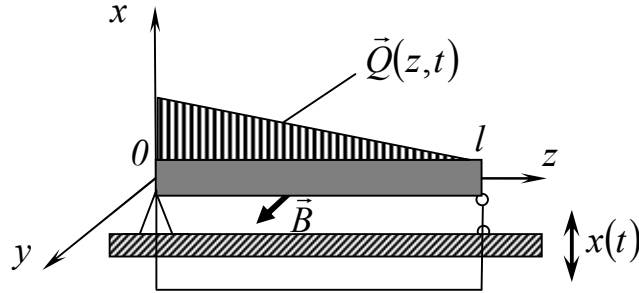


Рис. 14

После применения к данному уравнению процедуры Фурье, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \frac{Q_r^* m_0}{m_r^*} - \frac{\Phi_r m_0}{m_r^*} - \frac{Q_r}{m_r^*}, \quad \{r=1,2,\dots\}, \tag{4.4.2}$$

Здесь использованы обозначения:

$$Q_r^* = \tilde{q}(t) \int_0^l X_r f(z) dz = \tilde{q}(t) \delta_r^* \quad \text{- обобщенные силы распределенной нагрузки,}$$

$$\text{где } \delta_r^* = \int_0^l X_r(z) f(z) dz;$$

$$m_r^* = m_0 \int_0^l X_r^2 dz = m_0 Y_r^* \quad \text{- обобщенные массы, где } Y_r^* = \int_0^l X_r^2 dz;$$

$$Q_r = -\frac{\sigma B^2 A}{l} \int_0^l X_r dz \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( \dot{q}_n \int_0^l X_n dz \right) = -\frac{\sigma B^2 A \gamma_r}{l \alpha_r} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( \dot{q}_n \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \right) \quad \text{- обобщенные маг-}$$

$$\text{нитные силы, где } \gamma_n = \int_0^l X_n dz, \quad \gamma_r = \int_0^l X_r dz;$$

$$\Phi_r = \ddot{x} \int_0^l X_r dz = \ddot{x} \gamma_r \quad \text{- обобщенные силы инерции.}$$

Уравнения (4.4.2) после преобразований приводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \frac{\tilde{q}(t) \delta_r^*}{Y_r^*} - \frac{\Phi_r \gamma_r}{Y_r^*} - \mathbf{St} \frac{\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \dot{q}_n, \quad (4.4.3)$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}.$$

Анализ полученного уравнения (4.4.3) позволяет сделать выводы:

- 1) моды, для которых выполняется условие  $\gamma_r = 0$ , являются изолированными от электромагнитного воздействия и кинематического возбуждения;
- 2)  $r$ -е парциальное колебание изолировано от силового воздействия со стороны распределенной нагрузки  $\delta_r^* = 0$ .

Постановку данной задачи можно обобщить, если принять, что магнитное поле действует на участке  $\Delta z = z_2 - z_1$ , где  $0 < z_1 < z_2 < l$ , а распределенная нагрузка  $Q(z, t)$  действует на участке стержня от  $\Delta' z = z'_2 - z'_1$ .

В этом случае задача о поперечных колебаниях стержня приводится к системе уравнений:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \frac{Q_r^* m_0}{m_r^*} - \frac{\Phi_r m_0}{m_r^*} - \frac{Q_r}{m_r}, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (4.4.4)$$

где  $Q_r^* = \tilde{q}(t) \int_{z'_1}^{z'_2} X_r(z) f(z) dz$  - обобщенные силы распределенной нагрузки,

В безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \frac{\tilde{q}(t) \delta_r^*}{Y_r^*} - \frac{\Phi_r \gamma_r}{Y_r^*} - \mathbf{St} \frac{\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \dot{q}_n, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (4.4.5)$$

где использованы следующие обозначения:

$$Q_r = -\frac{\sigma B^2 A}{l} \int_{z_1}^{z_2} X_r dz \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( \dot{q}_n \int_{z_1}^{z_2} X_n dz \right) = -\frac{\sigma B^2 A \gamma_r^*}{l \alpha_r} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( \dot{q}_n \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \right)$$

где  $\gamma_n = \int_0^l X_n dz$ ,  $\gamma_r^* = \int_{z_1}^{z_2} X_r dz$ ;  $\Phi_r = \ddot{x} \int_0^l X_r dz = \ddot{x} \gamma_r$ ,  $\gamma_r = \int_0^l X_r dz$ .

$$Q_r^* = \tilde{q}(t) \int_{z'_1}^{z'_2} X_r(z) f(z) dz = q(t) \delta_r'^*, \quad \delta_r'^* = \int_{z'_1}^{z'_2} X_r(z) f(z) dz.$$

Анализируя уравнения (4.4.5), заключаем, что:

- 1) при  $\gamma_r = 0$  изолируются колебания от кинематического возбуждения;
- 2) при  $\gamma_r^* = 0$ , отсутствует электромагнитное воздействие;
- 3) при условии  $\delta_r'^* = 0$ , моды являются изолированными от силового

воздействия распределенной нагрузки.

Таким образом, в общем случае все три условия различаются между собой.

## 5 Колебания электропроводной пружины в магнитном поле

### 5.1 Собственные колебания электропроводной пружины в однородном стационарном магнитном поле

Рассмотрим собственные колебания цилиндрической пружины, изготовленной из немагнитного электропроводного материала, во внешнем стационарном радиальном магнитном поле индукции  $\vec{B} = B(a)\vec{r}^0$ , причем  $a > r_0$ , где  $r_0$  - радиус малой центральной зоны [8-9] (рис. 15).

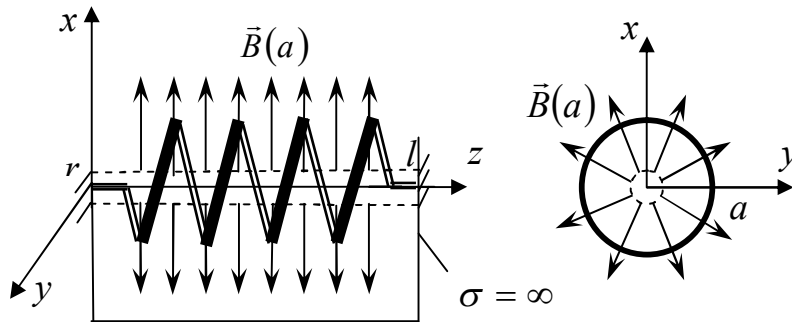


Рис. 15

Магнитное поле считается однородным вдоль оси  $z$  и действующим по всей длине пружины. Концы пружины закреплены и соединены идеальной электрической цепью.

При перемещении витки пружины пересекают линии магнитной индукции, в силу чего индуцируется ЭДС и на концах пружины возникает напряжение:

$$U = B \int_0^{s_0} \frac{\partial w}{\partial t} ds, \quad (5.1.1)$$

где  $B = B(a)$  – значение магнитной индукции на витках пружины;  $a$  - радиус витков пружины,  $w(z, t)$  – функция смещения;  $s_0$  - длина витков пружины;  $ds$  – элемент пружины.

Индукцированный результирующий ток  $\vec{j}$ , направлен перпендикулярно линиям магнитной индукции  $\vec{B}$ :

$$j = \frac{\sigma B}{s} \int_0^{s_0} \frac{\partial w}{\partial t} ds, \quad (5.1.2)$$

где  $\sigma$  - проводимость материала пружины.

Длина витков пружины определяется по формуле:

$$s_0 = \pi D i_0 l,$$

где  $l$  – длина пружины вдоль оси  $z$ . Тогда

$$ds = \pi D i_0 dz ,$$

где  $D$  – средний диаметр витка пружины;  $i_0$  – число витков на единицу длины;  $l$  - расстояние между закрепленными концами.

Следовательно, индуцированный ток вычисляется по формуле:

$$j = \frac{\sigma B}{l} \int_0^l \frac{\partial w}{\partial t} dz \quad (5.1.3)$$

Определим электромагнитную силу, действующую на элементарный участок пружины  $ds$ :

$$dF_{эл} = jBdV = jBA ds ,$$

и учитывая (5.1.3) запишем ее в виде:

$$dF = \frac{\sigma B^2 A}{l} \left( \int_0^l \frac{\partial w}{\partial t} dz \right) ds . \quad (5.1.4)$$

Собственные колебания пружины без учета сил трения и электромагнитного воздействия описываются уравнением [32, 33]

$$k \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} , \quad (5.1.5)$$

где  $k$  – продольная жесткость пружины;  $m_0$  - погонная масса.

Запишем уравнение колебаний пружины с учетом полученной электромагнитной силы (5.1.4):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{k}{m_0} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\sigma B^2 A}{l m_0} \int_0^l \frac{\partial w}{\partial t} dz = 0 .$$

Так как объемная плотность материала пружины:  $\rho = m_0 / A$ , имеем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{k}{m_0} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\sigma B^2}{l \rho} \int_0^l \frac{\partial w}{\partial t} dz = 0 . \quad (5.1.6)$$

Полученное интегро-дифференциальное уравнение записано без учета внешнего и внутреннего сопротивления. Используя процедуру Фурье [19] получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + p_r^2 q_r + \frac{8\sigma B^2}{r\pi^2 \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\dot{q}_n}{n} \right) = 0, \quad \{r = 1, 3, \dots\} , \quad (5.1.7)$$

где  $p_r^2 = \frac{k}{m_0} \frac{r^2 \pi^2}{l^2}$  - собственные частоты колебаний.

Так как магнитное поле действует по всей длине пружины, четные колебания электромагнитному воздействию не подвергаются. Запишем уравнение (5.1.7) в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + r^2 q_r + \mathbf{St} \frac{8}{r \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\dot{q}_n}{n} \right) = 0, \quad \{r = 1, 3, \dots\}, \quad (5.1.8)$$

где  $\mathbf{St} = \frac{\sigma B^2}{\rho p_1}$  - число Стюарта.

Запишем систему (5.1.8) в расщепленном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_1 + \mathbf{St} \frac{8}{1 \cdot \pi^2} \cdot \frac{\dot{q}_1}{1} + 1^2 \cdot q_1 = 0; \\ \ddot{q}_3 + \mathbf{St} \frac{8}{3 \cdot \pi^2} \cdot \frac{\dot{q}_3}{3} + 3^2 \cdot q_3 = -\mathbf{St} \frac{8}{3 \cdot \pi^2} \cdot \frac{\dot{q}_1}{1}; \\ \dots\dots\dots; \\ \ddot{q}_r + \mathbf{St} \frac{8}{r \cdot \pi^2} \cdot \frac{\dot{q}_r}{r} + r^2 \cdot q_r = -\mathbf{St} \frac{8}{r \cdot \pi^2} \left( \frac{\dot{q}_1}{1} + \frac{\dot{q}_3}{3} + \dots + \frac{\dot{q}_{r-2}}{r-2} \right). \end{array} \right. \quad (5.1.9)$$

Рассмотрим отдельно первое уравнение системы (5.1.9):

$$\ddot{q}_1 + \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \dot{q}_1 + q_1 = 0;$$

Демпфированная частота, первого тона колебаний зависит от числа Стюарта:

$$\omega_1^* = \sqrt{1 - \mathbf{St}^2 \frac{16}{\pi^4}}. \quad (5.1.10)$$

Последовательно проинтегрировав систему уравнений, получим решение, описывающее собственные затухающие колебания с набором нечетных демпфированных частот:

$$\omega_r^* = \sqrt{r^2 - \mathbf{St}^2 \frac{16}{r^4 \pi^4}}, \quad (r = 1, 3, \dots). \quad (5.1.11)$$

Отсюда видно, что электромагнитное воздействие в этом случае приводит к уменьшению собственных частот колебаний пружины за счет увеличения внешней диссипации. Причем наибольшему изменению подвергаются низшие нечетные парциальные колебания.



## 5.2 Влияние емкостного параметра

Далее рассмотрим задачу о линейных колебаниях проводящей пружины во внешнем стационарном магнитном поле при наличии в замыкающем контуре конденсатора.

Пусть закрепленные концы струны замкнуты идеальной электрической цепью, содержащей конденсатор емкости  $C$  (рис. 16).

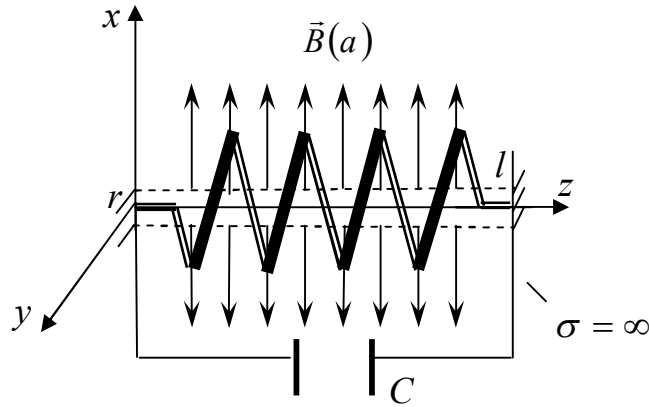


Рис. 16

Напряжение между обкладками конденсатора равно:

$$U_C = B \int_0^{s_0} \frac{\partial w}{\partial t} ds. \quad (5.2.1)$$

Переходя от  $ds$  к  $dz$ , как и в вышеуказанном случае, получим:

$$U_C = B\pi D i_0 \int_0^l \frac{\partial w}{\partial t} dz.$$

Заряд  $Q$  на обкладках конденсатора связан с напряжением соотношением:

$$Q = C U_C,$$

а сила тока, индуцированного в цепи, определяется выражением:

$$I = \dot{Q} = C \dot{U}_C$$

т.е.

$$I = C B \pi D i_0 \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz.$$

При взаимодействии с магнитным полем этот ток создает электромагнитную силу, действующую на каждый элемент  $ds$ :

$$dF = B \cdot I \cdot ds,$$

тогда

$$dF = \left( B^2 C \pi D i_0 \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz \right) ds. \quad (5.2.2)$$

С учетом полученной электромагнитной силы будем иметь интегро-дифференциальное уравнение собственных колебаний пружины:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{k}{m_0} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{B^2 C \pi D i_0}{m_0} \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz = 0. \quad (5.2.3)$$

Используя процедуру Фурье и свойство ортогональности амплитудных функций для нечетных парциальных колебаний, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + p_r^2 q_r + \frac{8B^2 C D i_0 l}{r \pi m_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\ddot{q}_n}{n} \right) = 0, \quad \{r = 1, 3, \dots\}. \quad (5.2.4)$$

В результате обезразмеривания приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + r^2 q_r + \mathbf{St}_c \frac{8D i_0}{r \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\ddot{q}_n}{n} \right) = 0, \quad \{r = 1, 3, \dots\}. \quad (5.2.5)$$

Произведем расщепление системы уравнений (5.2.5):

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_1 + \mathbf{St}_c \frac{8D i_0}{1 \cdot \pi} \cdot \frac{\ddot{q}_1}{1} + 1^2 \cdot q_1 = 0; \\ \ddot{q}_3 + \mathbf{St}_c \frac{8D i_0}{3\pi} \cdot \frac{\ddot{q}_3}{3} + 3^2 \cdot q_3 = -\mathbf{St}_c \frac{8D i_0}{3\pi} \cdot \frac{\ddot{q}_1}{1}; \\ \dots; \\ \ddot{q}_r + \mathbf{St}_c \frac{8D i_0}{r\pi} \cdot \frac{\ddot{q}_r}{r} + r^2 \cdot q_r = -\mathbf{St}_c \frac{8D i_0}{r\pi} \left( \frac{\ddot{q}_1}{1} + \frac{\ddot{q}_3}{3} + \dots + \frac{\ddot{q}_{r-2}}{r-2} \right). \end{array} \right. \quad (5.2.6)$$

Рассмотрим первое уравнение системы и определим первую демпфированную емкостную частоту:

$$\left( 1 + \mathbf{St}_c \frac{8D i_0}{\pi} \right) \ddot{q}_1 + q_1 = 0,$$

$$\omega_1^{(c)} = \sqrt{\frac{1}{1 + \mathbf{St}_c \frac{8D i_0}{\pi}}}. \quad (5.2.7)$$

В результате последовательного интегрирования получим затухающие функции с набором нечетных парциальных частот:

$$\omega_r^{(c)} = \frac{r}{\sqrt{1 + \mathbf{St}_c \frac{8Di_0}{r^2 \pi}}}, \quad (r = 1, 3, \dots). \quad (5.2.8)$$

Таким образом, наличие реактивного параметра, а именно конденсатора, уменьшает частоты собственных колебаний пружины, за счет увеличения квазиинерционных коэффициентов.

Определим значение жесткости пружины в данном случае. Для этого уравнение (5.2.4) запишем в одномодовом приближении, т.е.:

$$\left(1 + \frac{8B^2 CDi_0 l}{\pi m_0}\right) \ddot{q}_1 + p_1^2 q_1 = 0.$$

Т.к. жесткость пружины  $k_1^{(c)} = m\omega_1^{(c)2}$ , получим:

$$k_1^{(c)} = \frac{mp_1^2}{\left(1 + \frac{8B^2 CDi_0 l}{\pi m_0}\right)}.$$

Обезразмерив это выражение, получим формулу для вычисления в одномодовом жесткости пружины, когда во внешней цепи присутствует конденсатор:

$$k_1^{(c)} = \frac{1}{1 + \mathbf{St}_c \frac{8Di_0}{\pi}}.$$

Проведем расчеты, используя следующие данные:

$$B = 0,5 \text{Тл}, \quad C = 0,1 \Phi, \quad l = 0,2 \text{м}, \quad D = 0,2 \text{м}, \quad i_0 = 100 \text{м}^{-1}, \quad m_0 = 0,5 \text{кг/м}.$$

При этом безразмерные значения величин:

$$B = 1, \quad C = 1, \quad l = 1, \quad m_0 = 1, \quad D = 1, \quad i_0 = 20.$$

В результате получим графики зависимостей, которые представлены на рис. 17 и 18.

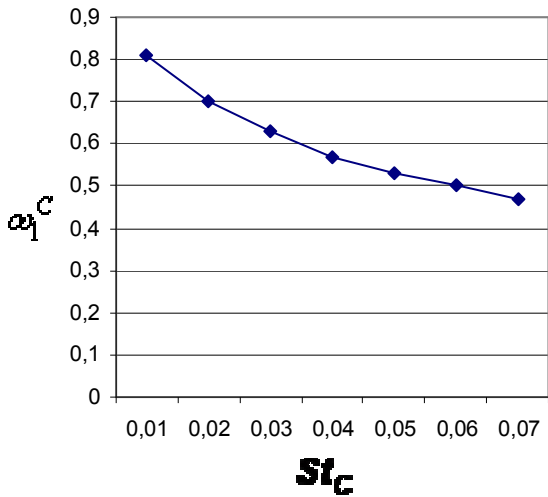


Рис. 17 – График зависимости  $\omega_1^{(c)}(St_c)$

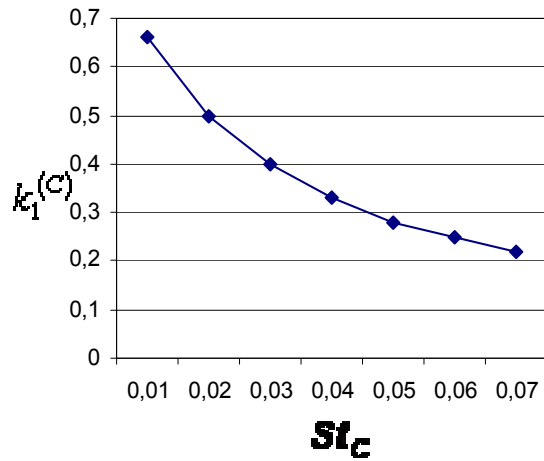


Рис. 18 – График зависимости  $k_1^{(c)}(St_c)$

По полученным графикам можно определить, что даже без усиления тока частота основного колебания заметно уменьшается.

