

А.К. Томилин

КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ
СИСТЕМ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Усть-Каменогорск
2004

01-14/1002
14.09.04
УДК 624.07:554.1
ББК 22.336
Т56

Томилин А.К.

Т 56 Колебания электромеханических систем с распределенными параметрами. – Усть-Каменогорск, 2004.- 286с.

Монография посвящена исследованию электромагнитного воздействия на колебания континуальных систем (струны, стержни, пластинки, ограниченная и неограниченная жидкость). Разработаны методы расчета частот, факторов затухания и амплитудных форм, характеризующих колебания этих систем в различных случаях. Получены аналитические и приближенные решения дифференциальных уравнений движения. Изучено влияние электромагнитного воздействия на нелинейные свойства электромеханических систем, показана принципиальная возможность управления механическими свойствами системы при помощи электрических параметров. Исследованы случаи параметрического возбуждения колебаний за счет электромагнитного воздействия. Решены некоторые прикладные задачи.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов, инженеров, занимающихся проблемами теории колебаний и ее приложениями.

Рис. 29, табл. 4, список литературы 160 назв.

Рекомендовано к изданию Ученым Советом Восточно-Казахстанского государственного технического университета им.Д. Серикбаева.

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, профессор Тюреходжаев А.Н.

Т $\frac{1604050000}{00(05) - 04}$

ISBN 9965-615-75-6

© Издательство ВКГТУ, 2004

*Светлой памяти моего учителя
Василия Антоновича САПА посвящаю*

От автора

Настоящая монография в основном базируется на результатах докторской диссертации, защищенной в 2002 году в Санкт-Петербургском государственном университете. Она обобщает результаты исследований, полученные мной, моими учениками, соавторами за более чем десятилетний период. Первые результаты по этой тематике были получены и опубликованы в самом начале 90-х годов во время работы в Казахском государственном университете имени аль-Фараби. Они относятся к задаче о колебаниях электропроводного двухопорного стержня в однородном стационарном магнитном поле. Постановка этой задачи была новой и соединяла теорию колебаний распределенных систем и электродинамику. К тому времени я был неплохо знаком с историей развития и современными проблемами электродинамики сплошных сред, но встречать подобные задачи не доводилось. Технические приложения в тот момент меня не интересовали, увлекали чисто теоретические вопросы. Вскоре выяснилось, что подобные электромеханические системы обладают многими интересными свойствами, которые могут иметь полезные практические приложения.

Начатая работа была поддержана и оценена, как перспективная, моим научным руководителем по кандидатской диссертации чл.-корр. Академии наук Республики Казахстан, профессором Сапа В.А. Основная часть исследований выполнена в Усть-Каменогорске во время работы в Восточно-Казахстанском государственном университете в середине 90-х годов. Постоянную поддержку в работе оказывал научный консультант по докторской диссертации, заведующий кафедрой теоретической механики Казахского национального технического университета, профессор Тюреходжаев А.Н.

В ходе работы возникло много новых задач: о собственных и вынужденных колебаниях струны и стержня в неоднородном магнитном поле, о колебаниях этих же систем в нестационарном

магнитном поле, о вибрациях электропроводных пластин в магнитном поле, о влиянии магнитного поля на колебания ограниченной и неограниченной жидкости, имеющей свободную поверхность. Возникли идеи о техническом применении разработанной теории.

Естественно пришлось столкнуться с некоторыми математическими проблемами при постановке задач и поиске методов их решения. Учет электромагнитного воздействия в системах с распределенными параметрами приводит к интегродифференциальным уравнениям в частных производных с весьма интересными свойствами. Мне не удалось найти работы других авторов, в которых встречались бы уравнения такого типа с анализом методов их решения. Обычная процедура Фурье, примененная к уравнениям такого типа, приводит к системе взаимосвязанных обыкновенных дифференциальных уравнений, что не позволяет интегрировать каждое из них в отдельности.

Как оказалось, электромагнитное воздействие искажает формы колебаний. В последствии было установлено, что колебания носят так называемый двухволновой характер, и их формы удобно представлять в виде комплексных функций. Для некоторых случаев удалось записать и выражения для главных колебаний в аналитическом виде. Однако, определение демпфированных частот, факторов затухания и других констант при таком подходе связано со сложными математическими проблемами и возможно только численным путем.

На мой взгляд, для анализа поставленных задач наиболее предпочтителен метод редукции (расщепления) бесконечной системы дифференциальных уравнений, описывающих колебания, поскольку он обладает большей общностью, т.е. применим в большинстве случаев, и позволяет видеть физическую суть происходящих процессов.

Немало ценных замечаний было сделано на этапе предварительного обсуждения работы перед защитой докторской диссертацией. С особой благодарностью в этой связи хотелось бы отметить заведующего кафедрой теоретической механики Санкт-Петербургского государственного университета, профессора Говстика П.Е., профессора этой же кафедры Зегжду С.А., заведую-

щего отделом НИИ Механики и машиноведения профессора Блехмана И.И., профессора Нижегородского государственного университета Емельянову И.С. Советы выше названных и некоторых других специалистов учтены и при работе непосредственно над монографией.

Выражаю благодарность и признательность моим ученикам и соавторам, которые вместе со мной принимали участие в получении результатов, изложенных в этой монографии. Это Мамырбаева И.К., Курильская Н.Ф., Береговая О.А., Байзакова Г.А., Никитин Е.А., Афанасьева И.С.

Отзывы о книге, замечания и предложения по ее содержанию, прошу направлять по электронной почте. Мой адрес: *aktomilin@gmail.com*

Томилин А.К.

Введение

Динамика электропроводных сред в электрических и магнитных полях в настоящее время представляет собой обширную и хорошо развитую науку, образовавшуюся на стыке теоретической механики и электродинамики. Первоначально развивалось в основном направление, связанное с изучением движения электропроводных твердых тел в электрическом и магнитном полях. Решение подобных задач стимулировалось, прежде всего, потребностями электротехники и электромеханики. Первые результаты в этой области принадлежат Максвеллу, который в 1873 году составил уравнения электромеханической системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа-Максвелла). Затем в 1880 году Г. Герц впервые поставил и рассмотрел классическую задачу об определении сил и моментов, действующих на металлический шар или сферическую оболочку в магнитном или электрическом поле. История развития данного направления достаточно полно изложена во введении к монографии Ю.Г. Мартыненко [1]. Основные результаты, относящиеся к общей статике и динамике электропроводного твердого тела в электрическом и магнитном полях, кроме [1], изложены также в монографиях Ландау Л. Д. и Лифшица Е. М. [2], Сермонса Г. Я. [3], статьях Голубкова В. В. [4], Астахова В. И. [5,6]. Впоследствии актуальность приобрели задачи, связанные с динамикой спутников и гироскопов в неконтактном подвесе. Важнейшие результаты в исследовании этих задач связаны с именами Белецкого В.В., Хентова А.А., Мартыненко Ю.Г., Кобрина А.И., Богоявленского О.И., Линькова Р.В., Урмана Ю.М., Поливанова К. М., Самсонова В.А., Рябова А.Б. и других ученых [7 – 24, 146].

Специальные разделы данного научного направления стыкуются с гидродинамикой (магнитная гидродинамика, динамика ферромагнитных жидкостей и т.п.), с механикой и физикой плазмы, механикой деформируемого твердого тела, физикой твердого тела, астрофизикой. Потребности техники привели к задачам, в которых рассматривается движение сложных механических систем с электропроводными и намагниченными областями в электрических и магнитных полях. В частности, проблемы металлургии, ядерной энергетики и космонавтики, потребовали рассмотрения задач о

движении проводящего твердого тела с полостями, содержащими проводящую жидкость в магнитном поле [25-28].

Научно-технический прогресс постоянно требует постановки и решения новых все более сложных модельных задач. Одна из наиболее актуальных и перспективных мало изученных проблем в настоящее время связана с электромагнитным воздействием на вибрации электропроводных континуальных систем. Эта проблема объединяет теорию колебаний систем с распределенными параметрами, динамику деформируемого твердого тела, электродинамику и специальные разделы физики. Настоящая монография связана именно с этим направлением.

Колебания электропроводных систем с распределенными параметрами в магнитном поле давно используются в технике, в частности в некоторых типах электромеханических преобразователей акустического диапазона - громкоговорителях [29-30]. Их принципиальное устройство заключается в создании механических колебаний проводящей мембраны в магнитном поле при пропускании по ней переменного электрического тока со сложным набором частот. Современные звуковоспроизводящие устройства создают звук очень высокого качества, однако его отличие от живого голоса всегда ощутимо, так как все они имеют какие-либо дефекты. Борьба с этими дефектами ведется в основном экспериментально путем подбора формы динамика и материалов для его изготовления. Часто для повышения качества звучания электрический сигнал разделяют по диапазонам. Обычно выделяют высокие и низкие частоты, и выводят их на разные громкоговорители. Однако до сих пор не существует общей теории для такого типа преобразователей, объясняющей причины всех дефектов, определяющей условия их возникновения и методы устранения.

Область применения электромеханических континуальных систем вибрационного типа довольно широка [31]. Например, проводящие струны, помещенные в магнитное поле, используются в некоторых измерительных системах (струнные преобразователи) [32-33]. Стационарные и квазистационарные магнитные поля все чаще применяются в скоростных транспортных средствах. Вибрации, возникающие в отдельных проводящих конструкциях, помещенных в магнитные поля, здесь обычно играют

негативную роль, их требуется гасить, или искать условия, при которых они не генерируются.

Отдельные результаты по этой проблематике появились в научной литературе в последние десятилетия. Значительное число работ выполнено в Армении, укажем лишь некоторые из них, [34 – 43, 159-160]. В этих работах выявлен и проанализирован целый ряд интересных эффектов, связанных в основном с явлением магнитоупругости. В частности установлена возможность возникновения параметрического резонанса при помещении сверхпроводящей прямоугольной пластинки в нестационарное периодическое магнитное поле. Показано, что в цилиндрической оболочке, находящейся в сильном продольном магнитном поле, возникают чисто магнитные, не зависящие от свойств материала, высокочастотные колебания. Большинство работ этой научной школы посвящены динамике волн, возникающих в анизотропных проводящих средах в присутствии магнитных полей. Известно несколько работ того же направления, авторы которых принадлежат к другим научным школам [44 – 48]. В этих статьях рассматриваются аналогичные задачи, часто с конкретным техническим приложением.

Еще более сложные проблемы возникают при разработке электромеханических преобразователей ультразвукового диапазона. Обычно их основой служат колебательные процессы в системах с магнестрикционными (пьезомагнитными) или пьезоэлектрическими свойствами. Теория колебаний систем с усложненными свойствами стала бурно развиваться в связи с созданием и применением композитных материалов. Пьезоэлектрические датчики (сенсоры) или приводы (актуаторы) в последнее время используются очень часто для экспериментального исследования колебаний в сложных системах, например, в плоскостях самолетов, в лопастях турбин и т.д. Физические основы механики сред со специальными свойствами изложены в переводной монографии Ж. Можена [49]. При рассмотрении многих из этих задач главным является вопрос об адекватности электрического сигнала и механического колебательного процесса при взаимных преобразованиях. Особо следует остановиться на большом цикле работ японских и китайских авторов [50 -55], опубликованных в последние годы. В них рассматривается новая модельная задача о контроле над

колебаниями сложных систем с распределенными параметрами и об активном воздействии на них при помощи пьезокерамических сенсоров и актуаторов. Тонкая пьезокерамическая пленка наклеивается на одну из поверхностей системы, подвергающуюся изгибам при колебаниях. Выбором места расположения и размеров пленки можно добиться, чтобы электрические сигналы, возникающие в ней, имели тот же набор частот, что и сама колеблющаяся система. После усиления этот сигнал направляется на другую (а иногда на эту же) пьезокерамическую пленку (актуатор), тоже расположенную на вибрирующей системе, которая под действием приложенного напряжения изменяет свою (и всей системы) изгибную жесткость. Таким способом предлагается устранять вибрации некоторых частот. Он применяется там, где нет возможности создать достаточно сильное внешнее магнитное поле или вибрирующая конструкция не является проводящей. Основные проблемы, которые решаются в данных статьях заключаются в оптимальном расположении сенсоров и актуаторов и в создании "нейронной" сети, связывающей их.

Одна из самых важных проблем динамики континуальных систем связана с параметрическими колебаниями. В электромеханических системах параметрическую неустойчивость можно вызвать различными способами. Выше уже упоминалось о возникновении параметрических колебаний магнитоупругих систем в нестационарном магнитном поле. Другие причины могут быть связаны с явлениями магнитострикции (пьезоэффекта) [56-63]. В некоторых случаях к параметрической неустойчивости приводят термические эффекты [64 – 67, 101].

Настоящая монография посвящена исследованию особенностей управляющего электромагнитного воздействия на вибрации электропроводных систем с распределенными параметрами. Актуальность тематики вытекает из потребностей современной техники, так как теоретическое объяснение причин, условий возникновения и анализ последствий физических явлений позволяет создавать принципиально новые более совершенные технические средства, либо устранять дефекты уже имеющихся систем. Главное внимание уделяется поиску общих условий отсутствия электромагнитного воздействия на вибрации этих систем. Изучается

вопрос об определении форм главных колебаний с учетом электромагнитного воздействия. Определяются условия параметрического возбуждения в нестационарных магнитных полях. Исследуется проблема возникновения и физического устранения нелинейности в системах в результате электромагнитного воздействия. Ставится вопрос о применении теоретических результатов, полученных в работе для решения конкретных технических проблем.

Объектами исследования являются электропроводные струны, однородные призматические стержни, пластинки, ограниченная и неограниченная жидкость. Анализ проводится на основе интегро-дифференциальных уравнений движения данных систем. Используются аналитические, приближенные и качественные методы линейной и нелинейной теории колебаний. Возможно, полученные интегро-дифференциальные уравнения в частных производных относятся к новому типу, так как их не удалось обнаружить у других авторов. Исследования по изучению общих математических свойств таких уравнений, обоснование методов их решения, начатые Курильской Н.Ф. [152-155], оцениваются как перспективные.

Изложенные в монографии результаты могут найти применение при разработке новых типов электромеханических преобразователей акустического и ультразвукового диапазонов и совершенствовании существующих. Условия отсутствия электромагнитного воздействия можно использовать для устранения вибраций при проектировании транспортных средств. Практическое применение могут найти идеи частотного анализа и активного гашения колебаний в электромеханических системах. Они могут оказаться полезными, в частности, при разработке методов контроля над состоянием упруго деформированной среды, в которой возможно образование микротрещин. Весьма перспективными могут оказаться идеи, связанные с электромагнитным управлением свойствами упругих элементов различных механизмов.

1 Собственные колебания электропроводной струны в однородном стационарном магнитном поле

1.1 Постановка линейной задачи

Рассмотрим собственные поперечные колебания абсолютно гибкой струны длины l , изготовленной из немагнитного электропроводного материала (диа- или парамагнетика), в стационарном однородном магнитном поле $\vec{B} = B\vec{y}^0$, направленном перпендикулярно плоскости колебаний струны [69,74]. Пусть магнитное поле действует на участке струны длиной $\Delta z = z_2 - z_1$, который будем называть активным (рис.1). Концы струны закреплены и соединены идеальной электрической цепью, экранированной от внешнего магнитного поля.

Схема поперечных колебаний струны

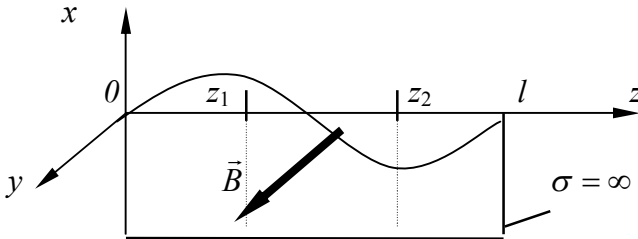


Рис. 1

При вибрациях струны на каждый ее элемент dz действует сила механического сопротивления, возникающая за счет взаимодействия струны с окружающей средой. Учтем эту силу в рамках линейной гипотезы [118-119]:

$$dF_c = \beta m_0 \frac{\partial u}{\partial t} dz, \quad (1.1.1)$$

где β - коэффициент внешнего демпфирования, зависящий от свойств окружающей среды, m_0 - погонная масса струны (линейная плотность), $u(z, t)$ - динамическая функция смещений, зависящая от продольной координаты и времени.

Внутренним сопротивлением в динамике струн обычно пренебрегают.

В результате движения проводящей струны в магнитном поле на активном участке создается [120] электрическое напряжение:

$$U = B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} dz,$$

и, следовательно, в ней индуцируется ток плотности:

$$j = \frac{\sigma B}{l} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz, \quad (1.1.2)$$

а на каждый элемент dz активного участка действует поперечная магнитная сила [2], направленная вдоль оси Ox :

$$dF_M = jABdz = \left(\frac{\sigma B^2 A}{l} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz \right) dz, \quad (1.1.3)$$

где A - площадь поперечного сечения струны.

Известно, что электромагнитные процессы происходят со скоростью света, скорость же механических процессов намного меньше. Поэтому во всех рассмотренных в работе задачах считаем, что электродинамические процессы происходят мгновенно.

Иными словами, электродинамические процессы считаются квази-стационарными. Эта гипотеза позволяет не рассматривать высокочастотные механические колебания струны и не учитывать ее собственные реактивные параметры (индуктивность и емкость), а, следовательно, не рассматривать процесс электромагнитного излучения.

Сделаем замечание о знаке силы \vec{F}_M . Пусть для простоты магнитное поле действует по всей длине струны: $z_1 = 0$, $z_2 = l$. Если $n = 1$, т.е. рассматривается колебание основного тона, то магнитная сила направлена противоположно скорости движения в любой точке струны. При $n = 2$ электродвижущие силы, индуцированные на каждой половине струны, взаимно уничтожают друг друга, поэтому результирующий ток равен нулю. Магнитное воздействие в этом случае отсутствует. При $n = 3$ результирующее напряжение в три раза меньше, чем при $n = 1$. Магнитная сила всюду направлена одинаково, поэтому на $2/3$ длины она является тормозящей, а на $1/3$ ускоряющей. Таким образом, результирующее электромагнитное воздействие на струну в целом, является демпфирующим. Это означает, что в правой части дифференциального уравнения магнитная сила имеет отрицательный знак, а в левой – положительный. Этот вывод справедлив для любого n в случае, когда $\Delta z = l$. Если $\Delta z < l$, то все сказанное тоже справедливо, только под n понимается количество стоячих волн, укладываемых на активном участке, причем n в этом случае может быть и не целым числом.

В соответствии с принципом Даламбера составим уравнение движения струны с учетом сил (1.1.1) и (1.1.3):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T_0}{m_0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma B^2 A}{m_0 l} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz = 0, \quad (1.1.4)$$

где T_0 - натяжение струны, которое предполагается одинаковым по всей ее длине (гипотеза абсолютно гибкой струны [122]). Именно гипотеза абсолютно гибкой струны позволяет исклю-

чить нелинейные свойства системы, то есть линеаризовать ее. К нелинейным задачам обратимся позднее.

Электромагнитное воздействие на струну определяется последним членом интегро-дифференциального уравнения (1.1.4), изучению именно его свойств и уделено основное внимание в дальнейшем исследовании.

Начальные условия в общем случае можно записать в виде:

$$u(z,0) = f_1(z); \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = f_2(z). \quad (1.1.5)$$

Обычно рассматривается струна с закрепленными концами, т. е. при следующих граничных условиях:

$$u(0,t) = 0; \quad u(l,t) = 0. \quad (1.1.6)$$

Случаи других концевых условий оговариваются в дальнейшем специально.

1.2 Анализ линейной задачи о колебаниях струны в магнитном поле

Применим обычную процедуру Фурье [124], представив динамическую функцию смещений в виде бесконечного ряда по собственным амплитудным функциям X_n :

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(z), \quad (1.2.1)$$

где $q_n(t)$ - обобщенные координаты системы, механический смысл которых выясним позднее.

Обычно этот метод приводит к системе независимых дифференциальных уравнений, в этом случае координаты называются главными (нормальными), а сам метод называется методом главных координат (МГК) [122]. Как будет показано ниже, наличие магнитной силы существенно изменяет свойства системы, в част-

ности координаты, введенные в соответствии с (1.2.1), не всегда являются главными. Очевидно, это связано с выбором амплитудных функций $X_n(z)$.

После подстановки (1.2.1) в (1.1.4) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{q}_n X_n - \frac{T_0}{m_0} \frac{d^2 X_n}{dz^2} q_n + \beta \dot{q}_n X_n + \frac{\sigma B^2 A}{m_0 l} \dot{q}_n \int_{z_1}^{z_2} X_n dz \right] = 0. \quad (1.2.2)$$

Для струны с закрепленными концами в отсутствии всех диссипативных процессов собственные амплитудные функции синусоидальны:

$$X_n = \sin \frac{n\pi}{l} z.$$

Эти функции, строго говоря, не точно соответствуют поставленной задаче, поэтому их использование не позволяет свести задачу к главным колебаниям. Вопрос о влиянии электромагнитного воздействия на собственные амплитудные функции и проблема поиска главных амплитудных форм будут рассмотрены отдельно. Пока же в качестве первого приближения используем синусоидальные амплитудные функции, поэтому

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} X_n dz &= \int_{z_1}^{z_2} \left(\sin \frac{n\pi}{l} z \right) dz = \\ &= \frac{2l}{n\pi} \sin \frac{n\pi(z_1 + z_2)}{2l} \sin \frac{n\pi(z_2 - z_1)}{2l}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\gamma_n = \sin \frac{n\pi(z_1 + z_2)}{2l} \sin \frac{n\pi(z_2 - z_1)}{2l}, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1.2.3)$$

тогда (1.2.2) примет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ddot{q}_n X_n - \frac{T_0}{m_0} \frac{d^2 X_n}{dz^2} q_n + \beta X_n \dot{q}_n + \frac{2\sigma B^2 A}{m_0 n \pi} \gamma_n \dot{q}_n \right) = 0. \quad (1.2.4)$$

Принятые собственные амплитудные функции X_n , как известно, удовлетворяют уравнению:

$$\frac{d^2 X_n}{dz^2} + \frac{p_n^2}{a^2} X_n = 0, \quad (n=1,2,\dots), \quad (1.2.5)$$

где $p_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{m_0}}$ - собственные частоты, $a = \sqrt{\frac{T_0}{m_0}}$ - скорость распространения волнового процесса в струне.

Поэтому (1.2.4) можно представить в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ddot{q}_n X_n + p_n^2 q_n X_n + \beta \dot{q}_n X_n + \frac{2\sigma B^2 A}{m_0 n \pi} \gamma_n \dot{q}_n \right) = 0. \quad (1.2.6)$$

Умножим уравнение (1.2.6) на X_r ($r=1,2,\dots$) и проинтегрируем по всей длине струны. В силу ортогональности выбранных собственных амплитудных функций:

$$\int_0^l X_r X_n dz = \begin{cases} l/2; & \text{при } r = n \\ 0; & \text{при } r \neq n \end{cases}$$

получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{4\sigma B^2}{\rho \pi l} \int_{z_1}^{z_2} X_r dz \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \dot{q}_n}{n}, \quad (1.2.7)$$

$$\{r = 1, 2, \dots\},$$

где $\rho = m_0 / A$ - объемная плотность материала струны.

В магнитном члене, перенесенном в правую часть, интегрирование выполнено в пределах от z_1 до z_2 , так как только в этих пределах действует магнитная сила.

Вводя обозначение

$$\gamma_r = \sin \frac{r\pi(z_1 + z_2)}{2l} \sin \frac{r\pi(z_2 - z_1)}{2l}, \quad (r = 1, 2, \dots),$$

получим

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{8\sigma B^2 \gamma_r}{\rho \pi^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (1.2.8)$$

Таким образом, получилась система взаимосвязанных дифференциальных уравнений, следовательно, введенные обобщенные координаты q_n не являются главными. Поскольку главные колебания в чистом виде не выделяются, понятия «мода», «форма», «частота», «демпфированная частота» применять для характеристики движения, соответствующего определенному номеру r , строго говоря, нельзя. Поэтому в дальнейшем будем называть их парциальными.

Введенным обобщенным координатам можно дать определенный механический смысл. Если считать X_n - безразмерными, то q_n - имеют размерность и их можно представлять как смещения какой-либо точки струны от положения равновесия. Если же амплитудным функциям приписать размерность длины, то обобщенные координаты будут безразмерными, и их можно трактовать как углы, характеризующие смещение какой-либо точки струны. В ка-

честве этой точки удобно брать первую слева пучность (рис. 2). Будем следовать второму способу выбора обобщенных координат.

Механический смысл обобщенных координат

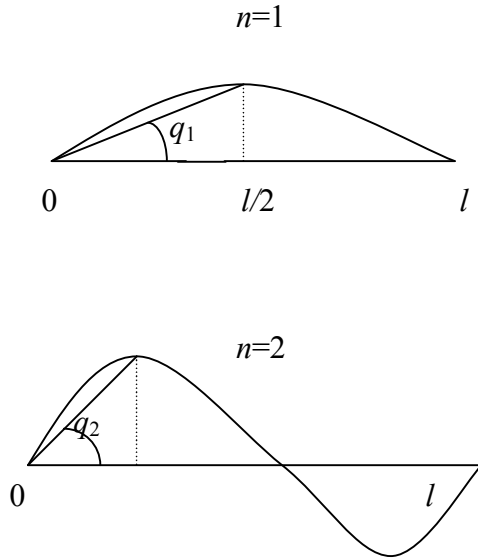


Рис. 2

Из проведенного выше анализа следует, что магнитное воздействие на колебания струны приводит к дополнительной диссипации энергии. Однако, можно выделить группу парциальных колебаний, которые не испытывают электромагнитного воздействия. Из (1.2.3) видно, что при некоторых значениях z_1 и z_2 величина γ_r обращается в нуль. Эти значения определяются из двух соотношений:

$$\frac{r\pi(z_2 - z_1)}{2l} = k\pi, \quad (r = 1, 2, \dots), \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\frac{r\pi(z_1 + z_2)}{2l} = k\pi, \quad (r = 1, 2, \dots), \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

то есть

$$z_2 - z_1 = \frac{2kl}{r}, \quad z_1 + z_2 = \frac{2kl}{r},$$

$$(r = 1, 2, \dots), \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Отношение l/r характеризует длину стоячей волны, соответствующей r -ому парциальному колебанию. Из первого соотношения вытекает, что

$$\gamma_r = 0,$$

если на длине активного участка $\Delta z = z_2 - z_1$ укладывается четное число стоячих волн. При этом посередине активного участка располагается либо узел, либо пучность.

Из второго следует, то же при условии, что на сумме длин $z_1 + z_2$ укладывается четное число стоячих волн. В этом случае посередине активного участка обязательно располагается узел. Заметим, что при этом соотношение длины активного участка и длины стоячей может быть любым.

Таким образом, электромагнитное воздействие не воздействует на колебания струны, если:

- 1) посередине активного участка располагается узел при любой длине стоячей волны,
- 2) посередине активного участка располагается пучность, при условии, что по его длине укладывается четное число стоячих волн.

Эти же выводы подтверждаются соображениями, вытекающими из закона электромагнитной индукции: при выполнении любого из указанных условий площадь контура, образованного струной и замыкающей электрической цепью, остается неизменной, т.е. магнитный поток, пересекающий этот контур, при колебаниях струны остается постоянным.

При произвольных движениях струны, когда присутствуют все возможные парциальные колебания, требуется анализ, учитывающий их взаимодействие. Прежде всего, заметим, что стоящая в

правой части уравнений (1.2.8) сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n(t)$ в любой мо-

мент времени не может равняться нулю, так как функции $\dot{q}_n(t)$ имеют различные частоты. Поэтому не существует условия, при котором электромагнитное воздействие не проявляется на всех парциальных колебаниях струны одновременно. Однако, изменяя ширину и положение активного участка, можно добиться электромагнитного демпфирования определенных парциальных колебаний, оставляя другие без всякого воздействия со стороны магнитного поля. Электромагнитного демпфирования не испытывает группа парциальных колебаний, для которых $\gamma_r = 0$. Колебания, отвечающие этому условию, в дальнейшем будем называть изолированными от электромагнитного воздействия. Поскольку изолированные колебания описываются однородными дифференциальными уравнениями, решениями которых являются простые гармонические функции, то для них термин «мода» можно употреблять в прямом смысле.

В частном случае, когда магнитное поле действует по всей длине струны ($z_1 = 0, z_2 = l$):

$$\gamma_n = \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right); \quad \gamma_r = \sin^2\left(\frac{r\pi}{2}\right)$$

уравнения (1.2.8) для четных значений r запишутся в виде

$$\ddot{q}_r + \beta\dot{q}_r + p_r^2 q_r = 0, \quad \{r = 2, 4, \dots\},$$

а для нечетных $\gamma_n = \gamma_r = 1$:

$$\ddot{q}_r + \beta\dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{8\sigma B^2}{\rho\pi^2 r} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\dot{q}_n}{n}, \quad \{r = 1, 3, 5, \dots\}.$$

То есть, четные моды в этом случае электромагнитному воздействию не подвергаются и являются изолированными. А все парциальные колебания, соответствующие нечетным r , взаимосвязаны между собой и демпфируются магнитной силой.