### 5.3 Влияние индуктивного параметра

Далее рассмотрим такую же задачу, подключив во внешнюю цепь вместо конденсатора катушку индуктивности  $L$  (рис. 19).

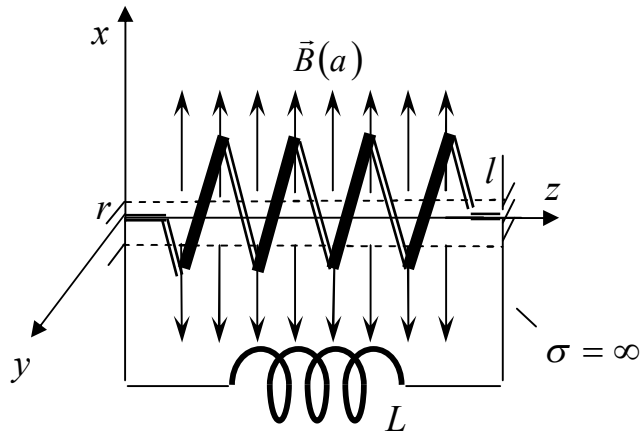


Рис. 19

Напряжение  $U_L$ , возникающее на ее концах при колебаниях пружины в магнитном поле:

$$U_L = B \int_0^{s_0} \frac{\partial w}{\partial t} ds. \quad (5.3.1)$$

Переходим от  $ds$  к  $dz$ :

$$U_L = B\pi Di_0 \int_0^l \frac{\partial w}{\partial t} dz.$$

С другой стороны можно использовать формулы:

$$U_L = L \frac{dI}{dt}, \quad \text{то есть} \quad dI = \frac{U_L}{L} dt,$$

тогда

$$dI = \left( \frac{B\pi Di_0}{L} \int_0^l \frac{\partial w}{\partial t} dz \right) dt.$$

Следовательно

$$I = \frac{B\pi Di_0}{L} wz. \quad (5.3.2)$$

Выражение для электромагнитной силы, действующей на участке пружины  $ds$ , запишется в виде:

$$dF_{y\ddot{e}} = B \cdot I \cdot ds = \left( \frac{B^2 \pi Di_0}{L} \int_0^l wz \right) ds. \quad (5.3.3)$$

Составим интегро-дифференциальное уравнение колебаний пружины:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{k}{m_0} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{B^2 \pi Di_0}{L m_0} \int_0^l wz = 0 \quad (5.3.4)$$

Используя процедуру Фурье, для нечетных колебаний приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в виде:

$$\ddot{q}_r + p_r^2 q_r + \frac{8B^2 Di_0 l}{rL\pi m_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{q_n}{n} \right) = 0, \quad \{r = 1, 3, \dots\}. \quad (5.3.5)$$

Обезразмерив эти уравнения, имеем:

$$\ddot{q}_r + r^2 q_r + \mathbf{St}_L \frac{8Di_0}{r\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{q_n}{n} \right) = 0, \quad \{r = 1, 3, \dots\}, \quad (5.3.6)$$

где  $\mathbf{St}_L = \frac{B^2 l}{L m_0 p_1^2}$ .

Произведем расщепление системы уравнений (5.3.6):

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_1 + 1^2 \cdot q_1 + \mathbf{St}_L \frac{8Di_0}{1 \cdot \pi} \cdot \frac{q_1}{1} = 0; \\ \ddot{q}_3 + 3^2 \cdot q_3 + \mathbf{St}_L \frac{8Di_0}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{q_3}{3} = -\mathbf{St}_L \frac{8Di_0}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{q_1}{1}; \\ \dots; \\ \ddot{q}_r + r^2 \cdot q_r + \mathbf{St}_L \frac{8Di_0}{r \cdot \pi} \cdot \frac{q_r}{r} = -\mathbf{St}_L \frac{8Di_0}{r \cdot \pi} \left( \frac{q_1}{1} + \frac{q_3}{3} + \dots + \frac{q_{r-2}}{r-2} \right). \end{array} \right. \quad (5.3.7)$$

Из (5.3.7) путем последовательного интегрирования получим решение с набором парциальных демпфированных частот:

$$\omega_r^{(L)} = \sqrt{r^2 + \mathbf{St}_L \frac{8Di_0}{r^2 \pi}}, \quad (r = 1, 3, \dots). \quad (5.3.8)$$

Следовательно, наличие катушки индуктивности во внешней цепи приводит к увеличению собственных частот колебаний пружины за счет увеличения квазиупругих коэффициентов.

Запишем выражение для жесткости пружины в безразмерном виде:

$$k_1^{(L)} = 1^2 + \mathbf{St}_L \frac{8Di_0}{1^2 \pi}.$$

Приведем числовой расчет, используя следующие данные:

$B = 0,2Tл, L = 0,1Гн, l = 0,1м, D = 0,2м, i_0 = 100м^{-1}, m_0 = 1кг/м, p_1 = 1с^{-1}$ ,  
при этом безразмерные значения:  $B = 1, L = 1, l = 1, m_0 = 1, D = 1, i_0 = 10$ .

На рис. 20 и 21 приведены графики зависимостей основной индуктивной демпфированной частоты и первого коэффициента жесткости пружины от числа Стюарта.

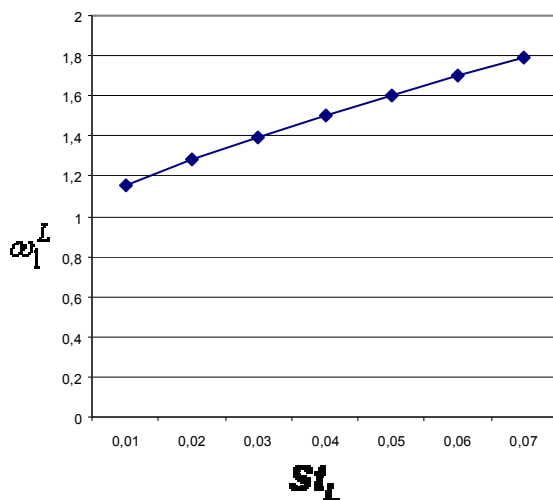


Рис. 20 – График зависимости  $\omega_1^{(L)}(\mathbf{St}_L)$

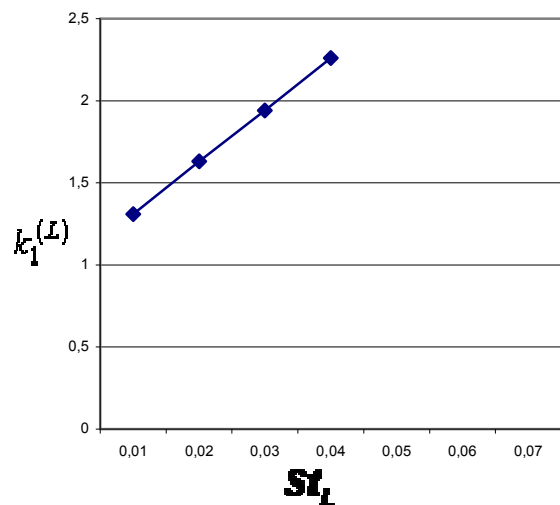


Рис. 21 – График зависимости  $k_1^{(L)}(\mathbf{St}_L)$

## 5.4 Случай одновременного влияния емкостного и индуктивного параметров

Рассмотрим задачу о линейных колебаниях проводящей цилиндрической пружины во внешнем стационарном магнитном поле, в случае, когда в замыкающем контуре содержится одновременно конденсатор и катушка индуктивности, соединенных параллельно.

Система взаимосвязанных дифференциальных уравнений в этом случае в безразмерном виде запишется следующим образом:

$$\ddot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{St}_C \frac{8Di_0}{r\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ddot{q}_n}{n} - \mathbf{St}_L \frac{8Di_0}{r\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{n}, \quad \{r = 1, 3, \dots\}. \quad (5.4.1)$$

Расщепляя полученную систему уравнений, имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \mathbf{St}_C \frac{8Di_0}{1^2 \pi}\right) \ddot{q}_1 + \left(1^2 + \mathbf{St}_L \frac{8Di_0}{1^2 \pi}\right) q_1 = 0; \\ \left(1 + \mathbf{St}_C \frac{8Di_0}{3^2 \pi}\right) \ddot{q}_3 + \left(3^2 + \mathbf{St}_L \frac{8Di_0}{3^2 \pi}\right) q_3 = -\mathbf{St}_C \frac{8Di_0}{1 \cdot 3 \pi} \ddot{q}_1 - \mathbf{St}_C \frac{8Di_0}{3 \cdot 3 \pi} \ddot{q}_3 - \\ \qquad \qquad \qquad - \mathbf{St}_L \frac{8Di_0}{1 \cdot 3 \pi} q_1 - \mathbf{St}_L \frac{8Di_0}{3 \cdot 3 \pi} q_3; \\ \dots; \\ \left(1 + \mathbf{St}_C \frac{8Di_0}{r^2 \pi}\right) \ddot{q}_r + \left(r^2 + \mathbf{St}_L \frac{8Di_0}{r^2 \pi}\right) q_r = -\frac{8Di_0}{r\pi} \left( (\mathbf{St}_C \ddot{q}_1 + \mathbf{St}_L q_1) + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{1}{3} (\mathbf{St}_C \ddot{q}_3 + \mathbf{St}_L q_3) + \dots + \frac{1}{r-2} (\mathbf{St}_C \ddot{q}_{r-2} + \mathbf{St}_L q_{r-2}) \right). \end{array} \right. \quad (5.4.2)$$

Рассматривая первое уравнение системы (5.4.2) выделим основную реактивную емкостно-индуктивную частоту:

$$\omega_1^{(C,L)} = \sqrt{\frac{1^2 + \mathbf{St}_L \frac{8Di_0}{1^2 \cdot \pi}}{1 + \mathbf{St}_C \frac{8Di_0}{1^2 \cdot \pi}}}. \quad (5.4.3)$$

В результате последовательного интегрирования системы получим затухающие функции с набором нечетных парциальных емкостно-индуктивных частот:

$$\omega_r^{(C,L)} = \sqrt{\frac{r^2 + \mathbf{St}_L \frac{8Di_0}{r^2 \cdot \pi}}{1 + \mathbf{St}_C \frac{8Di_0}{r^2 \cdot \pi}}}, \quad (r=1,3,\dots). \quad (5.4.4)$$

Построим графики зависимости, принимая во внимание следующие числовые данные:

$$B = 0,5Tл, C = 0,1Ф, L = 0,1Гн, l = 0,1м, D = 0,2м, i_0 = 100м^{-1}, m_0 = 1кг/м, p_1 = 1с^{-1},$$

при этом безразмерные значения:

$$B = 1, C = 1, L = 1, l = 1, m_0 = 1, D = 1, i_0 = 10.$$

На рис. 22 представлен график зависимости  $\mathbf{St}_C(\omega_r^{(C,L)})$ . Здесь  $\mathbf{St}_L = const = 0,01$ . Зависимость  $\mathbf{St}_L(\omega_r^{(C,L)})$  показана на рис. 23. Здесь  $\mathbf{St}_C = const = 0,01$ .

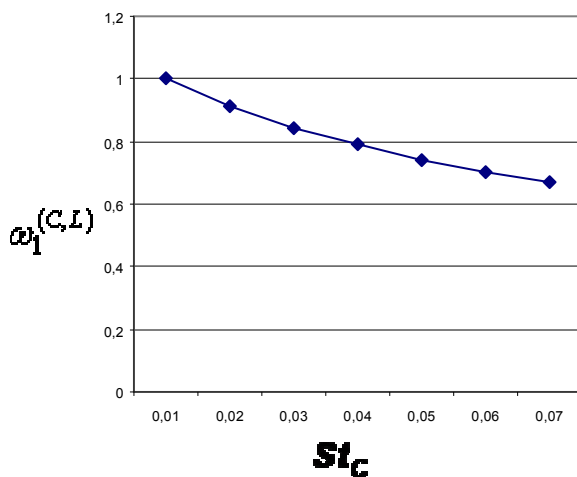


Рис. 22 – График зависимости  $\mathbf{St}_C(\omega_r^{(C,L)})$

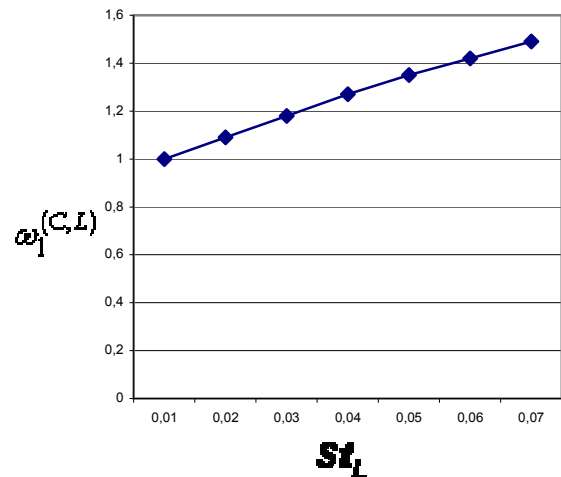


Рис. 23 – График зависимости  $\mathbf{St}_L(\omega_r^{(C,L)})$

### 5.5 Случай неоднородного стационарного магнитного поля

В реальных условиях магнитные поля, в силу своей вихревой природы, даже в небольших объемах редко бывают однородными. В связи с этим возникают актуальные задачи о собственных колебаниях проводящих систем в неоднородном стационарном магнитном поле [8-9].

Рассмотрим линейные колебания цилиндрической пружины, описанной в предыдущих разделах, считая, что по всей длине пружины действует магнитное поле с продольной неоднородностью:



$$\vec{B}(z) = B(z)\vec{y}^0.$$

Целью исследования является теоретическое определение значений собственных частот колебаний пружины.

В результате движения проводящей пружины в магнитном поле по всей длине пружины создается электрическое напряжение:

$$U = \int_0^{s_0} \frac{\partial w(z, t)}{\partial t} B(s) ds. \quad (5.5.1)$$

При условии замыкания концов пружины внешней электрической цепью возникают токи:

$$j = \frac{\sigma}{l} \int_0^{s_0} \frac{\partial w}{\partial t} B(s) ds.$$

Переходим к координате  $z$ :

$$j = \frac{\sigma}{l} \int_0^l \frac{\partial w}{\partial t} B(z) dz.$$

При этом на элемент пружины  $ds$  действует магнитная сила:

$$dF_m = \frac{\sigma B(z) A}{l} \left( \int_0^l \frac{\partial w}{\partial t} B(z) dz \right) ds. \quad (5.5.2)$$

Запишем уравнение колебаний пружины с учетом полученной силы (5.5.2):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{k}{m_0} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\sigma B(z)}{\rho l} \int_0^l B(z) \frac{\partial w}{\partial t} dz = 0. \quad (5.5.3)$$

Полученное интегро-дифференциальное уравнение записано без учета внешнего и внутреннего сопротивления. Используя процедуру Фурье, приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + p_r^2 q_r + \frac{2\sigma}{\rho l^2} \gamma_r^* \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^* \dot{q}_n = 0, \quad \{r = 1, 2, 3, \dots\}, \quad (5.5.4)$$

где введены обозначения:

$$\gamma_n^* = \int_0^l W_n(z) B(z) dz, \quad \gamma_r^* = \int_0^l W_r(z) B(z) dz.$$

Обезразмерим уравнения (5.5.4):

$$\ddot{q}_r + r^2 q_r + \mathbf{St} 2\gamma_r^* \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \gamma_n^* = 0, \quad \{r = 1, 2, 3, \dots\}, \quad (5.5.5)$$

где  $\mathbf{St} = \frac{\sigma B^{*2}}{\rho p_1}$ .

Произведем расщепление системы уравнений, оставив в первом уравнении ( $r = 1$ ) только первый член суммы, во втором ( $r = 2$ ) – первый и второй члены и т. д.:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\mathbf{St}\gamma_1^* \gamma_1^* \dot{q}_1 + 1^2 \cdot q_1 = 0; \\ \ddot{q}_2 + 2\mathbf{St}\gamma_2^* \gamma_2^* \cdot \dot{q}_2 + 2^2 \cdot q_2 = -2\mathbf{St}\gamma_1^* \gamma_2^* \cdot \dot{q}_1; \\ \dots\dots\dots; \\ \ddot{q}_r + 2\mathbf{St}\gamma_r^* \gamma_r^* \cdot \dot{q}_r + r^2 q_r = -2\mathbf{St}\gamma_r^* (\gamma_1^* \dot{q}_1 + \gamma_2^* \dot{q}_2 + \dots + \gamma_{r-1}^* \dot{q}_{r-1}) \end{cases} \quad (5.5.6)$$

Из первого уравнения системы определяется первая демпфированная частота:

$$\omega_1^* = \sqrt{1 - \mathbf{St}^2 \gamma_1^{*4}}. \quad (5.5.7)$$

Последовательно проинтегрировав систему уравнений (5.5.6), получим решение, описывающее собственные затухающие колебания с набором нечетных демпфированных частот:

$$\omega_r^* = \sqrt{r^2 - \mathbf{St}^2 (\gamma_r^*)^4}, \quad (r = 1, 2, 3, \dots). \quad (5.5.8)$$

Отсюда видно, что электромагнитное воздействие в этом случае приводит к уменьшению собственных частот колебаний пружины за счет увеличения внешней диссипации.

При подключении конденсатора во внешнюю цепь, электромагнитная сила, действующая на элемент пружины  $ds$ , запишется в виде:

$$dF_{.m} = \left( B(z) C \pi D i_0 \int_0^l B(z) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz \right) ds. \quad (5.5.9)$$

С ее учетом получим интегро-дифференциальное уравнение собственных колебаний пружины:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{k}{m_0} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{B(z) C \pi D i_0}{m_0} \int_0^l B(z) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz = 0. \quad (5.5.10)$$

Воспользовавшись представлением функции смещений в виде бесконечно-го ряда по синусоидальным амплитудным функциям и производя те же преобразования, что и выше, получим систему уравнений в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + r^2 q_r + \mathbf{St}_c 2\pi D i \gamma_r^* \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^* \ddot{q}_n = 0, \quad (5.5.11)$$

где  $\mathbf{St}_c = \frac{B^{*2} Cl}{m_0}$ .

Расщепляя (5.5.11), получим систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} (1 + 2\mathbf{St}_c \pi D i \gamma_1^* \gamma_1^*) \ddot{q}_1 + 1^2 \cdot q_1 = 0; \\ (1 + 2\mathbf{St}_c \pi D i \gamma_2^* \gamma_2^*) \ddot{q}_2 + 2^2 \cdot q_2 = -2\mathbf{St}_c \pi D i \gamma_1^* \gamma_2^* \cdot \ddot{q}_1; \\ \dots; \\ (1 + 2\mathbf{St}_c \pi D i \gamma_r^* \gamma_r^*) \ddot{q}_r + r^2 q_r = -2\mathbf{St}_c \pi D i \gamma_r^* (\gamma_1^* \ddot{q}_1 + \gamma_2^* \ddot{q}_2 + \dots + \gamma_{r-1}^* \ddot{q}_{r-1}). \end{cases} \quad (5.5.12)$$

Из первого уравнения (5.5.12) определяется демпфированная частота в одно-модовом приближении:

$$\omega_1^{(c)} = \frac{1}{\sqrt{(1 + 2\mathbf{St}_c \pi D i_0 \gamma_1^* \gamma_1^*)}}. \quad (5.5.13)$$

В результате последовательного интегрирования получим затухающие функции с набором парциальных частот:

$$\omega_r^{(c)} = \frac{r}{\sqrt{1 + 2\mathbf{St}_c \pi D i_0 \gamma_r^{*2}}}, \quad (r = 1, 2, 3, \dots). \quad (5.5.14)$$

Таким образом, наличие реактивного параметра, а именно конденсатора, уменьшает частоты собственных колебаний пружины, за счет увеличения квазиинерционных коэффициентов.