Избирательность (селективность) электромагнитного воздействия в электромеханических системах вибрационного типа представляется одним из самых интересных свойств, как с теоретической, так и с прикладной точек зрения.

Другая важная особенность электромагнитного воздействия заключается в перераспределении энергии между неизолированными парциальными колебаниями. Именно это свойство не позволяет сделать независимыми дифференциальные уравнения, описывающие колебания струны. Функция плотности индуцированного тока $j(t)$ складывается из множества периодических составляющих, тем не менее, в каждый момент времени во всей струне ток имеет одно направление. Среди гармоник, составляющих функцию $j(t)$, отсутствуют члены с частотами изолированных мод, а все остальные представляют собой сходящийся ряд, поскольку наиболее значительными являются низкочастотные составляющие.

Обезразмерим [144] уравнения (1.2.8), приняв в качестве характерных масштабов длины $l^* = l$, магнитной индукции $B^* = B$, проводимости $\sigma^* = \sigma$, времени $t^* = 1/p_1$ (где p_1 - частота основного главного собственного колебания струны в отсутствии всех диссипативных сил), линейной плотности $\rho^* = \rho$, коэффициента внешней механической диссипации $\beta^* = 1/t^* = p_1$. Получим

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + r^2 q_r = -St \frac{8\gamma_r}{\pi^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n, \quad \{r=1,2,\dots\}, \quad (1.2.9)$$

где $St = \frac{\sigma B^2}{\rho p_1}$ - число Стюарта, характеризующее отношение магнитной силы к силе инерции [144].

Число Стюарта в подобных задачах является критерием электромагнитного воздействия. Оценим его значение по однододовому приближению, которое описывается уравнением

$$\ddot{q}_1 + \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{\pi^2} \right) \dot{q}_1 + q_1 = 0.$$

Выпишем фактор затухания:

$$\tilde{h}_1 = \frac{1}{2} \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{\pi^2} \right).$$

С одной стороны, для периодического процесса необходимо, чтобы корни соответствующего характеристического уравнения были комплексными. Из этих соображений находим верхнюю границу значений числа Стюарта:

$$\mathbf{St} < (2 - \beta) \frac{\pi^2}{8\gamma_1^2}.$$

С другой стороны - значение магнитного фактора затухания не должно быть существенно меньше механического, в противном случае нет смысла его учитывать. Будем считать, что магнитным демпфированием можно пренебречь, если оно на порядок меньше механического. Отсюда получим оценку для числа Стюарта снизу:

$$\mathbf{St} > \frac{\pi^2}{80\gamma_1^2} \beta.$$

Итак, число Стюарта в задачах подобного типа по однододовому приближению может быть задано в пределах

$$\frac{\pi^2}{80\gamma_1^2} \beta < \mathbf{St} < (2 - \beta) \frac{\pi^2}{8\gamma_1^2}. \quad (1.2.10)$$

Займемся анализом уравнений (1.2.9) для того, чтобы установить характер связи между собой парциальных колебаний посредством электромагнитного взаимодействия. Рассчитаем их факто-

ры затухания \tilde{h}_r и демпфированные частоты ω_r в зависимости от количества учтенных членов ряда, стоящего в правой части. Расчеты нетрудно выполнить при помощи прикладной программы Mathcad 8.

Пусть активный участок занимает три четверти длины струны:

$z_1 = 0, \quad z_2 = \frac{3}{4}$. Коэффициент механической диссипации примем равным $\beta = 0,05$. Значение числа Стюарта возьмем близким к максимальному: **St** = 2,3. Результаты расчетов приведены в

Таблице 1.

Таблица 1

| | $n = 1$ | | $n = 2$ | | $n = 3$ | | $n = 4$ | |
|-----|---------------|------------|---------------|------------|---------------|------------|---------------|------------|
| r | \tilde{h}_r | ω_r | \tilde{h}_r | ω_r | \tilde{h}_r | ω_r | \tilde{h}_r | ω_r |
| 1 | 0,695 | 0,718 | 0,722 | 0,713 | 0,723 | 0,713 | 0,730 | 0,712 |
| 2 | | | 0,055 | 1,970 | 0,056 | 1,970 | 0,056 | 1,970 |
| 3 | | | | | 0,027 | 2,999 | 0,027 | 2,999 |
| 4 | | | | | | | 0,074 | 3,979 |

Из таблицы видно, что даже при значениях числа Стюарта, близких к максимальному, электромагнитное взаимодействие между парциальными колебаниями довольно слабо влияет на их демпфированные частоты. Это обстоятельство позволяет применить для дальнейшего анализа системы уравнений (1.2.9) метод расщепления (редукции).

Поясним его суть. Представим начальные условия движения в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n(0)X_n(z) = f_1(z); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(0)X_n(z) = f_2(z).$$

То есть начальные значения обобщенных координат и обобщенных скоростей для каждого парциального колебания определяются как коэффициенты ряда при разложении заданных функций

$f_1(z)$, $f_2(z)$ по собственным амплитудным функциям. Если в силу начальных условий наибольшей энергией обладает движение, соответствующее низшему парциальному тону, то расщепление можно произвести следующим образом: оставим в первом уравнении только первый член суммы, стоящей в правой части, во втором – два, и так далее. В результате получим систему уравнений, которую можно интегрировать последовательно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_1 + \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2} \right) \dot{q}_1 + 1^2 q_1 = 0; \\ \ddot{q}_2 + \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2} \right) \dot{q}_2 + 2^2 q_2 = -\mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_2}{1 \cdot 2 \pi^2} \dot{q}_1; \\ \dots; \\ \ddot{q}_r + \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right) \dot{q}_r + r^2 q_r = \\ = -\mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{r \pi^2} \left(\frac{\gamma_1}{1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\gamma_{r-1}}{r-1} \dot{q}_{r-1} \right); \\ \dots; \end{array} \right. \quad (1.2.11)$$

Рассчитаем факторы затухания и демпфированные частоты для нескольких первых уравнений системы (1.2.11) при тех же условиях, что и раньше. Результаты расчетов приведены в Таблице 2.

Сравнивая значения, приведенные в Таблицах 1 и 2, делаем вывод о достаточно высокой степени точности, которую обеспечивает метод расщепления.

Таблица 2

| n | $n=1$ | | $n=2$ | | $n=3$ | | $n=4$ | |
|-----|---------------|------------|---------------|------------|---------------|------------|---------------|------------|
| | \tilde{h}_r | ω_r | \tilde{h}_r | ω_r | \tilde{h}_r | ω_r | \tilde{h}_r | ω_r |
| 1 | 0,695 | 0,718 | 0,695 | 0,719 | 0,695 | 0,719 | 0,695 | 0,719 |
| 2 | | | 0,082 | 1,998 | 0,082 | 1,998 | 0,082 | 1,998 |
| 3 | | | | | 0,027 | 3,000 | 0,026 | 3,000 |
| 4 | | | | | | | 0,083 | 3,999 |

В силу принятых для (1.2.11) начальных условий наибольшую исходную амплитуду имеет основное парциальное колебание, поэтому интегрирование системы дифференциальных уравнений начинается с первого уравнения. Колебания основного тона являются затухающими и в одномодовом приближении с учетом начальных условий описываются решением:

$$q_1 = q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1),$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{1^2 - \tilde{h}_1^2}; \quad \tilde{h}_1 = \frac{1}{2} \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2} \right),$$

а начальная амплитуда q_{01} и начальная фаза ε_1 определяются начальными условиями для основного тона, т.е. выражаются через величины $q_1(0)$ и $\dot{q}_1(0)$.

Решение второго уравнения системы (1.2.11) представляет собой суперпозицию затухающих функций с частотами ω_1 и

$$\omega_2 = \sqrt{2^2 - \tilde{h}_2^2},$$

где

$$\tilde{h}_2 = \frac{1}{2} \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2} \right),$$

а именно

$$q_2 = q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2) +$$

$$+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_2 q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1)}{2\pi^2 \sqrt{(2^2 - 1^2)^2 + 4\tilde{h}_1(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2)(2^2 - 1^2) + 4 \cdot 1^2(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2)^2}},$$

(1.2.12)

причем $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\tilde{h}_1}{\omega_1}$, а q_{02} и ε_2 определяются начальными условиями $q_2(0)$ и $\dot{q}_2(0)$, соответствующими второму парциальному тону.

При условии малой общей диссипации, когда безразмерные значения всех факторов затухания (в том числе и \tilde{h}_1, \tilde{h}_2) малы по сравнению с единицей, приближенно можно записать

$$q_2 = q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2) +$$

(1.2.13)

$$+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_2}{2\pi^2 (2^2 - 1^2)} q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1).$$

Заметим, что числовые значения, приведенные в таблицах 1 и 2, не позволяют отнести данный пример к случаю малой общей диссипации, поскольку число Стюарта специально принято близким к его теоретическому максимуму. Фактор затухания \tilde{h}_1 в этом случае близок к единице. Очевидно, что условие малой общей диссипации накладывает дополнительное ограничение на максимальное значение числа Стюарта. Для практики важны именно

случаи малой диссипации, так как внешнее сопротивление в механизмах вибраторного типа обычно мало, и технические условия не позволяют достигать больших значений числа Стюарта.

Решение третьего уравнения (1.2.11) является суперпозицией четырех составляющих, два из которых изменяются с частотой ω_1 , а еще два с частотами ω_2 и ω_3 соответственно. Выясним смысл каждого члена с частотой ω_1 . Один из них возникает за счет прямой передачи энергии от первого парциального колебания третьему. А другой за счет энергии, полученной вторым парциальным колебанием от первого и частично переданной третьему. Понятно, что этот последний член менее существенен, чем первый, поскольку отражает вторичный процесс перераспределения энергии. Пренебрежение этим членом вполне укладывается в рамки принятой приближенной схемы решения системы уравнений (1.2.11). Таким образом, решение третьего дифференциального уравнения запишем с сохранением трех его составляющих:

$$\begin{aligned}
 q_3 = & q_{03} \exp(-\tilde{h}_3 t) \cos(\omega_3 t + \varepsilon_3) + \\
 & + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_3 q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1)}{3\pi^2 \sqrt{(3^2 - 1^2)^2 + 4\tilde{h}_1(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_3)(3^2 - 1^2) + 4 \cdot 1^2(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_3)^2}} + \\
 & + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2 \gamma_3 q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2 + \theta_2)}{3\pi^2 \sqrt{(3^2 - 2^2)^2 + 4\tilde{h}_2(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_3)(3^2 - 2^2) + 4 \cdot 2^2(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_3)^2}},
 \end{aligned}
 \tag{1.2.14}$$

где

$$\tilde{h}_3 = \frac{1}{2} \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_3^2}{3^2 \pi^2} \right), \quad \omega_3 = \sqrt{3^2 - \tilde{h}_3^2}, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\tilde{h}_2}{\omega_2},$$

а q_{03} и ε_3 находятся из соответствующих начальных условий.

При условии малой общей диссипации, допустимо записать

$$\begin{aligned}
q_3 &= q_{03} \exp(-\tilde{h}_3 t) \cos(\omega_3 t + \varepsilon_3) + \\
&+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_3}{3\pi^2 (3^2 - 1^2)} q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1) + \quad (1.2.15) \\
&+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_2 \gamma_3}{3\pi^2 (3^2 - 2^2)} q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2 + \theta_2).
\end{aligned}$$

В случае рассмотренного выше примера, начиная со второго все факторы затухания существенно меньше единицы, поэтому допустимо третий член в (1.2.15) для этого случая записать приближенно:

$$\begin{aligned}
q_3 &= q_{03} \exp(-\tilde{h}_3 t) \cos(\omega_3 t + \varepsilon_3) + \\
&+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_3 q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1)}{3\pi^2 \sqrt{(3^2 - 1^2) + 4\tilde{h}_1 (\tilde{h}_1 - \tilde{h}_3) (3^2 - 1^2) + 4 \cdot 1^2 (\tilde{h}_1 - \tilde{h}_3)^2}} + \\
&+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_2 \gamma_3 q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2 + \theta_2)}{3\pi^2 (3^2 - 2^2)}. \quad (1.2.16)
\end{aligned}$$

Таким образом, при решении прикладных задач необходимо всегда выяснять, начиная с какого парциального колебания допустимо применять условие малой диссипации и соответственно записывать приближенные решения.

Решение r -го уравнения с учетом только прямых процессов передачи энергии от низших парциальных колебаний к высшим содержит r членов:

$$\begin{aligned}
q_r &= q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) + \\
&+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{r\pi^2} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\gamma_k q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_k + \theta_k)}{\sqrt{(r^2 - k^2)^2 + 4\tilde{h}_k(\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)(r^2 - k^2) + 4 \cdot k^2(\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)^2}}, \\
&(r = 1, 2, \dots),
\end{aligned} \tag{1.2.17}$$

где

$$\tilde{h}_r = \frac{1}{2} \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right), \quad \omega_r = \sqrt{r^2 - \tilde{h}_r^2}, \quad \operatorname{tg} \theta_k = \frac{\tilde{h}_k}{\omega_k},$$

а q_{0r} и ε_r находятся из начальных условий для r -ого дифференциального уравнения (1.2.11).

В случае малой общей диссипации приближенно можно записать:

$$\begin{aligned}
q_r &= q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) + \\
&+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{r\pi^2} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\gamma_k}{r^2 - k^2} q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_k + \theta_k), \\
&(r = 1, 2, \dots),
\end{aligned} \tag{1.2.18}$$

Если же факторы затухания становятся существенно меньше единицы, начиная с номера \tilde{n} , то решение следует записать в виде:

$$\begin{aligned}
q_r &= q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) + \\
+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{r\pi^2} \sum_{k=1}^{\tilde{n}-1} &\frac{\gamma_k q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_k + \theta_k)}{\sqrt{(r^2 - k^2)^2 + 4\tilde{h}_k(\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)(r^2 - k^2) + 4 \cdot k^2(\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)^2}} + \\
+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{r\pi^2} \sum_{k=\tilde{n}}^{r-1} &\frac{\gamma_k q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_k + \theta_k)}{r^2 - k^2}, \\
&(r = 1, 2, \dots). \tag{1.2.19}
\end{aligned}$$

Таким образом, каждое парциальное колебание складывается из собственных затухающих колебаний с частотой ω_r и начальной фазой ε_r и колебаний со всеми более низкими частотами. Это означает, что в процессе диссипации энергии, которую первоначально имело какое-либо парциальное колебание, принимают участие все более высокие парциальные колебания, кроме изолированных, для которых $\gamma_r = 0$. То есть механическая энергия собственных колебаний в электромеханической системе вибрационного типа перераспределяется от низших парциальных колебаний к высшим. Следует заметить, что имеет место и обратный процесс перекачки энергии от высших парциальных колебаний к низшим, но он проявляется меньше и не учтен в уравнениях (1.2.11), а соответствующие ему члены отброшены. Не учтены в этих решениях так же и вторичные процессы перераспределения энергии между парциальными колебаниями.

Обобщая соотношение (1.2.10), получим пределы значений числа Стюарта для r -ого парциального колебания

$$\frac{r^2 \pi^2}{80\gamma_r^2} \beta < \mathbf{St} < (2p_r - \beta) \frac{r^2 \pi^2}{8\gamma_r^2}, \quad (r = 1, 2, \dots). \tag{1.2.20}$$

Отсюда видно, что интервал возможных значений числа Стюарта с возрастанием r сдвигается вправо. Следовательно, существует возможность такого выбора St , при котором одно или несколько первых парциальных движений затухают аperiодически, а более высокие колебания являются периодическими. Эта особенность расширяет управляющие возможности электромагнитного воздействия на электромеханические системы вибрационного типа.

Возможен случай, когда в силу начальных условий, наибольшую исходную амплитуду имеет парциальное колебание, соответствующее произвольному $r^* > 1$. Тогда при расщеплении системы в правой части первого уравнения следует сохранить первый и r^* -ый члены, как наиболее значительные. Во втором уравнении сохраняются первые два и r^* -ый члены, и т.д. В r^* -ом уравнении сохраняется только r^* -ый член. В последующих уравнениях число сохраненных членов ряда равно номеру уравнения. Последовательное интегрирование в этом случае начинается с r^* -ого уравнения. Затем интегрируется первое и далее по порядку все последующие уравнения. Естественно, в расщепленную систему не включаются уравнения изолированных мод и низших тонов, затухающих аperiодически при заданном St . При записи решений в этом случае вторичные процессы перекачки энергии между парциальными колебаниями так же не следует учитывать.

Определим логарифмический декремент затухания для собственных колебаний r -ого парциального тона:

$$\tilde{\delta}_r = \left(\beta + \frac{8St}{\pi^2 r^2} \gamma_r^2 \right) \frac{2\pi}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4} \left(\beta + \frac{8St}{\pi^2 r^2} \gamma_r^2 \right)^2}},$$

$$(r = 1, 2, \dots).$$

Отсюда видно, что логарифмический декремент затухания является частотно-зависимым.

На рис. 3 построены графики этой зависимости для трех первых парциальных тонов при условии, что активный участок зани-

мает всю длину струны. Вертикальная ось на этом графике имеет логарифмический масштаб. Верхняя линия соответствует логарифмическому декременту затухания первого парциального тона. Нижняя горизонтальная – второму. Это колебание изолировано от электромагнитного воздействия, поэтому его декремент затухания мал и не зависит от числа Стюарта.

Зависимость логарифмического декремента затухания от числа Стюарта

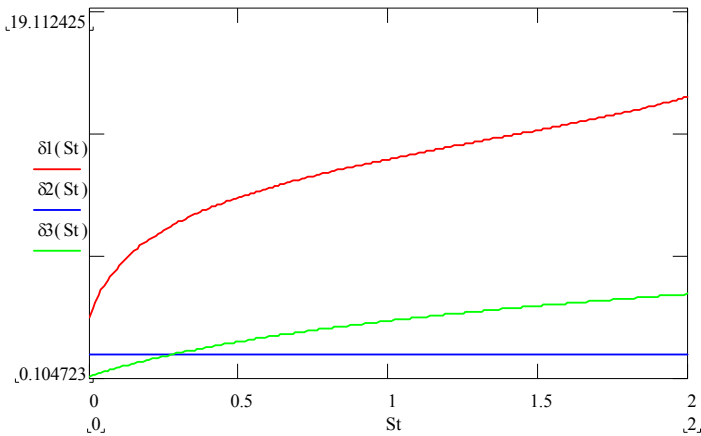


Рис. 3

При

$$r^2 > \frac{1}{4} \left(\beta + \frac{8St}{\pi^2 r^2} \gamma_r^2 \right)$$

приближенно можно записать

$$\tilde{\delta}_r = \left(\beta + \frac{8St}{\pi^2 r^2} \gamma_r^2 \right) \frac{2\pi}{p_r}, \quad (r = 1, 2, \dots),$$

то есть получить линейную зависимость $\tilde{\delta}_r(\mathbf{St})$.

В заключение сформулируем полученные в данном параграфе выводы:

- 1) на собственные парциальные колебания замкнутой проводящей струны однородное стационарное магнитное поле оказывает избирательное демпфирующее воздействие;
- 2) наибольшему демпфированию подвергаются низшие парциальные колебания, так как магнитная сила обратно пропорциональна r^2 ;
- 3) магнитному демпфированию не подвергаются колебания с формами, при которых один из узлов расположен посередине активного участка;
- 4) электромагнитное взаимодействие перераспределяет механическую энергию между парциальными движениями и проявляется, как слабое, что позволяет расщеплять систему дифференциальных уравнений и не учитывать процессы вторичного перераспределения энергии;
- 5) при некотором выборе числа Стюарта возможен случай, когда одно или несколько первых парциальных колебаний затухают аperiodически, а более высокие – остаются периодическими.

1.3 Сходимость метода расщепления (редукции)

Докажем сходимость последовательности решений (1.2.17). Признаком существования предела последовательности $\{q_r\}$, как и любой последовательности, является ее ограниченность и монотонность [149-151]. Действительно, в силу свойств тригонометрических функций из (1.2.17) следует:

$$|q_r| \leq q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{r\pi^2} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\gamma_k q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t)}{\sqrt{(r^2 - k^2)^2 + 4\tilde{h}_k (\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)(r^2 - k^2) + 4k^2 (\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)^2}},$$

$(r = 1, 2, \dots).$ (1.3.1)

Так как величины γ_r и γ_k по модулю не превышают единицы, то имеем:

$$|q_r| < q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) + \mathbf{St} \frac{8}{r\pi^2} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t)}{\sqrt{(r^2 - k^2)^2 + 4\tilde{h}_k (\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)(r^2 - k^2) + 4k^2 (\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)^2}},$$

$(r = 1, 2, \dots).$ (1.3.2)

Введем величины

$$M = \max q_{0k} \text{ и } \tilde{h}_{\max} = \min \tilde{h}_k,$$

получим

$$|q_r| < q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) + \mathbf{St} \frac{8M}{r\pi^2} \exp(-\tilde{h}_{\min} t) \times \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{\sqrt{(r^2 - k^2)^2 + 4\tilde{h}_k (\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)(r^2 - k^2) + 4k^2 (\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)^2}},$$

$(r = 1, 2, \dots).$ (1.3.3)

Если в последнем слагаемом подкоренного выражения заметить множитель k^2 (а эта величина больше единицы) на \tilde{h}_k^2 (величину меньшую единицы), то неравенство не нарушится, так как общий член суммы при этом увеличится:

$$\begin{aligned}
& |q_r| < q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) + \\
& + \mathbf{St} \frac{8M}{r\pi^2} \exp(-\tilde{h}_{\min} t) \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{(r^2 - k^2) + 2\tilde{h}_k (\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)}, \quad (1.3.4) \\
& (r = 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

Усилим неравенство, отбросив в знаменателе, член, содержащий факторы затухания, причем полученное условие будет справедливо как при большой, так и при малой общей диссипации:

$$\begin{aligned}
& |q_r| < q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) + \mathbf{St} \frac{8M}{r\pi^2} \exp(-\tilde{h}_{\min} t) \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{(r^2 - k^2)}, \quad (1.3.5) \\
& (r = 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

Выражение, стоящее справа содержит сходящийся ряд и экспоненциальную функцию отрицательного аргумента, следовательно, последовательность $\{q_r\}$ ограничена.

Для доказательства монотонности учтем, что последовательность (1.2.17) записана для случая, когда первое парциальное колебание в силу начальных условий имеет наибольшую амплитуду. Рассмотрим разность $q_{r+1} - q_r$, определив эти функции при начальных условиях, т.е.

$$q_{r+1}(0) = q_r(0) < q_1(0),$$

следовательно

$$\varepsilon_{r+1} = \varepsilon_r, \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Тогда имеем

$$q_{r+1} - q_r = q_{0r} \exp\left(-\frac{\beta}{2}t\right) \left\{ \exp\left(-\frac{\mathbf{St}\gamma_{r+1}^2}{2(r+1)^2\pi^2}t\right) \cos(\omega_{r+1}t + \varepsilon_{r+1}) - \exp\left(-\frac{\mathbf{St}\gamma_r^2}{2\pi^2 r^2}t\right) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) \right\} + \quad (1.3.6)$$

$$+ \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{r-1} \left\{ q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_k + \theta_k) \left[\frac{\gamma_{r+1}\gamma_k}{(r+1)\Omega_{r+1,k}} - \frac{\gamma_r\gamma_k}{r\Omega_{r,k}} \right] \right\} +$$

$$+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_{r+1}\gamma_r q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \sin(\omega_r t + \varepsilon_r + \theta_r)}{\pi^2 (r+1)\Omega_{r+1,r}},$$

где

$$\Omega_{r,k} = \sqrt{(r^2 - k^2)^2 + 4\tilde{h}_k(\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)(r^2 - k^2) + 4k^2(\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)^2},$$

$$\Omega_{r+1,k} = \sqrt{[(r+1)^2 - k^2]^2 + 2\tilde{h}_k(\tilde{h}_k - \tilde{h}_{r+1})[(r+1)^2 - k^2] + 4k^2(\tilde{h}_k - \tilde{h}_{r+1})^2}$$

$$\Omega_{r+1,r} = \sqrt{[(r+1)^2 - r^2]^2 + 2\tilde{h}_r(\tilde{h}_r - \tilde{h}_{r+1})[(r+1)^2 - r^2] + 4r^2(\tilde{h}_r - \tilde{h}_{r+1})^2}$$

Пусть $\sin(\omega_k t + \varepsilon_k + \theta_k) \geq 0$, $\sin(\omega_r t + \varepsilon_r + \theta_r) \geq 0$. Тогда, так как

$$\frac{\gamma_{r+1}}{r+1} < \frac{\gamma_r}{r}$$

первое слагаемое является положительным, а

$$\frac{\gamma_{r+1}\gamma_k}{(r+1)\Omega_{r+1,k}} < \frac{\gamma_r\gamma_k}{r\Omega_{r,k}},$$

поэтому все члены второго слагаемого отрицательны, третье слагаемое является положительным. Порядок второго слагаемого в силу заданных начальных условий выше, первого и третьего, так как в него включается член, соответствующий первому парциальному колебанию. Следовательно, последовательность решений (1.2.17) монотонно убывает.

Таким образом доказана сходимость полученной последовательности решений, а это означает, что метод редукции можно обоснованно использовать для анализа системы уравнений (1.2.9).

1.4 Случай нескольких активных участков

Обобщим задачу, поставленную в параграфе 1.1, полагая, что вдоль струны располагается N активных участков [70, 74]. В пределах каждого участка магнитное поле считается однородным, стационарным и направленным перпендикулярно плоскости колебаний струны. Направление вектора индукции магнитного поля \vec{B}_m ($m = 1, 2, \dots, N$) на каждом из участков может либо совпадать с положительным направлением оси Oy , либо быть ему противоположным. Допускается и случай, когда на некоторых участках $\vec{B}_m = 0$. Метод разбиения на несколько активных участков удобно использовать для моделирования неоднородных полей.

Разбиваем всю струну на участки различной длины

$$\Delta z_1, \Delta z_2, \dots, \Delta z_N,$$

где

$$\Delta z_1 = z_2 - z_1; \Delta z_2 = z_3 - z_2; \Delta z_m = z_{m+1} - z_m; \Delta z_N = z_{N+1} - z_N.$$

Индукцированные в струне токи при ее собственных колебаниях, определяемых функцией смещений $u(z, t)$, выражаются соотношением

$$j = \frac{\sigma}{l} \sum_{m=1}^N \left(B_m \int_{z_m}^{z_{m+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dz \right).$$

При записи этого выражения следует учитывать знаки B_m на каждом участке.

На элемент струны dz , принадлежащий k -ому участку ($k = 1, 2, \dots, N$), действует магнитная сила

$$dF_{(M)k} = \left(B_k \frac{\sigma A}{l} \sum_{m=1}^N B_m \int_{z_m}^{z_{m+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dz \right) dz. \quad (1.4.1)$$

Приведем два возможных способа получения дифференциальных уравнений движения струны.

В соответствии с первым из них вначале составляем дифференциальное уравнение в частных производных, выбрав dz на k -ом участке

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T_0}{m_0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma A}{lm_0} B_k \sum_{m=1}^N \left(B_m \int_{z_m}^{z_{m+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dz \right) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (1.4.2)$$

Воспользовавшись разложением $u(z, t)$ по собственным амплитудным функциям, которые по-прежнему считаем синусоидальными, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_n X_n - \frac{T_0}{m_0} q_n \frac{d^2 X_n}{dz^2} + \beta \dot{q}_n X_n + \frac{\sigma A}{lm_0} \dot{q}_n \sum_{m=1}^N B_m B_k \int_{z_m}^{z_{m+1}} X_n dz \right] = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Умножим уравнение (1.4.3) на X_r ($r = 1, 2, \dots$) и проинтегрируем его по z в пределах от 0 до l . В силу ортогональности собственных амплитудных функций получим:

$$\begin{aligned} & \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r + \\ & + \frac{2\sigma A}{l^2 m_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \dot{q}_n \sum_{m,k=1}^N \left(B_m B_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} X_r dz \int_{z_m}^{z_{m+1}} X_n dz \right) \right\} = 0, \\ & \{r = 1, 2, \dots\}. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Заметим, что полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений не зависит от первоначального выбора активного участка. Это объясняется тем, что собственные амплитудные функции приняты заданными, по этой же причине нет необходимости рассматривать условия стыковки функции смещений и ее производных на границах активных участков для дифференциальных уравнений (1.4.2).

Обозначим

$$\gamma_{kr} = \frac{r\pi}{2l} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \sin \frac{r\pi z}{l} dz = \sin \frac{r\pi(z_k + z_{k+1})}{2l} \sin \frac{r\pi(z_{k+1} - z_k)}{2l},$$

$$(r = 1, 2, \dots),$$

$$\gamma_{mn} = \frac{n\pi}{2l} \int_{z_m}^{z_{m+1}} \sin \frac{n\pi z}{l} dz = \sin \frac{n\pi(z_m + z_{m+1})}{2l} \sin \frac{n\pi(z_{m+1} - z_m)}{2l},$$

$$(n = 1, 2, \dots).$$

Индексы k и m – номера участков, r - номер выбранной гармоники, m – номер любой гармоники. Величины γ_{kr} и γ_{mn} экви-

валентны нулю в случаях, когда посередине данного активного участка расположен узел стоячей волны соответствующего парциального колебания.

Окончательно получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r + \frac{8\sigma A}{m_0 r \pi^2} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\dot{q}_n}{n} \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{mn} \right) = 0, \\ \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (1.4.5)$$

По второму способу используем дифференциальные уравнения, описывающие движение струны, как системы с бесконечным числом степеней свободы, в виде

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \frac{Q_r}{m_r^*}, \quad \{r = 1, 2, \dots\}, \quad (1.4.6)$$

где $m_r^* = \int_0^l m_0 X_r^2 dz = \frac{m_0 l}{2}$ - обобщенные массы.

Вычислим обобщенную силу, отнесенную к r -ой обобщенной координате:

$$Q_r = - \int_0^l X_r dF_M = - \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} X_r dF_{(M)k} = \\ - \frac{\sigma A}{l} \sum_{k=1}^N B_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} X_r dz \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \dot{q}_n \sum_{m=1}^N \left(B_m \int_{z_m}^{z_{m+1}} X_n dz \right) \right\} = \quad (1.4.7)$$

$$= -\frac{4l\sigma A}{r\pi^2} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\dot{q}_n}{n} \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{mn} \right\},$$

$$(r = 1, 2, \dots).$$

После подстановки (1.4.7) и значения m_r^* в (1.4.6) получим уравнение, совпадающее с (1.4.5).

Приведем запись уравнений (1.4.5) в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + r^2 q_r + \frac{8}{r\pi^2} \mathbf{St} \cdot \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\dot{q}_n}{n} \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{mn} \right) = 0,$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}. \quad (1.4.8)$$

Из уравнений (1.4.8) вытекает условие отсутствия электромагнитного демпфирования r – ого парциального колебания:

$$\sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} = 0, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (1.4.9)$$

Произведем расщепление уравнений (1.4.8) для случая, когда в силу начальных условий наибольшей энергией обладает первое парциальное колебание:

$$\left. \begin{aligned}
& \ddot{q}_1 + \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8}{l^2 \pi^2} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{k1} \cdot \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{m1} \right) \dot{q}_1 + q_1 = 0; \\
& \ddot{q}_2 + \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8}{2^2 \pi^2} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{k2} \cdot \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{m2} \right) \dot{q}_2 + p_2^2 q_2 = \\
& \quad = -\mathbf{St} \frac{8}{2\pi^2} \frac{\dot{q}_1}{1} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{k2} \cdot \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{m1}; \\
& \dots; \\
& \ddot{q}_r + \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8}{r^2 \pi^2} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} \cdot \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{mr} \right) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \\
& \quad = -\mathbf{St} \frac{8}{r\pi^2} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} \cdot \left(\frac{\dot{q}_1}{1} \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{m1} + \dots + \frac{\dot{q}_{r-1}}{r-1} \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{mr-1} \right); \\
& \dots;
\end{aligned} \right\} \tag{1.4.10}$$

Из этих уравнений видно, что условие (1.4.9) выполняется и для них, т.е. процедура расщепления не нарушает этого свойства электромагнитного воздействия. Условие (1.4.9) обладает большей общностью, чем полученное в 1.2. В качестве примера рассмотрим колебания струны с двумя активными участками, для которых в безразмерных переменных

$$z_1 = 0; z_2 = \frac{1}{2}; z_3 = 1; B_1 = 1; B_2 = -1, \quad (k, m = 1, 2).$$

Вясним, испытывает ли электромагнитное демпфирование первое парциальное колебание ($r = 1$). Условие (1.4.9) запишется в виде

$$\gamma_{11} - \gamma_{21} = 0. \quad (1.4.11)$$

Вычислим значения $\gamma_{1n}, \gamma_{1r}, \gamma_{2n}, \gamma_{2r}$

$$\gamma_{1n} = \gamma_{1r} = \sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sin^2\left(\frac{r\pi}{4}\right) = \begin{cases} 1/2 & \text{при } n, r = 1, 3, 5, \dots \\ 1 & \text{при } n, r = 2, 6, 10, \dots \\ 0 & \text{при } n, r = 4, 8, 12, \dots \end{cases}$$

$$\gamma_{2n} = \gamma_{2r} = \sin \frac{n\pi}{4} \sin \frac{3n\pi}{4} = \sin \frac{r\pi}{4} \sin \frac{3r\pi}{4} =$$

$$= \begin{cases} 1/2 & \text{при } n, r = 1, 3, 5, \dots \\ -1 & \text{при } n, r = 2, 6, 10, \dots \\ 0 & \text{при } n, r = 4, 8, 12, \dots \end{cases}$$

Не трудно проверить, что условие (1.5.11), удовлетворяется, это означает, что первое парциальное колебание ($r = 1$) при таком расположении активных участков не подвергается электромагнитному демпфированию, т.е. является изолированным.

Итак, в данном параграфе получено и проанализировано общее условие отсутствия электромагнитного воздействия на колебания проводящей струны в стационарном магнитном поле, которое может применяться в случае неоднородного магнитного поля.

1.5 Собственные формы колебаний струны

Несмотря на то, что введенные выше обобщенные координаты не являются главными, метод расщепления позволяет приближенно определить собственные амплитудные формы главных колебаний с учетом электромагнитного воздействия. Ограничимся случаем малой общей диссипации.

В начале определим собственные формы колебаний струны при наличии одного активного участка [72]. Из формул (1.2.18) следует: поскольку в силу начальных условий q_{01} отлична от нуля, то в суперпозиции частных решений всех последующих неоднородных уравнений присутствуют функции с частотами ω_1 :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{St} \frac{8\gamma_1\gamma_2}{2\pi^2(2^2-1^2)} q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1); \\
 & \mathbf{St} \frac{8\gamma_1\gamma_3}{3\pi^2(3^2-1^2)} q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1); \\
 & \dots \dots \dots ; \\
 & \mathbf{St} \frac{8\gamma_1\gamma_r}{r\pi^2(r^2-1^2)} q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1); \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

Из этих частных решений можно составить функцию смещений первого главного колебания, записав его в виде бесконечного ряда:

$$\begin{aligned}
 u_1(z,t) = & X_1 q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1) + \\
 & + \mathbf{St} \left[X_2 \frac{8\gamma_1\gamma_2}{2\pi^2(2^2-1^2)} + \dots + X_r \frac{8\gamma_1\gamma_r}{r\pi^2(r^2-1^2)} + \dots \right] \times \\
 & \times q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1),
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
u_1(z, t) = & \mathbf{St} \left[X_2 \frac{8\gamma_1\gamma_2}{2\pi^2(2^2 - 1^2)} + \dots + X_r \frac{8\gamma_1\gamma_r}{r\pi^2(r^2 - 1^2)} + \dots \right] \times \\
& \times q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \cos \theta_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + \\
& + \left\{ X_1 + \mathbf{St} \left[X_2 \frac{8\gamma_1\gamma_2}{2\pi^2(2^2 - 1^2)} + \dots + X_r \frac{8\gamma_1\gamma_r}{r\pi^2(r^2 - 1^2)} + \dots \right] \right\} \times \\
& \times q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin \theta_1 \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1).
\end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Отсюда видно, что выделяются две амплитудные функции, соответствующие движениям, смещенным по фазе относительно друг друга на $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
X_1^* = \sin \pi z + \mathbf{St} \cdot \left[\frac{8\gamma_1\gamma_2}{2\pi^2(2^2 - 1^2)} \sin 2\pi z + \dots + \right. \\
\left. + \frac{8\gamma_1\gamma_r}{r\pi^2(r^2 - 1^2)} \sin r\pi z + \dots \right] \sin \theta_1,
\end{aligned} \tag{1.5.3}$$

$$\begin{aligned}
X_1^{**} = \mathbf{St} \cdot \left[\frac{8\gamma_1\gamma_2}{2\pi^2(2^2 - 1^2)} \sin 2\pi z + \dots + \right. \\
\left. + \frac{8\gamma_1\gamma_r}{r\pi^2(r^2 - 1^2)} \sin r\pi z + \dots \right] \cos \theta_1.
\end{aligned}$$

Рассуждая аналогично, получим две амплитудных функции, соответствующих движениям с частотой ω_2 и смещенным относительно друг друга по фазе на $\frac{\pi}{2}$:

$$X_2^* = \sin 2\pi z + \mathbf{St} \cdot \left[\frac{8\gamma_2\gamma_3}{3\pi^2(3^2 - 2^2)} \sin 3\pi z + \dots + \right. \\ \left. + \frac{8\gamma_2\gamma_r}{r\pi^2(r^2 - 2^2)} \sin r\pi z + \dots \right] \sin \theta_2; \quad (1.5.4)$$

$$X_2^{**} = \mathbf{St} \cdot \left[\frac{8\gamma_2\gamma_3}{3\pi^2(3^2 - 2^2)} \sin 3\pi z + \dots + \right. \\ \left. + \frac{8\gamma_2\gamma_r}{r\pi^2(r^2 - 2^2)} \sin r\pi z + \dots \right] \cos \theta_2.$$

Для произвольного номера n имеем:

$$X_n^* = \sin n\pi z + \mathbf{St} \cdot \left[\frac{8\gamma_n\gamma_{n+1}}{\pi^2(n+1)[(n+1)^2 - n^2]} \sin(n+1)\pi z + \dots + \right. \\ \left. + \frac{8\gamma_n\gamma_{n+r}}{\pi^2(n+r)[(n+r)^2 - n^2]} \sin(n+r)\pi z + \dots \right] \sin \theta_r,$$

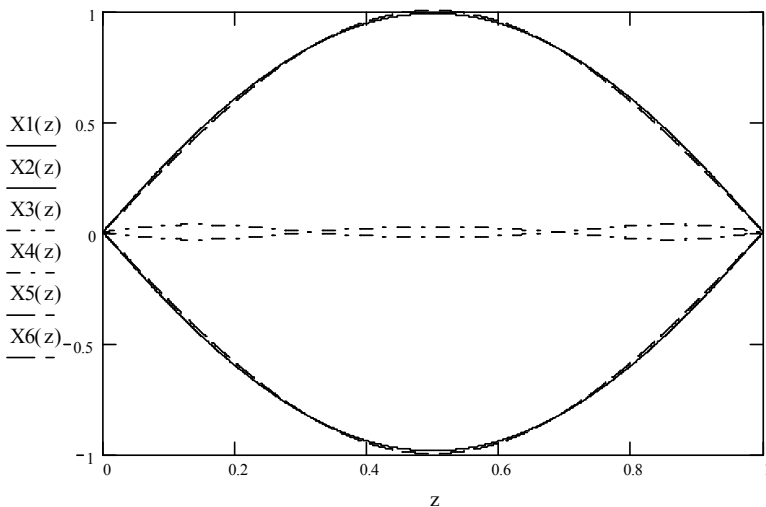
$$\begin{aligned}
X_n^{**} = \mathbf{St} \cdot & \left[\frac{8\gamma_n \gamma_{n+1}}{\pi^2 (n+1) [(n+r)^2 - n^2]} \sin(n+1)\pi z + \dots + \right. \\
& \left. + \frac{8\gamma_n \gamma_{n+r}}{\pi^2 (n+r) [(n+r)^2 - n^2]} \sin(n+r)\pi z + \dots \right] \cos \theta_r, \\
& (r=1,2,\dots). \tag{1.5.5}
\end{aligned}$$

Найденные амплитудные функции приближенно выражают главные формы собственных колебаний, поскольку соответствующие им временные функции являются простыми гармониками с демпфированными частотами $\omega_1, \omega_2, \dots$.

Подобная ситуация, когда главные колебания системы складываются из двух движений, смещенных друг относительно друга на $\frac{\pi}{2}$, и выделяются две амплитудные функции, соответствующие одной собственной частоте, встречается довольно часто. Известно, что даже в системах с одной степенью свободы учет сопротивления, пропорционального первой степени скорости, приводит к решению, выраженному через суперпозицию синуса и косинуса одной частоты. В континуальных системах с неклассическими граничными условиями такие процессы называются двухволновыми [129-130]. Можно сказать, что электромагнитное воздействие на струну приводит к возникновению в ней двухволновых процессов.

В качестве характерной особенности отметим, что в общем случае волновые числа основных гармоник, образующих найденные амплитудные функции X_n^* и X_n^{**} отличаются друг от друга на единицу. В частных случаях они могут различаться и больше, чем на единицу, так как за счет избирательности электромагнитного взаимодействия некоторые гармоники в выражениях (1.5.5) выпадают.

Амплитудные функции первой моды с учетом электромагнитного воздействия в случае одного активного участка

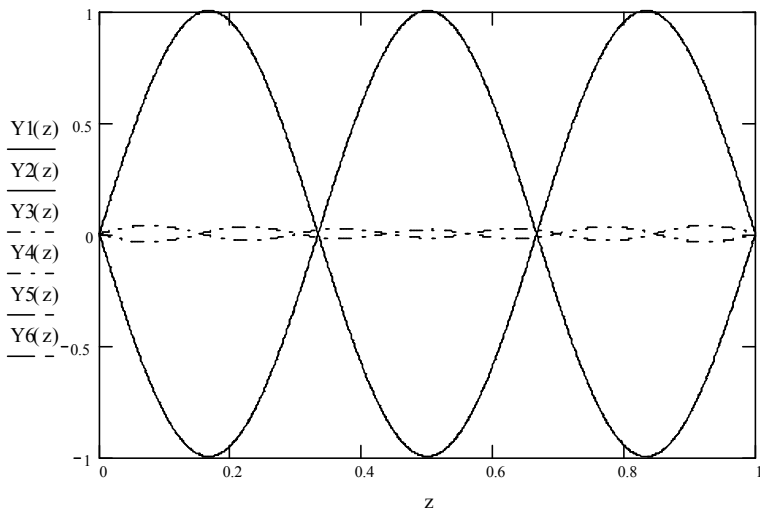


$n=1$

Рис. 4

Изобразим графически амплитудные функции, соответствующие первой (рис. 4) и третьей (рис. 5) модам для случая, когда активный участок занимает всю длину струны и обеспечивается условие малой общей диссипации: $\beta = 0,1$: $St = 1$. Заданное значение числа Стюарта близко к верхнему его пределу, обеспечивающему условие малой диссипации, так как наибольший фактор затухания в этом случае $\tilde{h}_1 = 0,4556$.

*Амплитудные функции третьей моды с учетом
электромагнитного воздействия в случае одного активного
участка*



$$n=3$$

Рис. 5

На рис. 4 и 5 для сравнения пунктирными линиями изображены строго синусоидальные функции $\sin n\pi z$. Функции X_1^* и X_3^* практически совпадают с соответствующими синусоидами. Это свидетельствует о слабой электромагнитной взаимосвязи между парциальными колебаниями. Отметим, что на рисунках масштабы функции X_n^* существенно больше масштабов X_n^{**} , с возрастанием n функции X_n^{**} становятся пренебрежимо малы. Очевидно, формы всех последующих главных колебаний при условии малой общей диссипации можно считать практически синусоидальными.

Теперь изучим случай, когда имеется два равных по длине активных участка с взаимно противоположными направлениями вектора магнитной индукции:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \frac{1}{2}, \quad z_3 = 1, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = -1.$$

Воспользуемся системой уравнений (1.4.10), применив ее для данного случая:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \left[\beta + \mathbf{St} \frac{8}{1^2 \pi^2} (\gamma_{11} - \gamma_{21})^2 \right] \dot{q}_1 + q_1 &= 0; \\ \ddot{q}_2 + \left[\beta + \mathbf{St} \frac{8}{2^2 \pi^2} (\gamma_{12} - \gamma_{22})^2 \right] \dot{q}_2 + 2^2 q_2 &= \\ &= -\mathbf{St} \frac{8}{2\pi^2} \frac{\dot{q}_1}{1} (\gamma_{12} - \gamma_{22})(\gamma_{11} - \gamma_{21}); \\ &\dots\dots\dots; \\ &\dots\dots\dots; \\ \ddot{q}_r + \left[\beta + \mathbf{St} \frac{8}{r^2 \pi^2} (\gamma_{1r} - \gamma_{2r})^2 \right] \dot{q}_r + r^2 q_r &= \\ &= -\mathbf{St} \frac{8}{r\pi^2} (\gamma_{1r} - \gamma_{2r}) \left[\frac{\dot{q}_1}{1} (\gamma_{11} - \gamma_{21}) + \dots \frac{\dot{q}_{r-1}}{r-1} (\gamma_{1r-1} - \gamma_{2r-1}) \right]; \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

В параграфе 1.4 показано, что при заданных условиях электромагнитному воздействию подвергаются только колебания с номерами 2,6,10, . . . , поэтому рассматриваем только их.

При $r = 2$ колебание является затухающим:

$$q_2 = q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2). \quad (1.5.7)$$

Приближенное решение шестого уравнения системы (1.5.6) при условии малой общей диссипации представляет собой суперпозицию двух затухающих функций с частотами ω_2 и ω_6 :

$$q_6 = q_{06} \exp(-\tilde{h}_6 t) \cos(\omega_6 t + \varepsilon_6) + \\ + \mathbf{St} \frac{8(\gamma_{12} - \gamma_{22})(\gamma_{16} - \gamma_{26})}{6\pi^2(6^2 - 2^2)} q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2 + \theta_2), \quad (1.5.8)$$

причем $\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\tilde{h}_2}{\omega_2}$.

Решение r -го уравнения в случае малой общей диссипации без учета вторичных процессов передачи энергии запишется в виде:

$$q_r = q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) + \\ + \mathbf{St} \frac{8(\gamma_{1r} - \gamma_{2r})}{r\pi^2} \sum_{s=2}^{r-4} \left[\frac{(\gamma_{1s} - \gamma_{2s})s}{(r^2 - s^2)} q_{0r} \exp(-\tilde{h}_s t) \sin(\omega_s t + \varepsilon_s + \theta_s) \right], \quad (1.5.9)$$

$(r = 2, 6, 10, \dots)$.

Если сгруппировать все частные решения с частотой ω_2 , то полученная функция смещений для каждого активного участка запишется в виде ряда:

$$u_2^{(1)}(z, t) = X_2^{(1)} q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2) +$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{St}(\gamma_{12} - \gamma_{22}) \left[X_6^{(1)} \frac{8(\gamma_{16} - \gamma_{26})}{6\pi^2(6^2 - 2^2)} + \dots + X_r^{(1)} \frac{8(\gamma_{1r} - \gamma_{2r})}{r\pi^2(r^2 - 2^2)} + \dots \right] \times \\
& \times q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2 + \theta_2); \quad 0 \leq z \leq 1/2; \quad (r = 2, 6, 10, \dots);
\end{aligned} \tag{1.5.10}$$

$$u_2^{(2)}(z, t) = X_2^{(2)} q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2) +$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{St}(\gamma_{12} - \gamma_{22}) \left[X_6^{(2)} \frac{8(\gamma_{16} - \gamma_{26})}{6\pi^2(6^2 - 2^2)} + \dots + X_r^{(2)} \frac{8(\gamma_{1r} - \gamma_{2r})}{r\pi^2(r^2 - 2^2)} + \dots \right] \times \\
& \times q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2 + \theta_2); \quad 1/2 \leq z \leq 1; \quad (r = 2, 6, 10, \dots);
\end{aligned}$$

где

$$X_r^{(1)} = \sin r\pi z; \quad 0 \leq z \leq 1/2; \quad (r = 2, 6, 10, \dots);$$

$$X_r^{(2)} = \sin r\pi z; \quad 1/2 \leq z \leq 1; \quad (r = 2, 6, 10, \dots).$$

Нетрудно увидеть, что полученные решения отвечают условию стыковки на границе участков.

Из (1.5.10) для каждого активного участка выделяются две амплитудных функции, соответствующие главному колебанию второй моды. Для первого активного участка:

$$\begin{aligned}
X_2^{(1)*} = X_2^{(1)} + \mathbf{St} \cdot (\gamma_{12} - \gamma_{22}) & \left[X_6^{(1)} \frac{8(\gamma_{16} - \gamma_{26})}{6\pi^2(6^2 - 2^2)} + \dots \right. \\
& \left. + X_r^{(1)} \frac{8(\gamma_{1r} - \gamma_{2r})}{r\pi^2(r^2 - 2^2)} + \dots \right] \sin \theta_2;
\end{aligned}$$

$$X_2^{(1)**} = \mathbf{St} \cdot (\gamma_{12} - \gamma_{22}) \left[X_6^{(1)} \frac{8(\gamma_{16} - \gamma_{26})}{6\pi^2(6^2 - 2^2)} + \dots \right. \\ \left. + X_r^{(1)} \frac{8(\gamma_{1r} - \gamma_{2r})}{r\pi^2(r^2 - 2^2)} + \dots \right] \cos \theta_2;$$

$$0 \leq z \leq 1/2, \quad (r = 2, 6, 10, \dots).$$

Для второго активного участка:

$$X_2^{(2)*} = X_2^{(2)} + \mathbf{St} \cdot (\gamma_{12} - \gamma_{22}) \left[X_6^{(2)} \frac{8(\gamma_{16} - \gamma_{26})}{6\pi^2(6^2 - 2^2)} + \dots + \right. \\ \left. + X_r^{(2)} \frac{8(\gamma_{1r} - \gamma_{2r})}{r\pi^2(r^2 - 2^2)} + \dots \right] \cos \theta_2;$$

$$X_2^{(2)**} = \mathbf{St} \cdot (\gamma_{12} - \gamma_{22}) \left[X_6^{(2)} \frac{8(\gamma_{16} - \gamma_{26})}{6\pi^2(6^2 - 2^2)} + \dots + \right. \\ \left. + X_r^{(2)} \frac{8(\gamma_{1r} - \gamma_{2r})^2}{r\pi^2(r^2 - 2^2)} + \dots \right] \cos \theta_2;$$

$$1/2 \leq z \leq 1; \quad (r = 2, 6, 10, \dots).$$

Рассуждая аналогично, получим выражения для собственных амплитудных форм любой моды из группы $n=2,6,10,\dots$

Для первого активного участка:

$$\begin{aligned}
 X_n^{(1)*} &= X_n^{(1)} + \mathbf{St} \cdot (\gamma_{1n} - \gamma_{2n}) \times \\
 &\times \left[X_{n+4}^{(1)} \frac{8(\gamma_{1n+4} - \gamma_{2n+4})}{(n+4)\pi^2 [(n+4)^2 - n^2]} + \dots \right] \sin \theta_n; \\
 X_n^{(1)**} &= \mathbf{St} \cdot (\gamma_{1n} - \gamma_{2n}) \times \\
 &\times \left[X_{n+4}^{(1)} \frac{8(\gamma_{1n+4} - \gamma_{2n+4})}{(n+4)\pi^2 [(n+4)^2 - n^2]} + \dots \right] \cos \theta_n; \\
 0 \leq z \leq \frac{1}{2}; \quad (r=2,6,10,\dots). \tag{1.5.11}
 \end{aligned}$$

Для второго активного участка:

$$\begin{aligned}
 X_n^{(2)*} &= X_n^{(2)} + \mathbf{St} \cdot (\gamma_{1n} - \gamma_{2n}) \times \\
 &\times \left[X_{n+4}^{(2)} \frac{8(\gamma_{1n+4} - \gamma_{2n+4})}{(n+4)\pi^2 [(n+4)^2 - n^2]} + \dots \right] \sin \theta_n; \\
 X_n^{(2)**} &= \mathbf{St} \cdot (\gamma_{1n} - \gamma_{2n}) \times \\
 &\times \left[X_{n+4}^{(2)} \frac{8(\gamma_{1n+4} - \gamma_{2n+4})}{(n+4)[(n+4)^2 - n^2] \pi^2} + \dots \right] \cos \theta_n; \\
 \frac{1}{2} \leq z \leq 1, \quad (r=2,6,10,\dots). \tag{1.5.12}
 \end{aligned}$$

На рис. 6 изображены амплитудные функции второй моды при двух активных участках с противоположными направлениями вектора магнитной индукции при $\beta = 0,1$ и значении числа Стюарта, близком к максимальному при условии малой общей диссипации: $St = 1$. Наибольший фактор затухания при этом $\tilde{h}_2 = 0,455$.

Из рисунка видно, что даже при значении числа Стюарта, близком к максимально возможному при условии малой общей диссипации, функции $X_2^{(1)*}$ и $X_2^{(2)*}$ практически не отличаются от синусоидальных. А функции $X_2^{(1)**}$ и $X_2^{(2)**}$ даже для основного главного колебания не значительны, следовательно, ими всегда можно пренебречь.

Амплитудные функции колебаний струны с учетом электромагнитного воздействия в случае двух активных участков

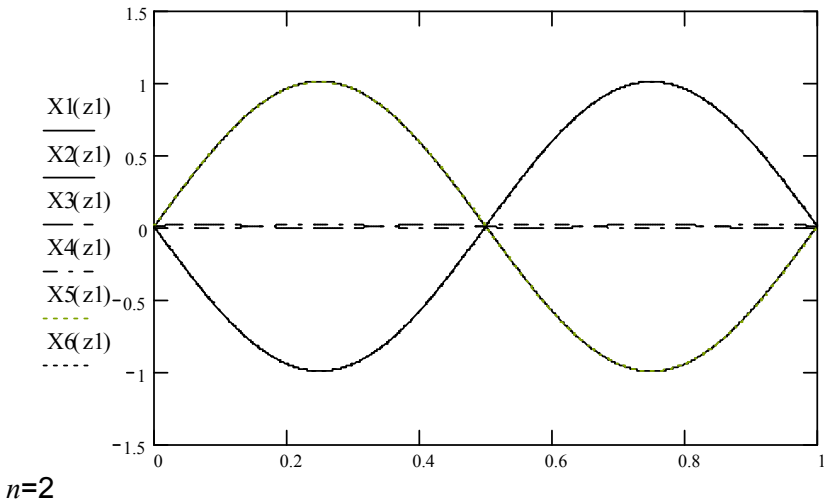


Рис. 6

При произвольном количестве активных участков N получим общие формулы для собственных амплитудных функций с учетом электромагнитного воздействия:

$$X_n^{(1)*} = X_n^{(1)} +$$

$$+ \mathbf{St} \cdot \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kn} \cdot \left[X_{n+1}^{(1)} \frac{8 \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{mn+1}}{(n+1)\pi^2 [(n+1)^2 - n^2]} + \dots \right] \sin \theta_n;$$

$$0 \leq z \leq z_2;$$

$$X_n^{(2)*} = X_n^{(2)} +$$

$$+ \mathbf{St} \cdot \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kn} \cdot \left[X_{n+1}^{(2)} \frac{8 \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{mn+1}}{(n+1)\pi^2 [(n+1)^2 - n^2]} + \dots \right] \sin \theta_n;$$

$$z_1 \leq z \leq z_3;$$

.....;

.....;

$$\begin{aligned}
X_n^{(N)*} &= X_n^{(N)} + \\
&+ \mathbf{St} \cdot \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kn} \cdot \left[X_{n+1}^{(N)} \frac{8 \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{mn+1}}{(n+1)\pi^2 [(n+1)^2 - n^2]} + \dots \right] \sin \theta_n; \\
&\qquad\qquad\qquad z_{N-1} \leq z \leq z_N;
\end{aligned}
\tag{1.5.13}$$

$$\begin{aligned}
X_n^{(1)**} &= \mathbf{St} \cdot \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kn} \cdot \left[X_{n+1}^{(1)} \frac{8 \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{mn+1}}{(n+1)\pi^2 [(n+1)^2 - n^2]} + \dots \right] \cos \theta_n; \\
&\qquad\qquad\qquad 0 \leq z \leq z_2; \\
X_n^{(2)**} &= \mathbf{St} \cdot \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kn} \cdot \left[X_{n+1}^{(2)} \frac{8 \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{mn+1}}{(n+1)\pi^2 [(n+1)^2 - n^2]} + \dots \right] \cos \theta_n; \\
&\qquad\qquad\qquad z_1 \leq z \leq z_3;
\end{aligned}$$

.....;

$$X_n^{(N)} ** = \mathbf{St} \cdot \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kn} \cdot \left[X_{n+1}^{(N)} \frac{8 \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{mn+1}}{(n+1)\pi^2 [(n+1)^2 - n^2]} + \dots \right] \cos \theta_n$$

$$z_{N-1} \leq z \leq z_N.$$

Эти формулы являются общими и их можно применять при любом количестве активных участков. Условия чередования знаков магнитной индукции на активных участках здесь не требуется.