Т.к.  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , то

$$k^{(c)} = m \omega^{(c)2} = \frac{1}{1 + 2\mathbf{St}_c \pi D i_0 \gamma_1^{*2}}.$$

Проведем расчеты, используя следующие данные:

$$B = 0,5 Tл, C = 0,5 \Phi, l = 0,2 м, D = 0,2 м, i_0 = 100 м^{-1}, m_0 = 0,5 кг / м;$$

при этом безразмерные значения:

$$B = 1, C = 1, l = 1, m_0 = 1, D = 1, i_0 = 20;$$

$$\gamma_1^* = \int_0^1 W_1(z)B(z)dz = \int_0^1 \sin \frac{\pi z}{l} \cdot B \sin \frac{\pi z}{l} dz = \int_0^1 \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz = 0,5;$$

где  $B(z) = B \sin \frac{\pi z}{l}$ ;

Построим графики зависимостей основной демпфированной частоты и первого коэффициента жесткости пружины от числа Стюарта (рис. 24 и 25).

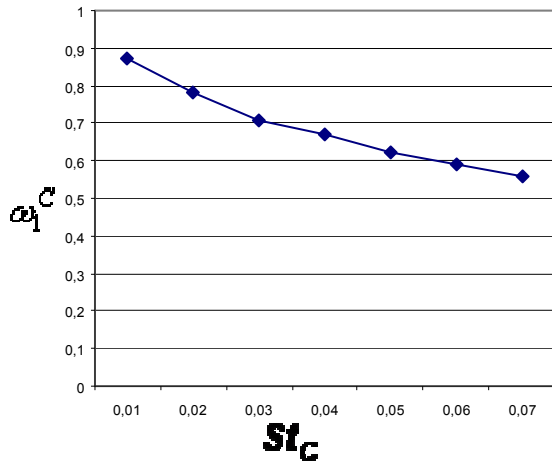


Рис. 24 – График зависимости  $\omega_1^{(C)}(St_C)$

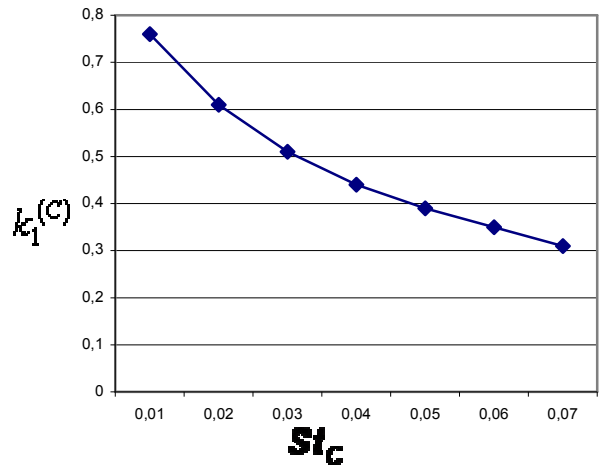


Рис. 25 – График зависимости  $k_1^{(C)}(St_C)$

Далее рассмотрим подобную задачу, подключив во внешнюю цепь вместо конденсатора катушку индуктивности  $L$ .

Электромагнитная сила, действующая на участке пружины  $ds$ , запишется в виде:

$$dF = \left( \frac{B(z)\pi Di_0}{L} \int_0^l B(z)w dz \right) ds. \quad (5.5.15)$$

Составим интегро-дифференциальное уравнение колебаний пружины:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{k}{m_0} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{B(z)\pi Di_0}{Lm_0} \int_0^l B(z)w dz = 0. \quad (5.5.16)$$

Используя процедуру Фурье, для нечетных колебаний и свойство ортогональности амплитудных функций приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + p_1^2 q_r + St_L 2\pi Di_0 \gamma_r^* \sum_{n=1}^{\infty} q_n \gamma_n^* = 0, \quad \{r = 1, 2, 3, \dots\}, \quad (5.5.17)$$

где  $St_L = \frac{B^*{}^2 l}{Lm_0 p_1^2}$ .



При этом безразмерные значения:

$$B = 1, \quad L = 1, \quad l = 1, \quad m_0 = 1, \quad D = 1, \quad i_0 = 20,$$

$$\gamma_1^* = \int_0^1 W_1(z) B(a, z) dz = \int_0^1 \sin \frac{\pi z}{l} \cdot B \sin \frac{\pi z}{l} dz = \int_0^1 \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz = 0,5,$$

где  $B(z) = B \sin \frac{\pi z}{l}$ .

На рис. 26 и 27 приведены графики зависимостей основной частоты и соответствующей жесткости от индуктивного числа Стюарта.

### 5.6 Электромагнитное управление колебаниями груза на пружине

Рассмотрим упругую подвеску, представляющую собой вертикально расположенную цилиндрическую пружину с закрепленными концами к середине которой подвешен груз. Пружина изготовлена из немагнитного материала и помещена во внешнее неоднородное магнитное поле, имеющее радиальную составляющую индукции  $\vec{B} = B(r, z)\vec{r}^0$ , причем  $r > r_0$ , где  $r_0$  - радиус малой центральной зоны, в которой поле отсутствует. Концы пружины закреплены и соединены идеальной электрической цепью, содержащей активное сопротивление  $R$  (рис. 28).

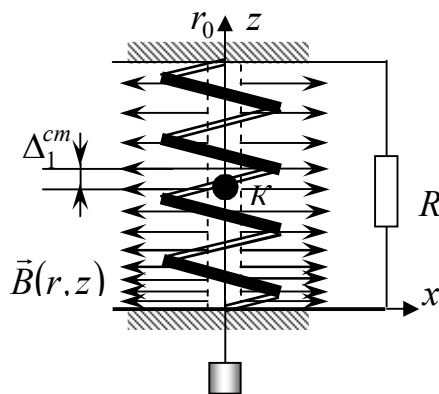


Рис. 28

При вибрациях пружины на каждый ее элемент действует сила механического сопротивления, возникающая за счет взаимодействия пружины и груза с окружающей средой:

$$dF_C = \beta m_0 \frac{\partial w}{\partial t} dz.$$

При перемещении витки пружины пересекают линии магнитной индукции, в силу чего возникает ЭДС и на концах пружины создается напряжение:

$$U = \pi Di_0 \int_0^l \frac{\partial w(z, t)}{\partial t} B(a, z) dz .$$

При этом по пружине течет результирующий ток:

$$I = \frac{\pi Di_0}{R} \int_0^l \frac{\partial w}{\partial t} B(a, z) dz ,$$

Электромагнитная сила, действующая на элементарный участок пружины  $ds$ , вычисляется по формуле:

$$dF_{эл} = \frac{\pi Di_0 B(a, z)}{R} \left( \int_0^l \frac{\partial w}{\partial t} B(a, z) dz \right) ds . \quad (5.6.1)$$

Запишем уравнение собственных колебаний пружины с учетом электромагнитной и диссипативной сил (5.6.1):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{k}{m_0} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\pi Di_0 B(a, z)}{R m_0} \int_0^l \frac{\partial w}{\partial t} B(a, z) dz = 0 , \quad (5.6.2)$$

В нашей задаче к средней точке пружины подвешен груз массы  $m$ , поэтому динамическую функцию смещений следует записать с учетом статической деформации:

$$w(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n(t) - \Delta_n^{cm}) \cdot W_n(z) . \quad (5.6.3)$$

Здесь  $W_n(z) = \sin \frac{n\pi z}{l}$  - собственные амплитудные функции, а в качестве обобщенных координат приняты вертикальные смещения точек пружины:  $\frac{l}{2}$ ,  $\frac{l}{4}$ ,  $\frac{l}{6}$ ..... Статическое смещение середины пружины  $\Delta_1^{cm}$  определяется из условия:

$$k \cdot \Delta_1^{cm} = mg . \quad (5.6.4)$$

Все последующие  $\Delta_n^{cm}$  вычисляются по формулам:

$$\Delta_n^{cm} = \Delta_1^{cm} \cdot \sin \frac{\pi}{2n}, \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

Применив процедуру Фурье к уравнению (5.6.2), и используя свойство ортогональности собственных амплитудных функций, приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Представим эти уравнения в безразмерном виде, приняв в качестве характерных масштабов длины  $l$ ,

магнитной индукции  $B$ , электрического сопротивления  $R$ , времени  $\frac{1}{p_1}$

( $p_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{k}{m_0}}$  -основная частота собственных незатухающих колебаний пружины), линейной плотности  $m_0$ , коэффициента внешней механической диссипации  $p_1$ . Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\xi}_r + \beta \cdot \dot{\xi}_r + r^2 (\xi_r - \Delta_r^{cm}) = -2\mathbf{St}\gamma_r^* \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\xi}_n \gamma_n^*, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (5.6.5)$$

Так как груз повешен в средней точке, то его движение определяется координатой  $\xi_1$  и описывается дифференциальным уравнением, записанным с учетом (5.6.3):

$$\ddot{\xi}_1 + \beta \cdot \dot{\xi}_1 + 1^2 \cdot \xi_1 = -2\mathbf{St}\gamma_1^* \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\xi}_n \gamma_n^*. \quad (5.6.6)$$

Здесь в качестве характерного параметра удобно принять массу  $m$ , поэтому число Стюарта  $\mathbf{St} = \frac{B^2 l^2}{mp_1 R}$ .

В (5.6.6) уравнении диссипативная сила представлена в виде:

$$F_C = \beta m \dot{\xi}_1.$$

Обычно масса подвешенного груза существенно превышает погонную массу пружины, поэтому с большой степенью точности можно использовать одно-модовое приближение, сохраняя в правой части уравнения (5.6.6) только первое слагаемое:

$$\ddot{\xi}_1 + (\beta + 2\mathbf{St}\gamma_1^{*2}) \dot{\xi}_1 + 1^2 \cdot \xi_1 = 0. \quad (5.6.7)$$

Отсюда получим демпфированную частоту колебаний груза на пружине:

$$\omega^{(R)} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} (\beta + 2\mathbf{St}\gamma_1^{*2})^2}. \quad (5.6.8)$$

Видно, что электромагнитное воздействие в этом случае приводит к уменьшению частоты колебаний груза на пружине.

Далее рассмотрим случай, когда во внешней электрической цепи присутствует конденсатор емкости  $C$ . При взаимодействии с магнитным полем ток создает электромагнитную силу, действующую на каждый элемент  $ds$ :

$$dF = \left( B(a, z) C \pi D i_0 \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} B(a, z) dz \right) ds. \quad (5.6.9).$$

С учетом этой силы запишем интегро-дифференциальное уравнение, описывающее собственные колебания пружины:



$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{k}{m_0} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{B(a, z) C \pi D i_0}{m_0} \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} B(a, z) dz = 0 . \quad (5.6.10)$$

Применив процедуру Фурье к уравнению (5.6.10), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в безразмерном виде:

$$\ddot{\xi}_r + \beta \cdot \dot{\xi}_r + r^2 (\xi_r - \Delta_r^{cm}) = -2 \mathbf{St}_c \pi D i_0 \gamma_r^* \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\xi}_n \gamma_n^*, \quad (r=1, 2, \dots), \quad (5.6.11)$$

где  $\mathbf{St}_c = \frac{l C B^2}{m_0}$ .

Запишем дифференциальное уравнение колебаний груза массы  $m$  на пружине в одномодовом приближении с учетом (5.6.3):

$$\left(1 + 2 \mathbf{St}_c \pi D i_0 \gamma_1^{*2}\right) \ddot{\xi}_1 + \beta \cdot \dot{\xi}_1 + 1^2 \cdot \xi_1 = 0 . \quad (5.6.12)$$

Отсюда получим выражение для реактивной емкостной частоты:

$$\omega_1^{(C)} = \sqrt{\frac{4 \left(1 + 2 \mathbf{St}_c \pi D i_0 \gamma_1^{*2}\right) - \beta^2}{4 \left(1 + 2 \mathbf{St}_c \pi D i_0 \gamma_1^{*2}\right)^2}} . \quad (5.6.13)$$

Если пренебречь внешним механическим сопротивлением, получим:

$$\omega_1^{(C)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \mathbf{St}_c \pi D i_0 \gamma_1^{*2}}} . \quad (5.6.14)$$

Отсюда видно, что присутствие во внешней электрической цепи такого реактивного элемента как конденсатор приводит к уменьшению частоты колебаний груза на пружинной подвеске.

Приведем расчеты, используя следующие данные:

$$B^* = 0,5 Tл, \quad C = 0,5 \Phi, \quad l = 0,2 м, \quad m_0 = 0,5 кг/м, \quad D = 0,25 м, \quad i_0 = 100 м^{-1},$$

Тогда  $\mathbf{St}_c = \frac{0,2 \cdot 0,5 \cdot 0,5^2}{0,5} = 0,05$ , при этом безразмерные значения:

$$B^* = 1, \quad C = 1, \quad l = 1, \quad D = 1, \quad i_0 = 20,$$

$$\gamma_1^* = \int_0^1 W_1(z) B(z) dz = \int_0^1 \sin \frac{\pi z}{l} \cdot B \sin \frac{\pi z}{l} dz = \int_0^1 \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz = 0,5 ;$$

$$\omega_1^{(C)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \cdot 0,05 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 20 \cdot 0,5^2}} = 0,62 .$$

Отсюда видно, что присутствие во внешней электрической цепи такого реактивного элемента как конденсатор приводит к уменьшению частоты колебаний груза на пружинной подвеске приблизительно на 38%.

В третьем случае во внешнюю цепь подключим катушку индуктивности  $L$ . Электромагнитная сила, действующая на элементарный участок пружины  $ds$ , запишется в виде:

$$dF = \left( \frac{B(a, z)\pi Di_0}{L} \int_0^l B(a, z)w dz \right) ds, \quad (5.6.15)$$

а интегро-дифференциальное уравнение собственных колебаний пружины с учетом электромагнитной силы (5.6.15):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{k}{m_0} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{B(a, z)\pi Di_0}{Lm_0} \int_0^l B(a, z)w dz = 0. \quad (5.6.16)$$

Электромагнитная сила, возникающая при колебаниях пружины, в этом случае является позиционной, поэтому следует различать понятия статического и динамического равновесия. Применяв процедуру Фурье, приходим к системе дифференциальных уравнений в безразмерном виде:

$$\ddot{\xi}_r + \beta \cdot \dot{\xi}_r + r^2 (\xi_r - \Delta_r^\partial) = -2\mathbf{St}_L \pi Di_0 \gamma_r^* \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \Delta_n^\partial) \gamma_n^*, \quad (r=1,2,\dots). \quad (5.6.17)$$

где  $\mathbf{St}_L = \frac{B^2}{Lm_0 p_1^2}$ .

Условие динамического равновесия в безразмерном виде:

$$\Delta_1^{cm} + 2\mathbf{St}_L \pi Di_0 \gamma_1^* \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n^\partial \gamma_n^* = g. \quad (5.6.18)$$

Здесь характерным размером массы является  $m$ , поэтому  $\mathbf{St}_L = \frac{B^2 l}{Lmp_1^2}$ . Это ус-

ловие с достаточной степенью точности можно записать в одномодовом приближении и использовать для определения  $\Delta_1^{cm}$ :

$$(1 + 2\mathbf{St}_L \pi Di_0 \gamma_1^{*2}) \Delta_1^{cm} = g. \quad (5.6.19)$$

Дифференциальное уравнение колебаний груза в этом случае в одномодовом приближении имеет вид:

$$\ddot{\xi}_1 + \beta \cdot \dot{\xi}_1 + \xi_1 (1^2 + 2\mathbf{St}_L \pi Di_0 \gamma_1^{*2}) = 0. \quad (5.6.20)$$

Отсюда получим выражение для реактивной индуктивной частоты:

$$\omega_1^{(L)} = \sqrt{\left(1^2 + 2\mathbf{St}_L \pi Di_0 \gamma_1^{*2}\right) - \frac{\beta^2}{4}}. \quad (5.6.21)$$

То есть присутствие во внешней электрической цепи такого реактивного элемента как катушка индуктивности приводит к увеличению частоты колебаний пружины.

Приведем расчеты, используя следующие данные:

$$B^* = 0,3 \text{ Гл}, \quad l = 0,2 \text{ м}, \quad m_0 = 1 \text{ кг/м}, \quad D = 0,2 \text{ м}, \quad i_0 = 100 \text{ м}^{-1}, \quad L = 1 \text{ Гн}, \quad \beta = 0,05 \text{ с}^{-1}, \\ p_1 = 1 \text{ с}^{-1};$$

При этом  $St_L = \frac{0,3^2 \cdot 0,2}{1 \cdot 1 \cdot 1^2} = 0,02$ , а безразмерные значения:

$$B^* = 1, \quad L = 1, \quad l = 1, \quad D = 1, \quad i_0 = 20, \quad \gamma_1^* = \int_0^1 W_1(z) B(z) dz = \int_0^1 \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz = 0,5;$$

$$\omega_1^{(L)} = \sqrt{\left(1^2 + 2 \cdot 0,02 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 20 \cdot 0,5^2\right) - \frac{0,05^2}{4}} = 1,28.$$

То есть присутствие во внешней электрической цепи катушки с указанной индуктивностью приводит к увеличению частоты колебаний пружины, в данном случае для принятых параметров на 28%.

## 6. Продольные колебания электропроводного стержня в магнитном поле

### 6.1 Обобщенный закон электромагнитного взаимодействия

В предыдущих главах исследованы колебания электромеханических систем под действием силы Ампера, которая, как известно, направлена ортогонально току. Такая сила способна вызвать только поперечные колебания линейных систем, какими являются струна, однородный стержень, пружина. В монографиях Николаева Г.В. [29] и Томилина А. К. [10] исследована проблема продольного электромагнитного взаимодействия, экспериментально и теоретически показано, что при определенных условиях возникает сила, направленная по току или против него. Приведем некоторые сведения по этой проблеме и исследуем возможность использования продольной электромагнитной силы для управления продольными колебаниями электропроводных систем с распределенными параметрами.

Как взаимодействуют бесконечные параллельные токи описано в любом школьном учебнике элементарной физики. Однако задачу о взаимодействии непараллельных токов большинство физиков предпочитают не рассматривать, поскольку в ней нарушается третий закон Ньютона. Попытки решения этой проблемы в рамках существующей электродинамики предприняты в известных учебниках И.Е. Тамма [16], А.Н. Матвеева [30], Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [31]. Анализ причин, по которым их нельзя считать удовлетворительными содержится в монографии Томилина А.К. [10]. Там же экспериментально и теоретически обоснована идея Николаева Г.В. о реальном существовании продольного электромагнитного взаимодействия. Показано, что кроме вихревой (векторной) компоненты магнитное поле обладает потенциальной (скалярной) составляющей. Такой подход приводит к более глубокому пониманию электромагнитных процессов и позволяет построить полную электромагнитную теорию, которая называется обобщенной электродинамикой.

Запишем дифференциальные уравнения обобщенной электродинамики [10]:

$$\operatorname{rot}\vec{H} + \operatorname{grad}H^* = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad (6.1.1) \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad (6.1.2)$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho + \varepsilon'\varepsilon_0 \frac{\partial B^*}{\partial t}, \quad (6.1.3) \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad (6.1.4)$$

$$\vec{B} = \mu'\mu_0\vec{H}, \quad (6.1.5) \quad B^* = \mu'\mu_0 H^*. \quad (6.1.6)$$

Скалярные функции  $H^*(x, y, z, t)$  и  $B^*(x, y, z, t)$  учитывают потенциальную компоненту магнитного поля, которая обычно исключается при помощи калибровок. Будем называть эту компоненту скалярным магнитным полем (СМП).

В монографии [10] определены условия возникновения СМП и исследованы его свойства. В частности показано, что функции  $H^*(x, y, z, t)$  и  $B^*(x, y, z, t)$  характеризуются знаком, то есть могут принимать положительные или отрицательные значения. В магнитостатическом случае напряженность СМП связана с векторным электродинамическим потенциалом соотношением, исключающим калибровку Кулона:

$$H^* = -\frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} \vec{A},$$

Для вычисления плотности силы Ампера, как известно, применяется формула:

$$\vec{f}_A = \vec{j} \times \vec{B}. \quad (6.1.7)$$

Сила Ампера, действующая на некоторый участок проводника с током, помещенный во внешнее магнитное поле, возникает в результате взаимодействия движущихся в нем электронов, с кристаллической решеткой проводника. Внешнее векторное магнитное поле взаимодействует с векторным магнитным полем каждого электрона, создавая силу Лоренца:

$$\vec{F}_L = e\vec{V} \times \vec{B}.$$

Очевидно, что для линейного тока, когда все частицы движутся вдоль одной линии, плотность силы Ампера можно вычислять по формуле (6.1.7), поскольку:

$$\vec{f}_A = ne\vec{V} \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B}.$$

То есть силу Ампера в этом случае допустимо считать суммой сил Лоренца. Если же учесть поперечные размеры проводника, то магнитные поля электронов частично компенсируются. Это можно видеть на примере двух заряженных частиц, движущихся по параллельным траекториям в одном направлении: векторное магнитное поле в области расположенной между ними частично компенсируется. Токонесущий проводник конечных поперечных размеров создает результирующее векторное магнитное поле, которое и взаимодействует с внешним магнитным полем. При этом сила Ампера не равна сумме сил Лоренца, действующих на все электроны. В этом случае, опираясь на представления, связанные с формулой (6.1.1), плотность поперечной силы следует определять по формуле:

$$\vec{f}_A = \operatorname{rot} \vec{H}_c \times \vec{B},$$

где  $\vec{H}_c$  - напряженность собственного векторного магнитного поля проводника.

Аналогично для продольной электромагнитной силы. В случае взаимодействия отдельной движущейся заряженной частицы с внешним СМП, можно ввести аналог силы Лоренца:

$$\vec{F}_e^* = eB^* \cdot \vec{V}. \quad (6.1.8)$$

Однако, если рассмотреть комплекс частиц, движущихся последовательно вдоль некоторой оси в присутствии внешнего СМП, то возникает продольная сила, которая не равна сумме сил, действующих на такое же количество уединенных частиц. Это происходит потому, что градиенты СМП всех частиц направлены вдоль линии движения. В промежутках между частицами накладываются СМП противоположных знаков и частично компенсируют друг друга. При этом образуется единое СМП комплекса заряженных частиц. Механизм образования собственного СМП комплексом движущихся положительных зарядов представлен на рис. 29. Продольная сила (сила Николаева) возникает за счет взаимодействия внешнего СМП  $B^*$  с собственным СМП  $H_c^*$ , созданным комплексом движущихся заряженных частиц.

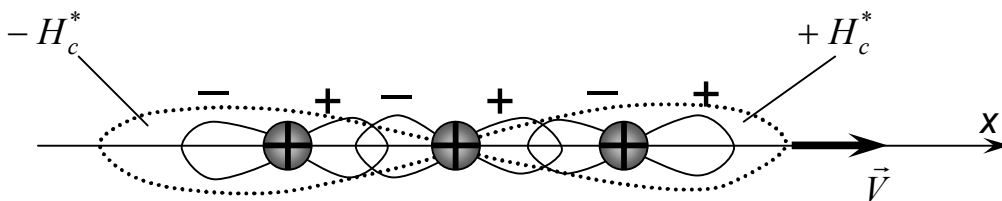


Рис. 29

Поэтому в выражении для плотности силы Николаева вместо  $\vec{j}$  на основании (6.1.1) логично использовать градиент его собственного СМП:

$$\vec{f}^* = B^* \text{grad}H_c^*. \quad (6.1.9)$$

Таким образом, важно понимать, что *внешнее СМП воздействует только на объекты, создающие собственное СМП, то есть на градиентные электромагнитные структуры.* С учетом направления  $\text{grad}H_c^*$  можно говорить, что *сила Николаева действует по направлению тока, текущего в СМП положительного знака, и противоположно направлению тока, текущего в отрицательном СМП.*

Из сказанного следует, что *обобщенный закон электромагнитного взаимодействия* записывается в виде:

$$\vec{f} = \text{rot}\vec{H}_c \times \vec{B} + B^* \text{grad}H_c^*. \quad (6.1.10)$$

Этот закон учитывает обе компоненты полной электромагнитной силы (поперечную и продольную) и ее вихревой характер. Заметим, что закон (6.1.7)

вытекает из (6.1.10) как частный случай применительно к бесконечному линейному току.

Сила Николаева, действующая на ток, текущий в области конечных размеров  $\tau$  в присутствии внешнего СМП, вычисляется в результате интегрирования:

$$\vec{F}^* = \int_{\tau} B^* \text{grad}H_c^* d\tau. \quad (6.1.11)$$

При исследовании магнитного поля линейного токонесущего проводника конечной длины  $l$  (рис. 30) получена [10] формула для определения созданного им СМП:

$$H^*(x',y',z') = \frac{J}{4\pi} \frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} = \frac{J}{4\pi r_0} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1). \quad (6.1.12)$$

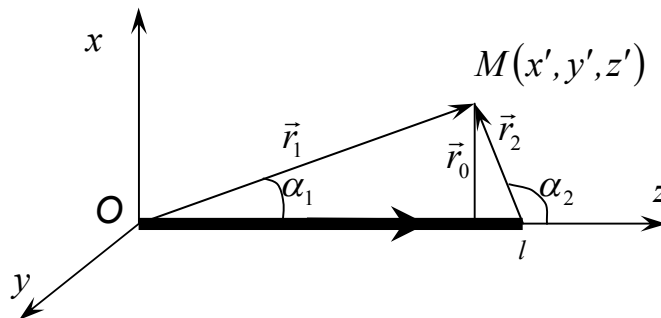


Рис. 30

Заметим, что применять формулу (6.1.12) для вычисления с помощью (6.1.11) силы Николаева, действующей на линейный проводник, можно только при условии  $\Delta z < l$ , то есть когда внешнее СМП действует не по всей длине проводника. Если же внешнее СМП действует по всей длине проводника (от 0 до  $l$ ), при вычислении интеграла возникает неопределенность, поскольку на концах отрезка собственное СМП и  $\text{grad}H_c^*$  принимают бесконечные значения. В этом случае можно использовать приближенные формулы, определяющие значения напряженности собственного СМП на концах проводника. Пусть, например, имеется цилиндрический проводник радиуса  $a$  и длины  $l$ . Такой проводник при равномерном распределении тока по его сечению можно приближенно моделировать цилиндрической трубкой радиуса  $2a/3$ . Тогда при условии, что  $l \gg a$ , получим приближенные значения напряженности собственного СМП на концах проводника:

$$H_{\min}^*(0,0,0) = \frac{J}{8\pi} \frac{2a - 3l}{al}, \quad H_{\max}^*(0,0,l) = \frac{J}{8\pi} \frac{3l - 2a}{al}. \quad (6.1.13)$$

Формулы (6.1.13) вычислены приближенно с использованием упрощенной модели. Для получения более точного результата требуется исследовать распределение плотности тока в проводнике  $j(r)$ .

Пусть ток, текущий по цилиндрическому проводнику радиуса  $r$  распределен по осесимметричному закону  $j(r)$  (рис. 31).

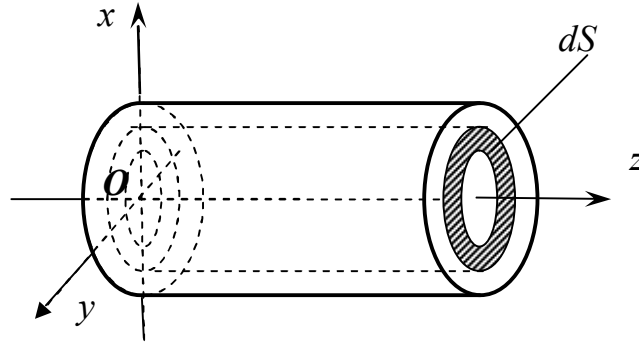


Рис. 31

Выделим цилиндрический участок проводника с круговым сечением  $dS = 2\pi r \cdot dr$ . Ток, текущий по этому цилиндрическому участку, создает на оси  $z$  СМП в соответствии с формулой (6.1.12):

$$dH_c^*(0,0,z') = \frac{j(r)}{4\pi} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) dS = \frac{j(r)}{2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) r dr.$$

Напряженность собственного СМП, созданного этим током на оси  $z$ , вычисляется в результате интегрирования:

$$H_c^*(0,0,z') = \frac{1}{2} \int_0^a j(r) \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) r \cdot dr, \quad (6.1.14)$$

где  $r_1 = \sqrt{r^2 + z'^2}$ ,  $r_2 = \sqrt{r^2 + (l - z')^2}$ .

Пусть, например, плотность тока распределена по линейному осесимметричному закону:

$$j(r) = \alpha \cdot r, \quad (6.1.15)$$

где  $\alpha$  - некоторая постоянная величина. В результате интегрирования имеем:

$$H_c^*(0,0,z') = \frac{\alpha}{2} \left[ \int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + (l - z')^2}} dr - \int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + z'^2}} dr \right]. \quad (6.1.16)$$

При  $z' = 0$  и  $z' = l$  получим конечные значения соответственно:

$$H_c^*(0,0,0) = \frac{\alpha}{2} \left[ \int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + l^2}} dr - \int_0^a r dr \right] = \frac{\alpha}{4} \left[ a\sqrt{a^2 + l^2} + l^2 \ln \frac{l}{a + \sqrt{a^2 + l^2}} - a^2 \right]$$



$$H_c^*(0,0,l) = \frac{\alpha}{2} \left[ \int_0^a r dr - \int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + l^2}} dr \right] = \frac{\alpha}{4} \left[ a^2 - a\sqrt{a^2 + l^2} - l^2 \ln \frac{l}{a + \sqrt{a^2 + l^2}} \right]. \quad (6.1.17)$$

Эти значения одинаковые по модулю и противоположные по знаку. На основании полученных данных графически изобразим распределение собственного СМП  $H_c^*$  токового отрезка длины  $l$  с учетом его поперечных размеров (рис. 32).

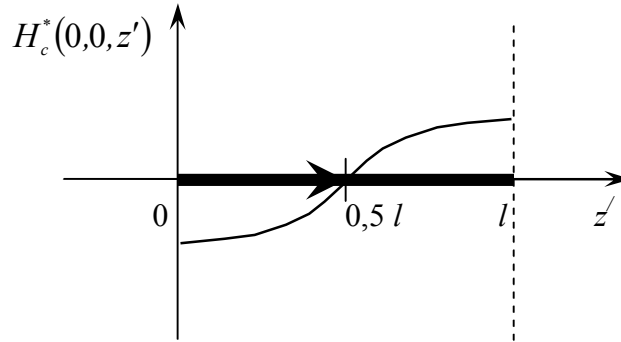


Рис. 32

Рассчитаем продольную силу, действующую на прямолинейный проводник длины  $l$ , помещенный во внешнее стационарное и однородное СМП индукции ( $B^* = const$ ). Считая, что проводник расположен на оси  $z$  можно приближенно записать:

$$grad H_c^* = \frac{dH_c^*}{dz'}.$$

Тогда выражение для силы Николаева представляется следующим образом:

$$\vec{F}^* = \int_{\tau} grad H_c^* \cdot B^* d\tau = \int_0^l \frac{dH_c^*}{dz'} \cdot B^* S \cdot dz' = B^* \cdot S [H_c^*(l) - H_c^*(0)] \vec{z}^0, \quad (6.1.18)$$

где  $\tau$  - объем проводника,  $S$  - площадь его поперечного сечения.

Напряженность СМП на границах проводника в случае однородного распределения можно рассчитывать по приближенным формулам (6.1.13), а в случае закона распределения тока (6.1.15) - по формулам (6.1.17). При любом осесимметричном законе распределения тока нужно использовать формулу (6.1.14).

Если в СМП помещена только часть проводника от  $z_1$  до  $z_2$ , то выражение для силы Николаева записывается в виде:

$$\vec{F}^* = B^* \cdot S [H_c^*(z_2) - H_c^*(z_1)]. \quad (6.1.19)$$

Обычно СМП неоднородно  $B^* = B^*(z)$ . С учетом этого запишем более общее выражение для силы Николаева применительно к линейному проводнику:

$$\vec{F}^* = S \left[ H_c^*(z_2) - H_c^*(z_1) \right] \int_{z_1}^{z_2} B^*(z) dz. \quad (6.1.20)$$

## 6.2 Собственные продольные колебания электропроводного стержня в магнитном поле

Рассмотрим электропроводный стержень, находящийся в неоднородном СМП  $B^*(z)$  (рис. 33). Продольные колебания происходят вдоль оси  $z$ . Пусть в силу граничных условий концы стержня неподвижны, длина стержня не изменяется, то есть  $l = const$ .

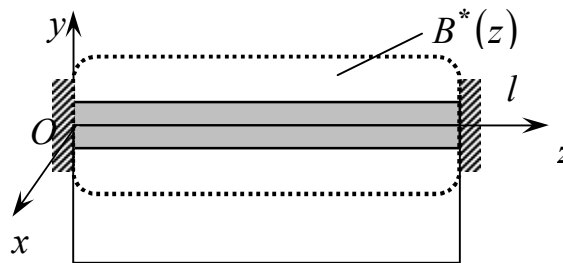


Рис. 33

Запишем выражение для величины, аналогичной элементарному магнитному потоку:

$$d\Phi^* = B^*(z)U(z,t)dz, \quad (6.2.1)$$

где  $U(z,t)$  - функция смещений стержня вдоль оси  $z$ ,  $B^*(z)$  - индукция СМП. Проинтегрировав (6.2.1) по длине стержня  $l$ , получим:

$$\Phi^* = \int_0^l B^*(z)U(z,t)dz. \quad (6.2.2)$$

При изменении магнитного потока на концах проводника возникает ЭДС индукции:

$$\varepsilon^* = -\frac{d\Phi^*}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_0^l B^*(z)U(z,t)dz. \quad (6.2.3)$$

Знак « - » в последней части этой формулы не ставится, поскольку, он включен в стоящий там интеграл. Такой аналог закона электромагнитной индукции (безвихревая электромагнитная индукция) обоснован в работах [10, 29].

Если концы проводника замкнуты, то индуцируется ток плотности:

$$j = \frac{\sigma \varepsilon^*}{l} = \frac{\sigma}{l} \frac{d}{dt} \int_0^l B^*(z) U(z, t) dz, \quad (6.2.4)$$

где  $\sigma$  - удельная проводимость стержня.

Сопротивлением замыкающей цепи пренебрегаем. Формулу (6.2.4) запишем в виде:

$$j = \frac{\sigma}{l} \int_0^l B^*(z) \frac{\partial U(z, t)}{\partial t} dz. \quad (6.2.5)$$

В [10] показано, что в случае СМП положительного знака индуцированный ток течет в направлении перемещения проводника, в отрицательном, наоборот, против перемещения. Этот же вывод следует и из (6.2.5).

На каждый элемент  $dz$  стержня действует продольная магнитная сила:

$$dF^* = f^* S \cdot dz, \quad (6.2.6)$$

где  $f^* = B^* \cdot \text{grad} H_c^*$  - модуль плотности силы Николаева.

Так как стержень считается линейным, то можно записать:

$$dF^* = B^* \cdot S \cdot \frac{dH_c^*}{dz} \cdot dz = B^* \cdot S \cdot dH_c^*. \quad (6.2.7)$$

Для линейного стержня в монографии [10] рассчитано собственное СМП  $H_c^*$ , созданное током, индуцированным в стержне:

$$dH_c^* = \frac{J}{4\pi} \left[ \frac{1}{(l-z)^2} + \frac{1}{z^2} \right] dz.$$

Следовательно, выражение для продольной магнитной силы, действующей на участок стержня  $dz$ , запишется в виде:

$$dF^* = B^* S \frac{J}{4\pi} \left[ \frac{1}{(l-z)^2} + \frac{1}{z^2} \right] dz. \quad (6.2.8)$$

С учетом (6.2.4) имеем:

$$dF^* = S^2 \frac{\sigma B^*(z)}{4\pi l} \left[ \frac{1}{(l-z)^2} + \frac{1}{z^2} \right] \left( \int_0^l B^*(z) \cdot \frac{\partial U(z, t)}{\partial t} dz \right) dz. \quad (6.2.9)$$

Кроме того, учтем диссипативные процессы, приняв силу механического сопротивления пропорциональной первой степени скорости:

$$dF_c = \beta \rho S \frac{\partial U}{\partial t} dz. \quad (6.2.10)$$

где  $\beta$  – диссипативный коэффициент,  $\rho$  – плотность материала стержня,  $S$  – площадь сечения стержня.

Запишем интегро-дифференциальное уравнение собственных продольных колебаний стержня в неоднородном СМП с учетом этих сил:

$$\rho S \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dz - ES \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \beta \rho S \frac{\partial U}{\partial t} dz - \frac{S^2 \sigma B^*(z)}{4\pi l} \left( \left[ \frac{1}{(l-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right] \int_0^l B^*(z) \frac{\partial U}{\partial t} dz \right) dz = 0, \quad (6.2.11)$$

где  $E$  – модуль упругости.

После преобразования получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{S \sigma B^*(z)}{4\pi \rho l} \left[ \frac{1}{(l-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right] \int_0^l B^*(z) \frac{\partial U}{\partial t} dz = 0. \quad (6.2.12)$$

Функцию смещений представим в виде ряда Фурье по собственным амплитудным функциям:

$$U(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Z_n(z).$$

Напомним, что здесь  $q_n(t)$  – обобщенные координаты, имеющие размерность длины,  $Z_n(z)$  – безразмерная величина. Тогда имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ Z_n \ddot{q}_n + \beta Z_n \dot{q}_n - \frac{E}{\rho} q_n \frac{d^2 Z}{dz^2} - \dot{q}_n \frac{S \sigma B^*(z)}{4\pi \rho l} \left[ \frac{1}{(l-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right] \int_0^l B^*(z) Z_n dz \right] = 0. \quad (6.2.13)$$

Для стержня с закрепленными концами собственные амплитудные функции синусоидальны:

$$Z_n(z) = \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Умножим уравнение (6.2.13) на  $Z_r$  ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ) и проинтегрируем по всей длине стержня. Применим условие ортогональности:

$$\int_0^l Z_r Z_n dz = \begin{cases} l/2; & r = n \\ 0; & r \neq n \end{cases}.$$

Приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + \frac{Er^2 \pi^2}{\rho l^2} q_r - \frac{S\sigma}{2\pi \rho l^2} \int_0^l Z_r B^*(z) \left( \frac{1}{(l-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right) dz \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( \dot{q}_n \int_0^l B^*(z) Z_n dz \right) = 0, \quad (6.2.14)$$

$\{r = 1, 2, 3, \dots\}.$

Введем обозначения:

$$\int_0^l Z_r B^*(z) \left( \frac{1}{(l-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right) dz = \tilde{\gamma}_r, \quad (6.2.15)$$

$$\int_0^l B^*(z) Z_n dz = \tilde{\alpha}_n. \quad (6.2.16)$$

Получим:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + \frac{Er^2 \pi^2}{\rho l^2} q_r + \frac{S\sigma}{2\pi \rho l^2} \cdot \tilde{\gamma}_r \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \cdot \tilde{\alpha}_n = 0, \quad \{r = 1, 2, 3, \dots\}. \quad (6.2.17)$$

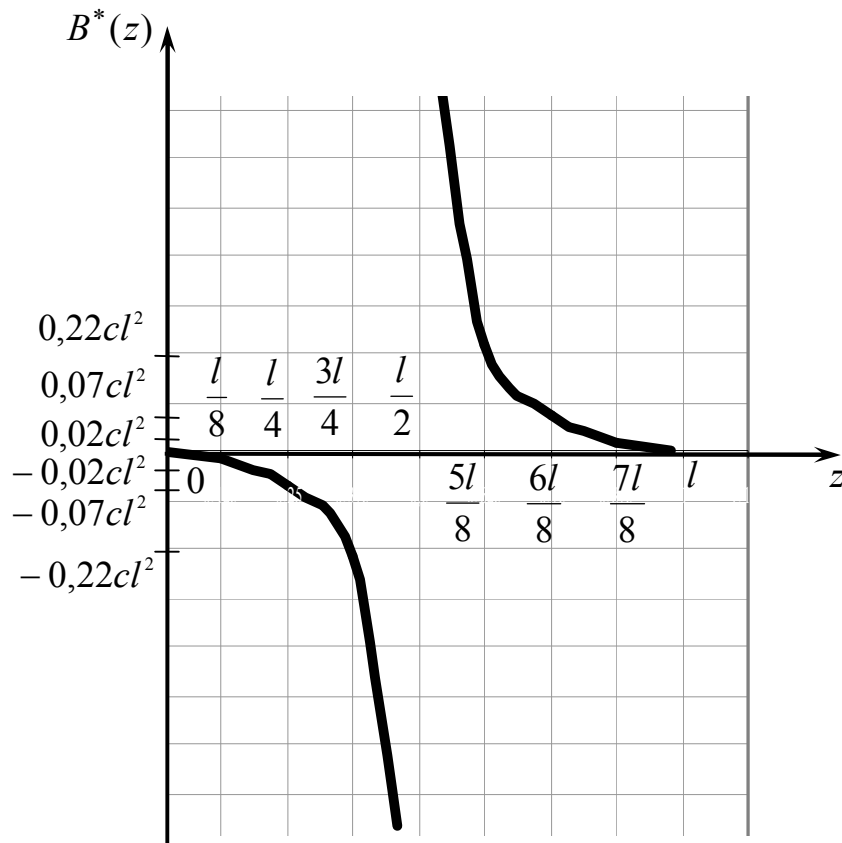


Рис. 34

Исследуем свойства интеграла (6.2.15). Чтобы избежать неопределенности с его вычислением, примем такое распределение внешнего СМП, при котором на концах стержня оно обращается в ноль. Пусть, например:

$$B^*(z) \left( \frac{1}{(l-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right) = const. \quad (6.2.18)$$

Построим график зависимости  $B^*(z)$  в случае распределения СМП (6.2.18) (рис. 34).