Сформулируем выводы из результатов, полученных в настоящем параграфе:

- 1) амплитудные формы каждого главного колебания струны при электромагнитном воздействии выражаются двумя амплитудными функциями, смещенными относительно друг друга по фазе на $\frac{\pi}{2}$;
- 2) даже при максимальных значениях числа Стюарта одна из амплитудных функций близка к синусоидальной, а другая имеет масштаб малый по сравнению с первой.

1.6 Метод главных координат

Приближенный метод, примененный в предыдущем параграфе, указывает на возникновение в электромеханических системах двухволновых процессов. Этот вывод позволяет сделать предположение, что главным колебаниям соответствуют комплексные амплитудные формы, объединяющие обе амплитудные функции.

Запишем дифференциальное уравнение колебаний струны (1.1.4) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{St} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz = 0, \quad (1.6.1)$$

при классических граничных условиях:

$$u(0,t) = 0; \quad u(1,t) = 0; \tag{1.6.2}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{z=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{z=1} = 0.$$

Будем искать решение уравнения (1.6.1) в виде

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ q_{0n} \exp(-\tilde{h}_n t) \cdot [X_n^* \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) + X_n^{**} \sin(\omega_n t + \varepsilon_n)] \right\} = \tag{1.6.3}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tilde{X}_n q_{0n} \exp(-\tilde{h}_n t) \cdot \sin(\omega_n t + \tilde{\varepsilon}_n) \right]$$

где $\tilde{X}_n = \sqrt{X_n^{*2} + X_n^{**2}}$ - функции, представляющие собой модули комплексных амплитудных форм

$$X_n = X_n^* + iX_n^{**}, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Новые начальные фазы колебаний $\tilde{\varepsilon}_n$ являются постоянными и определяются для каждого n начальными условиями. Демпфированные частоты главных колебаний и факторы затухания связаны соотношением

$$\omega_n = \sqrt{n^2 - \tilde{h}_n^2}, \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{1.6.4}$$

Подставляем (1.6.3) в (1.6.1) и, сгруппировав члены с одинаковыми временными функциями, получим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(\tilde{h}_n^2 - \omega_n^2 - \beta \tilde{h}_n \right) \tilde{X}_n - \frac{1}{\pi^2} \frac{d^2 \tilde{X}_n}{dz^2} - \tilde{h}_n \cdot \mathbf{St} \cdot \int_{z_1}^{z_2} \tilde{X}_n dz \right] \times \right. \\ & \quad \left. \times q_{0n} \exp(-\tilde{h}_n t) \sin(\omega_n t + \tilde{\varepsilon}_n) \right\} = 0; \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(\beta - 2\tilde{h}_n \right) \tilde{X}_n + \mathbf{St} \cdot \int_{z_1}^{z_2} \tilde{X}_n dz \right] \omega_n q_{0n} \exp(-\tilde{h}_n t) \cos(\omega_n t + \tilde{\varepsilon}_n) \right\} = 0 \end{aligned} \right. \quad (1.6.5)$$

Первое из этих уравнений удовлетворяется, если для каждого n формы колебаний отвечают уравнениям

$$\frac{d^2 \tilde{X}_n}{dz^2} + \pi^2 \tilde{p}_n^2 \tilde{X}_n = -\mathbf{St} \cdot \tilde{h}_n \pi^2 \cdot \int_{z_1}^{z_2} \tilde{X}_n dz; \quad (1.6.6)$$

$$(n = 1, 2, \dots),$$

где использовано обозначение

$$\tilde{p}_n^2 = \omega_n^2 - \tilde{h}_n^2 + \beta \tilde{h}_n. \quad (1.6.7)$$

Значения \tilde{p}_n соответствуют волновым числам главных колебаний с учетом электромагнитного воздействия. Так как формы

в этом случае не являются чистыми синусоидами, числа \tilde{p}_n могут быть нецелыми.

Из уравнений (1.6.6) определяются собственные формы главных колебаний:

$$\tilde{X}_n = \sin(\pi\tilde{p}_n z + \delta_n) - \mathbf{St} \cdot \frac{\tilde{h}_n \tilde{\gamma}_n}{\tilde{p}_n^2}, \quad (n=1,2,\dots), \quad (1.6.8)$$

где $\tilde{\gamma}_n = \int_{z_1}^{z_2} \tilde{X}_n dz$, а δ_n - константы, подлежащие определению.

Однако, это решение нельзя считать явным, поскольку в $\tilde{\gamma}_n$ входит искомая функция \tilde{X}_n . Представим явное решение в виде

$$\tilde{X}_n = \sin(\pi\tilde{p}_n z + \delta_n) - b_n, \quad (n=1,2,\dots)$$

и поставив его в (1.6.6), определим постоянные b_n . С учетом этих значений явные выражения для амплитудных функций примут вид

$$\tilde{X}_n = \sin(\pi\tilde{p}_n z + \delta_n) - \mathbf{St} \cdot \frac{2\tilde{h}_n \gamma_n^*}{\pi\tilde{p}_n (\tilde{p}_n^2 + \mathbf{St} \cdot \tilde{h}_n \Delta z)}, \quad (1.6.9)$$

$$(n=1,2,\dots),$$

где

$$\gamma_n^* = \sin \left[\frac{\pi n (z_1 + z_2)}{2} + \delta_n \right] \cdot \sin \frac{\pi n (z_2 - z_1)}{2} = 0.$$

Таким образом, действительные амплитудные формы для каждого главного колебания струны с учетом электромагнитного воздействия складывается из гармонической координатной функции и некоторой постоянной величины.

Изолированность данного главного колебания от электромагнитного воздействия выражается условиями:

$$\gamma_n^* = 0, \quad \delta_n = 0, \quad \tilde{p}_n = n, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.6.10)$$

При выполнении соотношений (1.6.10) амплитудные формы являются синусоидальными, и имеет место, полученное в параграфе 1.2 условие:

$$\sin \frac{\pi n(z_1 + z_2)}{2} \cdot \sin \frac{\pi n(z_2 - z_1)}{2} = 0, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.6.11)$$

Из геометрических граничных условий следует, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \delta_n = \mathbf{St} \frac{2\tilde{h}_n \gamma_n^*}{\pi \tilde{p}_n (\tilde{p}_n^2 + \mathbf{St} \cdot \tilde{h}_n \Delta z)}; \\ \sin(\pi \tilde{p}_n + \delta_n) = \mathbf{St} \frac{2\tilde{h}_n \gamma_n^*}{\pi \tilde{p}_n (\tilde{p}_n^2 + \mathbf{St} \cdot \tilde{h}_n \Delta z)}; \end{array} \right. \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.6.12)$$

Отсюда получим уравнение в виде:

$$\sin(\pi \tilde{p}_n + \delta_n) = \sin \delta_n,$$

которому соответствуют два множества корней:

$$\begin{array}{l} 1) \quad \tilde{p}_n = 2k, \quad (k = 1, 2, \dots); \\ 2) \quad \tilde{p}_n = 2k - 1 - \frac{2\delta_n}{\pi}, \quad (k = 1, 2, \dots). \end{array} \quad (1.6.13)$$

Отсюда видно, что четные значения \tilde{p}_n являются всегда целочисленными, а нечетные, вообще говоря, целочисленными не являются. Только для изолированных колебаний нечетные \tilde{p}_n целочисленны, поскольку при этом $\delta_n = 0$.

Пользуясь решением (1.6.9) можно увидеть какие именно искажения вносит электромагнитное воздействие в формы главных колебаний. Покажем это на примере колебания основного тона, когда $n = 1$, $\tilde{p}_1 = 1 - \frac{2\delta_1}{\pi}$.

Трансформация первой амплитудной формы за счет электромагнитного воздействия

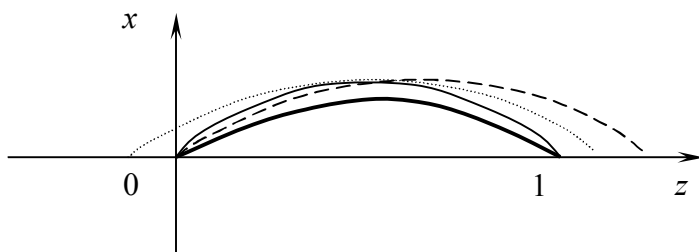


Рис. 7

На рис. 7 тонкой сплошной линией изображена соответствующая синусоида для волнового числа, равного единице. Однако, значение \tilde{p}_1 меньше единицы. Следовательно, длина такой стоячей волны больше длины струны (изображена пунктирной линией). За счет $\delta_1 > 0$ волна смещается влево (точечная линия). Постоянная величина, стоящая в решении со знаком «минус» смещает график вниз в соответствии с граничными условиями (сплошная жирная линия). Понятно, что подобный случай имеет место, если магнитное поле, например, действует по всей длине струны. Этот результат совпадает с выводами, полученными в параграфе 1.5.

Рассмотрим случай, когда $n = 2$, $\tilde{p}_n = 2$. Механизм трансформации амплитудной формы в этом случае изображен на рис. 8, где сплошной тонкой линией изображена недеформированная синусоидальная форма. Пунктиром показана форма, смещенная

за счет $\delta_2 \neq 0$. Сплошной жирной линией изображена окончательная форма, полученная перемещением пунктирной линии вниз вдоль оси x . Очевидно, такой случай имеет место, когда активный участок расположен в левой части струны.

Трансформация второй амплитудной формы

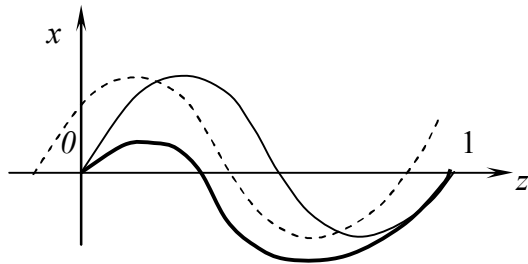


Рисунок 8

Используя равенства (1.6.4) и (1.6.7), можно показать, что при четных \tilde{p}_n и соответствующих им четных n все факторы затухания имеют одинаковые значения:

$$\tilde{h}_n = \frac{\beta}{2}, \quad (n = 2, 4, \dots),$$

но при этом возможны случаи: 1) $\delta_n \neq 0$, 2) $\delta_n = 0$.

В первом из них энергия электромагнитного воздействия трансформирует амплитудную форму, сдвигая ее вдоль оси z , но не влияет на диссипацию. Во втором случае образуется изолированная мода с синусоидальной амплитудной формой.

Чтобы определить неизвестные $\tilde{p}_n, \omega_n, \delta_n, \tilde{h}_n$, необходимо совместно рассмотреть систему четырех уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{p}_n^2 = \omega_n^2 - \tilde{h}_n^2 + \beta \tilde{h}_n; \\ n^2 = \omega_n^2 + \tilde{h}_n^2; \\ \tilde{p}_n = 2k - 1 - \frac{2\delta_n}{\pi}, \quad \tilde{p}_n = 2k, \quad (k = 1, 2, \dots); \\ \sin \delta_n = \mathbf{St} \frac{2\tilde{h}_n \gamma_n^*}{\pi \tilde{p}_n (\tilde{p}_n^2 + \mathbf{St} \cdot \tilde{h}_n \Delta z)}, \\ (n = 1, 2, \dots). \end{array} \right. \quad (1.6.14)$$

Убедимся в том, что этот метод действительно позволяет определить главные колебания. Применим к уравнению (1.6.1) процедуру Фурье с использованием полученных амплитудных функций (1.6.9):

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{X}_n q_n. \quad (1.6.15)$$

Подставив (1.6.15) в (1.6.1), с учетом (1.6.6) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\ddot{q}_n + \beta \dot{q}_n + n^2 q_n) \tilde{X}_n + \mathbf{St} \cdot \tilde{\gamma}_n (\dot{q}_n + \tilde{h}_n q_n) \right\} = 0. \quad (1.6.16)$$

Нетрудно показать, что из (1.6.16) при

$$q_n = q_{0n} \exp(-\tilde{h}_n t) \sin(\omega_n t + \tilde{\varepsilon}_n) \quad (1.6.17)$$

получается второе уравнение (1.6.5). Это подтверждает правильность наших рассуждений.

Таким образом, каждое главное колебание описывается функцией

$$u_n = \left[\sin(\tilde{p}_n \pi z + \delta_n) - \mathbf{St} \frac{2\tilde{h}_n \gamma_n^*}{\pi \tilde{p}_n (\tilde{p}_n^2 + \mathbf{St} \cdot \tilde{h}_n \Delta z)} \right] \times \quad (1.6.18)$$

$$\times q_{0n} \exp(-\tilde{h}_n t) \cdot \sin(\omega_n t + \tilde{\varepsilon}_n),$$

$$(n = 1, 2, \dots).$$

Второй член, стоящий в квадратных скобках, не зависит от z . Очевидно, это общая особенность решений интегро-дифференциальных в частных производных типа (1.6.1). То есть главные решения таких уравнений следует искать в виде суперпозиции членов, один из которых представляет собой произведение координатной и временной функций, а другой является чисто временным.

Число Стюарта снизу ограничено значением, при котором электромагнитное воздействие пренебрежимо мало, а сверху переходом в апериодические процессы.

Таким образом, предложенный метод позволяет записать выражения для главных колебаний системы с учетом искажений, вносимых электромагнитным воздействием. Однако при этом параметры колебательного процесса $\tilde{p}_n, \omega_n, \delta_n, \tilde{h}_n$ не удастся определить аналитически, так как они связаны сложной системой уравнений (1.6.14), решить которую можно лишь численно.

1.7 Нелинейные колебания струны

Обычно при исследовании колебаний струны используется предположение о постоянстве ее натяжения - гипотеза абсолютно

гибкой струны. Однако на самом деле ее натяжение изменяется за счет растяжения при поперечных колебаниях, и эта зависимость имеет вид:

$$T = T_0 + \frac{EA}{2l_0} \int_0^{l_0} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz ,$$

где l_0 - длина струны в недеформированном состоянии, E - модуль упругости материала струны.

Составим дифференциальное уравнение колебаний струны с учетом этой нелинейности:

$$m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left[T_0 + \frac{EA}{2l_0} \int_0^{l_0} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz \right] \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} .$$

Если применить обычную процедуру Фурье разложения функции смещений по простым гармоническим амплитудным функциям, приходим к системе нелинейных взаимозависимых дифференциальных уравнений типа

$$\ddot{q}_r + p_r^2 q_r + \frac{EA\pi^4 r^2}{4m_0 l_0^4} q_r \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q_n^2 = 0 , \quad (r=1,2,\dots). \quad (1.7.1)$$

Нелинейный член в этом случае содержит все обобщенные координаты, следовательно, для нелинейных колебаний введенные обобщенные координаты q_r не являются главными.

Если на струну действует магнитное поле в случае нескольких активных участков, то в безразмерном виде получим систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + r^2 q_r + \frac{E\pi^4 r^2}{4} q_r \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q_n^2 +$$

(1.7.2)

$$+ \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2 r} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\dot{q}_n}{n} \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{mn} \right) = 0,$$

$$(r = 1, 2, \dots).$$

Рассмотрим задачу в одномодовом приближении, для которого достаточно рассмотреть одно уравнение типа Дюффинга:

$$\ddot{q}_1 + \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{k1} \cdot \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{m1} \right) \dot{q}_1 + q_1 + \frac{E\pi^4}{4} q_1^3 = 0$$

(1.7.3)

Заметим, что обычно нелинейность в колебательных системах струнного типа проявляется довольно заметно, поэтому данная постановка задачи является более адекватной, чем линейная. Из дифференциального уравнения (1.7.3) видно, что возникшая в этом случае нелинейность системы не влияет на условия отсутствия электромагнитного демпфирования собственных колебаний.

Чтобы выяснить влияние числа Стюарта на амплитуду и частоту нелинейных колебаний, получим приближенное одномодовое решение в случае, когда имеется один активный участок, занимающий всю длину струны. В этом случае получим слабо нелинейное, неконсервативное уравнение Дюффинга [135]:

$$\ddot{q}_1 + 2\tilde{h}_1 \dot{q}_1 + q_1 + \tilde{\mu} q_1^3 = 0, \quad (1.7.4)$$

где введены обозначения

$$2\tilde{h}_1 = \beta + \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2}, \quad \tilde{\mu} = \frac{E\pi^4}{4}.$$

Воспользуемся методом медленно изменяющихся амплитуд [122]. В нулевом приближении, пренебрегая диссипацией ($\tilde{h}_1 = 0$), в пределах первого периода колебаний решение уравнения (1.7.4) допустимо записать в виде

$$q_1 = a_0 \sin \omega_1 t, \quad (1.7.5)$$

где a_0 - постоянная величина.

Применив, любой из известных методов анализа собственных колебаний консервативных систем со слабой нелинейностью [118, 119, 122], получим амплитудно-частотную зависимость:

$$\omega_1^2 = 1 - \frac{a_0^2}{8}. \quad (1.7.6)$$

Воспользуемся идеей энергетического баланса, вычислив и приравняв между собой работу диссипативных сил за период и изменение максимального значения кинетической энергии за то же время. Запишем в безразмерном виде выражение для действующей на струну суммарной силы механического и магнитного сопротивления

$$F_{C(1)} = 2\tilde{h} m_0 \dot{q}_1 \int_0^1 X_1 dz = \frac{4\tilde{h}_1 m_0}{\pi} \dot{q}_1.$$

За период $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ эта сила с учетом (1.7.5) совершит работу

$$W_{(1)} = -2 \int_0^{T/2} \frac{4\tilde{h}_1 m_0}{\pi} \dot{q}_1^2 dt = -4\tilde{h}_1 m_0 a_0^2 \omega_1. \quad (1.7.7)$$

Вычислим кинетическую энергию колебаний струны

$$E_{(1)} = \frac{1}{2} m_0 \dot{q}_1^2 \int_0^1 X_1^2 dz = \frac{1}{4} m_0 \pi \dot{q}_1^2 .$$

Ее максимальное значение с учетом (1.7.5)

$$E_{(1)\max} = \frac{1}{4} a_0^2 \omega^2 m_0 \pi .$$

За период максимальное значение кинетической энергии изменяется на величину

$$\Delta E_{(1)\max} = \frac{1}{2} \omega_1^2 m_0 \pi a_0 \Delta a_0 .$$

В соответствие с основной идеей метода приравняем работу сил сопротивления за период к изменению энергии системы за это же время:

$$W_{(1)} = \Delta E_{(1)\max} , \quad \frac{\Delta a_0}{a_0} = - \frac{8 \tilde{h}_1}{\omega_1 \pi} ,$$

или

$$\frac{\Delta a_0}{a_0} = - \frac{4 \tilde{h}_1}{\pi^2} T_1 .$$

Переходя к дифференциальной форме записи, получим

$$\frac{da_0}{a_0} = - \frac{4 \tilde{h}_1}{\pi^2} dt .$$

Проинтегрировав это уравнение в пределах периода, обозначив через A_0 амплитуду в начале периода, получим амплитуду в конце первого периода

$$a_0^{(1)} = A_0 \exp\left(-\frac{4\tilde{h}_1}{\pi^2} T_1\right).$$

Продлав эту процедуру для всех последующих периодов, получим приближенную аналитическую зависимость амплитуды колебаний от времени:

$$a_0 = A_0 \exp\left(-\frac{4\tilde{h}_1}{\pi^2} t\right). \quad (1.7.8)$$

Тогда с учетом амплитудно-частотной зависимости (1.7.6) приближенное аналитическое решение нелинейного уравнения (1.7.4) запишем в виде

$$q_1 = A_0 \exp\left(-\frac{4\tilde{h}_1}{\pi^2} t\right) \sin\left\{\left[1 - \frac{1}{8} A_0^2 \exp\left(-\frac{8\tilde{h}_1}{\pi^2} t\right)\right]^{\frac{1}{2}} t\right\}. \quad (1.7.9)$$

Понятно, что увеличение фактора затухания за счет числа Стюарта, приводит к ускорению диссипации энергии колебаний данного тона. Кроме того, число Стюарта через фактор затухания влияет на частоту нелинейных колебаний.

2 Собственные колебания электропроводного стержня в однородном ста- ционарном магнитном поле

2.1 Поперечные колебания однородного призматического стержня

Рассмотрим линейные поперечные (изгибные) колебания од-
нородного стержня, изготовленного из электропроводного немаг-
нитного материала, при однородных классических граничных ус-
ловиях [69,71]. Под классическими понимаются краевые условия,
при которых собственные амплитудные функции выражаются
функциями А. Н. Крылова [118-119]:

$$X_n(z) = C_1 K_1(\alpha_n z) + C_2 K_2(\alpha_n z) + C_3 K_3(\alpha_n z) + C_4 K_4(\alpha_n z),$$
$$(n = 1, 2, \dots), \quad (2.1.1)$$

где C_1, \dots, C_4 - произвольные константы, $\alpha_n^4 = \frac{p_n^2 m_0}{EJ}$ - коэффи-
циент, p_n - частоты собственных незатухающих колебаний, m_0 -
погонная масса, EJ - изгибная жёсткость стержня.

Как и в случае со струной, полагаем, что концы стержня
замкнуты идеальной электрической цепью, а на участке $\Delta z =$
 $z_2 - z_1$, действует однородное стационарное магнитное поле,
причем вектор \vec{B} направлен перпендикулярно плоскости колеба-
ний стержня.

При составлении дифференциального уравнения колебаний
стержня учтем внешний и внутренний факторы демпфирования.
Как и для струны считаем внешнее сопротивление вязким, т. е.
воспользуемся формулой (1.1.1). Учет внутренней диссипации в
системах с распределенными параметрами является весьма слож-
ной проблемой. Существует несколько гипотез [118, 122], приме-
няемых в зависимости от свойств материала стержня. Восполь-

зуюмся [122] зависимостью, обычно применяемой для металлических сред:

$$dF_C^* = \beta^* EJ \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} dz, \quad (2.1.2)$$

где демпфирующий коэффициент β^* зависит от свойств материала стержня. Магнитоупругий эффект не учитывается, поэтому β^* не является функцией магнитной индукции. Важным является вопрос о зависимости β^* от частоты. Если β^* зависит от частоты, то для систем с распределенными параметрами следует использовать только главные координаты [122]. Как следует из предыдущих параграфов, введение магнитной силы не позволяет найти главные координаты при помощи процедуры Фурье. Ограничимся случаем, когда β^* не зависит от частоты.

С учетом сказанного изгибные колебания стержня описываются дифференциальным уравнением:

$$EJ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \beta^* \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} \right) + m_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\sigma B^2 A}{l} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz = 0.$$

Следует заметить, что это уравнение справедливо лишь для длинных балок, когда длина волны деформации значительно больше размеров поперечного сечения балки, т.е. для малых частот [122].

Как отмечено выше, рассматриваем только случаи однородных граничных условий или приводимые к ним. При этом собственные амплитудные функции (2.1.1) обладают свойством ортогональности, что позволяет применить метод Фурье и свести уравнение в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \frac{Q_r}{m^* r}, \quad \{r = 1, 2, \dots\}, \quad (2.1.3)$$

где $m^*_r = \int_0^l m_0 X_r^2 dz$ - обобщенные массы, $Q_r = \int_{z_1}^{z_2} X_r dF_M$ -

обобщенные магнитные силы, отнесенные к соответствующим обобщенным координатам.

Представим введенные обозначения в виде:

$$m_r^* = m_0 \int_0^l X_r^2 dz = m_0 Y_r^*, \text{ где } Y_r^* = \int_0^l X_r^2 dz,$$

$$Q_r = -\frac{\sigma B^2 A}{l} \int_{z_1}^{z_2} X_r dz \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dot{q}_n \int_{z_1}^{z_2} X_n dz \right) = -\frac{\sigma B^2 A \gamma_r}{l \alpha_r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dot{q}_n \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \right),$$

где $\gamma_n = \alpha_n \int_{z_1}^{z_2} X_n dz$, $\gamma_r = \alpha_r \int_{z_1}^{z_2} X_r dz$.

Таблица значений интеграла Y_r^* при различных граничных условиях приведена в [119].

В соответствии с введенными обозначениями запишем (2.1.3) в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{St} \frac{\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \dot{q}_n, \quad (2.1.4)$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}.$$

Из (2.1.4) видно, что введенные обобщенные координаты не являются главными, поскольку дифференциальные уравнения зависимы между собой. Однако эта зависимость является линейной и легко устраняется при помощи метода последовательных приближений. Основанием для применения этого метода, как и в случае со струной, служит слабая взаимосвязь между парциальными

колебаниями посредством электромагнитного взаимодействия. Таким образом, систему уравнений (2.1.4) можно заменить системой расщепленных уравнений, интегрируемых последовательно:

$$\left. \begin{aligned}
 & \ddot{q}_1 + \left(\beta + \beta^* 1^2 + \mathbf{St} \frac{\gamma_1^2}{\alpha_1^2 Y_1^*} \right) \dot{q}_1 + 1^2 q_1 = 0; \\
 & \ddot{q}_2 + \left(\beta + \beta^* 2^2 + \mathbf{St} \frac{\gamma_2^2}{\alpha_2^2 Y_2^*} \right) \dot{q}_2 + 2^2 q_2 = -\mathbf{St} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\alpha_1 \alpha_2 Y_2^*} \dot{q}_1; \\
 & \dots\dots\dots; \\
 & \ddot{q}_r + \left(\beta + \beta^* r^2 + \mathbf{St} \frac{\gamma_r^2}{\alpha_r^2 Y_r^*} \right) \dot{q}_r + r^2 q_r = \\
 & \qquad \qquad \qquad = -\mathbf{St} \frac{\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1} \dot{q}_1 + \dots\dots\dots \frac{\gamma_{r-1}}{\alpha_{r-1}} \dot{q}_{r-1} \right); \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} \tag{2.1.5}$$

Так как применяемая теория справедлива только для малых частот, эту систему уравнений следует усечь, оставив конечное число уравнений.

Как и в случае со струной, начальные условия следует представить в виде ряда по собственным амплитудным функциям. Коэффициенты этого ряда определяют начальные условия для каждого из дифференциальных уравнений системы (2.1.5).

В результате последовательного интегрирования этих уравнений получим рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned}
q_r &= q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) + \\
&+ \mathbf{St} \frac{\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\gamma_k k^2}{\alpha_k \Omega_{rk}} q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_r + \theta_k), \\
&\quad (r = 1, 2, \dots), \tag{2.1.6}
\end{aligned}$$

где использованы обозначения:

$$\Omega_{rk} = \sqrt{(r^2 - k^2)^2 + 4\tilde{h}_k(\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)(r^2 - k^2) + 4 \cdot k^2(\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)^2},$$

$$\tilde{h}_r = \frac{1}{2} \left(\beta + \beta^* r^2 + \mathbf{St} \frac{\gamma_r^2}{\alpha_r^2 Y_r^*} \right),$$

$$\tilde{h}_k = \frac{1}{2} \left(\beta + \beta^* k^2 + \mathbf{St} \frac{\gamma_k^2}{\alpha_k^2 Y_k^*} \right),$$

$$\omega_r = \sqrt{r^2 - \tilde{h}_r^2} \quad (r = 1, 2, \dots);$$

$$\omega_k = \sqrt{k^2 - \tilde{h}_k^2}; \quad (k = 1, 2, \dots, r-1).$$

Из уравнений (2.1.5) и их решений (2.1.6) видно, что электромагнитное воздействие на парциальные колебания отсутствует при

$$\gamma_r = 0, \text{ т. е. } \int_{z_1}^{z_2} X_r dz = 0, \quad (r = 1, 2, \dots), \tag{2.1.7}$$

следовательно, оно является избирательным по отношению к парциальным колебаниям, соответствующим различным r , а соотношения (2.1.7) являются условиями выделения изолированных мод. Из анализа полученных решений также следует вывод о перерас-

пределении энергии от низших мод ко всем высшим, для которых не выполняются условия (2.1.7).