Из графика (рис. 34) видно, что в середине проводника имеется разрыв. Однако именно в этой точке выражение

$$\left( \frac{1}{(l-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right)_{z=\frac{l}{2}} = 0$$

обращается в ноль. Таким образом, при вычислении (6.2.15) неопределенность не возникает.

Значения интеграла (6.2.15)  $\gamma_r$  определяются выражением  $\int_0^l Z_r dz$ . Для четных синусоидальных амплитудных функций ( $r = 2, 4, 6, \dots$ ) этот интеграл равен нулю, поэтому, и  $\gamma_r = 0$  при ( $r = 2, 4, 6, \dots$ ). Следовательно, в этом случае четные парциальные колебания электромагнитного воздействия не испытывают, их можно назвать изолированными. Физическое объяснение этого состоит в следующем: в виду антисимметричного распределения внешнего СМП на рис. 24 при четных колебаниях значение функции  $\Phi^*$ , вычисленная в соответствии с (6.2.2), остается неизменным.

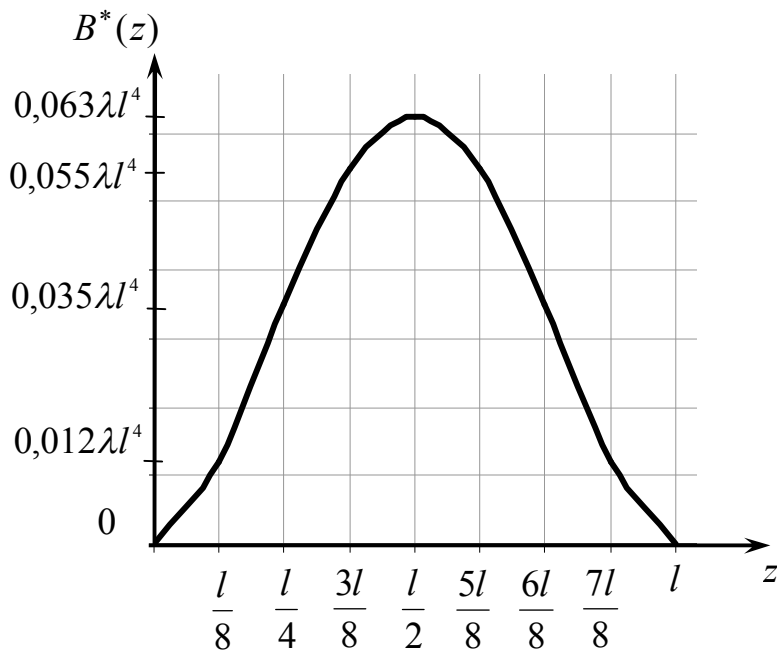


Рис. 35

Рассмотрим другой пример:

$$B^*(z) = \lambda(l-z)^2 z^2, \quad (6.2.19)$$

где  $\lambda$  - некоторая размерная константа.

Построим график зависимости  $B^*(z)$  в этом случае (рис. 35).

Из графика (рис. 35) видно, что на границах проводника внешнее СМП  $B^*(z)$  равно нулю, а в центре имеет максимальное значение. Вычислим интеграл  $\gamma_r$  с учетом (6.2.19).

$$\gamma_r = \int_0^l Z_r B^*(z) \left( \frac{1}{(l-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right) dz = \lambda \int_0^l (2zl - l^2) \sin \frac{r\pi z}{l} dz = -\frac{\lambda l^3}{r\pi} (\cos r\pi + 1). \quad (6.2.20)$$

Отсюда следует, что для всех нечетных колебаний интеграл  $\gamma_r = 0$ , ( $r = 1, 3, 5, \dots$ ), а при четных  $r = 2, 4, 6, \dots$

$$\gamma_r = -\frac{2\lambda l^3}{r\pi}, \quad (r = 2, 4, 6, \dots).$$

Это объясняется симметричным распределением внешнего СМП относительно середины стержня. При нечетных формах колебаний функция  $\Phi^*$  остается постоянной.

Сделаем общий вывод: задавая закон распределения внешнего СМП  $B^*(z)$ , можно избирательно воздействовать на определенные парциальные колебания, оставляя другие парциальные колебания изолированными от электромагнитного воздействия.

Приведем уравнения (6.2.17) к безразмерному виду. Для этого введем характерные размеры:  $l$  - длина,  $p_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  - частота,  $\frac{1}{p_1}$  - время,  $\rho$  - плотность,

$\beta = p_1$  - коэффициент механической диссипации,  $B^*$  - значение индукции СМП в характерной точке,  $\sigma$  - проводимость.

В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + r^2 q_r - \mathbf{St} \frac{S}{2\pi} \tilde{\gamma}_r \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_n \dot{q}_n = 0, \quad \{r = 1, 2, \dots\}, \quad (6.2.21)$$

где  $r = p_r$ ,  $\mathbf{St} = \frac{\sigma B^{*2}(z)}{\rho p_1}$  - число Стюарта.

Полученную систему дифференциальных уравнений (6.2.21) решим методом расщепления. Представим начальные условия в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n(0) \cdot Z_n(z) = \hat{f}_1(z), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(0) \cdot Z_n(z) = \hat{f}_2(z).$$

То есть начальные значения обобщенных координат и обобщенных скоростей для каждого парциального колебания определяются как коэффициенты ряда при разложении заданных функций  $\hat{f}_1(z)$ ,  $\hat{f}_2(z)$  по собственным амплитудным функциям. Если в силу начальных условий наибольшей энергией обладает движение, соответствующее низшему парциальному тону, то расщепление можно произвести следующим образом: оставим в первом уравнении первый член суммы, стоящей в правой части, во второй два и т.д. В результате получим систему уравнений, которую можно интегрировать последовательно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_1 + \left( \beta - \mathbf{St} \cdot \frac{S}{2\pi} \tilde{\gamma}_1 \tilde{\alpha}_1 \right) \dot{q}_1 + 1^2 \cdot q_1 = 0; \\ \ddot{q}_2 + \left( \beta - \mathbf{St} \cdot \frac{S}{2\pi} \tilde{\gamma}_2 \tilde{\alpha}_2 \right) \dot{q}_2 + 2^2 \cdot q_2 = \mathbf{St} \cdot \frac{S}{2\pi} \tilde{\gamma}_1 \tilde{\alpha}_1 \dot{q}_1; \\ \ddot{q}_3 + \left( \beta - \mathbf{St} \cdot \frac{S}{2\pi} \tilde{\gamma}_3 \tilde{\alpha}_3 \right) \dot{q}_3 + 3^2 \cdot q_3 = \mathbf{St} \cdot \frac{S}{2\pi} (\tilde{\gamma}_1 \tilde{\alpha}_1 \dot{q}_1 + \tilde{\gamma}_2 \tilde{\alpha}_2 \dot{q}_2); \\ \dots \\ \ddot{q}_r + \left( \beta - \mathbf{St} \cdot \frac{S}{2\pi} \tilde{\gamma}_r \tilde{\alpha}_r \right) \dot{q}_r + r^2 \cdot q_r = \mathbf{St} \cdot \frac{S}{2\pi} (\tilde{\gamma}_1 \tilde{\alpha}_1 \dot{q}_1 + \tilde{\gamma}_2 \tilde{\alpha}_2 \dot{q}_2 + \dots + \tilde{\gamma}_{r-1} \tilde{\alpha}_{r-1} \dot{q}_{r-1}). \end{array} \right. \quad (6.2.22)$$

Обратим внимание на факторы затухания парциальных колебаний. С учетом отрицательных значений  $\gamma_r$  видно, что все они за счет электромагнитного воздействия увеличились.

В силу принятых начальных условий наибольшую исходную амплитуду имеет основное парциальное колебание, поэтому интегрирование системы дифференциальных уравнений начинается с первого уравнения. Колебания основного тона являются затухающими и в одномодовом приближении с учетом начальных условий описываются решением:

$$q_1 = q_{01} \cdot \exp(-h_1 t) \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1), \quad (6.2.23)$$

где  $\omega_1 = \sqrt{1 - h_1^2}$ ;  $h_1^2 = \frac{1}{2} \left( \beta - \mathbf{St} \cdot \frac{S}{2\pi} \tilde{\gamma}_1 \tilde{\alpha}_1 \right)$ .

Начальная амплитуда  $q_{01}$  и начальная фаза  $\varepsilon_1$  определяются начальными условиями для основного тона, то есть выражаются через величины  $q_1(0)$  и  $\dot{q}_1(0)$ . Решение второго уравнения системы (6.2.22) представляет собой суперпозицию затухающих функций с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2 = \sqrt{2 - h_2^2}$ , где

$$h_2^2 = \frac{1}{2} \left( \beta - \mathbf{St} \cdot \frac{S}{2\pi} \tilde{\gamma}_2 \tilde{\alpha}_2 \right), \text{ а именно}$$



$$q_2 = q_{02} \cdot \exp(-h_1 t) \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2) + \quad (6.2.24)$$

$$+ \mathbf{St} \cdot \frac{\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 q_{01} \cdot \exp(-h_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1)}{2\pi \sqrt{(2^2 - 1^2) + 4h_1(h_1 - h_2)(2^2 - 1^2) + 4 \cdot 1^2(h_1 - h_2)^2}},$$

причем  $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{h_1}{\omega_1}$ , а  $q_{01}$ ,  $\varepsilon_1$  и  $q_{02}$  определяются начальными условиями.

Обычно анализируют несколько наиболее сильных парциальных колебаний. Иногда достаточно исследовать одно основное колебание, то есть ограничиться одномодовым приближением.

Решим аналогичную задачу, изменив граничные условия. Пусть один конец упругого электропроводного стержня жестко закреплен, а второй свободен. Весь стержень находится в неоднородном СМП (рис. 36).

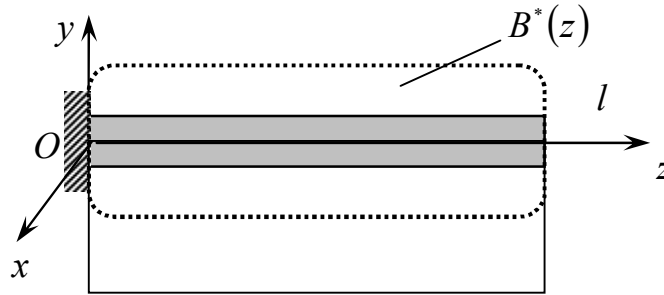


Рис. 36

Для заданных граничных условий собственные амплитудные функции записываются в следующем виде:

$$Z_n(z) = \sin \frac{n\pi z}{2l}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (6.2.25)$$

а условие ортогональности:

$$\int_0^l Z_r Z_n dz = \begin{cases} l; & r = n \\ 0; & r \neq n \end{cases}. \quad (6.2.26)$$

Применив к уравнению (6.2.12) процедуру Фурье и условие ортогональности (6.2.26), получим систему уравнений:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + \frac{Er^2 \pi^2}{4\rho l^2} q_r - \frac{S\sigma}{4\pi \rho l^2} \cdot \gamma_r \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \cdot \alpha_n = 0, \quad \{r = 1, 2, 3, \dots\}, \quad (6.2.27)$$

Произведем обезразмеривание и получим:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + \frac{r^2}{4} q_r - \mathbf{St} \frac{S}{4\pi} \gamma_r \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \dot{q}_n = 0, \quad \{r = 1, 2, 3, \dots\}, \quad (6.2.28)$$

Систему уравнений (6.2.28) решим методом расщепления.

Сравним между собой уравнения (6.2.21) и (6.2.28). По сравнению со случаем жестко закрепленного стержня, электромагнитная сила уменьшилась в 2 раза, что привело к уменьшению в 2 раза всех парциальных частот.

Систему уравнений (6.2.28) тоже можно приближенно решить, применив метод расщепления.

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_1 + \left( \beta - \mathbf{St} \cdot \frac{S}{4\pi} \gamma_1 \alpha_1 \right) \dot{q}_1 + \frac{1^2}{4} \cdot q_1 = 0; \\ \ddot{q}_2 + \left( \beta - \mathbf{St} \cdot \frac{S}{4\pi} \gamma_2 \alpha_2 \right) \dot{q}_2 + \frac{2^2}{4} \cdot q_2 = \mathbf{St} \cdot \frac{S}{4\pi} \gamma_2 \alpha_1 \dot{q}_1; \\ \ddot{q}_3 + \left( \beta - \mathbf{St} \cdot \frac{S}{4\pi} \gamma_3 \alpha_3 \right) \dot{q}_3 + \frac{3^2}{4} \cdot q_3 = \mathbf{St} \cdot \frac{S}{4\pi} \gamma_3 (\alpha_1 \dot{q}_1 + \alpha_2 \dot{q}_2 + \alpha_3 \dot{q}_3); \\ \dots; \\ \ddot{q}_r + \left( \beta - \mathbf{St} \cdot \frac{S}{4\pi} \gamma_r \alpha_r \right) \dot{q}_r + \frac{r^2}{4} \cdot q_r = \mathbf{St} \cdot \frac{S}{4\pi} \gamma_r (\alpha_1 \dot{q}_1 + \alpha_2 \dot{q}_2 + \dots + \alpha_{r-1} \dot{q}_{r-1}). \end{array} \right. \quad (6.2.29)$$

Если вновь принять условие (6.2.18), то с учетом амплитудных функций (6.2.25) получим, что  $\gamma_r = 0$  для нечетных парциальных колебаний ( $r = 1, 3, 5, \dots$ ). То есть эти парциальные колебания являются изолированными от электромагнитного воздействия.

Оценочный расчет показывает, что продольная сила, вызванная собственным СМП ничтожно мала. Приведем численный пример. Пусть жесткий медный стержень жестко закреплен с двух сторон и находится во внешнем стационарном неоднородном СМП, распределенном по закону (6.2.19). Заданы следующие параметры системы: максимальное значение индукции внешнего СМП

$$B^*(z) = 1 \text{ Тл}; \quad \text{проводимость меди} \quad \sigma = 0,588 \cdot 10^8 \frac{\text{Ом} \cdot \text{м}}{\text{м}};$$

$$\text{плотность меди } \rho = 8600 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad \text{диаметр стержня } d = 0,005 \text{ м}; \quad \text{длина стержня } l = 0,05 \text{ м}.$$

В последний член уравнения (6.2.17) входит ускорение:

$$w^* = \frac{S\sigma}{2\pi\rho l} \cdot \gamma_r \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \cdot \alpha_n.$$

Рассмотрим первую форму колебаний. В этом случае  $\gamma_1 = 0$ , а, следовательно  $w^* = 0$ , то есть заданных граничных условиях и распределении внешне-

го СМП первая форма колебаний изолирована от электромагнитного воздействия.

Для второй формы колебаний ускорение запишется в следующем виде:

$$w^* = \frac{S\sigma}{2\pi\rho l} \cdot \gamma_2 (\dot{q}_1\alpha_1 + \dot{q}_2\alpha_2) \approx 0,0196 \frac{M}{c^2}.$$

Тогда продольная сила будет равна  $F^* \approx 16,5 \cdot 10^{-6} H$ .

Таким образом, показано, что даже за счет достаточно быстрого движения проводника в СМП в нем индуцируются очень малые токи, а, следовательно, продольная магнитная сила не велика. В последствии рассмотрим способы увеличения силы Николаева.

Подходы, использованные в обобщенной электродинамике, существенно расширяют взгляды на организацию материи. В частности становится понятным, что электромагнитное поле не является самостоятельным материальным объектом, а лишь отражает состояние некоторой всепроникающей супертонкой среды, которая заполняет все мировое пространство от масштабов Вселенной до внутриядерного уровня. Происходит возврат на качественно новой основе к представлениям об эфире (физическом вакууме). Эта проблема достаточно подробно обсуждается, например, в монографии [10]. Там же приведены ссылки на эксперименты, указывающие на возможность обмена энергией между электромеханической системой и эфиром.

Результат, полученный в данной главе, показывает, что число Стюарта можно использовать в качестве показателя энергетического взаимодействия электродинамической системы с эфиром.

### 6.3 Определение оптимальных размеров активного участка

Выясним зависимость собственного СМП от тока, текущего в проводнике. В разделе 1 получена формула (6.1.18), учитывающая зависимость продольной магнитной силы от размеров проводника. Ее удобно применять, когда по проводнику пропускается ток от внешнего источника, то есть изучаются вынужденные колебания упругой системы.

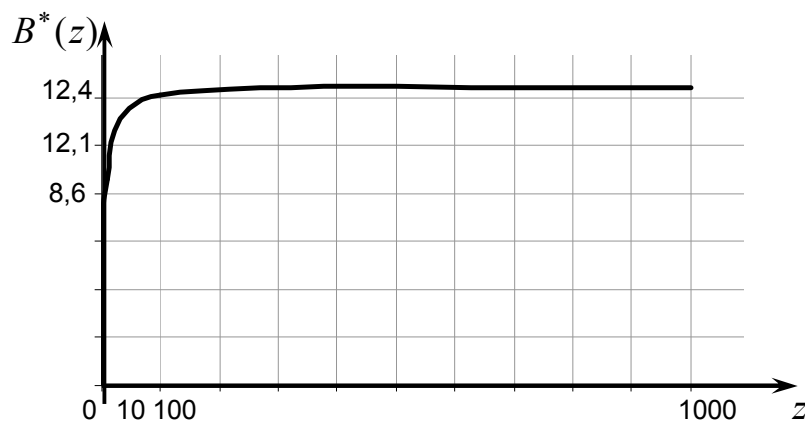


Рис.37

Анализируя эту формулу, можно сказать, что с увеличением длины активного участка  $l$ , продольная электромагнитная сила возрастает очень медленно (рис. 37). Существенно повлиять на модуль этой силы можно за счет изменения площади поперечного сечения проводника  $S$  (рис. 38).

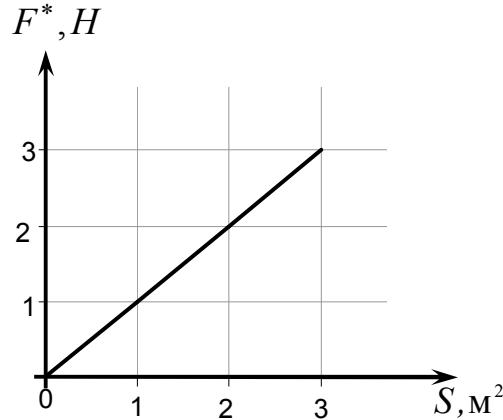


Рис. 38

Поэтому больший интерес представляют задачи, в которых рассматриваются стержни с достаточно большим поперечным сечением, или когда активный участок мал. В таких случаях неизбежно приходится учитывать поперечные размеры проводника.

Сформулируем задачу о вынужденных продольных колебаниях упругого стержня, на участке которого действует внешнее однородное СМП  $B^* = const$ . Индуцированными токами при этом пренебрежем.

Составим дифференциальное уравнение с учетом силы Николаева в виде (6.1.18):

$$\rho S \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dz - ES \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} dz + \beta \rho S \frac{\partial U}{\partial t} dz - B^* S \cdot dH_c^* = 0, \quad (6.2.30)$$

или

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{B^*}{\rho} \frac{dH_c^*}{dz} = 0.$$

В результате применения процедуры Фурье, приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + \frac{Er^2 \pi^2}{\rho l^2} q_r - \frac{2 B^*}{l \rho} \int_{z_1}^{z_2} Z_r \frac{dH_c^*}{dz} dz = 0, \quad \{r = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Приближенно примем:

$$\frac{dH_c^*}{dz} \approx \frac{H_c^*(z_2, t) - H_c^*(z_1, t)}{\Delta z}, \quad (6.2.31)$$

где  $\Delta z = z_2 - z_1$ , а значения  $H_c^*(z_2, t)$ ,  $H_c^*(z_1, t)$  определяются в зависимости от случая по формулам (6.1.13) или (6.1.17). При этом, соотношение (6.2.31) не зависит от  $z$ . Тогда:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + \frac{Er^2 \pi^2}{\rho l^2} q_r - \frac{2 B^*}{l \rho} \frac{H_c^*(z_2, t) - H_c^*(z_1, t)}{\Delta z} \int_{z_1}^{z_2} Z_r dz = 0, \quad \{r = 1, 2, 3, \dots\}. \quad (6.2.32)$$

Запишем уравнение (6.2.32) в следующем виде и обезразмерим:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + \frac{Er^2 \pi^2}{\rho l^2} q_r - \frac{2 B^*}{l \rho} \frac{\Delta H_c^*(z, t)}{\Delta z} \int_{z_1}^{z_2} Z_r dz = 0, \quad \{r = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Для этого введем характерные размеры:  $l$  - длина;  $p_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  - частота;  $\frac{1}{p_1}$  - время;  $\rho$  - плотность;  $\beta = p_1$  - коэффициент механической диссипации;  $B^*$  - индукция внешнего СМП;  $\mu_0$  - магнитная постоянная.

В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + r^2 q_r - 2 \mathbf{St} \cdot \Delta H_c^*(z, t) \int_{z_1}^{z_2} Z_r dz = 0, \quad \{r = 1, 2, 3, \dots\}, \quad (6.2.33)$$

где  $\mathbf{St} = \frac{B^{*2}}{l^2 p_1^2 \rho \mu_0}$  - число Стюарта.

Уравнения, входящие в систему (6.2.33) являются независимыми, и каждое из них можно решать отдельно. Из этих уравнений видно, что при условии  $\int_{z_1}^{z_2} Z_r dz = 0$  выделяются изолированные от электромагнитного воздействия моды. В частности, это условие выполняется для четных колебаний при симметричном расположении активного участка относительно середины стержня, в случае, когда стержень жестко закреплен с двух сторон.

#### 6.4 Вынужденные продольные колебания электропроводного стержня в магнитном поле

В главе 6.3 показано, что индуцированные токи, а следовательно и продольная магнитная сила очень малы. Сила Николаева может заметно проявляться при взаимодействии СМП с внешним электрическим током.

Пусть от источника тока, содержащегося во внешней цепи, по стержню пропускается переменный электрический ток  $j_B(t)$  (рис. 39).

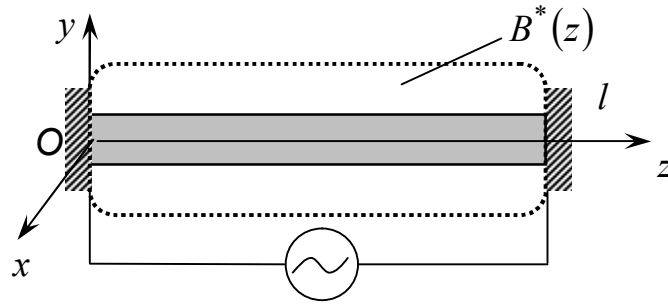


Рис. 39

В силу граничных условий, концы стержня неподвижны, длина стержня не изменяется, то есть  $l = const$ .

Если стержень помещен в стационарное неоднородное СМП  $B^*(z)$ , то на элемент стержня  $dz$  действует вынуждающая сила Николаева:

$$dF_B^* = f_B^* S \cdot dz = B^* S \frac{j_B}{4\pi} \left[ \frac{1}{(l-z)^2} + \frac{1}{z^2} \right] dz, \quad (6.4.1)$$

где  $f_B^*$  - плотность вынуждающей продольной силы;

$j_B$  - модуль плотности внешнего тока.

Запишем интегро-дифференциальное уравнение вынужденных продольных колебаний стержня.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\sigma S B^*(z)}{4\pi \rho l} \left[ \frac{1}{(l-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right] \int_0^l \frac{\partial U(z,t)}{\partial t} B^*(z) dz = \\ = \frac{j_B B^*(z)}{4\pi \rho} \left[ \frac{1}{(l-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

Применим к уравнению (6.4.2) процедуру Фурье, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ Z_n \ddot{q}_n + \beta Z_n \dot{q}_n - \frac{E}{\rho} q_n \frac{d^2 Z}{dz^2} - \dot{q}_n \frac{S \sigma B^*(z)}{4\pi \rho l} \left[ \frac{1}{(l-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right] \int_0^l B^*(z) Z_n dz \right] = \\ = \frac{j_B B^*(z)}{4\pi \rho} \left[ \frac{1}{(l-z)^2} - \frac{1}{z^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

Для заданных граничных условий собственные амплитудные функции синусоидальны:

$$Z_n(z) = \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (6.4.4)$$

Применяя условия (6.4.4) и условие ортогональности:

$$\int_0^l Z_r Z_n dz = \begin{cases} l/2; & r = n \\ 0; & r \neq n \end{cases},$$

получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + \frac{r^2 \pi^2 E}{\rho l^2} q_r - \frac{\sigma S}{2\pi \rho l^2} \gamma_r \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \alpha_n = \frac{j_B}{2\pi \rho L} \gamma_r, \quad \{r = 1, 2, 3, \dots\}. \quad (6.4.5)$$

Здесь использованы обозначения (6.2.15) – (6.2.16).

Применим к уравнению (6.4.5) процедуру обезразмеривания. Введем характерные размеры:  $l$  - длина;  $p_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  - частота;  $\frac{1}{p_1}$  - время;  $\rho$  - плотность;

$\beta = p_1$  - коэффициент механической диссипации;  $B^*$  - индукция внешнего СМП;  $\mu_0$  - магнитная постоянная.

В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + r^2 q_r - \mathbf{St} \frac{S}{2\pi} \gamma_r \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \dot{q}_n = \mathbf{St} \cdot \frac{j_B}{2\pi} \gamma_r, \quad \{r = 1, 2, 3, \dots\}. \quad (6.4.6)$$

Полученную систему интегро-дифференциальных уравнений можно решить методом расщепления. Представим начальные условия в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n(0) \cdot Z_n(z) = f_1(z), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(0) \cdot Z_n(z) = f_2(z).$$

Получим систему дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_1 + \left( \beta - \mathbf{St} \cdot \frac{S}{2\pi} \gamma_1 \alpha_1 \right) \dot{q}_1 + 1^2 \cdot q_1 = \mathbf{St} \cdot \frac{j_B}{2\pi} \gamma_1; \\ \ddot{q}_2 + \left( \beta - \mathbf{St} \cdot \frac{S}{2\pi} \gamma_2 \alpha_2 \right) \dot{q}_2 + 2^2 \cdot q_2 = \mathbf{St} \cdot \frac{j_B}{2\pi} \gamma_2 + \mathbf{St} \cdot \frac{S}{2\pi} \gamma_2 \alpha_1 \dot{q}_1; \\ \ddot{q}_3 + \left( \beta - \mathbf{St} \cdot \frac{S}{2\pi} \gamma_3 \alpha_3 \right) \dot{q}_3 + 3^2 \cdot q_3 = \mathbf{St} \cdot \frac{j_B}{2\pi} \gamma_3 + \mathbf{St} \cdot \frac{S}{2\pi} \gamma_3 (\alpha_1 \dot{q}_1 + \alpha_2 \dot{q}_2); \\ \dots; \\ \ddot{q}_r + \left( \beta - \mathbf{St} \cdot \frac{S}{2\pi} \gamma_r \alpha_r \right) \dot{q}_r + r^2 \cdot q_r = + \mathbf{St} \cdot \frac{j_B}{2\pi} \gamma_r + \\ + \mathbf{St} \cdot \frac{S}{2\pi} \gamma_r (\alpha_1 \dot{q}_1 + \alpha_2 \dot{q}_2 + \dots + \alpha_{r-1} \dot{q}_{r-1}). \end{array} \right.$$

(6.4.7)

Уравнения (6.4.7) можно проинтегрировать последовательно и получить рекуррентные формулы, выражающее приближенное аналитическое решение.

Функцию  $B^*(z)$ , входящую в интеграл  $\gamma_r$  можно использовать в качестве управляющей: задавая ее различным образом можно изолировать от электромагнитного воздействия заданные группы мод. Это возможно, когда интеграл  $\gamma_r$  обращается в ноль.

Рассмотрим случай, когда один конец стержня жестко закреплен, а второй свободен. Стержень, как и в первом случае, находится в стационарном магнитном поле и по нему пропускается переменный ток  $j_B(t)$  (рис. 40).

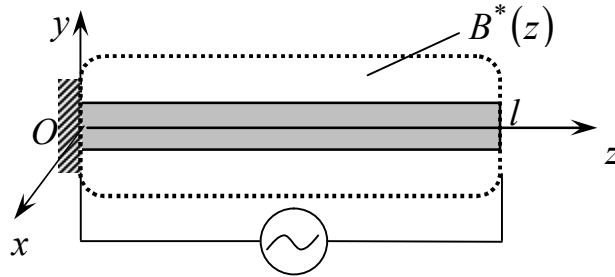


Рис. 40

Для заданных граничных условий собственные амплитудные функции синусоидальны:

$$Z_n(z) = \sin \frac{n\pi z}{2l}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Применив к уравнению (2.34) условие ортогональности:

$$\int_0^l Z_r Z_r dz = \begin{cases} l; & r = n \\ 0; & r \neq n \end{cases}$$

получим:

$$\ddot{q}_r + \beta \cdot \dot{q}_r + \frac{r^2 \pi^2 E}{4\rho l^2} q_r - \frac{\sigma S}{4\pi \rho l^2} \gamma_r \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \cdot \alpha_n = \frac{j_B}{4\pi \rho l} \gamma_r, \quad \{r = 1, 2, 3, \dots\}. \quad (6.4.8)$$

Здесь вновь использованы обозначения (6.2.15) – (6.2.16).

К уравнениям (6.3.8) применим процедуру обезразмеривания и в результате получим:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + \frac{r^2}{4} q_r - \mathbf{St} \frac{S}{4\pi} \gamma_r \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \dot{q}_n = \mathbf{St} \cdot \frac{j_B}{4\pi} \gamma_r, \quad \{r = 1, 2, 3, \dots\}. \quad (6.4.9)$$

Сравнивая между собой уравнения (6.4.6) и (6.4.9) заметим, что электромагнитная сила уменьшилась в 2 раза по сравнению со случаем балки такой же длины с жестко закрепленными концами. Это привело к уменьшению электромагнитных членов в 2 раза.



$$\left\{ \begin{array}{l}
\ddot{q}_1 + \left( \beta - \mathbf{St} \cdot \frac{S}{4\pi} \gamma_1 \alpha_1 \right) \dot{q}_1 + \frac{1^2}{4} \cdot q_1 = \mathbf{St} \cdot \frac{j_B}{4\pi} \gamma_1; \\
\ddot{q}_2 + \left( \beta - \mathbf{St} \cdot \frac{S}{4\pi} \gamma_2 \alpha_2 \right) \dot{q}_2 + \frac{2^2}{4} \cdot q_2 = \mathbf{St} \cdot \frac{j_B}{4\pi} \gamma_2 + \mathbf{St} \cdot \frac{S}{4\pi} \gamma_2 \alpha_1 \dot{q}_1; \\
\ddot{q}_3 + \left( \beta - \mathbf{St} \cdot \frac{S}{4\pi} \gamma_3 \alpha_3 \right) \dot{q}_3 + \frac{3^2}{4} \cdot q_3 = \mathbf{St} \cdot \frac{j_B}{4\pi} \gamma_3 + \mathbf{St} \cdot \frac{S}{4\pi} \gamma_3 (\alpha_1 \dot{q}_1 + \alpha_2 \dot{q}_2); \\
\cdots; \\
\ddot{q}_r + \left( \beta - \mathbf{St} \cdot \frac{S}{4\pi} \gamma_r \alpha_r \right) \dot{q}_r + \frac{r^2}{4} \cdot q_r = +\mathbf{St} \cdot \frac{j_B}{4\pi} \gamma_r + \\
+ \mathbf{St} \cdot \frac{S}{4\pi} \gamma_r (\alpha_1 \dot{q}_1 + \alpha_2 \dot{q}_2 + \dots + \alpha_{r-1} \dot{q}_{r-1}).
\end{array} \right. \quad (6.4.10)$$

Из системы уравнений (6.4.10) видно, что в зависимости от распределения внешнего СМП, изменяется значение  $\gamma_r$ , в частности при  $\gamma_r = 0$  выделяются изолированные парциальные колебания.

### 6.5 Эксперимент по изучению особенностей продольных колебаний стержня в магнитном поле

Приведем описание эксперимента, подтверждающего возможность возникновения продольных колебаний в стержневых системах за счет силы Николаева. На рис. 41 представлена схема эксперимента, произведенного Томилиным А.К. и Прокопенко Е.В. Медный стержень подвешен с помощью двух проводников. В начале рассмотрим случай, когда проводники образуют треугольный подвес. Такой тип подвеса позволяет зафиксировать даже малые по величине силы за счет увеличения длины проводников подвеса. На недостатки такого подвеса обратим внимание несколько позднее. Пусть по проводнику пропускается постоянный электрический ток в указанном на рис. 41а направлении. Под серединой горизонтального стержня расположим систему из двух плоских магнитов, которая как следует из теоретических соображений [10] создает скалярное магнитное поле.

При заданном направлении тока и указанном расположении полюсов магнитной пары в эксперименте наблюдается движение стержня влево, то есть по току, текущему в стержне (рис. 41а). При изменении направления тока горизонтальный проводник движется вправо, то есть вновь по току.

При повороте магнитной пары вокруг вертикальной оси  $z$  на  $180^\circ$  расположение магнитных полюсов совпадает с исходным, то есть распределение магнитного поля не меняется, поэтому движение проводника происходит вновь по направлению тока.

Если же магнитную пару повернуть вокруг любой горизонтальной оси  $x$  или  $y$  на  $180^\circ$  при неизменном направлении тока, то наблюдается движение проводника против текущего в нем тока (рис. 41б). Этим подтверждается теоретическое соображение о необходимости различать знак СМП. В позиции, представленной на рис. 41а, стержень находится в положительном СМП, созданном магнитной парой. На рис. 41б над магнитной парой создается отрицательное СМП. Этим и объясняется различное направление движения стержня по отношению к текущему в нем току.

Если магнитную пару повернуть вокруг оси  $z$  на  $90^\circ$ , то из эксперимента следует, что направление движения проводника зависит от высоты его расположения над поверхностью магнитной пары. Если проводник расположен очень близко к поверхности магнитов (на расстоянии менее 0,5 см), то он движется против тока, текущего в нем (рис. 41в). При вертикальном расстоянии от магнитов более 1 см проводник движется по току (рис. 41г). Это объясняется тем, что магниты имеют определенную толщину, поэтому каждый из них следует моделировать двумя параллельными прямоугольными токовыми контурами.