При условии малой общей диссипации решения (2.1.6) можно записать приближенно:

$$q_r = q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) +$$

$$+ \mathbf{St} \frac{\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\gamma_k k^2}{\alpha_k (r^2 - k^2)} q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_r + \theta_k),$$

$$(r = 1, 2, \dots).$$

Если же факторы затухания становятся существенно меньше единицы, начиная с номера \tilde{n} , то решение следует записать в виде:

$$q_r = q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) +$$

$$+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{k=1}^{\tilde{n}-1} \frac{\gamma_k k^2 q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_k + \theta_k)}{\alpha_k \Omega_{rk}} +$$

$$+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{k=\tilde{n}}^{r-1} \frac{\gamma_k k^2 q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_k + \theta_k)}{\alpha_k (r^2 - k^2)},$$

$$(r = 1, 2, \dots). \quad (1.2.19)$$

Из соображений, аналогичных приведенным в параграфе 1.2, устанавливаем пределы значений числа Стюарта:

$$\frac{(\beta + \beta^* r^2) \alpha_r^2 Y_r^*}{10\gamma_r^2} < \mathbf{St} < \frac{\alpha_r^2 Y_r^*}{\gamma_r^2} (2r - \beta^* r^2 - \beta), \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Отсюда следует, что правая часть этого неравенства при возрастании r проходит через максимум при $r = r_{\max}$ и затем убывает. Если выбрать **St** больше, чем правая часть неравенства при $r = r_{\max}$, то первые члены в решениях (2.1.6) для всех неизолированных колебаний затухают аperiодически. При любом выборе числа **St** существует ограниченное число движений, первые члены которых в (2.1.6) периодические. Например, если выбрать число Стюарта, близким к предельному по одномодовому приближению:

$$\mathbf{St} \approx \frac{\alpha_1^2 Y_1^*}{\gamma_1^2} (2 - \beta^* - \beta),$$

то при всех r , отвечающих условию

$$\frac{\alpha_1^2 Y_1^*}{\gamma_1^2} (2 - \beta^* - \beta) > \frac{\alpha_r^2 Y_r^*}{\gamma_r^2} (2r - \beta^* r^2 - \beta),$$

первые члены в решениях (2.1.6) выражаются аperiодическими функциями.

Рассмотрим несколько частных случаев при конкретных концевых условиях. Для двухопорной балки (рис.9а), как и для струны

$$X_r = \sin \frac{r\pi z}{l}, \quad X_n = \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad (n = r = 1, 2, \dots),$$

поэтому γ_r имеет такой же вид, как и в параграфе 1.2:

$$\gamma_r = \sin \frac{r\pi(z_1 + z_2)}{2l} \sin \frac{r\pi(z_2 - z_1)}{2l}$$

и все выводы, сделанные для струны, относятся и к этому случаю [71].

Схемы поперечных колебаний призматических стержней

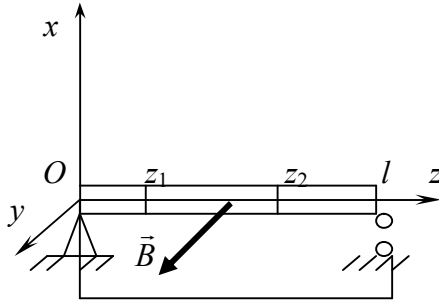


Рис. 9а

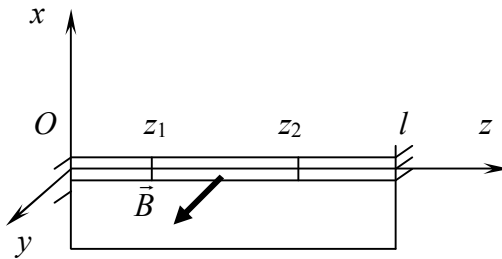


Рис. 9б

Пусть оба конца стержня жестко закреплены (рис. 9б), а магнитное поле действует по всей его длине [74]. Из граничных условий:

$$X_r(0) = 0; \quad X_r'(0) = 0;$$

$$X_r(l) = 0; \quad X_r'(l) = 0;$$

(здесь штрихи означают производные по z) получим:

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = -\frac{K_4(\lambda_r)}{K_3(\lambda_r)}; \quad C_4 = 1,$$

где $\lambda_r = \alpha_r l$.

Из условия (2.1.7) получим уравнение частот изолированных мод в функциях А. Н. Крылова.

$$K_4^2(\lambda_r) - K_1(\lambda_r)K_3(\lambda_r) + K_3(\lambda_r) = 0, \quad (r = 1, 2, \dots), \quad (2.1.8)$$

или в другой форме

$$\operatorname{sh} \lambda_r \sin \lambda_r - \operatorname{ch} \lambda_r + \cos \lambda_r = 0, \quad (r = 1, 2, \dots), \quad (2.1.9).$$

Уравнение собственных частот для балки с защемленными концами имеет вид [118]:

$$\cos \lambda_r = \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_r}, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (2.1.10)$$

Его корнями являются: $\lambda_1 = 4,73$, $\lambda_2 = 7,85, \dots$ Начиная с $r = 2$, его корни можно вычислить по формуле

$$\lambda_r = \frac{2r-1}{2} \pi.$$

Для определения группы собственных частот, не подвергающихся магнитному демпфированию, рассмотрим совместно уравнения (2.1.9) и (2.1.10), вводя вместо r индекс k . Получим:

$$\operatorname{sh} \lambda_k (\sin \lambda_k - \operatorname{th} \lambda_k) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Так как $\operatorname{sh} \lambda_k = 0$ только при $\lambda_k = 0$, то берем уравнение

$$\sin \lambda_k = \operatorname{th} \lambda_k, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.1.11)$$

Графическое решение уравнения (2.1.11)

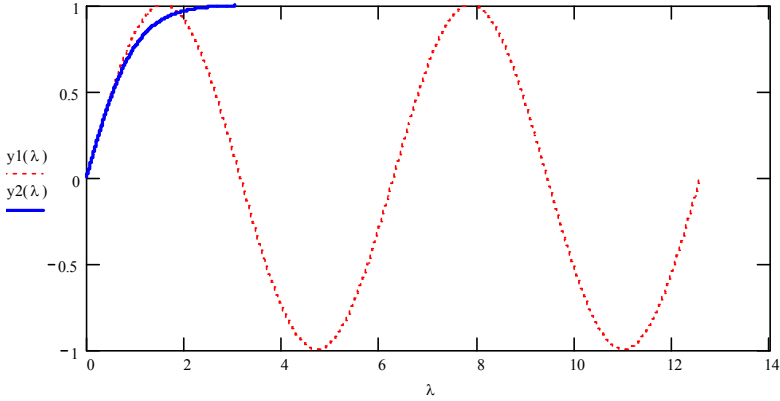


Рис. 10

Графическое решение этого уравнения представлено на рис. 10, откуда видно, что, начиная со второго ненулевого корня, решение уравнения (2.1.11) совпадает с решениями уравнения (2.1.10) при четных значениях r . Следовательно, магнитное демпфирование испытывают лишь собственные колебания при нечетных r .

Рассмотрим колебания проводящего консольного стержня в магнитном поле при $\Delta z = l$ [71] (рис. 10). Из граничных условий

$$\begin{aligned} X_r(0) &= 0; & X'_r(0) &= 0; \\ X''_r(l) &= 0; & X'''_r(l) &= 0, \end{aligned}$$

получим:

$$C_1=0; \quad C_2=0; \quad C_3 = \frac{K_2(\lambda_r)}{K_1(\lambda_r)}; \quad C_4=1.$$

Условие (2.1.7) в этом случае приводит к уравнению:

$$K_2(\lambda_r)K_4(\lambda_r) - K_1^2(\lambda_r) + K_1(\lambda_r) = 0, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (2.1.12)$$

Схема колебаний консольного призматического стержня

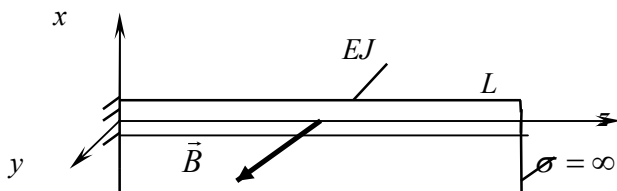


Рис. 11

Уравнение собственных частот в данном случае записывается в виде:

$$K_2(\lambda_r)K_4(\lambda_r) - K_1^2(\lambda_r) = 0, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (2.1.13)$$

Решая (2.1.12) и (2.1.13) совместно, получим:

$$K_1(\lambda_r) = 0.$$

Это уравнение ненулевых корней не имеет, следовательно, в этом случае все собственные колебания испытывают магнитное демпфирование, изолированных мод нет.

Из рассмотренных случаев можно сделать общий вывод: если однородное стационарное магнитное поле действует по всей длине стержня, то изолированные моды существуют только при симметричных концевых условиях.

Все выводы, кроме третьего, приведенные в предыдущем параграфе, справедливы и для стержней. Условия же отсутствия электромагнитного воздействия здесь формулируются сложнее,

чем для струны, так как граничные условия для стержней более многообразны, а амплитудные функции более сложны.

2.2 Случай нескольких активных участков

Переходим к рассмотрению поперечных колебаний проводящего стержня в магнитном поле при наличии нескольких активных участков. Используем систему дифференциальных уравнений в виде

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \frac{Q_r}{m_r^*}, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (2.2.1)$$

Как и в 2.1 значения обобщенных масс

$$m_r^* = m_0 Y_r^*, \quad \text{где } Y_r^* = \int_0^l X_r^2 dz.$$

Вычислим обобщенные силы

$$\begin{aligned} Q_r &= - \int_0^l X_r dF_M = - \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} X_r dF_{(M)r} = \\ &= - \frac{\sigma A}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \dot{q}_n \sum_{m,k=1}^N \left(B_m B_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} X_r dz \int_{z_m}^{z_{m+1}} X_n dz \right) \right\}. \end{aligned}$$

Обозначив

$$\gamma_{kr} = \alpha_r \int_{z_k}^{z_{k+1}} X_r dz, \quad \gamma_{mn} = \alpha_n \int_{z_m}^{z_{m+1}} X_n dz,$$

$$\alpha_r^4 = \frac{p_r^2 m_0}{EJ}, \quad \alpha_n^4 = \frac{p_n^2 m_0}{EJ},$$

имеем

$$Q_r = -\frac{\sigma A}{l\alpha_r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\dot{q}_n}{\alpha_n} \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{kr} \gamma_{mn} \right).$$

В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r =$$

$$-\frac{\sigma A}{\rho l \alpha_r Y_r^*} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\dot{q}_n}{\alpha_n} \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{kr} \gamma_{mn} \right),$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}.$$

В безразмерном виде

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r =$$

$$-\frac{\mathbf{St}}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\dot{q}_n}{\alpha_n} \sum_{m,k=1}^N B_m \gamma_{mn} \right), \quad (2.2.3)$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}.$$

Из уравнений (2.2.3) вытекают условия отсутствия электромагнитного воздействия для каждого парциального колебания, совпадающие по форме с (1.4.9), но при других обозначениях γ_{kr} , γ_{mn} .

Применим условия (1.3.9) для консольного стержня при двух

активных участках, если в безразмерном виде $z_1=0$, $z_3=1$, $B_1=1$, $B_2=-1$. Определим координату z_2 , разделяющую активные участки, в случае, когда отсутствует электромагнитное демпфирование первой моды.

Для консольного стержня [104]

$$X_1(z) = -\frac{K_2(\lambda_1)}{K_1(\lambda_1)} K_3(\alpha_1 z) + K_4(\alpha_1 z),$$

где $\lambda_1 = \alpha_1 l$, в безразмерном виде $\lambda_1 = \alpha_1$. Тогда

$$\gamma_{11} = -\frac{K_2(\lambda_1)}{K_1(\lambda_1)} \int_0^{z_2} K_3(\alpha_1 z) d(\alpha_1 z) + \int_0^{z_2} K_4(\alpha_1 z) d(\alpha_1 z) =$$

(2.2.4)

$$-\frac{K_2(\lambda_1)}{K_1(\lambda_1)} K_4(\alpha_1 z_2) + K_1(\alpha_1 z_2) - 1,$$

$$\gamma_{21} = -\frac{K_2(\lambda_1)}{K_1(\lambda_1)} \int_{z_2}^1 K_3(\alpha_1 z) d(\alpha_1 z) + \int_{z_2}^1 K_4(\alpha_1 z) d(\alpha_1 z) =$$

(2.2.5)

$$= -\frac{K_2(\lambda_1)K_4(\lambda_1)}{K_1(\lambda_1)} + \frac{K_2(\lambda_1)}{K_1(\lambda_1)} K_4(\alpha_1 z_2) + K_1(\lambda_1) - K_1(\alpha_1 z_2).$$

Графическое решение уравнения (2.2.6)

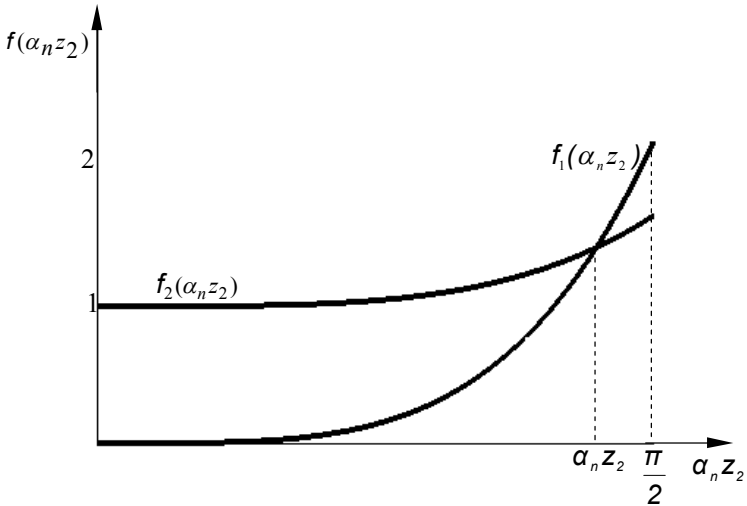


Рис. 12

Если при записи γ_{21} учесть уравнение собственных частот консольного стержня [118]:

$$K_1^2(\lambda_1) - K_2(\lambda_1)K_4(\lambda_1) = 0,$$

то получим

$$\gamma_{21} = \frac{K_2(\lambda_1)K_4(\lambda_1)}{K_1(\lambda_1)} - K_1(\alpha_1 z_2).$$

Условие (1.3.9) в этом случае запишется просто:

$$\gamma_{1n} - \gamma_{2n} = 0,$$

а с учетом выражений для γ_{1n} и γ_{2n} получим уравнение

$$2 \frac{K_2(\lambda_1)}{K_1(\lambda_1)} K_4(\alpha_1 z_2) = 2K_1(\alpha_1 z_2) - 1. \quad (2.2.6)$$

Уравнение (2.2.6) можно решить графически, обозначив через $f_1(\alpha_1 z_2)$, $f_2(\alpha_1 z_2)$ левую и правую его части соответственно, и определить значение z_2 , при котором отсутствует магнитное демпфирование основного тона колебаний (рис. 12).

При построении графика следует учесть, что для основного тона значение аргумента находится в пределах первой четверти тригонометрического круга. Из графика видно, что уравнение (2.2.6) имеет единственное значение: $\alpha_1 z_2 = 1,46$.

Итак, в настоящем параграфе получены общие условия отсутствия электромагнитного воздействия на собственные колебания проводящего стержня в стационарном магнитном поле при любом количестве активных участков.

2.3 Собственные формы колебаний стержня

Рассмотрим вопрос о влиянии внешнего магнитного поля на собственные формы поперечных колебаний однородного проводящего стержня [72]. Воспользуемся уравнениями (2.2.3), которые запишем в расщепленном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \ddot{q}_1 + \left(\beta + \beta^* + \frac{\mathbf{St}}{\alpha_1 Y_1^*} \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{k1} \gamma_{m1} \right) \dot{q}_1 + q_1 = 0; \\
 \ddot{q}_2 + \left(\beta + \beta^* p_2^2 + \frac{\mathbf{St}}{\alpha_2 Y_2^*} \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{k2} \gamma_{m2} \right) \dot{q}_2 + p_2^2 q_2 = \\
 = -\dot{q}_1 \frac{\mathbf{St}}{\alpha_2 Y_2^*} \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{k1} \gamma_{m1}; \\
 \dots; \\
 \ddot{q}_r + \left(\beta + \beta^* p_r^2 + \frac{\mathbf{St}}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{kr} \gamma_{mr} \right) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \\
 = -\frac{\mathbf{St}}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{n=1}^{r-1} \left(\dot{q}_n \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{kr} \gamma_{mn} \right); \\
 \dots
 \end{array} \right.$$

(2.3.1)

Эти уравнения следует рассматривать совместно с расщепленными начальными условиями.

Запишем общее решение первого уравнения и частные решения всех последующих уравнений с частотой ω_1 :

$$q_1 = q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1);$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{St} \frac{\sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{m1} \gamma_{k1}}{\alpha_2 Y_2^* (p_2^2 - 1)} q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1); \\
& \mathbf{St} \frac{\sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{m1} \gamma_{k1}}{\alpha_3 Y_3^* (p_3^2 - 1)} q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1); \\
& \dots \dots \dots (2.3.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{St} \frac{\sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{m1} \gamma_{k1}}{\alpha_r Y_r^* (p_r^2 - 1)} q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1); \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{h}_1 = \frac{1}{2} \left(\beta + \beta^* + \frac{\mathbf{St}}{\alpha_1 Y_1^*} \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{m1} \gamma_{k1} \right);$$

$$\omega_1 = \sqrt{1 - \tilde{h}_1}.$$

Отсюда получим выражения для амплитудных функций первой моды на каждом активном участке с учетом электромагнитного воздействия:

$$X_1^{(1)*} = X_1^{(1)} +$$

$$+ \mathbf{St} \left[X_2^{(1)} \frac{\sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{m1} \gamma_{k1}}{\alpha_2 Y_2^* (p_2^2 - 1)} + X_3^{(1)} \frac{\sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{m1} \gamma_{k1}}{\alpha_3 Y_3^* (p_3^2 - 1)} + \dots \right] \sin \theta_1;$$

$$X_1^{(2)*} = X_1^{(2)} +$$

$$+ \mathbf{St} \left[X_2^{(2)} \frac{\sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{m1} \gamma_{k1}}{\alpha_2 Y_2^* (p_2^2 - 1)} + X_3^{(2)} \frac{\sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{m1} \gamma_{k1}}{\alpha_3 Y_3^* (p_3^2 - 1)} + \dots \right] \sin \theta_1;$$

.....; (2.3.3)

$$X_1^{(N)*} = X_1^{(N)} +$$

$$+ \mathbf{St} \left[X_2^{(N)} \frac{\sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{m1} \gamma_{k1}}{\alpha_2 Y_2^* (p_2^2 - 1)} + X_3^{(N)} \frac{\sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{m1} \gamma_{k1}}{\alpha_3 Y_3^* (p_3^2 - 1)} + \dots \right] \sin \theta_1;$$

$$\begin{aligned}
X_1^{(1)**} &= \text{St} \left[X_2^{(1)} \frac{\sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{m1} \gamma_{k1}}{\alpha_2 Y_2 * (p_2^2 - 1)} + X_3^{(1)} \frac{\sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{m1} \gamma_{k1}}{\alpha_3 Y_3 * (p_3^2 - 1)} + \dots \right] \cos \theta_1; \\
X_1^{(2)**} &= \text{St} \left[X_2^{(2)} \frac{\sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{m1} \gamma_{k1}}{\alpha_2 Y_2 * (p_2^2 - 1)} + X_3^{(2)} \frac{\sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{m1} \gamma_{k1}}{\alpha_3 Y_3 * (p_3^2 - 1)} + \dots \right] \cos \theta_1; \\
&\dots\dots\dots; \quad (2.3.4)
\end{aligned}$$

$$X_1^{(N)**} = \text{St} \left[X_2^{(N)} \frac{\sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{m1} \gamma_{k1}}{\alpha_2 Y_2 * (p_2^2 - 1)} + X_3^{(N)} \frac{\sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{m1} \gamma_{k1}}{\alpha_3 Y_3 * (p_3^2 - 1)} + \dots \right] \cos \theta_1.$$

Функции $X_1^{(1)}; X_1^{(2)}; \dots; X_1^{(N)}$ записываются здесь в функциях А.Н. Крылова, а входящие в них константы определяются из условий стыковки на границах активных участков.

Собственные амплитудные формы для произвольной моды вычисляются по формулам:

$$X_n^{(1)*} = X_n^{(1)} + \mathbf{St} \left[X_{n+1}^{(1)} \frac{p_n \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{mn} \gamma_{kn}}{\alpha_{n+1} Y_{n+1} * (p_{n+1}^2 - p_n^2)} + \dots \right] \sin \theta_n; \quad 0 \leq z \leq z_2;$$

$$X_n^{(2)*} = X_n^{(2)} + \mathbf{St} \left[X_{n+1}^{(2)} \frac{p_n \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{mn} \gamma_{kn}}{\alpha_{n+1} Y_{n+1} * (p_{n+1}^2 - p_n^2)} + \dots \right] \sin \theta_n; \quad z_2 \leq z \leq z_3;$$

.....; (2.3.5)

$$X_n^{(N)*} = X_n^{(N)} + \mathbf{St} \left[X_{n+1}^{(N)} \frac{p_n \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{mn} \gamma_{kn}}{\alpha_{n+1} Y_{n+1} * (p_{n+1}^2 - p_n^2)} + \dots \right] \sin \theta_n;$$

$$z_N \leq z \leq z_{N+1}.$$

$$X_n^{(1)**} = \mathbf{St} \left[X_{n+1}^{(1)} \frac{p_n \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{mn} \gamma_{kn}}{\alpha_{n+1} Y_{n+1} * (p_{n+1}^2 - p_n^2)} + \dots \right] \cos \theta_n; \quad 0 \leq z \leq z_2;$$

$$X_n^{(2)**} = \mathbf{St} \left[X_{n+1}^{(2)} \frac{p_n \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{mn} \gamma_{kn}}{\alpha_{n+1} Y_{n+1} * (p_{n+1}^2 - p_n^2)} + \dots \right] \cos \theta_n; \quad z_2 \leq z \leq z_3;$$

.....; (2.3.6)

$$X_n^{(N)**} = \mathbf{St} \left[X_{n+1}^{(N)} \frac{p_n \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{mn} \gamma_{kn}}{\alpha_{n+1} Y_{n+1} * (p_{n+1}^2 - p_n^2)} + \dots \right] \cos \theta_n; \quad z_N \leq z \leq z_{N+1}.$$

Выводы, сделанные в параграфе 1.4 для струны, справедливы и для стержня.

3 Вынужденные колебания одномерных проводящих систем в однородном стационарном магнитном поле

3.1 Линейная задача об электромагнитном возбуждении колебаний струны

В предыдущих главах показано, что собственные колебания проводящих систем демпфируются магнитным полем. Пропуская электрический ток по системе, находящейся в магнитном поле, наоборот, можно возбудить колебания. Этот принцип давно используется, например, для преобразования электрических сигналов в звуковые. Однако при таком воспроизводстве звука некоторые обертоны всегда теряются, поэтому в современной радиоаппаратуре для ослабления этого дефекта электрический сигнал разлагается на несколько групп, которые преобразуются в звук различными динамиками. Имеются и другие искажения в воспроизводстве звуковых сигналов.

Выясним особенности электромагнитного возбуждения колебаний в проводящих континуальных системах на примере струны [68, 74, 78].

Пусть в идеальную внешнюю электрическую цепь, замыкающую концы струны, включен генератор электрических сигналов с малым внутренним сопротивлением. Тогда, кроме индуцированных токов, определенных по формуле (1.1.2), в струне создается переменный ток плотности \vec{j}_B от внешнего источника э.д.с. Магнитное поле по-прежнему считаем однородным стационарным и действующим на активном участке шириной $\Delta z = z_2 - z_1$ и направленным по оси Oy . При взаимодействии тока \vec{j}_B с магнитным полем \vec{B} возникает вынуждающая электромагнитная сила

$$dF_{ЭМ} = j_B B \Delta z. \quad (3.1.1)$$

Вычислим соответствующие силе (3.1.1) обобщенные силы, отнесенные к координатам q_n

$$Q_{(\mathcal{E}M)_r} = \int_{z_1}^{z_2} X_r dF_{\mathcal{E}M} = j_B BA \int_{z_1}^{z_2} \sin \frac{r\pi z}{l} dz = \frac{2j_B BA l}{r\pi} \gamma_r,$$

где по-прежнему

$$\gamma_r = \sin \frac{r\pi(z_2 - z_1)}{2l} \sin \frac{r\pi(z_2 + z_1)}{2l},$$

и обобщенную массу

$$m^* = m_0 \int_0^l X_n^2 dz = \frac{m_0 l}{2}.$$

Вынужденные колебания струны с учетом механической и магнитной диссипаций описываются системой дифференциальных уравнений

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{8\sigma B^2 \gamma_r}{\rho \pi^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n(t) + \frac{4j_B B}{r\pi\rho} \gamma_r, \quad (3.1.2)$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}.$$

В безразмерном виде

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{St} \frac{8}{\pi^2 r} \gamma_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n(t) + \mathbf{St} \frac{4j_B}{r\pi} \gamma_r,$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}. \quad (3.1.3)$$

Заметим, что связь между вынужденными парциальными колебаниями происходит только через электромагнитное демпфирование. Эта связь, как показано выше, всегда проявляется достаточно слабо, следовательно, метод расщепления можно применить и для вынужденных колебаний:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \ddot{q}_1 + \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{\pi^2} \right) \dot{q}_1 + 1^2 q_1 = \mathbf{St} \frac{4j_B}{\pi} \gamma_1; \\
 \ddot{q}_2 + \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2} \right) \dot{q}_2 + 2^2 q_2 = -\mathbf{St} \frac{8\gamma_1\gamma_2}{2\pi^2} \dot{q}_1 + \mathbf{St} \frac{4j_B}{2\pi} \gamma_2; \\
 \dots; \\
 \ddot{q}_r + \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right) \dot{q}_r + r^2 q_r = \\
 = -\mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{r\pi^2} \left(\frac{\gamma_1}{1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\gamma_{r-1}}{r-1} \dot{q}_{r-1} \right) + \mathbf{St} \frac{4j_B}{r\pi} \gamma_r; \\
 \dots;
 \end{array} \right. \quad (3.1.4)$$

Уравнения (3.1.4) можно проинтегрировать последовательно и получить рекуррентные формулы, выражающие приближенное аналитическое решение.

В каждое уравнение (3.1.3) и (3.1.4) вошел множитель γ_r , следовательно, электромагнитным способом невозможно возбудить те же парциальные колебания, которые являются изолированными при собственных колебаниях струны. Это означает, что условия отсутствия магнитного демпфирования, полученные в предыдущем разделе, совпадают с условиями отсутствия электромагнитного возбуждения.

В частном случае, когда магнитное поле действует по всей длине струны ($z_1=0, z_2=l$), возбуждаются лишь колебания, соответствующие нечетным r .

Обобщим задачу о вынужденных колебаниях проводящей струны на случай N активных участков. Вычислим обобщенную электромагнитную силу, отнесенную к обобщенной координате q_r

$$\begin{aligned}
 Q_{(\mathcal{E}M)r} &= \int_0^l X_r dF_{\mathcal{E}M} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} X_r dF_{\mathcal{E}M(k)} = \\
 &= j_B A \sum_{k=1}^N \left(B_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} X_r dz \right) = \frac{2l}{r\pi} j_B A \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr}; \\
 &\quad (r = 1, 2, \dots).
 \end{aligned}
 \tag{3.1.5}$$

Вынужденные колебания струны при электромагнитном возбуждении описываются системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r &= \\
 &= -\frac{8\sigma}{r\rho\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\dot{q}_n}{n} \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{kr} \gamma_{mn} \right) + \frac{4j_B}{r\pi\rho} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr}, \\
 &\quad \{r = 1, 2, \dots\},
 \end{aligned}
 \tag{3.1.6}$$

В безразмерном виде имеем

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r &= \\
 &= -St \frac{8}{r\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\dot{q}_n}{n} \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{kr} \gamma_{mn} \right) + St \frac{4j_B}{r\pi} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr},
 \end{aligned}$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}. \quad (3.1.7)$$

Из правых частей этих уравнений видно, что при условии

$$\sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} = 0, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (3.1.8)$$

электромагнитным способом колебание r -ой моды не возбуждается. Сравним (3.1.8) с условием (1.3.9) отсутствия электромагнитного демпфирования, записанным в форме

$$\sum_{m=1}^N B_m \gamma_{mn} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} = 0, \\ (r = 1, 2, \dots), (n = 1, 2, \dots). \quad (3.1.9)$$

Видно, что набор колебаний, удовлетворяющих (3.1.8), совпадает с колебаниями, подчиненными условию (3.1.9), ибо, если

$$\sum_{m=1}^N B_m \gamma_{mn} = 0, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

т.е. индуцированные токи системе не возникают, то и

$$\sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} = 0, \quad (r = 1, 2, \dots).$$

т.е. силовое воздействие тоже отсутствует. Таким образом, изолированные моды не только не демпфируются магнитным полем, но и не возбуждаются электромагнитным способом.

Выводы, полученные в этом параграфе легко проверить на простейшей лабораторной установке, состоящей из нихромовой или медной струны, к закрепленным концам которой подключен

звуковой генератор. Используя подковообразные постоянные магниты, в зависимости от их расположения и полярности, можно добиться возбуждения колебания, соответствующего заданному r . Например, два одинаковых магнита, расположенные симметрично относительно середины струны, при одинаковой полярности возбуждают колебания нечетных r , а при различной полярности - четных. Если есть возможность создать достаточно широкий активный участок, то нетрудно убедиться, что таким магнитным полем невозможно возбудить колебания, длина бегущей волны которых равна ширине этого активного участка. Этот вывод распространяется на все колебания, при которых посередине активного участка образуется узел.