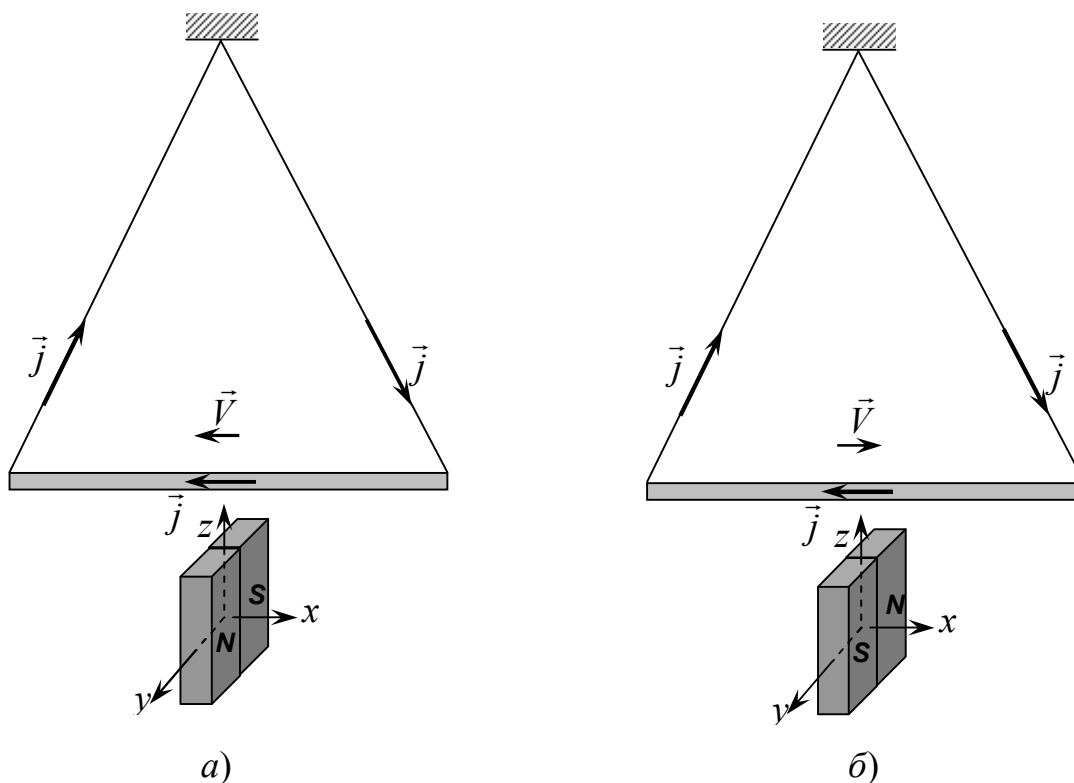


Рис. 41

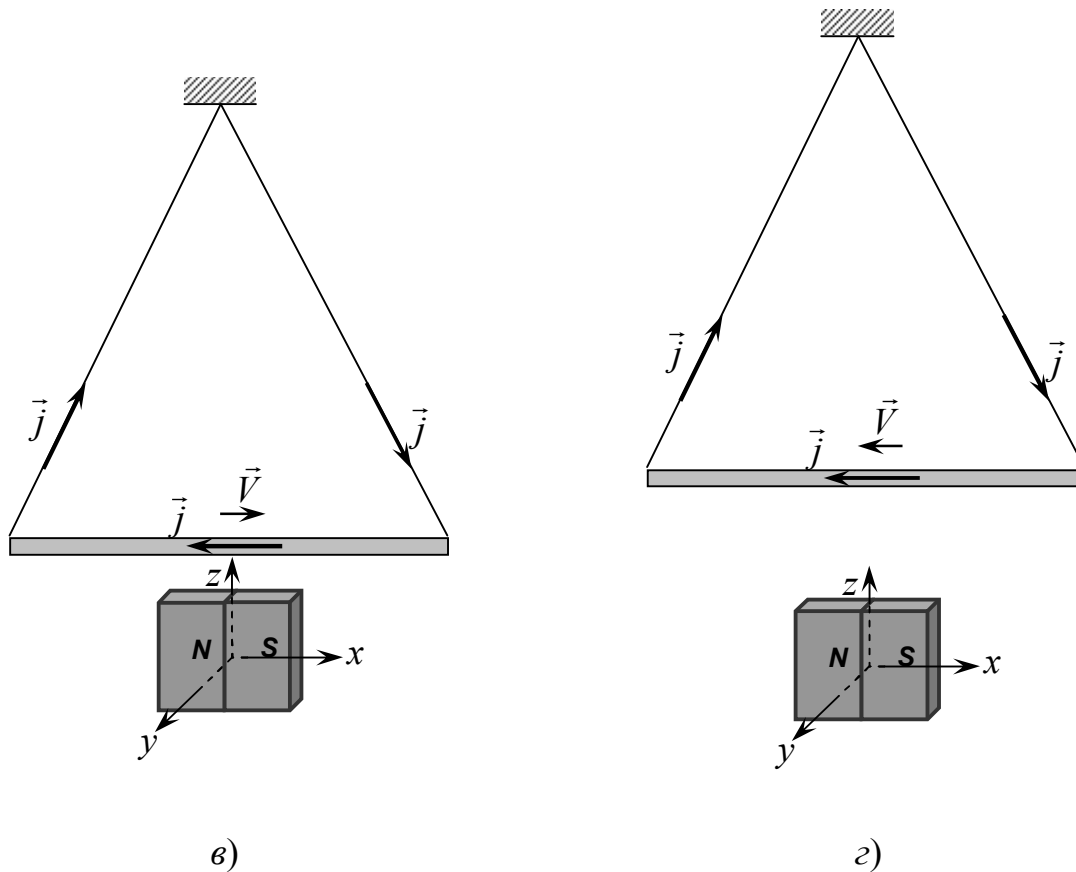


Рис. 41

Это приводит к образованию на каждом торце магнитной пары СМП сложной конфигурации, включающей положительную и отрицательную компоненты (рис. 42). В случае, представленном на рис. 41а стержень в большей степени находится в области отрицательного СМП, а на рис. 41б - в положительной области.

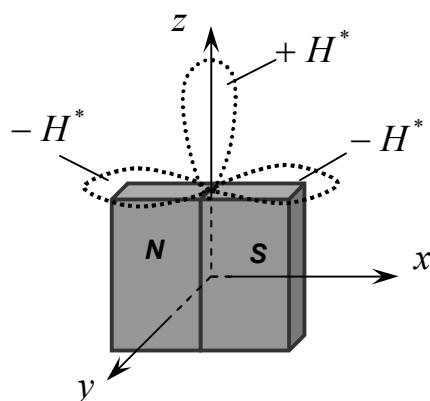


Рис. 42

Попытаемся объяснить результаты эксперимента с помощью традиционной электродинамики. Рассмотрим первый случай (рис. 41а).

Возможно, что в точках А и С система магнитов создает обычное векторное магнитное поле. Векторы индукции этого поля показаны на рис. 43 в соот-

ветствии с расположением полюсов магнитов. Естественно создается пара сил Ампера, которая, возможно, и вызывает наблюдаемое в эксперименте движение стержня вокруг точки подвеса.

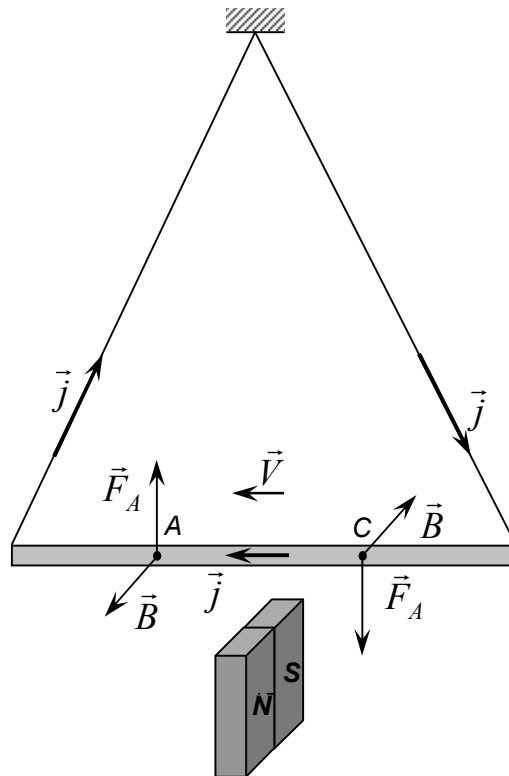


Рис. 43

Но такую возможность можно исключить, подвесив стержень на двух вертикальных гибких проводниках (рис. 44).

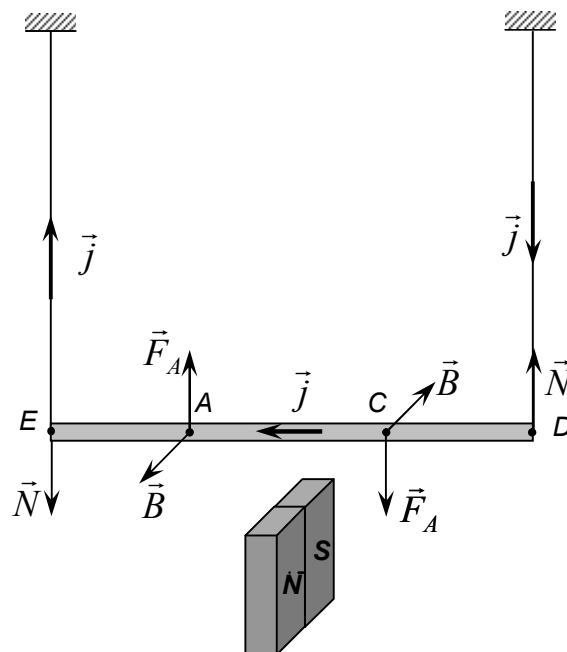


Рис. 44

В этом случае пара, образованная силами Ампера, противодействует пара, созданная реакциями подвеса. Следовательно, стержень не должен двигаться. Однако в эксперименте и при таком подвесе наблюдается горизонтальное движение стержня по току или против него, в зависимости от знака СМП. Остается сделать вывод, что результаты эксперимента не объясняются в рамках традиционной электродинамики.

Остается выяснить вопрос о взаимодействии магнитной пары с поводящими проводниками при каждом типе подвеса. Рассмотрим случай треугольного подвеса. В монографии [10] показано, что поле, образованное магнитной парой идентично полю созданному линейным током конечной длины плотности  $\vec{j}_0$ . Такой подход позволяет смоделировать эксперимент взаимодействия токов. Если магнитная пара расположена посередине стержня, то происходит взаимодействие двух ортогональных токов  $\vec{j}$  и  $\vec{j}_0$ . При направлении токов представленных на рисунке на стержень действует продольная сила Николаева, направленная по току  $\vec{j}$ . Чтобы выяснить взаимодействие моделирующего тока  $\vec{j}_0$  с проводниками подвеса, несколько сместим ток  $\vec{j}_0$  ближе к правому концу стержня. При этом в эксперименте наблюдается движение подвешенной системы вправо. Поскольку моделирующий ток  $\vec{j}_0$  и подводящий проводник образуют некоторый угол, на последний действуют две силы: Ампера и Николаева (рис. 45).

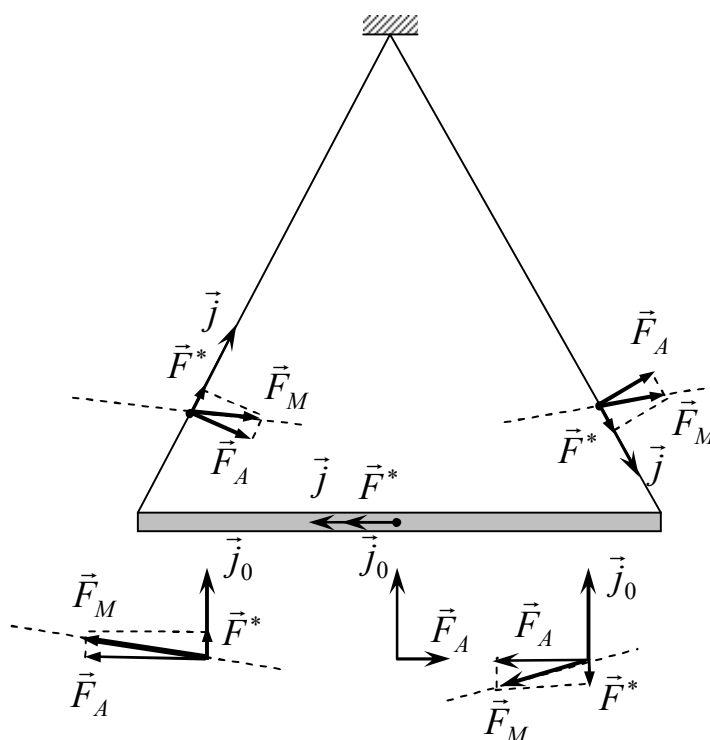


Рис. 45

Видно, что момент относительно точки подвеса создает только сила Ампера. Это вызовет движение системы против хода часовой стрелки, т.е. горизонтальный стержень должен двигаться против тока, текущего в нем. Конечно,

при таком расположении магнитной пары возникает и момент продольной силы, действующей на горизонтальный проводник. Но он, очевидно, меньше момента силы Ампера, приложенной к проводнику подвеса, иначе движение системы происходило бы по часовой стрелке.

При смещении тока  $\vec{j}_0$  к левому концу движение стержня вновь происходит против тока. Таким образом, в результате взаимодействия магнитной пары с проводниками подвеса возникает движение стержня противоположное тому, которое наблюдается при расположении магнитной пары под серединой стержня.

Аналогичная серия экспериментов была произведена при вертикальном расположении подводящих проводников (рис. 46).

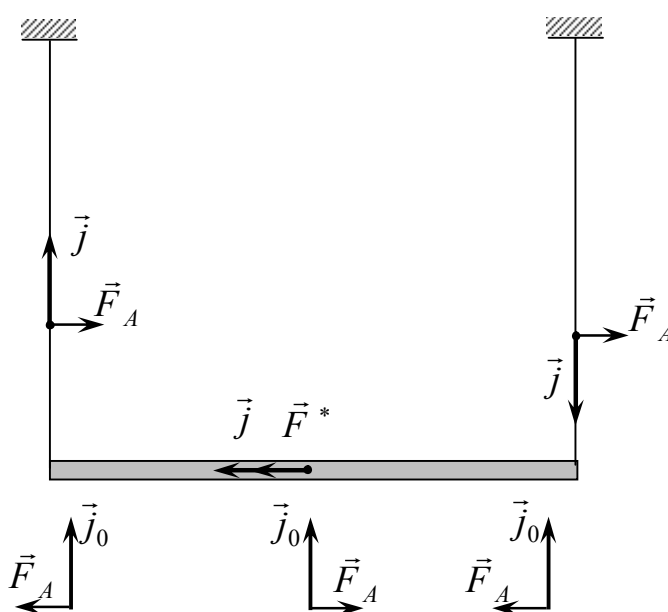


Рис. 46

В результате подтверждено, что наблюдаемое движение стержня нельзя объяснить взаимодействием магнитов с проводниками подвеса. Следовательно, эксперимент подтверждает гипотезу о существовании продольной магнитной силы Николаева.

### 6.6 Продольные колебания составного стержня в магнитном поле

Сформулируем новую задачу. Пусть к торцу упругого стержня длиной  $l_1$  присоединен абсолютно твердый участок (стержень) длиной  $l_2$ , расположенный во внешнем СМП (активный участок). Причем активный участок считаем достаточно коротким (его длина сравнима с поперечными размерами). Обе части упругой системы являются электропроводными. Расположение частей системы и граничные условия представлены на рис. 47. В реальных конструкциях в качестве активного участка можно также использовать тороидальную катушку или магнитную пару, поскольку они создают такое же магнитное поле, как и

линейный участок тока конечной длины. Аналогично внешнее СМП создается тороидальной катушкой, подключенной к источнику переменного тока, либо магнитной парой. При любой модификации эксперимента необходимо, чтобы СМП (собственное или внешнее), создаваемое одним из элементов, регулировалось при помощи внешнего источника тока.

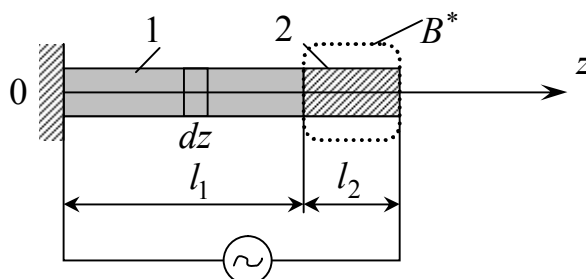


Рис. 47

При пропускании тока от внешнего источника на активном участке действует продольная магнитная сила, которая всегда направлена вдоль моделирующего тока, текущего на активном участке. В активном элементе неизбежно возникают также индуцированные токи, но они очень малы по сравнению с током от внешнего источника, и ими можно пренебречь.

Вибрационный процесс, происходящий в сформулированной задаче, можно смоделировать с помощью системы изображенной на рис. 48.

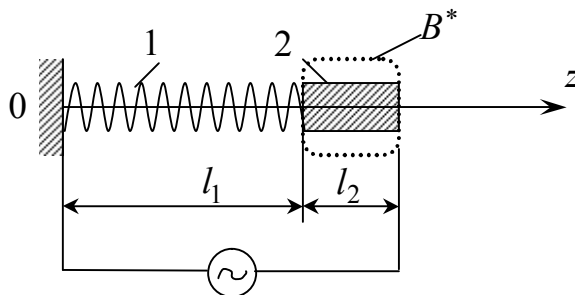


Рис. 48

Запишем граничные условия на конце деформируемого участка:

$$ES \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{z=l_1} = -m \left( \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{z=l_1} + (F^*)_{z=l_1}. \quad (6.6.1)$$

Так как активный участок считается коротким, можно использовать результаты, полученные в разделе 6.1. То есть продольную магнитную силу приближенно представим в виде:

$$(F^*)_{z=l} = \Delta H_c^* B^*(t) S,$$

где разность значений собственного СМП  $\Delta H_c^*$  на концах активного участка вычисляются при помощи формул (6.1.13) или (6.1.17). При использовании этих формул следует учесть, что активный участок в данном случае имеет длину  $l_2$ .

Пусть продольная вынуждающая сила  $F^*(t)$  выражается синусоидальной функцией:

$$F_0^*(t) = S\Delta H_{0(c)}^* B^* \sin(\omega t + \varepsilon). \quad (6.6.2)$$

где  $\Delta H_{0(c)}^*$  - разность амплитудных значений напряженности СМП на концах активного участка;  $B^*$  - амплитудное значение индукции внешнего СМП;  $\omega$  - частота тока созданного внешним источником;  $\varepsilon$  - сдвиг фаз.

Функцию смещения представим в виде ряда:

$$U(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Z_n(z), \quad (6.6.3)$$

Подставим разложение (6.6.3) в уравнение (6.6.2) и получим:

$$ES \left( \sum_{n=1}^{\infty} q_n \frac{dZ_n}{dz} \right)_{z=l} = -m \left( \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n Z_n \right)_{z=l} + S\Delta H_{0(c)}^* B^* \sin(\omega t + \varepsilon). \quad (6.6.4)$$

Обобщенные координаты  $q_n$  представим в виде:

$$q_n = A_n \sin \tilde{p}_n t, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (6.6.5)$$

где  $\tilde{p}_n$  - частоты колебаний системы с учетом всех факторов воздействия.

Собственные амплитудные функции запишем следующим образом:

$$Z(z) = C \sin \alpha_n z + D \cos \alpha_n z, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (6.6.6)$$

где  $\alpha_n$  - волновое число,  $C$  и  $D$  – постоянные.

Применив левое граничное условие, определим, что  $D = 0$ . Тогда выражение для собственных амплитудных функций получим в следующем виде:

$$Z(z) = C \sin \alpha_n z, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (6.6.7)$$

Без нарушения общности рассуждений можно принять  $C = 1$ .

Составим дифференциальное уравнение продольных колебаний упругой части стержня с учетом внутренней диссипации и сил, приложенных к жесткому участку:



$$\rho S \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dz - ES \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} dz + \beta \rho S \frac{\partial U}{\partial t} dz = 0, \quad (6.6.8)$$

Поскольку учтена внутренняя диссипация, для характеристики собственных колебаний системы следует использовать демпфированные частоты:

$$\hat{p}_n = \sqrt{p_n^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}, \quad (n=1,2,3,\dots). \quad (6.6.9)$$

где  $p_n = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  - собственные частоты при отсутствии всех видов диссипативных сил.

Используем известную связь между волновыми числами и собственным и частотами:

$$\alpha_n = \tilde{p}_n \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad (n=1,2,3,\dots). \quad (6.6.10)$$

Определим резонансную частоту первого порядка, когда  $\omega = \tilde{p}$ . При этом условие (6.6.4) примет вид:

$$ES \left( q_1 \frac{dZ_1}{dz} \right)_{z=l} = -m(\ddot{q}_1 Z_1)_{z=l} + S\Delta H_{0(c)}^* B^* \sin(\omega t + \varepsilon). \quad (6.6.11)$$

Из него получаем уравнение для определения резонансной частоты:

$$\omega^2 - \frac{ES \sqrt{\frac{\rho}{E}}}{m} \operatorname{ctg} \left( \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L \right) \cdot \omega + \frac{S\Delta H_{0(c)}^* B^*}{mA_1 \sin \left( \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L \right)} \cos \varepsilon = 0. \quad (6.6.12)$$

Из этого уравнения вычислительным или графическим путем можно получить значение резонансной частоты. Возможны два случая, в зависимости от фазы электромагнитной силы: либо  $\cos \varepsilon = 1$ , либо  $\cos \varepsilon = -1$ . В первом случае магнитная сила совпадает по фазе с обобщенным ускорением  $\ddot{q}_1$ , что приводит к увеличению значения резонансной частоты. Во втором случае магнитная сила находится в противофазе к  $\ddot{q}_1$  и резонанс происходит при меньшей частоте.

## 6.7 Электромагнитный возбудитель продольных колебаний

Рассмотрим электропроводную систему, состоящую из трех частей: абсолютно твердой – 1 и двух деформируемых участков – 2. Граничные условия изображены на рис. 49. В положительном однородном СМП  $B^*$  расположен

только недеформируемый участок, называемый активным. По стержню пропускается переменный ток  $I(t)$ .