3.2 Электромагнитное возбуждение поперечных колебаний стержня

Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях однородного призматического стержня с током, создаваемым внешним источником э.д.с., при однородных (или приводимых к ним) граничных условиях.

Вычислим обобщенные внешние электромагнитные силы

$$Q_{(ЭМ)r} = j_B AB \int_{z_1}^{z_2} X_r(z) dz = \frac{j_B AB \gamma_r}{\alpha_r}, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (3.2.1)$$

где γ_r и α_r имеют те же выражения, что и в 2.1. Запишем дифференциальные уравнения, описывающие вынужденные колебания электропроводной балки под действием электромагнитной силы с учетом внешнего и внутреннего факторов затухания

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = - \frac{\sigma B^2 \gamma_r}{l \alpha_r \rho Y_r^*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \dot{q}_n}{\alpha_n} + \frac{j_B AB \gamma_r}{\alpha_r m_0 Y_r^*},$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}. \quad (3.2.2)$$

В безразмерном виде

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{St} \frac{\gamma_r}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \dot{q}_n}{\alpha_n} + \mathbf{St} \frac{j_B \gamma_r}{\alpha_r Y_r^*},$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}. \quad (3.2.3)$$

Из этих уравнений следует, что при $\gamma_r=0$ колебания данной моды не возбуждаются.

Для случая N активных участков для стержня получим обобщенную силу в виде

$$Q_r = \int_0^l X_r dF_{ЭМ(k)} = j_B A \sum_{k=1}^N B_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} X_r dz = j_B A \sum_{k=1}^N \frac{B_k \gamma_{kr}}{\alpha_r},$$

$$(r = 1, 2, \dots),$$

а дифференциальные уравнения соответственно в форме:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r =$$

$$= -\frac{\sigma}{\rho l \alpha_r Y_r^*} \sum_{m,k=1}^N \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{q}_n}{\alpha_n} B_k B_m \gamma_{kr} \gamma_{mn} \right) + \frac{j_B}{\rho \alpha_r Y_r^*} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr};$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}. \quad (3.2.4)$$

Или в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r =$$

$$= -\frac{\mathbf{St}}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{m,k=1}^N \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{q}_n}{\alpha_n} B_k B_m \gamma_{kr} \gamma_{mn} \right) + \mathbf{St} \frac{j_B}{\alpha_r Y_r^*} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr};$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}. \quad (3.2.5)$$

Анализ уравнений, описывающих колебания стержня, показывает, что выводы, сделанные для струны, применимы и здесь.

Полученные в этом параграфе результаты указывают на дефекты акустических систем с электромагнитным воспроизведением звука. Один из них состоит в том, что для любой из систем существует определенный набор не воспроизводимых ею колебаний. Другой дефект, приводящий к образованию шумов, связан с зависимостью магнитной силы от всех обобщенных скоростей \dot{q}_n , входящих в первые члены правой части уравнений (3.1.7) и (3.2.5).

3.3 Формы колебаний струны при электромагнитном возбуждении

В параграфе 1.5 показано, что собственные формы колебаний струны искажаются в результате электромагнитного воздействия на систему. Если по струне течет ток, создаваемый внешним источником э.д.с., то возникающая при наличии внешнего магнитного поля сила, очевидно, тоже повлияет на формы колебаний. Таким образом, формы вынужденных колебаний, возбуждаемых электромагнитным способом, не будут простыми гармоническими функциями.

Рассмотрим вопрос о возбуждении в струне колебаний электромагнитным способом при линейном резонансе [78]. Определим возбуждаемые при этом формы колебаний. Этот вопрос имеет особо важное значение при разработке акустических и ультразвуковых систем.

Пусть по абсолютно гибкой струне с закрепленными концами пропускается переменный ток плотности $j_B(t)$. Система уравнений, описывающих колебания струны в этом случае, получена в параграфе 3.1. Пусть $j_B(t)$ - периодическая функция с циклической частотой ω . Разложив ее в ряд Фурье и приняв постоянный член ряда равным нулю, имеем

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \\
& = -\mathbf{St} \frac{8}{r\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\dot{q}_n}{n} \sum_{m,k=1}^N B_k B_m \gamma_{mn} \gamma_{kr} \right) + \\
& + \mathbf{St} \frac{4}{r\pi} \sum_{k=1}^N (B_k \gamma_{kr}) \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu \omega t + b_\nu \sin \nu \omega t), \\
& \quad \{r = 1, 2, \dots\}.
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

где a_ν и b_ν - коэффициенты разложения.

Преобразовав последние уравнения, получим

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \\
& = -\mathbf{St} \frac{8}{r\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\dot{q}_n}{n} \sum_{m,k=1}^N B_k B_m \gamma_{mn} \gamma_{kr} \right) + \\
& + \mathbf{St} \frac{4}{r\pi} \sum_{k=1}^N (B_k \gamma_{kr}) \sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu \sin(\nu \omega t + \delta_\nu), \\
& \quad (r = 1, 2, \dots);
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

где $H_\nu = \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2}$, $\operatorname{tg} \delta_\nu = a_\nu / b_\nu$.

Запишем эту систему уравнений в расцепленном виде:

$$\left. \begin{aligned}
\ddot{q}_1 + 2\tilde{h}_1\dot{q}_1 + q_1 &= \frac{4St}{1\pi} \sum_{k=1}^N (B_k\gamma_{k1}) \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{\nu} \sin(\nu\omega t + \delta_{\nu}); \\
\ddot{q}_2 + 2\tilde{h}_2\dot{q}_2 + 2^2 q_2 &= -\dot{q}_1 \frac{8St}{2\pi^2} \sum_{m,k=1}^N B_k B_m \gamma_{k2} \gamma_{m1} + \\
&\quad + \frac{4St}{2\pi} \sum_{k=1}^N (B_k\gamma_{k2}) \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{\nu} \sin(\nu\omega t + \delta_{\nu}); \\
\cdots; \\
\ddot{q}_r + 2\tilde{h}_r\dot{q}_r + r^2 q_r &= -\frac{8St}{r\pi^2} \sum_{n=1}^{r-1} \left(\frac{\dot{q}_n}{n} \sum_{m,k=1}^N B_k B_m \gamma_{mn} \gamma_{kr} \right) + \\
&\quad + \frac{4St}{r\pi} \sum_{k=1}^N (B_k\gamma_{kr}) \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{\nu} \sin(\nu\omega t + \delta_{\nu});
\end{aligned} \right\} \tag{3.3.3}$$

где

$$\tilde{h}_1 = \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{8St}{1^2 \pi^2} \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{m1} \gamma_{k1} \right);$$

$$\tilde{h}_2 = \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{8St}{2^2 \pi^2} \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{m2} \gamma_{k2} \right);$$

$$\tilde{h}_r = \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{8St}{r^2 \pi^2} \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{mr} \gamma_{kr} \right); \quad (3.3.4)$$

Рассмотрим резонансный случай при условии малой диссипации. Пусть имеет место резонанс основного тона первого порядка: $\nu = 1$, $\omega = p_1 = 1$. Решение первого уравнения (3.3.3) в этом случае с достаточной степенью точности можно записать [113] в виде:

$$q_1 = -D_{11} \cos(t + \delta_1),$$

где
$$D_{11} = \frac{2St \cdot H_1}{\tilde{h}_1 \pi} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{k1}.$$

Нетрудно показать, что в суперпозицию частных решений, удовлетворяющих второму уравнению системы (3.3.3), входит функция частоты $\omega = 1$:

$$-D_{12} \cos(t + \delta_1 + \theta_{12}),$$

где

$$D_{12} = \frac{St}{2\tilde{h}_2 \cos \theta_{12} + (p_2^2 - 1) \sin \theta_{12}} \times$$

$$\times \left(\frac{2H_1}{\pi} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{k2} - \frac{4D_{11}}{\pi^2} \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{k2} \gamma_{m1} \right),$$

$$\operatorname{tg} \theta_{12} = \frac{p_2^2 - 1}{2\tilde{h}_2}.$$

Так как диссипация считается малой, допустимо принять $\theta_{12} = \pm \frac{\pi}{2}$, тогда приближенно искомую функцию запишем в виде

$$-D_{12} \sin(t + \delta_1),$$

где
$$D_{12} = \frac{2St}{\pi(p_2^2 - 1)} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{k2} \left(H_1 - \frac{2D_{11}}{\pi} \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{m1} \right).$$

В суперпозиции частных решений r -ого уравнения присутствует функция

$$-D_{1r} \sin(t + \delta_1), \quad (3.3.5)$$

где

$$D_{1r} = \frac{4St}{r\pi(p_r^2 - 1)} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} \left(H_1 - \frac{2D_{11}}{\pi} \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{m1} \right).$$

Таким образом, колебание основного тона в пределах k -ого активного участка выражается функцией смещений:

$$\begin{aligned} u_1^{(k)}(z, t) &= -X_1^{(k)} D_{11} \cos(t + \delta_1) - \\ &- \left(X_2^{(k)} D_{12} + \dots + X_r^{(k)} D_{1r} + \dots \right) \sin(t + \delta_1), \\ &(k = 1, 2, \dots, N). \end{aligned}$$

То есть, выделяется два движения, смещенных относительно друг друга по фазе на $\frac{\pi}{2}$, и резонансный процесс является двух-волновым с амплитудными функциями

$$X_1^{(k)} * (z) = D_{11} \sin \pi z,$$

$$X_1^{(k)} ** (z) = D_{12} \sin 2\pi z + D_{13} \sin 3\pi z + \dots \quad (3.3.6)$$

$$z_k \leq z \leq z_{k+1} .$$

Эти функции следует стыковать на границах активных участков.

При условии $\omega = 1$ возникает и резонанс второго порядка второго парциального колебания: $\nu = 2$, $p_2 = 2\omega$. Рассуждая аналогично, нетрудно определить амплитудные функции ему соответствующие.

При исследовании резонанса первого порядка второго парциального колебания ($\nu = 1$; $\omega = p_2 = 2$), систему расщепленных уравнений следует записать в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{q}_1 + 2\tilde{h}_1 \dot{q}_1 + 1^2 q_1 &= - \dot{q}_2 \frac{8St}{2\pi^2} \sum_{m,k=1}^N B_k B_m \gamma_{k1} \gamma_{m2} + \\ &+ \frac{4St}{1\pi} \sum_{k=1}^N (B_k \gamma_{k1}) \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{\nu} \sin(\nu\omega t + \delta_{\nu}); \\ \ddot{q}_2 + 2\tilde{h}_2 \dot{q}_2 + 2^2 q_2 &= \frac{4St}{2\pi} \sum_{k=1}^N (B_k \gamma_{k2}) \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{\nu} \sin(\nu\omega t + \delta_{\nu}); \\ &\dots\dots\dots; \\ \ddot{q}_r + 2\tilde{h}_r \dot{q}_r + r^2 q_r &= - \frac{8St}{r\pi^2} \sum_{n=1}^{r-1} \left(\frac{\dot{q}_n}{n} \sum_{m,k=1}^N B_k B_m \gamma_{mn} \gamma_{kr} \right) + \\ &+ \frac{4St}{r\pi} \sum_{k=1}^N (B_k \gamma_{kr}) \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{\nu} \sin(\nu\omega t + \delta_{\nu}); \end{aligned} \right. \quad (3.3.7)$$

Резонансное решение второго уравнения (3.3.7) в этом случае запишется в виде:

$$q_2 = -G_{12} \cos(2t + \delta_1),$$

где
$$G_{12} = \mathbf{St} \frac{H_1}{2\pi\tilde{h}_2} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{k2}.$$

В суперпозиции частных решений первого уравнения при этом содержится функция:

$$-G_{11} \sin(2t + \delta_1),$$

где
$$G_{11} = \frac{\mathbf{St}}{3\pi} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{k1} \left(G_{12} \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{m2} - 4H_1 \right).$$

Среди частных решений третьего уравнения тоже содержится функция с частотой $\omega = 2$:

$$-G_{13} \sin(2t + \delta_1),$$

где
$$G_{13} = \frac{\mathbf{St}}{9\pi} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{k3} \left(\frac{8G_{12}}{\pi} \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{m2} - 4H_1 \right).$$

Одно из частных решений любого r -ого уравнения тоже выражается функцией той же частоты:

$$-G_{1r} \sin(2t + \delta_1),$$

где
$$G_{1r} = \frac{\mathbf{St}}{3r\pi} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} \left(\frac{8G_{12}}{\pi} \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{m2} - 4H_1 \right).$$

Следовательно, функция смещений второго тона колебаний в пределах k -ого активного участка записывается в виде:

$$u_2^{(k)}(z, t) = -X_2^{(k)} G_{12} \cos(2t + \delta_1) - \\ - \left(X_1^{(k)} G_{11} + X_3^{(k)} G_{13} + \dots + X_r^{(k)} G_{1r} \right) \sin(2t + \delta_1), \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Таким образом, выделяются две амплитудные функции:

$$X_2^{(k)*} = G_{12} \sin 2\pi z, \tag{3.3.8}$$

$$X_2^{(k)**} = G_{11} \sin \pi z + G_{13} \sin 3\pi z + \dots + G_{1r} \sin r\pi z + \dots,$$

$$z_k \leq z \leq z_{k+1}.$$

Очевидно, аналогичным образом можно определить амплитудные функции резонансных форм любой моды.

В качестве вывода отметим, что резонансные колебания струны в магнитном поле имеют двухволновой характер, причем одну из амплитудных функций с достаточной степенью точности можно принять синусоидальной, а другая имеет меньший масштаб. Очевидно, что двухволновой характер колебательного процесса проявляется как один из дефектов воспроизводящей акустической и ультразвуковой техники.

3.4 Формы колебаний стержня при электромагнитном возбуждении

Определим резонансные формы при вынужденных колебаниях стержня с электромагнитным возбуждением [74]. Пусть, как и в задаче со струной, имеется N активных участков с различными по величинам и знакам B_m ($m = 1, 2, \dots, N$). Колебания стержня в этом случае описываются системой уравнений (3.2.2), полученной в параграфе 3.2. Пусть, как и в задаче со струной, $j_B(t)$ - периодическая функция с циклической частотой ω . Разложив ее в ряд Фурье и приняв постоянный член ряда равным нулю, имеем

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_r + (\beta + \beta * p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \\
& = -\frac{\mathbf{St}}{\alpha_r Y_r} \sum_{m,k=1}^N \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{q}_n}{\alpha_n} B_k B_m \gamma_{kr} \gamma_{mn} \right) + \\
& + \frac{\mathbf{St}}{\alpha_r Y_r} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{\nu} \sin(\nu \omega t + \delta_{\nu}); \quad \{r = 1, 2, \dots\}.
\end{aligned}$$

Запишем эту систему уравнений в расщепленном виде:

$$\left. \begin{aligned}
& \ddot{q}_1 + \tilde{h}_1 \dot{q}_1 + 1^2 q_1 = \frac{\mathbf{St}}{\alpha_1 Y_1} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{k1} \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{\nu} \sin(\nu \omega t + \delta_{\nu}); \\
& \ddot{q}_2 + \tilde{h}_2 \dot{q}_2 + 2^2 q_2 = -\dot{q}_1 \frac{\mathbf{St}}{\alpha_2^2 Y_2} \sum_{m,k=1}^N B_k B_m \gamma_{k2} \gamma_{m1} + \\
& \quad + \frac{\mathbf{St}}{\alpha_2 Y_2} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{k2} \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{\nu} \sin(\nu \omega t + \delta_{\nu}); \\
& \dots; \\
& \ddot{q}_r + \tilde{h}_r \dot{q}_r + r^2 q_r = -\frac{\mathbf{St}}{\alpha_r Y_r} \sum_{n+1}^{r-1} \left(\frac{\dot{q}_n}{\alpha_n} \sum_{m,k=1}^N B_k B_m \gamma_{kr} \gamma_{mn} \right) + \\
& \quad + \frac{\mathbf{St}}{\alpha_r Y_r} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{\nu} \sin(\nu \omega t + \delta_{\nu}); \\
& \dots;
\end{aligned} \right\} \tag{3.4.1}$$

где использованы обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1 &= \frac{1}{2} \left(\beta + \beta^* + \frac{\mathbf{St}}{\alpha_1^2 Y_1} \sum_{m,k=1}^N B_k B_m \gamma_{k1} \gamma_{m1} \right); \\ \tilde{h}_2 &= \frac{1}{2} \left(\beta + \beta^* p_2^2 + \frac{\mathbf{St}}{\alpha_2^2 Y_2} \sum_{m,k=1}^N B_k B_m \gamma_{k2} \gamma_{m2} \right); \\ &\dots\dots\dots; \\ \tilde{h}_r &= \frac{1}{2} \left(\beta + \beta^* p_r^2 + \frac{\mathbf{St}}{\alpha_r^2 Y_r} \sum_{m,k=1}^N B_k B_m \gamma_{kr} \gamma_{mr} \right); \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Рассмотрим резонанс первого порядка при условии малой внешней и внутренней диссипации. Приближенное резонансное решение первого уравнения (3.4.1) при $\nu = 1$, $\omega = 1$ имеет вид

$$q_1 = -\tilde{D}_{11} \cos(t + \delta_1),$$

где
$$\tilde{D}_{11} = \frac{\mathbf{St} \cdot H_1}{2\tilde{h}_1 \alpha_1 Y_1} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{k1}.$$

В суперпозицию приближенных частных решений, удовлетворяющих второму уравнению системы (3.4.1), входит функция частоты $\omega = 1$.

$$-\tilde{D}_{12} \sin(t + \delta_1),$$

где
$$\tilde{D}_{12} = \frac{\mathbf{St}}{\alpha_2 Y_2 (p_2^2 - 1)} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{k2} \left(H_1 - \frac{\tilde{D}_{11}}{\alpha_2} \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{m1} \right).$$

Среди приближенных частных решений r -ого уравнения присутствует функция

$$- D_{1r} \sin(t + \delta_1),$$

где
$$\tilde{D}_{1r} = \frac{\mathbf{St}}{\alpha_r Y_r (p_r^2 - 1)} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} \left(H_1 - \frac{\tilde{D}_{11}}{\alpha_r} \sum_{m=1}^N B_m \gamma_{m1} \right).$$

Таким образом, резонанс первого порядка основного тона в пределах k -ого активного участка выражается функцией смещений:

$$\begin{aligned} u_1^{(k)}(z, t) = & -X_1^{(k)} \tilde{D}_{11} \cos(t + \delta_1) - \\ & - \left(X_2^{(k)} \tilde{D}_{12} + \dots + X_r^{(k)} \tilde{D}_{1r} + \dots \right) \sin(t + \delta_1), \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N).$$

То есть, выделяется два движения, смещенных относительно друг друга по фазе на $\frac{\pi}{2}$, и резонансный процесс является двухволновым с амплитудными функциями

$$\begin{aligned} X_1^{(k)} * (z) = & \tilde{D}_{11} X_1^{(k)}, \\ X_1^{(k)} ** (z) = & \tilde{D}_{12} X_2^{(k)} + \tilde{D}_{13} X_3^{(k)} + \dots \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

$$z_k \leq z \leq z_{k+1}.$$

Входящие в это выражение собственные амплитудные функции выражаются в функциях А.Н. Крылова, а соответствующие константы находятся из условий стыковки на границах активных участков.

Метод расщепления позволяет приближенно определить резонансные амплитудные функции любой моды любого порядка при вынужденных колебаниях стержня, возбуждаемых электромагнитным способом. Вторая амплитудная функция имеет существенно меньший масштаб в сравнении с первой, ею иногда можно пренебречь, однако, в некоторых случаях она, очевидно, проявляется как заметный дефект электромеханической системы.

3.5 Нелинейный резонанс струны

Линейная постановка задачи о колебаниях струны не всегда удовлетворяет практическим потребностям, так как не учитывает некоторые сугубо нелинейные особенности. Например, в простейшем эксперименте по электромагнитному возбуждению колебаний нихромовой струны, подключенной к звуковому генератору, в поле постоянного подковообразного магнита для первой моды хорошо наблюдается явление «срыва», характерное для резонанса в нелинейных системах. В эксперименте (произведенном совместно с Мамырбаевой И.К.) по электромагнитному возбуждению колебаний нихромовая струна имела длину 30 см., в зависимости от ее диаметра и натяжения, «срыв» при колебаниях основного тона происходил 180-190 Гц, а «скачок» – при 50-60 Гц.

Таким образом, линейная теория колебаний струны имеет весьма узкие границы применимости, хотя позволяет выяснить многие характерные закономерности.

Исследуем вынужденные колебания струны с учетом нелинейности с целью определения резонансной амплитудно-частотной характеристики [76-77].

В параграфе 1.7 получены нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие собственные колебания струны в магнитном поле. Пусть во внешней электрической цепи, замыкающей

концы струны с нелинейными свойствами, имеется источник э.д.с., создающий в ней ток плотности

$$j = j_0 \cos \omega t.$$

Тогда на элемент dz струны, принадлежащий k -ому активному участку, действует вынуждающая магнитная сила:

$$dF_{(\text{эм})k} = B_k A j_0 \cos \omega t \cdot dz.$$

Нетрудно показать, что вынужденные нелинейные колебания проводящей струны в магнитном поле описываются системой уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r + p_r^2 q_r + \frac{E\pi^4 r^2}{4} q_r \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q_n^2 = \\ = - - \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\dot{q}_n}{n} \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \gamma_{kr} \gamma_{mn} \right) + \quad (3.5.1) \\ + \mathbf{St} \frac{4j_0}{r\pi} \sum_{k=1}^N B_k \gamma_{kr} \cos \omega t; \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

Пусть имеется всего один активный участок, действующий по всей длине струны: $z_1 = 0$; $z_2 = 1$. В первой главе показано, что при таком расположении активного участка электромагнитное воздействие испытывают только колебания нечетных мод. Рассмотрим лишь резонанс первого порядка на основе одномодового приближения:

$$\ddot{q}_1 + \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \right) \dot{q}_1 + \frac{E\pi^4}{4} q_1^3 + q_1 = \mathbf{St} \frac{4j_0}{\pi} \cos \omega t. \quad (3.5.2)$$

Нелинейный резонанс в системах, описываемых неоднородным уравнением Дюффинга с гармонической правой частью хорошо изучен [125, 126], в частности объяснены явления «скачка» и «срыва». Следовательно, полученные уравнения достаточно адекватно описывают процессы, наблюдаемые в упомянутом в начале параграфа эксперименте.

Воспользуемся методом гармонического баланса [118, 119], и запишем решение уравнения (3.5.2) в виде:

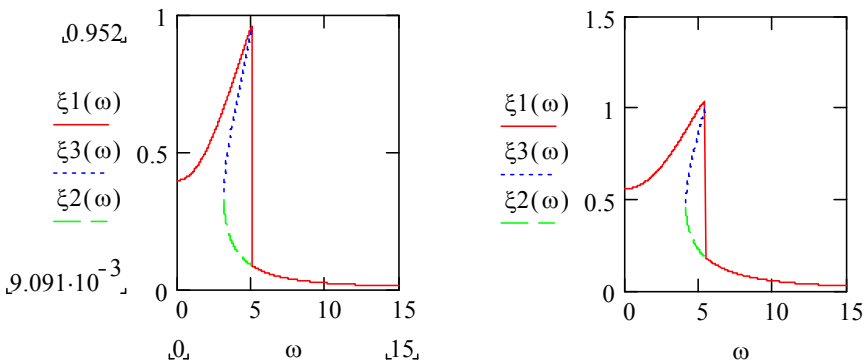
$$q_1 = q_{01} \cos(\omega t + \theta_1). \quad (3.5.3)$$

В результате получим уравнение, определяющее амплитудно-частотную характеристику уравнения (3.5.3):

$$\left\{ \left(\frac{3}{16} E \pi^4 q_{01}^2 - \omega^2 \right)^2 + \left(\beta + St \frac{8}{\pi^2} \right)^2 \omega^2 \right\} q_{01}^2 = \left(St \frac{4j_0}{\pi} \right)^2$$

$$(3.5.4)$$

Зависимость АЧХ неоднородного уравнения Дюффинга от числа Стюарта



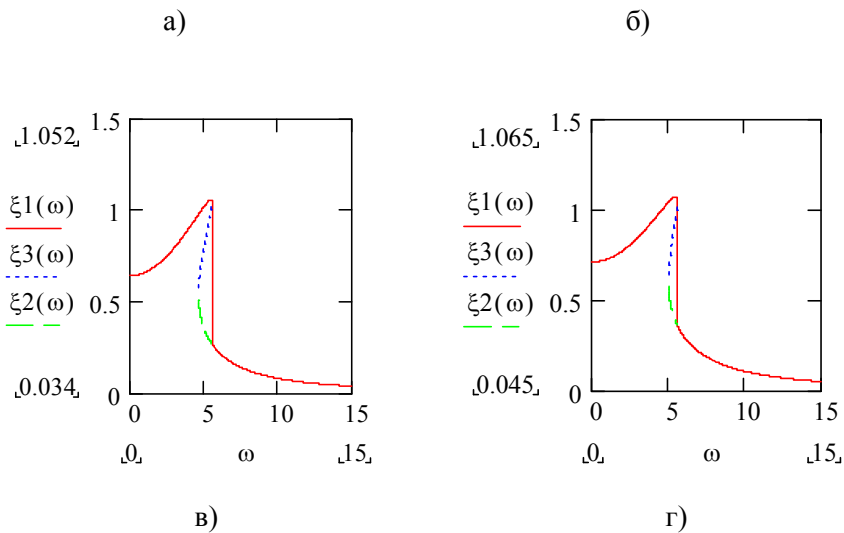


Рис. 13

В нашем случае коэффициент при нелинейном члене уравнения (3.5.2) всегда положителен, следовательно, АЧХ является жесткой. Проанализируем влияние числа Стюарта на АЧХ. На рисунке 13 изображено несколько случаев АЧХ при следующих безразмерных значениях входящих в (3.5.4) параметров:

$$E = 3; \quad j_0 = 4; \quad \beta = 0,1.$$

При выборе значений числа Стюарта воспользуемся границами, полученными для линейной системы. Пусть, например, число Стюарта принимает значения: а) 0,4; б) 1; в) 1,5; г) 2.

Неустойчивый участок изображен пунктиром. Как видно из графиков, увеличение числа Стюарта сближает точки «скачка» и «срыва» и тем самым сглаживает нелинейность. При значении $St = 2$, близком к максимальному, «скачок» и «срыв» практически совпадают, т.е. устраняется самая характерная для нелинейного резонанса особенность. Таким образом, появляется возможность при электромагнитном возбуждении колебаний проводящих систем

избежать проявления нелинейных эффектов. Заметим, однако, что это не всегда возможно, так как пределы значений числа Стюарта для колебательного процесса ограничены. В некоторых случаях даже при максимальном его значении «скачок» и «срыв» происходят при существенно различных частотах.

Графики построены при помощи компьютерной программы Mathcad 8.

3.6 Электромагнитное демпфирование колебаний стержня при кинематическом возбуждении

В технике встречаются континуальные системы с кинематическим возбуждением, когда одна или несколько ее точек движутся по заданному закону. Часто кинематическое воздействие проявляется, если вибрационная система находится на подвижном основании. Возникающие при этом силы инерции оказывают негативное воздействие на технику с вибрационным принципом действия. В частности, за счет кинематического возбуждения снижается точность некоторых типов контрольно-измерительных приборов и управляющих элементов. В некоторых случаях эту проблему можно решить с использованием свойств электромагнитного воздействия [114-116].

Рассмотрим однородный призматический стержень, изготовленный из электропроводного немагнитного материала, концы которого покоятся на двух опорах, принадлежащих одной основе. Концы стержня соединены идеальной электрической цепью. На участке стержня $z_2 - z_1 = \Delta z$ действует однородное стационарное магнитное поле, вектор индукции которого \vec{B} направлен перпендикулярно плоскости колебаний стержня по оси Oy . При этом магниты, создающие поле, располагаются на основе, следовательно, в системе отсчета, связанной с основой магнитное поле стационарно. Пусть основа, на которой находится стержень, совершает вертикальные движения по закону:

$$x(t) = x_0 \sin \omega t. \quad (3.6.1)$$

Система отсчета *Oxyz*, связанная с основой, неинерциальна. Дифференциальное уравнение колебаний стержня в данной системе отсчета с учетом внешнего и внутреннего сопротивления, электромагнитной силы и силы инерции имеет вид:

$$\begin{aligned}
 EJ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \beta^* \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} \right) + m_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\sigma B^2 A}{l} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz = \\
 = m_0 x_0 \omega^2 \sin \omega t.
 \end{aligned}
 \tag{3.6.2}$$

Применив процедуру Фурье и используя синусоидальные амплитудные функции, обладающие свойством ортогональности, получим систему неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений, записанных в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_r + (\beta + \beta^* r^2) \dot{q}_r + r^2 q_r = \\
 = \frac{4x_0 \omega^2 \sin \omega t}{\pi r} \sin^2 \frac{\pi r}{2} - \mathbf{St} \frac{\delta \gamma_r}{\pi^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n,
 \end{aligned}
 \tag{3.6.3}$$

$$\{r = 1, 2, \dots\},$$

где введены обозначения

$$\gamma_n = \int_{z_1}^{z_2} X_n dz, \quad \gamma_r = \int_{z_1}^{z_2} X_r dz.$$

Из полученных уравнений видно, что при данных граничных условиях кинематическим способом возбуждаются только нечетные парциальные колебания. Следовательно, имеет смысл расположить активный участок таким образом, чтобы электромагнитному демпфированию подвергались именно нечетные парциальные колебания [116]. В частности это возможно, если активный участок расположен симметрично относительно середины струны.

Пусть в силу заданных начальных условий наибольшей энергией обладает парциальное колебание первого тона. Такие начальные условия позволяют записать следующую систему расщепленных дифференциальных уравнений для неизолированных парциальных колебаний:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \ddot{q}_1 + \left(\beta + \beta^* 1^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2} \right) \dot{q}_1 + 1^2 q_1 &= \frac{4x_0 \omega^2 \sin \omega t}{1\pi}; \\
 \ddot{q}_3 + \left(\beta + \beta^* 3^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_3^2}{3^2 \pi^2} \right) \dot{q}_3 + 3^2 q_3 &= \frac{4x_0 \omega^2 \sin \omega t}{3\pi} - \mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_3}{3\pi^2} \dot{q}_1; \\
 \ddot{q}_5 + \left(\beta + \beta^* 5^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_5^2}{5^2 \pi^2} \right) \dot{q}_5 + 5^2 q_5 &= \frac{4x_0 \omega^2 \sin \omega t}{5\pi} - \\
 - \mathbf{St} \frac{8\gamma_5}{5\pi^2} \left(\gamma_1 \dot{q}_1 + \frac{\gamma_3}{3} \dot{q}_3 \right); \\
 \dots\dots\dots; \\
 \ddot{q}_r + \left(\beta + \beta^* r^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right) \dot{q}_r + r^2 q_r &= \frac{4x_0 \omega^2 \sin \omega t}{r\pi} - \\
 - \mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{r\pi^2} \sum_{k=2}^{r-1} \frac{\gamma_{2k-3} \dot{q}_{2k-3}}{2k-3}; \\
 \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right. \tag{3.6.4}$$

Каждое из уравнений полученной системы является линейным с постоянными коэффициентами, такая система дифференциальных уравнений допускает последовательное интегрирование. Общее решение первого уравнения этой системы складывается из собственных затухающих колебаний (в случае ненулевых начальных условий) и вынужденных колебаний с частотой вынуждающей силы. Запишем только незатухающую составляющую колебательного процесса:

$$q_1 = \frac{4x_0\omega^2 \sin(\omega t + \delta_1)}{1\pi\sqrt{(\omega^2 - 1^2)^2 + 4\tilde{h}_1^2\omega^2}}; \quad (3.6.5)$$

где

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \frac{2\tilde{h}_1\omega}{\omega^2 - 1^2}; \quad \tilde{h}_1 = \frac{1}{2} \left(\beta + \beta^* 1^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{1^2\pi^2} \right).$$

Решение, соответствующее вынужденным колебаниям третьего парциального тона, выражается двумя членами:

$$q_3 = \frac{4x_0\omega^2 \sin(\omega t + \delta_3)}{3\pi\sqrt{(\omega^2 - 3^2)^2 + 4\tilde{h}_3^2\omega^2}} +$$

$$+ \mathbf{St} \frac{8 \cdot 4x_0\omega^3\gamma_1\gamma_3\omega \cos(\omega t + \delta_1 + \delta_3)}{1 \cdot 3\pi^3 \sqrt{\left[(\omega^2 - 1^2)^2 + 4\tilde{h}_1^2\omega^2 \right] \cdot \left[(\omega^2 - 3^2)^2 + 4\tilde{h}_3^2\omega^2 \right]}}, \quad (3.6.6)$$

где

$$\operatorname{tg}\delta_3 = \frac{2\tilde{h}_3\omega}{\omega^3 - 3^2}, \quad \tilde{h}_3 = \frac{1}{2} \left(\beta + \beta^* 3^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_3^2}{3^2\pi^2} \right).$$

Последовательное интегрирование системы (3.6.4) можно продолжить. Однако из записанных выше решений уже можно сделать определенные выводы. Во-первых, из (3.6.5) вытекает условие возникновения резонанса первого порядка:

$$\omega = 1^2 - \tilde{h}_1^2. \quad (3.6.7)$$

Видно, что при резонансе первого порядка в решении (3.6.6) резонирующим является последний член. Можно сделать и общий вывод: резонанс первого порядка проявляется во всех последующих парциальных колебаниях.

Во-вторых, в случае возникновения резонанса третьего порядка использованный выше способ усечения системы дифференциальных уравнений, очевидно, не подходит. В этом случае усечение системы следует начинать с третьего уравнения, оставив в его правой части вынуждающую силу и член содержащий \dot{q}_3 . В первом уравнении при этом необходимо, кроме вынуждающей силы, сохранить два члена суммы, стоящей в правой части (3.6.3). Интегрирование системы в этом случае начинается с уравнения, соответствующего третьему парциальному колебанию.

Таким образом, проанализировав полученные решения, можно сказать, что способ усечения системы в резонансном случае зависит не от начальных условий, а от порядка возникающего резонанса.

В резонансных случаях следует обращать внимание и на проблему вторичных процессов перекачки энергии между парциальными колебаниями, затронутую в параграфе 1.2. Очевидно, в этом случае следует проводить сравнительный анализ членов, возникающих при вторичной передаче энергии от резонирующего движения, с другими функциями, стоящими в правой части данного дифференциального уравнения.

Рассмотренную выше постановку задачи можно отнести к случаю пассивного электромагнитного демпфирования колебаний, вызванных кинематическим возбуждением. Однако более эффективным на практике может оказаться активное электромагнитное гашение нежелательных вибраций. Принципиальная его суть состоит во взаимной компенсации двух вынуждающих факторов: кинематического и электромагнитного.

Запишем дифференциальное уравнение колебаний стержня с учетом кинематического и электромагнитного факторов возбуждения в случае, когда активный участок совпадает с длиной стержня:

$$\begin{aligned}
 EJ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \beta^* \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} \right) + m_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\sigma B^2 A}{l} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} dz = \\
 = m_0 x_0 \omega^2 \sin \omega t + j_B B A l.
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что кинематическое воздействие полностью компенсируется электромагнитным, когда плотность внешнего тока изменяется по закону

$$j_B = -\frac{m_0 x_0 \omega^2}{BAI} \sin \omega t .$$

4. Колебания одномерных систем в неоднородном магнитном поле

4.1 Колебания струны в магнитном поле с продольной неоднородностью

В реальных условиях магнитные поля, в силу своей вихревой природы, даже в небольших объемах редко бывают однородными. В связи с этим возникают актуальные задачи о собственных и вынужденных колебаниях проводящих систем с распределенными параметрами в неоднородных стационарных магнитных полях [79].

Рассмотрим плоские линейные колебания абсолютно гибкой проводящей струны, описанной в параграфах 1.1–1.2, считая, что на активном участке $\Delta z = z_2 - z_1$ действует магнитное поле с продольной неоднородностью:

$$\vec{B}(z) = B(z)\vec{y}^0.$$

В результате движения проводящей струны в магнитном поле на активном участке создается электрическое напряжение

$$U = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} B(z) dz,$$

Индукцированные в струне токи интегрируются внешней электрической цепью, замыкающей концы струны, и определяются по формуле

$$j = \frac{\sigma}{l} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} B(z) dz. \quad (4.1.1)$$

При этом на элемент струны dz действует магнитная сила

$$dF_M = \left[\frac{\sigma AB(z)}{l} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} B(z) dz \right] dz.$$

С учетом внешнего вязкого сопротивления получим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T_0}{m_0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma AB(z)}{lm_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} B(z) dz = 0. \quad (4.1.2)$$

Воспользовавшись представлением функции смещений в виде бесконечного ряда по синусоидальным амплитудам функциям и производя те же преобразования, что и в параграфе 1.2, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{q}_n X_n + \beta X_n \dot{q}_n + p_n^2 q_n X_n + \dot{q}_n \frac{\sigma A}{lm_0} B(z) \int_{z_1}^{z_2} X_n B(z) dz \right] = 0, \quad (4.1.3)$$

Имея в виду ортогональность амплитудных функций, приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = - \frac{\sigma A}{lm_0} \int_{z_1}^{z_2} X_r(z) B(z) dz \sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{q}_n \int_{z_1}^{z_2} X_n(z) B(z) dz \right],$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}.$$

Вводя обозначения:

$$\gamma_n^* = \int_{z_1}^{z_2} X_n(z) B(z) dz, \quad \gamma_r^* = \int_{z_2}^{z_1} X_r(z) B(z) dz,$$

Получим:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{\sigma A}{lm_0} \gamma_r^* \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^* \dot{q}_n), \quad (4.1.4)$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}.$$

Условие отсутствия электромагнитного демпфирования колебаний в неоднородном магнитном поле, действующем на одном активном участке, записывается в виде

$$\gamma_r^* = \int_{z_1}^{z_2} X_r(z) B(z) dz = 0, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (4.1.5)$$

Используя это условие можно, задав $B(z)$, определить положение и ширину активного участка, при котором магнитное воздействие на струну не проявляется, т. е. данная мода является изолированной.

Рассмотрим вынужденные колебания струны, возникающие при пропускании по ней переменного электрического тока плотности \vec{j}_B , как описано в параграфе 3.1, но при условии неоднородности магнитного поля. Запишем выражение для вынуждающей электромагнитной силы, действующей на элементарный участок струны

$$dF_{\text{ЭМ}} = j_B B(z) A dz$$

и вычислим соответствующую ей обобщенную силу, отнесенную к координате q_n

$$Q_n = \int_{z_1}^{z_2} X_n dF_{\text{ЭМ}} = j_B A \int_{z_1}^{z_2} B(z) \sin \frac{n\pi z}{l} dz = j_B A \gamma_n^*,$$

$$(n = 1, 2, \dots). \quad (4.1.6)$$

Обобщенная масса имеет то же значение, что и в параграфе 3.1. Получим систему неоднородных дифференциальных уравнений

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + \frac{\sigma A}{l m_0} \gamma_r^* \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^* \dot{q}_n) + p_r^2 q_r = \frac{2A \gamma_r^*}{m_0 l} j_B(t),$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}. \quad (4.1.7)$$

В правую часть уравнения (4.1.7) входит γ_r^* , следовательно, при $\gamma_r^* = 0$ данное парциальное колебание электромагнитным способом не возбуждается. Таким образом, условия отсутствия электромагнитного демпфирования и электромагнитного возбуждения совпадают и в случае неоднородного магнитного поля.

Условие (4.1.5) является более общим по отношению к полученному в параграфе 1.2. Как и в случае однородного магнитного поля, невозможно создать условия, при которых не было бы электромагнитного воздействия на все парциальные колебания одновременно.

Обезразмерив уравнения (4.1.4) тем же способом, что и в 1.2 соответственно получим

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{St} \gamma_r^* \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^* \dot{q}_n), \quad (4.1.8)$$

$$\{r = 1, 2, \dots\},$$

где $\mathbf{St} = \frac{\sigma B^*{}^2}{\rho p_1}$ - число Стюарта. В качестве характерного размера индукции магнитного поля принимается ее значение в какой либо фиксированной точке $B^* = B(z^*)$.

Уравнения (4.1.7) в безразмерных переменных имеют вид

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + \mathbf{St} \gamma_r^* \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^* \dot{q}_n) + p_r^2 q_r = 2 \mathbf{St} \gamma_r^* j_B(t),$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}. \quad (4.1.9)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда неоднородное магнитное создается линейным током I , направленным по оси Ox и проходящим через один из концов струны перпендикулярно к ней (рис.14).

В этом случае магнитное поле действует по всей длине струны, исключая небольшой начальный участок, равный радиусу проводника r_0 , причем $r_0 \ll l$. Индукция магнитного поля при этом выражается следующей зависимостью от координаты z

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi z}, \quad z \geq r_0,$$

где μ_0 - магнитная постоянная.

Схема колебаний струны в магнитном поле линейного тока, проходящего через ее конец

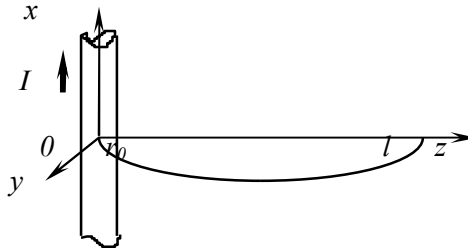


Рис. 14

Приняв в качестве характерного значения магнитной индукции ее значение на правом конце струны

$$B(l) = \frac{\mu_0 I}{2\pi l},$$

в безразмерном виде получим:

$$B(z) = \frac{1}{z}, \quad z \geq r_0, \quad r_0 \ll 1,$$

где z - безразмерная координата.

Вычислив γ_n^* в безразмерном виде, имеем:

$$\gamma_n^* = \int_{r_0}^1 \frac{\sin \pi n z}{z} dz = \left(n\pi z - \frac{(n\pi z)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(n\pi z)^5}{5 \cdot 5!} - \dots \right) \Big|_{r_0}^1. \quad (4.1.10)$$

Полученное значение γ_n^* ни при каких n не обращается в нуль, следовательно, электромагнитному воздействию в указанном магнитном поле подвергаются все парциальные колебания.

Рассмотрим случай, когда проводник с током проходит через середину струны параллельно оси Ox (рис. 15).

Схема колебаний струны в магнитном поле линейного тока, проходящего через ее середину

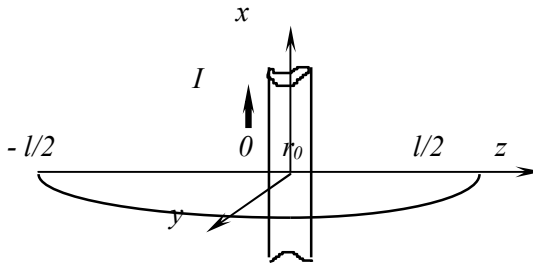


Рис. 15

В этом случае систему отсчета удобно связать с серединой струны, тогда

$$B(z) = \frac{1}{z}, \text{ причем } r_0 < z < -r_0, \quad r_0 \ll 1.$$

Вычислим γ_n^* для левой половины струны, имея в виду, что в выбранной системе отсчета

$$X_n(z) = \sin \left[n\pi \left(\frac{1}{2} + z \right) \right],$$

$$\gamma_n^{*(1)} = \int_{-\frac{1}{2}}^{-r_0} \frac{1}{z} \sin \left[n\pi \left(\frac{1}{2} + z \right) \right] dz =$$

$$= \begin{cases} \sin \frac{n\pi}{2} \left[\ln |n\pi z| - \frac{(n\pi z)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(n\pi z)^4}{4 \cdot 4!} - \dots \right] \Big|_{r_0}^{\frac{1}{2}}; & (n = 1, 3, 5, \dots); \\ \cos \frac{n\pi}{2} \left[n\pi z - \frac{(n\pi z)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(n\pi z)^5}{5 \cdot 5!} - \dots \right] \Big|_{r_0}^{\frac{1}{2}}; & (n = 2, 4, 6, \dots). \end{cases}$$

(4.1.11)

Для правой половины

$$X_n(z) = \sin \left[n\pi \left(\frac{1}{2} - z \right) \right]; \quad B(z) = -\frac{1}{z}. \quad (4.1.12)$$

Для струны в целом

$$\gamma_n^* = \gamma_n^{(1)} + \gamma_n^{*(2)} = 2 \cos \frac{\pi n}{2} \left[n\pi z - \frac{(n\pi z)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(n\pi z)^5}{5 \cdot 5!} - \dots \right] \Big|_{r_0}^{\frac{1}{2}},$$

(n = 2, 4, 6, \dots).

(4.1.13)

При нечетных n $\gamma_n^* = 0$, следовательно, в данном случае выделяются изолированные моды, а электромагнитным способом демпфируются и возбуждаются только четные парциальные колебания.

Еще раз подчеркнем, что полученные результаты теряют смысл, если не удовлетворяется условие

$$r_0 < l/n$$

или в безразмерном виде

$$r_0 < 1/n,$$

т. к. в этом случае длина стоячей волны сравнима с диаметром проводника, создающего магнитное поле.

Заметим, что аналогичный результат следует ожидать при любом симметричном относительно середины струны расположении магнитного поля с противоположным направлением вектора \vec{B} на левой и правой ее половинах.

4.2 Поперечные колебания стержня в неоднородном магнитном поле

Рассмотрим плоские линейные вибрации проводящего однородного призматического стержня в неоднородном стационарном магнитном поле

$$\vec{B} = B(z)\vec{y}^0.$$

Составив дифференциальные уравнения собственных колебаний стержня с учетом внутреннего и внешнего факторов затухания и электромагнитной силы, получим уравнение типа (2.1.3) из параграфа 2.1. Однако, входящая в него обобщенная сила теперь будет иметь несколько иной вид:

$$Q_r = -\frac{\sigma A}{l} \gamma_r * \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n * \dot{q}_n), \quad (r = 1, 2, \dots),$$

где, как и в предыдущем параграфе

$$\gamma_n * = \int_{z_1}^{z_2} X_n(z) B(z) dz, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\gamma_r * = \int_{z_1}^{z_2} X_r(z) B(z) dz, \quad (r = 1, 2, \dots),$$

с той лишь разницей, что собственные амплитудные функции теперь в общем случае выражаются в функциях А.Н Крылова. Обобщенная масса имеет вид, записанный в параграфе 2.1, и зависит от граничных условий.

В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta * p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{\gamma_r * \sigma}{Y_r * l \rho} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n \dot{q}_n), \quad (4.2.1)$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}.$$

Запишем эти уравнения в безразмерном виде

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta * p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{st} \frac{\gamma_r *}{Y_r *} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n \dot{q}_n), \quad (4.2.2)$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}.$$

При электромагнитном способе возбуждения колебаний приходим соответственно к дифференциальным уравнениям

$$\ddot{q}_r + (\beta + \beta^* p_r^2) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{St} \frac{\gamma_r^*}{Y_r^*} \sum_{n=1}^N (\gamma_n \dot{q}_n) + \mathbf{St} \frac{\gamma_r^* j_B(t)}{Y_r^*},$$

$$(r = 1, 2, \dots). \quad (4.2.3)$$

Из полученных уравнений видно, что изолированные моды отвечают условиям

$$\gamma_r^* = 0, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (4.2.4)$$

Понятно, что эти условия всегда выполняется при симметричных концевых условиях и симметричном относительно середины стержня распределении магнитного поля, либо для четных, либо нечетных мод в зависимости от взаимной ориентации вектора \vec{B} слева и справа от середины.

Покажем для примера, что в несимметричном случае тоже можно подобрать такое распределение магнитного поля $\vec{B}(z)$, при котором выделяются изолированные моды. Рассмотрим консольную балку, для которой, как известно [104],

$$X_k = C_3 K_3(\alpha_k z) + C_4 K_4(\alpha_k z), \quad (r = n = k = 1, 2, \dots), \quad (4.2.5)$$

причем
$$C_3 = -\frac{K_2(\alpha_k)}{K_1(\alpha_k)}, \quad C_4 = 1.$$

В соответствии с условием (4.2.4) получим

$$K_2(\alpha_k) \int_0^1 K_3(\alpha_k z) B(z) dz = K_1(\alpha_k) \int_0^1 K_4(\alpha_k z) B(z) dz,$$

$$(k = 1, 2, \dots). \quad (4.2.6)$$

Каждую часть этого выражения можно приравнять какой-либо константе, например единице. Тогда получим систему двух интегральных уравнений

$$\begin{cases} \int_0^1 K_3(\alpha_k z) B(z) dz = 1/K_2(\alpha_k) \\ \int_0^1 K_4(\alpha_k z) B(z) dz = 1/K_1(\alpha_k) \end{cases} \quad (k=1,2,\dots). \quad (4.2.7)$$

где $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ - любые аналитические функции, выбираемые произвольно, a_1^* , a_2^* - неопределенные пока коэффициенты.

В качестве $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ можно взять функции, не имеющие особенностей в пределах от 0 до 1, например, степенные, тригонометрические, гиперболические или функции Крылова А.Н. При выборе этих функций учитываются условия (если таковые существуют), накладываемые на значение и знаки функции $B(z)$ в конкретных точках. После подстановки (4.2.8) в (4.2.7) получим для каждой моды систему двух алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_1^* \int_0^1 K_3(\alpha_k z) \psi_1(z) dz + a_2^* \int_0^1 K_3(\alpha_k z) \psi_2(z) dz = 1/K_2(\alpha_k); \\ a_1^* \int_0^1 K_4(\alpha_k z) \psi_1(z) dz + a_2^* \int_0^1 K_4(\alpha_k z) \psi_2(z) dz = 1/K_1(\alpha_k); \end{cases}$$

$$(k=1,2,\dots),$$

из которых определяются коэффициенты a_1^* и a_2^* .

4.3 Случай магнитного поля, неоднородного в направлении смещений струны

Во всех рассмотренных выше случаях магнитная сила входит в дифференциальные уравнения в виде членов, линейно зависящих от обобщенных скоростей. Поэтому обычно ее считают аналогом вязкого линейного сопротивления. Однако, возможны случаи, когда магнитная сила вносит в систему весьма сложную нелинейность. Покажем это на примере колебаний струны [75, 76,89].

Пусть поперечные колебания абсолютно гибкой струны происходят в магнитном поле, имеющем неоднородность в поперечном к струне направлении:

$$\vec{B} = B(x)\vec{y}^0.$$

Считаем, что магнитное поле действует на одном активном участке $\Delta z = z_2 - z_1$. Вычислим магнитный поток через контур, ограниченный струной и электрической цепью, замыкающей ее концы:

$$d\Phi = B(x)dx dz ;$$

$$\Phi = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{u(z,t)} B(x)dx = \int_{z_1}^{z_2} \tilde{S}(z,t) dz ,$$

где

$$\tilde{S}(u) = \int_0^{u(z,t)} B(x)dx. \quad (4.3.1)$$

При изменении магнитного потока, пересекающего контур, в струне индуцируется ток плотности

$$j = \frac{\sigma}{l} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \tilde{S}(u)}{\partial t} dz ,$$

а на элементарный участок струны действует магнитная сила:

$$dF_M = jAB(x)dz = \left[\frac{\sigma A}{l} B(x) \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \tilde{S}(u)}{\partial t} dz \right] dz.$$

Составим дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T_0}{m_0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma A}{lm_0} B(u) \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} dz = 0. \quad (4.3.2)$$

Здесь учтено, что вне интеграла $B(x) = B(u)$.

Для определенности требуется задать зависимость магнитной индукции от координаты x . Возьмем, например, линейный закон:

$$B(x) = B_0(1 + \eta u), \quad (4.3.3)$$

где η - заданная константа. Вычислим функцию $\tilde{S}(u)$ с учетом (4.3.3):

$$\tilde{S}(u) = B_0 \left[u + \eta \frac{u^2}{2} \right]. \quad (4.3.4)$$

После подстановки (4.3.3) и (4.3.4) в (4.3.2), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T_0}{m_0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\sigma AB_0^2}{lm_0} \left(\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + 2\eta u \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \eta^2 u \int_{z_1}^{z_2} u \frac{\partial u}{\partial t} dz \right) = 0 \quad (4.3.5)$$

Как обычно, воспользуемся методом Фурье и свойством ортогональности синусоидальных амплитудных функций. Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = - \frac{2\sigma B_0^2}{\rho} \left(\frac{4\gamma_r}{\pi^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \dot{q}_n}{n} + \frac{2\eta}{\pi} q_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \dot{q}_n}{n} + \frac{\eta^2}{4} q_r \sum_{n=1}^{\infty} q_n \dot{q}_n \right), \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (4.3.6)$$

Уравнения (4.3.6) являются нелинейными, причем нелинейность возникла в магнитных членах. Заметим, что наиболее сильную нелинейность вносит последнее слагаемое, причем оно не зависит явно от r и n , следовательно, если η не является малым параметром, его влияние для высоких тонов колебаний может стать доминирующим. Кроме того, этот член не зависит от γ_r , следовательно, проявляется даже при $\gamma_r = 0$, то есть это условие не устраняет электромагнитного воздействия на струну, колебания остаются нелинейными.

В одномодовом приближении можно записать

$$\dot{q}_1 + \left[\beta + \frac{2\sigma B_0^2}{\rho} \left(\frac{4\gamma_1^2}{\pi^2} + \frac{2\eta\gamma_1}{\pi} q_1 + \frac{\eta^2}{4} q_1^2 \right) \right] \dot{q}_1 + p_1^2 q_1 = 0 \quad (4.3.7)$$

При условии $\gamma_r = 0$ уравнение (4.3.7) примет вид

$$\ddot{q}_1 + \left(\beta + \frac{\sigma B_0^2 \eta^2}{2\rho} q_1^2 \right) \dot{q}_1 + p_1^2 q_1 = 0, \quad (4.3.8)$$

т. е. магнитная сила проявляется здесь как нелинейное сопротивление.

Обезразмерив уравнения (4.3.7) и (4.3.8), получим соответственно

$$\dot{q}_1 + \left[\beta + 2\mathbf{St} \left(\frac{4\gamma_1^2}{\pi^2} + \frac{2\eta\gamma_1}{\pi} q_1 + \frac{\eta^2}{4} q_1^2 \right) \right] \dot{q}_1 + q_1 = 0, \quad (4.3.9)$$

$$\ddot{q}_1 + \left(\beta + \mathbf{St} \frac{\eta^2}{2} q_1^2 \right) \dot{q}_1 + q_1 = 0, \quad (4.3.10)$$

Для уравнения (4.3.9) вычислим эквивалентный коэффициент вязкости [113]:

$$h_{(\text{э})1} = \beta + \mathbf{St} \left(\frac{8\gamma_1^2}{\pi^2} + \frac{\eta^2 a_1^2}{8} \right), \quad (4.3.11)$$

где a_1 - амплитуда колебания первой моды. При $\gamma_r = 0$ из (4.3.11) получается эквивалентный коэффициент вязкости для уравнения (4.3.10).

Эквивалентному коэффициенту вязкости (4.3.11) соответствует логарифмический коэффициент затухания:

$$\delta_1 \approx 2\pi \left[\beta + \mathbf{St} \left(\frac{8\gamma_1^2}{\pi^2} + \frac{\eta^2 a_1^2}{8} \right) \right],$$

который является амплитудно-зависимым.

При $\gamma_1 = 0$ его величина при любых значениях амплитуды понижается:

$$\delta_1 \approx 2\pi \left[\beta + \mathbf{St} \frac{\eta^2 a_1^2}{8} \right].$$

При отсутствии магнитного поля ($\mathbf{St}=0$) логарифмический декремент постоянен и равен

$$\delta_{01} = 2\pi\beta.$$

Амплитудная зависимость логарифмического декремента изображена на рис. 16.

Три нижних линии на этом графике изображены при условии $\gamma_1 = 0$ и различных значениях числа Стюарта, верхняя линия соответствует значениям: $\gamma_1 = 1$; $\mathbf{St} = 1$. Во всех случаях $\eta = 3$; $\beta = 0,1$.