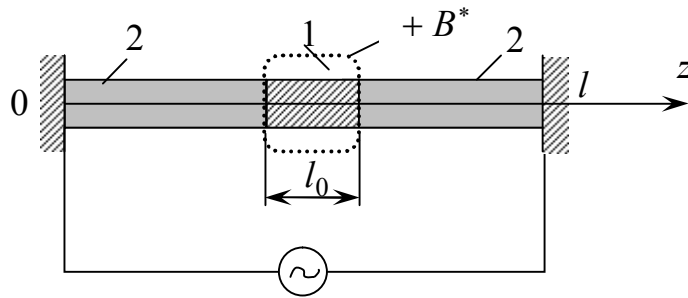


Рис. 49

Моделью такого составного стержня может служить система, изображенная на рис. 50.

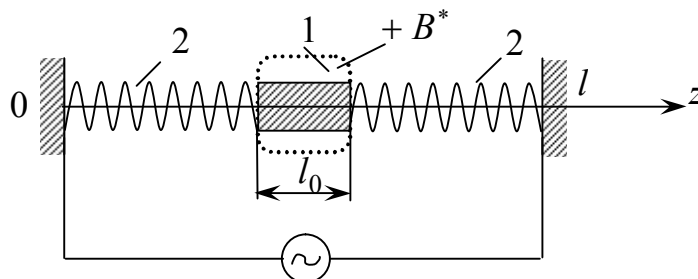


Рис. 50

Здесь деформируемые части представлены пружинами одинаковой длины и жесткости  $w$ . Масса пружин ничтожно мала по сравнению с массой центральной части.

Поскольку активный участок имеет малую длину, которую обозначим  $l_0$ . Причем, примем соотношение:  $l_0 \ll l$ . Тогда, при необходимости, его можно приближенно представить материальной точкой, и собственные амплитудные функции упругой системы при заданных граничных условиях примут вид:

$$Z_r = \sin \frac{r\pi z}{2l}, \quad (r = 1, 2, 3, \dots).$$

Пусть ток, пропускаемый по активному участку, распределен по осесимметричному закону:

$$j(r, t) = \delta(t) \cdot r, \quad (6.7.1)$$

где  $r$  - радиальная координата.

Пусть, например,

$$\delta(t) = \delta_0 \sin pt \cos \varepsilon,$$

где  $p$  - частота тока;  $\varepsilon$  - сдвиг между фазой вынужденных колебаний и фазой вынуждающей силы.

С учетом формулы (6.1.16) определяем собственное СМП, созданное на активном участке:

$$H_c^*(0,0,z',t) = \frac{\delta(t)}{2} \left[ \int_0^b \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + (l_0 - z')^2}} dr - \int_0^b \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + z'^2}} dr \right], \quad (6.7.2)$$

где  $b$  - радиус цилиндрического проводника.

При  $z' = 0$  и  $z' = l_0$  получим следующие выражения:

$$H_c^*(0,0,0,t) = \frac{\delta(t)}{2} \left[ \int_0^b \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + l_0^2}} dr - \int_0^b r dr \right]. \quad (6.7.3)$$

$$H_c^*(0,0,l_0,t) = \frac{\delta(t)}{2} \left[ \int_0^b r dr - \int_0^b \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + l_0^2}} dr \right]. \quad (6.7.4)$$

Вычислив интегралы в формулах (6.7.3) и (6.7.4) получим конечные значения для СМП.

При  $z' = 0$ :

$$H_c^*(0,0,0,t) = \delta(t) \cdot h_c^*(0,0,0), \quad (6.7.5)$$

$$\text{где } h_c^*(0,0,0) = \frac{1}{4} \left[ b\sqrt{b^2 + l_0^2} + l_0^2 \ln \left| \frac{l_0}{b + \sqrt{b^2 + l_0^2}} \right| - b^2 \right].$$

При  $z' = l_0$ :

$$H_c^*(0,0,l_0,t) = \delta(t) \cdot h_c^*(0,0,l_0), \quad (6.7.6)$$

$$\text{где } h_c^*(0,0,l_0) = \frac{1}{4} \left[ b^2 - b\sqrt{b^2 + l_0^2} - l_0^2 \ln \left| \frac{l_0}{b + \sqrt{b^2 + l_0^2}} \right| \right].$$

За счет взаимодействия тока, текущего в стержне с внешним СМП на стержень будет действовать продольная сила Николаева.

$$F^* = B^* S [H_c^*(l_0,t) - H_c^*(0,t)] = B^* S \delta_0 \sin pt \cos \varepsilon [h_c^*(l_0) - h_c^*(0)], \quad (6.7.7)$$

где  $S$  - площадь сечения стержня.

Запишем дифференциальное уравнение продольных колебаний жесткой части стержня, с учетом сил упругости и продольной силы Николаева:

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + 2wz = B^*S\delta_0 \sin pt \cos \varepsilon [h_c^*(l_0) - h_c^*(0)], \quad (6.7.8)$$

где  $m$  - масса стержня;  $\beta$  - коэффициент сопротивления среды;  $w$  - жесткость пружины.

Разделив каждый член уравнения на  $m$ , получим:

$$\ddot{z} + \frac{\beta}{m}\dot{z} + p_0^2 z = \frac{B^*S\delta_0 \sin pt \cos \varepsilon}{m} [h_c^*(l_0) - h_c^*(0)], \quad (6.7.9)$$

где  $p_0 = \sqrt{\frac{2w}{m}}$  - циклическая частота собственных колебаний стержня.

Так как в уравнении учтен коэффициент сопротивления среды, следует ввести демпфированную частоту:

$$\tilde{p} = \sqrt{\frac{2w}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2}. \quad (6.7.10)$$

Рассмотрим пример. Подберем жесткость пружин, с учетом демпфированной частоты.

Демпфированная частота  $\tilde{p} = 10 \text{ Гц}$ ; масса абсолютно твердой части стержня  $m = 0,05 \text{ кг}$ ; коэффициент механического сопротивления  $\beta = 0,1 \frac{\text{кгс}}{\text{с}}$ .

Подставив данные в (6.7.10), получим жесткость одной пружины  $w = 2,525 \frac{\text{кгс}}{\text{с}^2}$ .

Можно решить и обратную задачу, то есть при заданной жесткости пружины можно определить массу абсолютно твердой части стержня.

Решение уравнения (6.7.9) складывается из общего решения однородного уравнения и какого – либо частного неоднородного уравнения. В нашем случае интерес представляет именно частное неоднородное уравнение. Будем искать его решение в виде:

$$z = A \sin(\tilde{p}t - \varepsilon), \quad (6.7.11)$$

где  $A$  – амплитуда установившихся вынужденных колебаний.

Рассмотрим случай резонанса, когда частота тока совпадает с демпфированной частотой вынужденных колебаний, т.е.  $p = \tilde{p}$ .

Подставив (6.7.11) в (6.7.9) определим  $A$  и  $\varepsilon$ :

$$\text{tg} \varepsilon = \frac{\beta \tilde{p}}{2w - m\tilde{p}^2}, \quad (6.7.12)$$

$$A_{рез} = \frac{B^* S \delta_0 [h_c^*(l_0) - h_c^*(0)]}{2w - \tilde{p}^2 m + \beta \tilde{p} tg \varepsilon}. \quad (6.7.13)$$

Учитывая (6.7.10), получим соотношение:

$$tg \varepsilon = \frac{4\tilde{p}m}{\beta}, \quad (6.7.14)$$

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Определить резонансное значение силы тока, задав все параметры системы.

Амплитуда колебаний  $A = 0,005 м$ ; индукция внешнего СМП  $B^* = 1 Тл$ ; жесткость пружины  $w = 2,525 \frac{кг}{с^2}$ ; радиус стержня  $b = 0,005 м$ ; масса активного участка  $m = 0,05 кг$ ; длина активного участка  $l_0 = 0,01 м$ ; коэффициент сопротивления среды  $\beta = 0,1 \frac{кг}{с}$ ; частота внешнего тока  $p = 10 Гц$ .

Получим следующие значения:

$$tg \varepsilon = \frac{4\tilde{p}m}{\beta} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 0,05}{0,1} = 20;$$

$$h_c^*(0,0,0) = \frac{1}{4} \left[ b\sqrt{b^2 + l_0^2} + l_0^2 \ln \left| \frac{l_0}{b + \sqrt{b^2 + l_0^2}} \right| - b^2 \right] = -43,05 \cdot 10^{-7} м;$$

$$h_c^*(0,0,l_0) = \frac{1}{4} \left[ b^2 - b\sqrt{b^2 + l_0^2} - l_0^2 \ln \left| \frac{l_0}{b + \sqrt{b^2 + l_0^2}} \right| \right] = 43,05 \cdot 10^{-7} м;$$

$$\delta_0 = \frac{A_{рез} (2w - \tilde{p}^2 m + \beta \tilde{p} tg \varepsilon)}{B^* S [h_c^*(l_0) - h_c^*(0)]} = 151165301,79 \frac{А}{м^2}.$$

Амплитудное значение силы тока в этом случае:

$$I_0 = \int_S j_0 dS = 2\pi \delta_0 \int_0^b R^2 dR = \frac{2}{3} \pi \delta_0 b^3 = 4 А.$$

Пример 2. Определить амплитуду колебаний в случае резонанса.

Амплитудное значение силы тока  $I_0 = 3A$ ; индукция внешнего СМП  $B^* = 1Tл$ ; жесткость пружины  $w = 2,5 \frac{кг}{c^2}$ ; радиус стержня  $b = 0,005м$ ; масса активного участка  $m = 0,05кг$ ; длина активного участка  $l_0 = 0,01м$ ; коэффициент сопротивления среды  $\beta = 0,1 \frac{кг}{c}$ ; частота внешнего тока  $p = 10Гц$ .

Амплитуда колебаний в этом случае:

$$A_{рез} = \frac{B^* S I_0 [h_c^*(l_0) - h_c^*(0)]}{2\pi b^3 (2w - \tilde{p}^2 m + \beta \tilde{p} t g \varepsilon)} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 7,85 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 86,1 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,005^3 (5 - 5 + 2)} = 3,87 \cdot 10^{-3} м = 3,87 мм.$$

Задавая закон изменения внешнего тока, можно регулировать продольную магнитную силу и управлять продольными колебаниями электропроводных упругих систем, то есть возбуждать колебания заданных форм, либо гасить вредные продольные вибрации.

Рассмотрим два эксперимента.

В первом эксперименте стержневая система состоит из трех частей, алюминиевого проводника и двух упругих участков (рис. 51).

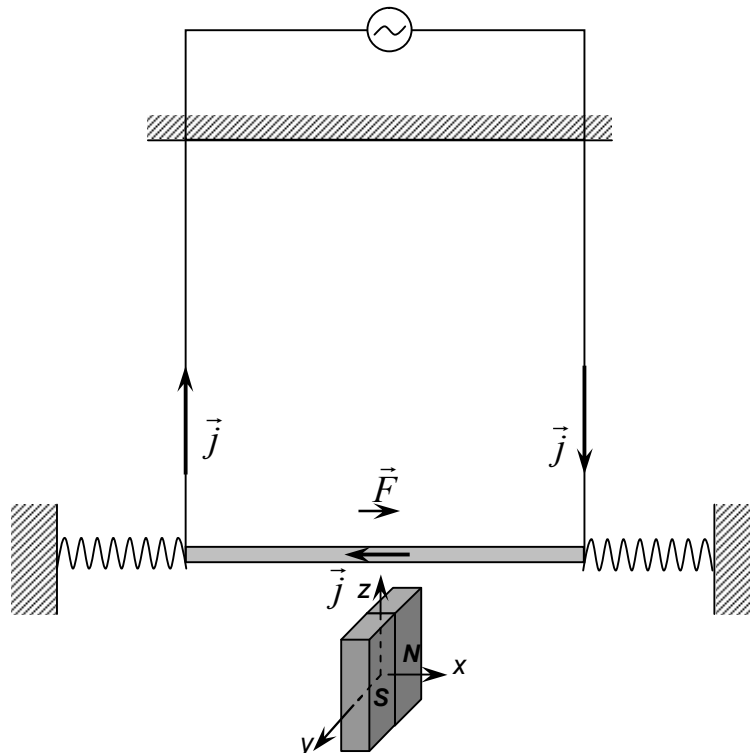


Рис. 51

Потенциальное магнитное поле создается магнитной парой. Алюминиевый стержень подвешен на гибких проводниках. К проводнику подключен источник

постоянного тока, направление которого можно изменять вручную, при помощи коммутационного переключателя. Такая схема эквивалентна низкочастотному источнику переменного тока. При пропускании тока, на активный участок стержня, помещенный в ПМП, действует продольная магнитная сила. Так как она изменяет свое направление, то в системе возникают продольные колебания.

Эксперимент проводился с проводниками разного поперечного сечения. Экспериментально подтверждены выводы о зависимости продольной магнитной силы от геометрических размеров проводника (длины и площади поперечного сечения).

Во втором эксперименте активный участок представлен тороидальной катушкой, подключенной к низкочастотному источнику переменного тока (рис. 52).

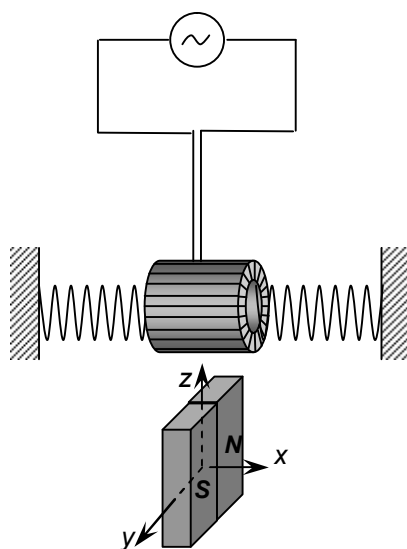


Рис. 52

Использование тороида в качестве активного участка, обосновано тем, что его магнитное поле (в совокупности вихревой и потенциальной компонент) совпадает с магнитным полем участка тока конечной длины. Внешнее ПМП создается магнитной парой. Магнитная сила, действующая на тороид, помещенный во внешнее ПМП, направлена вдоль его оси. Изменение направления тока приводит к колебаниям тороида и вызывает продольные колебания всей системы.

Именно такую схему удобно применять в вибрационных системах в качестве управляющего элемента. За счет числа витков на тороиде, можно существенно усилить наблюдаемый эффект.

Можно сформулировать рекомендации по использованию продольного электромагнитного взаимодействия в конкретных технических устройствах. В частности: необходимо, чтобы хотя бы один из источников ПМП (собственного или внешнего) был подключен к регулируемому источнику переменного тока. Вводя систему в резонанс, можно усилить частоту продольных колебаний системы. Если необходимо гасить вредные продольные вибрации, то необходимо выполнить условие противофазной настройки.

## Литература

1. Томилин А.К. Колебания электромеханических систем с распределенными параметрами.- Усть-Каменогорск, ВКГТУ, 2004.- 272 с.
2. Томилин А.К., Береговая О.А. Электромагнитное возбуждение поперечных колебаний стержня в стационарном магнитном поле при кинематическом воздействии// Вестник КазНТУ им. Сатпаева К.И. №2(59), 2007. С. 136-138.
3. Томилин А.К., Береговая О.А. Колебания однородного призматического стержня в нестационарном и неоднородном магнитном поле при кинематическом возбуждении. Вестник КазНУ. Сер. мат., мех, инф. Спецвыпуск. № 4(51) 2006. С. 90-93.
4. Томилин А.К., Береговая О.А. Поперечные колебания однородного призматического стержня в магнитном поле при кинематическом возбуждении. «Вестник КазНУ. Серия мат., мех., инф.» № 3(46), 2005. С. 108-111.
5. Томилин А.К., Байзакова Г.А. О динамических свойствах электромеханических вибрационных систем// Международная научно-практическая конференция "Третьи Окуневские чтения". Материалы докладов. В 2-х томах. Т.2. Теоретическая и прикладная механика.– С-Петербург.- БГТУ, 2002. -157-158 с.
6. Томилин А.К., Байзакова Г.А. Колебания электромеханических систем с учетом динамических свойств// Материалы III Респ. НТК ВКГТУ, Усть-Каменогорск, 2002. – С. 286-288.
7. Томилин А.К., Байзакова Г.А. Параметрические колебания систем в нестационарном магнитном поле при наличии во внешней цепи емкости// Вестник ВКГТУ, № 2, 2003. -Усть-Каменогорск.- С. 39-44.
8. Tomilin A.K., Baizakova G.A. Electromagnetic management of resilient members toughness// Book of Articles APM 2005. St. Petersburg (Repino), Russia. June 28-July 5. S. 337-340.
9. Томилин А.К., Байзакова Г.А. Управление свойствами пружинной подвески электромагнитным способом. Вестник КазНУ. Сер. мат., мех, инф. Спецвыпуск. № 4(51) 2006. С. 85-89.
10. Томилин А.К. Обобщенная электродинамика. Усть-Каменогорск, Изд. ВКГТУ, 2009.- 168 с. [http://www.spbstu.ru/public/m\\_v/index.html](http://www.spbstu.ru/public/m_v/index.html)
11. Томилин А.К., Прокопенко Е.В. Особенности колебаний упругого стержня в магнитном поле// Вестник КазНТУ им. Сатпаева, №5 (68) 2008. С.160-165.
12. Томилин А.К., Прокопенко Е.В. Возбуждение продольных колебаний электропроводного стержня в магнитном поле// Вестник КазНТУ им. Сатпаева, № 6 (69) 2008. С.132-135.
13. Томилин А.К., Прокопенко Е.В. Управление свойствами пружинной подвески электромагнитным способом. Вестник КазНТУ им. Сатпаева К.И. № 2(59), 2007. С. 115-119.



14. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. - М.: Высш. школа. - 1980. - 408 с.
15. Бабаков И.М. Теория колебаний.- М.: Наука, 1968. - 560 с.
16. Тамм И.Е. Основы теории электричества. - М.: Наука. - 1976.- 616 с.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука, 1982. - 620 с.
18. Василенко Н.В. Теория колебаний. - Киев: Наукова думка.-1992.- 430 с.
19. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики.- М.: Учпедгиз.- 1960. -396 с.
20. Брановер Г. Г., Цинобер А. Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред.- М.: Наука, 1970. - 412 с.
21. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука. - 1976. - 576 с.
22. Blekhman I.I., Lurie K.A. On Material Dynamics via Dynamic Materials// Proceeding of the XXVIII summer school APM. St. Petersburg. 2000.- V1.- С.309-315.
23. Шмидт Г. Параметрические колебания. - М.: Мир. - 1978.- 336 с.
24. Весницкий А. И., Потапов А. И. Теория колебаний распределенных параметрических систем: Учебное пособие. Ч. 1.- Горький : Изд-во ГГУ. - 1977.- 67 с.
25. Весницкий А. И., Потапов А. И. Теория колебаний распределенных параметрических систем: Учебное пособие. Ч. 2.- Горький : Изд-во ГГУ. - 1980.- 87 с.
26. Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. - АН СССР. Сиб. отд. Иркут. ВЦ. - Новосибирск: Наука Сиб. отд. - 1987. - 229 с.
27. Чечурин С. Л. Параметрические колебания и устойчивость периодического движения. - Л.: Изд-во ЛГУ. - 1983. - 219 с.
28. Грабовский М.А. Колебания и волны. Лекционные демонстрации по физике № 7. - М.: ГТТЛ.- 1952. - 231 с.
29. Николаев Г.В. Современная электродинамика и причины её парадоксальности. / Г.В. Николаев. - Томск: Твердыня, 2003.- 149 с.
30. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительности. – М. ВШ, 1964.- 424 с.
31. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика т. УШ. – М.: Наука, 1982.- 620 с.
32. Хвингия М.В. «Вибрации пружин» Машиностроение, М., 1969г.
33. Хвингия М.В. Ниношвили Б.И. Электромагнитные вибраторы с регулируемой собственной частотой, Тбилиси: Мецниереба, 1971, 223 с.