Зависимость логарифмического декремента от амплитуды

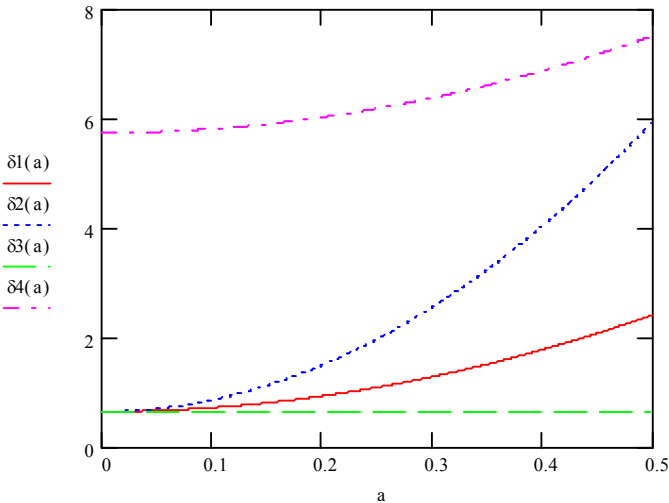


Рис. 16

Рассмотрим задачу об электромагнитном возбуждении колебаний струны в присутствии неоднородного в поперечном направлении магнитного поля. При пропускании по струне тока плотности $j_B(t)$ от внешнего источника э.д.с., возникает вынуждающая электромагнитная сила

$$dF_{\text{ЭМ}} = j_B(t)B(u)Adz.$$

Вычислим соответствующую ей обобщенную силу, отнесенную к r -ой обобщенной координате, при линейной зависимости $B(x)$ по закону (4.3.3):

$$Q_{(\text{ЭМ})r} = j_B AB_0 l \left(\frac{2\gamma_r}{r\pi} + \frac{\eta}{2} q_r \right), \quad (r=1,2,\dots).$$

Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \\ = - \frac{2\sigma B_0^2}{\rho} \left(\frac{4\gamma_r}{\pi^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \dot{q}_n}{n} + \frac{2\eta}{\pi} q_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \dot{q}_n}{n} + \frac{\eta^2}{4} q_r \sum_{n=1}^{\infty} q_n \dot{q}_n \right) + \\ + \frac{4j_B B_0}{\rho} \left(\frac{\gamma_r}{r\pi} + \frac{\eta}{4} q_r \right), \\ (r=1,2,\dots). \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

В выражение вынуждающей электромагнитной силы вошел член, зависящий от обобщенной координаты, причем γ_r в нем не содержится. Для колебания первого тона приближенно в безразмерном виде можно записать:

$$\ddot{q}_1 + \left[\beta + 2\mathbf{St} \left(\frac{4\gamma_1^2}{\pi^2} + \frac{2\eta\gamma_1}{\pi} q_1 + \frac{\eta^2}{4} q_1^2 \right) \right] \dot{q}_1 + (1 - \mathbf{St} \cdot j_B \eta) q_1 =$$

$$= 4\mathbf{St} \frac{j_B \gamma_1}{\pi},$$
(4.3.13)

Если $\gamma_r = 0$ уравнение (4.3.13) примет вид

$$\ddot{q}_1 + \left(\beta + \mathbf{St} \frac{\eta^2}{2} q_1^2 \right) \dot{q}_1 + (1 - \mathbf{St} \cdot j_B \eta) q_1 = 0, \quad (4.3.14)$$

Получилось нелинейное дифференциальное уравнение параметрического типа. Это означает, что электромагнитное воздействие на систему в данном случае является смешанным - и силовым и параметрическим. Таким свойством обладают многие реальные системы, лишь в результате определенных идеализаций удастся выделить чисто силовое воздействие. Дифференциальные уравнения (4.3.13), (4.3.14) относятся к достаточно хорошо исследованному типу [112]. Известно, что в режиме параметрического резонанса в таких системах устанавливается некоторый периодический процесс с ограниченной амплитудой, определены области неустойчивости положения равновесия в пространстве параметров системы, исследована устойчивость полученных периодических решений.

На основе метода гармонического баланса определим порог субгармонического параметрического возбуждения для уравнения (4.3.13) при периодическом изменении внешнего тока по закону

$$j_B = j_0 \cos \omega t.$$

Периодическое решение, соответствующее установившимся параметрическим колебаниям в субгармонической области неустойчивости можно искать в виде:

$$q_1 = a_1 \cos \frac{\omega}{2} t ,$$

частота которого равна половине частоты параметрического возбуждения.

Для определения амплитуды a_1 метод гармонического баланса [112, 113] дает уравнение

$$1 - \frac{h_{(\text{Э})1}^2}{4} - \left(\frac{\omega^2}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\text{St} \frac{j_0 \gamma_1 \omega^4}{2\pi} - h_{(\text{Э})1}^2 \omega^2} \right) = 0 . \quad (4.3.15)$$

Отсюда следует, что если

$$\text{St} < \frac{2h_{(\text{Э})1}^2 \pi}{j_0 \gamma_1 \omega^2} , \quad (4.3.16)$$

то вещественное решение уравнения (4.3.15) отсутствует. Это означает, что глубина параметрического возбуждения недостаточна для возбуждения параметрических колебаний системы и подавляется диссипативными силами. То есть условие (4.3.16) определяет порог параметрической возбудимости в субгармонической области.

Электромагнитное воздействие на колебание основного тона становится чисто параметрическим, если пренебречь всеми диссипативными процессами:

$$\ddot{q}_1 + (1 - \text{St} \cdot \eta j_0 \cos \omega t) q_1 = 0 , \quad (4.3.17)$$

Получилось хорошо изученное уравнение Матье [104, 108], устойчивость положений равновесия которого определяется по диаграмме Айнса-Стретта.

В качестве вывода отметим, что в случае вынужденных колебаний континуальных систем в магнитном поле с неоднородностью в поперечном к системе направлении магнитная диссипация обладает нелинейностью, а при наличии внешнего тока воздействие является не только силовым, но и параметрическим.

5 Колебания одномерных проводящих систем в нестационарном магнитном поле

5.1 Колебания струны в нестационарном магнитном поле

Переходим к исследованию вибраций континуальных проводящих систем в нестационарном магнитном поле, оставаясь, однако, в рамках гипотезы квазистационарности электромагнитных процессов. Нестационарность внешнего магнитного поля делает вибрационные процессы параметрическими, для которых важнейшим является вопрос об устойчивости положений равновесия. При неустойчивом положении равновесия возникает параметрический резонанс, т. е. самовозбуждение колебаний системы какого-либо параметра, в данном случае индукции внешнего магнитного поля.

Рассмотрим задачу о собственных поперечных колебаниях упругой проводящей абсолютно гибкой струны, изготовленной из немагнитного материала, в нестационарном однородном магнитном поле $\vec{B} = B(t)\vec{y}^0$, действующим на одном активном участке $\Delta z = z_2 - z_1$ [90-100].

Для определенности считаем, что идеальная электрическая цепь, замыкающая закрепленные концы струны образует прямоугольный контур. Размеры контура указаны на рис. 17. Рассмотрим два случая: а) замыкающий контур расположен в плоскости Oxz ; б) замыкающий контур расположен в плоскости Oyz . При произвольной форме и расположении контура в пространстве эти два случая объединяются. Колебания струны по-прежнему совершаются в плоскости Oxz .

В общем случае магнитный поток, пересекающий контур, изменяется вследствие двух факторов: 1) за счет нестационарности вектора \vec{B} ; 2) за счет вибраций струны.

Два случая ориентации замыкающего электрического контура

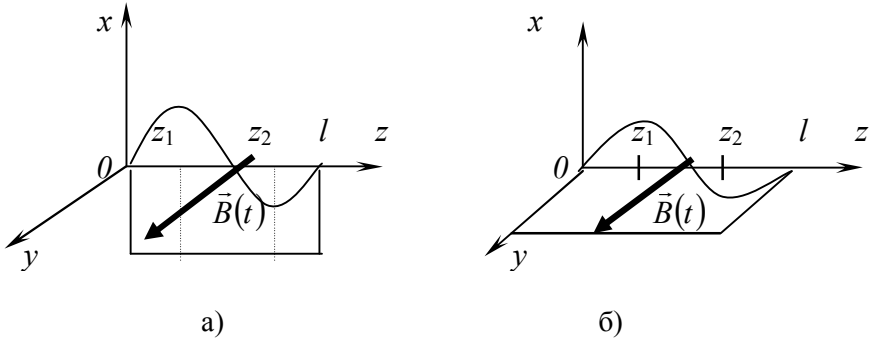


Рис. 17

Изменение магнитного потока, пересекающего контур, приводит к возникновению в нем индуцированных токов плотности

$$j = \frac{\sigma}{l} \left[B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB}{dt} \left(\int_{z_1}^{z_2} u dz + a \Delta z \right) \right]. \quad (5.1.1)$$

Заметим, что формула (5.1.1) записана для случая а). При этом выражение в круглых скобках представляет собой площадь контура, лежащего в плоскости Oxz , и ограниченного замыкающей цепью и струной. Понятно, что за счет вибраций струны площадь контура изменяется. В случае б) последнее слагаемое в круглой скобке отсутствует, т. к. вектор \vec{B} лежит в плоскости контура. Это замечание относится и к последующим формулам.

На каждый элемент dz активного участка струны действует электромагнитная сила

$$dF_M = \frac{\sigma AB}{l} \left[B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB}{dt} \left(\int_{z_1}^{z_2} u dz + a \Delta z \right) \right] dz. \quad (5.1.2)$$

С учетом внешнего вязкого сопротивления получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma AB}{lm_0} \left[B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB}{dt} \left(\int_{z_1}^{z_2} u dz + a\Delta z \right) \right] - \frac{T_0}{m_0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (5.1.3)$$

Оставаясь в рамках гипотезы абсолютно гибкой струны, считаем натяжение T_0 постоянным и одинаковым во всех точках.

Используем разложение функции смещений $u(z, t)$ в ряд по синусоидальным амплитудным функциям, с учетом их ортогональности приходим к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \\ = - \frac{4\sigma BA}{r\pi m_0} \gamma_r \left[\frac{2B}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \dot{q}_n}{n} + \frac{dB}{dt} \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n q_n}{n} + \frac{a\Delta z}{l} \right) \right], \\ \{r = 1, 2, \dots\}. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

В безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \\ - \mathbf{St} \frac{4}{r\pi} \gamma_r \left[\frac{2B}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \dot{q}_n}{n} + \frac{dB}{dt} \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n q_n}{n} + a\Delta z \right) \right], \\ \{r = 1, 2, \dots\}. \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

В систему (5.1.5) входят взаимозависимые дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами в правых частях. Заметим, что электромагнитное воздействие на колебание отдельного r -го парциального тона отсутствует при условии

$$\gamma_r = 0, \quad (r=1,2,\dots),$$

которое совпадает с аналогичным условием для стационарного магнитного поля.

Исследуем линейную задачу о параметрическом возбуждении колебаний основного тона в случае б). В этом случае достаточно одномодового приближения:

$$\ddot{q}_1 + \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{\pi^2} B^2 \right) \dot{q}_1 + \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{\pi^2} B \frac{dB}{dt} \right) q_1 = 0, \quad (5.1.6)$$

В этом уравнении отброшены члены, учитывающие передачу энергии колебаниям более высоких тонов. Иными словами, в уравнении (5.1.6) не учтены малые диссипативные силы.

Пусть индукция магнитного поля изменяется по гармоническому закону $B = \cos \omega t$ (в качестве характерного здесь принято амплитудное значение магнитной индукции), тогда из уравнения (5.1.6) получим

$$\ddot{q}_1 + \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \gamma_1^2 \cos^2 \omega t \right) \dot{q}_1 + \left(1 - \mathbf{St} \frac{4}{\pi^2} \gamma_1^2 \omega \sin 2\omega t \right) q_1 = 0. \quad (5.1.7)$$

С помощью подстановки Хилла [107, 113]

$$q_1 = \frac{1}{2} \xi_1 \exp \left[- \int_0^t \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \gamma_1^2 \cos^2 \omega t \right) dt \right]$$

уравнение (5.1.7) сводится к уравнению типа Хилла [120]:

$$\ddot{\xi}_1 + P_1^2(t) \xi_1 = 0, \quad (5.1.8)$$

где
$$P_1^2(t) = 1 - \frac{1}{4} \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \gamma_1^2 \cos^2 \omega t \right)^2.$$

Общий вид полученного уравнения можно представить как

$$\ddot{\xi}_1 + \left(f_1 + h_1 \cos^2 \omega t + k_1 \cos^4 \omega t \right) \xi_1 = 0, \quad (5.1.9)$$

где постоянные коэффициенты имеют значения

$$f_1 = 1 - \frac{1}{4} \beta^2; \quad h_1 = -\mathbf{St} \frac{4}{\pi^2} \beta \gamma_1^2; \quad k_1 = -\mathbf{St}^2 \frac{16}{\pi^4} \gamma_1^4.$$

Когда можно пренебречь внешним сопротивлением ($\beta = 0$), получим дифференциальное уравнение типа

$$\ddot{\xi}_1 + \left(1 - \mathbf{St}^2 \frac{16}{\pi^4} \gamma_1^4 \cos^4 \omega t \right) \xi_1 = 0, \quad (5.1.10)$$

По своим свойствам уравнение (5.1.10) близко к уравнению Матье, однако, для него следует строить свою диаграмму устойчивости типа Айнса-Стретта. Обычно производят преобразование уравнения, вводя обозначение

$$\omega t = 2\tau.$$

Тогда уравнение (5.1.10) примет вид

$$\frac{d^2 \xi_1}{d\tau^2} + \left(\alpha_1 - \varepsilon_1 \cos^4 2\tau \right) \xi_1 = 0, \quad (5.1.11)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{4}{\omega^2}; \quad \varepsilon_1 = \mathbf{St}^2 \frac{64 \gamma_1^4}{\pi^4 \omega^2}.$$

Воспользуемся результатами, полученными в работах [92, 95], где приводится алгоритм построения диаграммы для уравнения типа (5.1.11) (рис. 18). Методом гармонического баланса получены следующие уравнения граничных линий:

$$\alpha_1^{(1)} = -\frac{3}{8}\varepsilon_1 + \frac{21}{256}\varepsilon_1^2; \quad \alpha_1^{(2)} = 1 - \frac{3}{8}\varepsilon_1 + \frac{29}{512}\varepsilon_1^2;$$

$$\alpha_1^{(3)} = 1 - \frac{3}{8}\varepsilon_1 - \frac{1}{16}\varepsilon_1^2; \quad \alpha_1^{(4)} = 4 - \frac{5}{8}\varepsilon_1 - \frac{3}{160}\varepsilon_1^2;$$

$$\alpha_1^{(5)} = 4 - \frac{5}{8}\varepsilon_1 - \frac{105}{768}\varepsilon_1^2; \quad \alpha_1^{(6)} = 9 - \frac{1}{3}\varepsilon_1 - \frac{97}{2880}\varepsilon_1^2.$$

Светлые поля соответствуют зонам параметрического резонанса, а заштрихованные - зонам устойчивых положений равновесия. Заметим, что здесь построены только три устойчивых и две неустойчивых зоны.

Диаграмма устойчивости положения равновесия для уравнения (5.1.11)

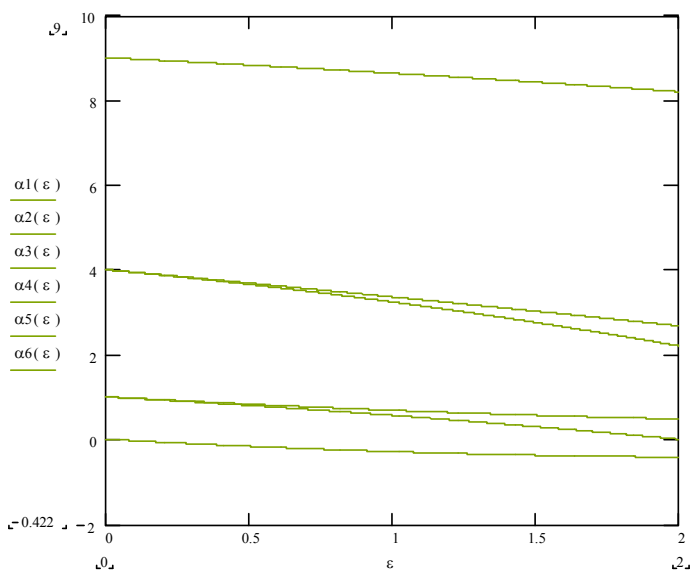


Рис. 18

Так как учет диссипативных процессов приводит к расширению областей устойчивости и сужению областей параметрического резонанса [122, 132, 133], то диаграммой изображенной на рис. 18 можно пользоваться и для уравнения (5.1.9), приведя его к соответствующему виду, но точки в неустойчивых областях следует брать вдали от границ.

5.2 Колебания стержня в нестационарном магнитном поле

Переходим к рассмотрению задачи о линейных колебаниях однородного призматического стержня в нестационарном однородном магнитном поле [94, 97]. Пусть магнитное поле $\vec{B} = B(t)\vec{y}^0$ действует на активном участке $\Delta z = z_2 - z_1$, причем, как и в случае струны возможны два варианта расположения замыкающего контура: а) в плоскости Oxz и б) в плоскости Oyz . В случае а) индуцированные в стержне токи и соответствующие им магнитные силы выражаются соответственно формулами (5.1.1) и (5.1.2).

Запишем дифференциальное уравнение поперечных вибраций стержня с учетом внешнего и внутреннего демпфирующих факторов

$$EJ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \beta * \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} \right) + m_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\sigma AB}{l} \left[B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB}{dt} \left(\int_{z_1}^{z_2} u dz + a \Delta z \right) \right] = 0.$$

Это уравнение сводится к бесконечной системе линейных дифференциальных уравнений, которую запишем в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_r + \left(\beta + \beta^* p_r^2 \right) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \\
& = -\frac{\mathbf{St}}{Y_r} \gamma_r \sum_{n=1}^{\infty} \left[B \gamma_n \dot{q}_n + \frac{dB}{dt} (\gamma_n q_n + a \Delta z) \right], \\
& \{r = 1, 2, \dots\}.
\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Условие отсутствия электромагнитного воздействия на колебание r -ого тона выражается тем же равенством, что и для струны.

При рассмотрении параметрического резонанса основного тона в случае б) достаточно использовать лишь уравнение

$$\ddot{q}_1 + \left(\beta + \beta^* p_1^2 + \mathbf{St} \frac{\gamma_1^2}{Y_1} B^2 \right) \dot{q}_1 + \left(1 + \mathbf{St} \frac{\gamma_1^2}{Y_1} B \frac{dB}{dt} \right) q_1 = 0.$$

Для случая гармонического изменения магнитной индукции получим уравнение

$$\ddot{q}_1 + \left(\beta + \beta^* + \mathbf{St} \frac{\gamma_1^2}{Y_1} \cos^2 \omega t \right) \dot{q}_1 + \left(1 - \mathbf{St} \frac{\gamma_1^2}{2Y_1} \omega \sin 2\omega t \right) q_1 = 0.$$

Приводим его к уравнению Хилла

$$\ddot{\xi}_1 + \left[1 - \frac{1}{4} \left(\beta + \beta^* + \frac{\mathbf{St}}{Y_1} \gamma_1^2 \cos^2 \omega t \right)^2 \right] \xi_1 = 0. \tag{5.2.2}$$

Введенная здесь новая переменная ξ_1 связана с q_1 соотношением

$$q_1 = \frac{1}{2} \xi_1 \exp \left[- \int_0^t \left(\beta + \beta^* + \frac{\mathbf{St}}{Y_1} \gamma_1^2 \cos^2 \omega t \right) dt \right].$$

После перехода к независимой переменной τ , получим

$$\frac{d^2 \xi_1}{d\tau^2} + \left[\frac{4}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \left(\beta + \beta^* + \frac{\mathbf{St}}{Y_1} \gamma_1^2 \cos^2 2\tau \right)^2 \right] \xi_1 = 0. \quad (5.1.3)$$

Уравнение (5.2.2) относится к типу (5.1.9). Если возможно пренебречь одновременно внешним и внутренним сопротивлениями, то получим уравнения типа (5.1.10) и, следовательно, можно воспользоваться результатами предыдущего параграфа.

5.3 Случай нестационарного и неоднородного магнитного поля

Обобщим задачи, изученные в предыдущем и в данном разделах: рассмотрим поперечные колебания струны в неоднородном и нестационарном магнитном поле [96]

$$\vec{B} = B(z, t) \vec{y}^0. \quad (5.3.1)$$

Как и в предыдущих задачах, считаем замыкающий контур прямоугольным и рассматриваем два предельных случая его расположения а) и б).

Неоднородность поля учтем, применив метод N участков, в пределах каждого из которых магнитное поле считаем однородным и нестационарным

$$B_m = B_m(t), \quad (m = 1, 2, \dots, N).$$

Пусть струна совершает собственные колебания, при этом в ней индуцируются токи, интегральная плотность которых

$$j = \frac{\sigma}{l} \sum_{m=1}^N \left(B_m \int_{z_m}^{z_{m+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB_m}{dt} \int_{z_m}^{z_{m+1}} u dz + a \Delta z_m \frac{dB_m}{dt} \right).$$

Понятно, что в случае б) последнее слагаемое в скобке отсутствует.

На элемент струны dz , принадлежащий k -ому участку ($k = 1, 2, \dots, N$), действует магнитная сила

$$dF_{(M)k} = \left[\frac{\sigma A}{l} B_k \sum_{m=1}^N \left(B_m \int_{z_m}^{z_{m+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB_m}{dt} \int_{z_m}^{z_{m+1}} u dz + a \Delta z_m \frac{dB_m}{dt} \right) \right] dz, \\ (k = 1, 2, \dots, N).$$

С учетом внешнего механического сопротивления для описания колебаний струны получим следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma A B_k}{l m_0} \sum_{m=1}^N \left(B_m \int_{z_m}^{z_{m+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB_m}{dt} \int_{z_m}^{z_{m+1}} u dz + a \Delta z_m \frac{dB_m}{dt} \right) - \\ - \frac{T_0}{m_0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (5.3.2)$$

Как и в параграфе 1.4 представим функцию смещений на k -ом активном участке в виде ряда по синусоидальным амплитудным функциям:

$$u = u_k = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_{nk}(z), \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (5.3.3)$$

После подстановки (5.4.3) в (5.4.2) получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \ddot{q}_n X_{nk} + \beta \dot{q}_n X_{nk} - \frac{T_0}{m_0} q_n \frac{d^2 X_{nk}}{dz^2} + \frac{\sigma A}{lm_0} \left[\sum_{m=1}^N \left(B_k B_m \int_{z_m}^{z_{m+1}} X_{nk} dz \right) \dot{q}_n + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{m=1}^N B_k \frac{dB_m}{dt} \int_{z_v}^{z_{v+1}} X_{nk} dz q_n + \sum_{m=1}^N a \Delta z_m B_k \frac{dB_m}{dt} \right] \right\} = 0, \\ (k = 1, 2, \dots, N). \quad (5.3.4)$$

Воспользовавшись свойством ортогональности синусоидальных амплитудных функций, получим систему уравнений

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r + \frac{8\sigma A}{r\pi^2 m_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\dot{q}_n}{n} \sum_{m,k=1}^N (B_m B_k \gamma_{kr} \gamma_{nm}) \right\} + \\ + \frac{8\sigma A}{r\pi^2 m_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{q_n}{n} \sum_{m,k=1}^N \left(B_k \frac{dB_m}{dt} \gamma_{kr} \gamma_{nm} \right) \right\} = \\ (5.3.5)$$

$$= - \frac{4\sigma A a}{m_0 l r \pi} \sum_{m,r=1}^N \left(\Delta z_m B_k \frac{dB_m}{dt} \gamma_{kr} \right), \quad \{r = 1, 2, \dots\}.$$

Здесь введены те же обозначения, что и в параграфе 1.4. В случае б) правые части всех этих уравнений нули.

Запишем эти уравнения в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r + \mathbf{St} \frac{8}{r\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\dot{q}_n}{n} \sum_{m,k=1}^N (B_m B_k \gamma_{kr} \gamma_{nm}) \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{St} \frac{8}{r\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{q_n}{n} \sum_{m,k=1}^N \left(B_k \frac{dB_m}{dt} \gamma_{kr} \gamma_{nm} \right) \right\} = \\
& = -\mathbf{St} \frac{4a}{r\pi} \sum_{m,r=1}^N \left(\Delta z_m B_k \frac{dB_m}{dt} \gamma_{kr} \right), \quad \{r = 1, 2, \dots\}.
\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Пусть, например, в случае б) имеется два активных участка, для которых в безразмерных величинах

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 1/2; \quad B_1 = \cos \omega t, \quad B_2 = -\cos \omega t.$$

Из приведенных в параграфе 1.4 значений видно, что $\gamma_{11} - \gamma_{21} = 0$, поэтому колебание, соответствующее $r = 1$ изолировано от электромагнитного воздействия. При $r = 2$ $\gamma_{12} - \gamma_{22} = 2$, и получим соответствующее уравнение в одномоновом приближении:

$$\ddot{q}_2 + \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \cos^2 \omega t \right) \dot{q}_2 + \left(p_2^2 - \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \omega \sin 2\omega t \right) q_2 = 0. \tag{5.3.7}$$

С помощью подстановки Хилла:

$$q_2 = \xi_2 \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \cos^2 \omega t \right) dt \right],$$

где ξ_2 - новая переменная, уравнение (5.4.7) приводим к виду:

$$\ddot{\xi}_2 + \left[p_2^2 - \frac{1}{4} \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \cos^2 \omega t \right)^2 \right] \xi_2 = 0. \tag{5.3.8}$$

Уравнение (5.4.8) относится к типу (5.1.9). Если внешним механическим сопротивлением пренебречь $\beta = 0$, то получим уравнение, совпадающее с (5.1.10)

$$\ddot{\xi}_2 + \left(p_2^2 - \mathbf{St}^2 \frac{16}{\pi^4} \cos^4 \omega t \right) \xi_2 = 0, \quad (5.3.9)$$

Его можно привести к уравнению типа (5.1.11), и воспользоваться диаграммой, изображенной на рис. 18.

Таким образом, в общем случае неоднородность магнитного поля можно использовать для обеспечения избирательности электромагнитного воздействия на проводящие системы, а нестационарность - для параметрического выделения некоторых колебаний из числа испытывающих электромагнитное воздействие.

Заметим, что линейная теория параметрических колебаний, использованная в данном разделе, определяет лишь условия параметрического возбуждения. Линейное сопротивление не ограничивает амплитуду параметрических колебаний. Для нахождения амплитуды установившихся параметрических колебаний необходимо решать задачи в нелинейной постановке. Теория гармонического параметрического возбуждения в нелинейных системах с кубической характеристикой восстанавливающей силы хорошо описана в [126].

5.4 Колебания струны с конденсатором во внешней цепи

В недавних публикациях Блехмана И.И. и Лурье К.А. [121], Гришиной С.В., Ершовой О.А., Сорокина С.В. [158] исследуется явление параметрической модуляции жесткости континуальных систем. Показано, что благодаря параметрическому воздействию можно вызвать малые изменения жесткости на определенной частоте, что позволяет резко изменить частоты собственных вибраций конструкции. Кроме того, показано, что такое воздействие можно использовать для подавления распространения вибраций в континуальных системах. Блехманом И.И. и Лурье К.А. при исследова-

нии таких систем введен термин «динамические материалы». Как оказалось, динамическими свойствами обладают многослойные пластины и оболочки, композитные материалы, для которых необходим одновременный учет изгибных и сдвиговых деформаций. В широком смысле можно считать, что система обладает динамическими свойствами, если имеется возможность контроля над какой-либо ее собственной частотой.

Рассмотрим две задачи о линейных колебаниях проводящей струны во внешнем нестационарном магнитном поле при наличии в замыкающем контуре конденсатора или катушки индуктивности [102, 103, 104].

Пусть закрепленные концы струны замкнуты идеальной электрической цепью, содержащей конденсатор емкости C . Образованный при этом электрический контур для простоты будем считать прямоугольным с размерами, указанными на рис. 19.

Струна с конденсатором в замыкающем контуре

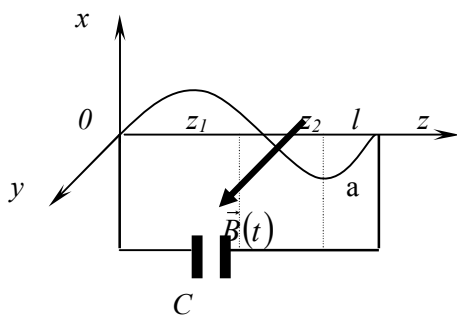


Рис. 19

Как и в предыдущих параграфах имеем в виду два случая расположения внешнего замыкающего контура.

Пренебрегая активным сопротивлением струны и подводящих проводов по сравнению с емкостным сопротивлением, считаем, что напряжение на конденсаторе U_c совпадает с напряжением на концах струны, возникающим за счет изменения магнитного потока, пересекающего контур:

$$U_c = B(t) \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB(t)}{dt} \int_{z_1}^{z_2} u dz + a \Delta z \frac{dB(t)}{dt}, \quad (5.4.1)$$

где a - размер контура по оси Ox .

Заряд Q на обкладках конденсатора связан с напряжением соотношением

$$Q = CU_c,$$

а сила тока, индуцированного в цепи, определяется выражением

$$I = \dot{Q} = C \left(2 \frac{dB}{dt} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz + \frac{d^2 B}{dt^2} \int_{z_1}^{z_2} u dz + a \Delta z \frac{d^2 B}{dt^2} \right). \quad (5.4.2)$$

При взаимодействии с магнитным полем этот ток создает электромагнитную силу, действующую на каждый элемент dz активного участка струны, и направленную вдоль оси Ox

$$dF_M = B \cdot I \cdot dz$$

Учтем также силу внешнего механического сопротивления, действующую по всей длине струны, и запишем систему дифференциальных уравнений в виде

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \frac{Q_r}{m_r^*}, \quad \{r = 1, 2, \dots\}, \quad (5.4.3)$$

где Q_r - обобщенные силы, отнесенные к соответствующей обобщенной координате, а

$$m_r^* = \int_0^l m_0 X_r^2 dz = \frac{m_0 l}{2} - \text{обобщенные}$$

массы.

Вычислим обобщенную силу Q_r в случае периодического изменения магнитной индукции по закону:

$$B = B_0 \cos \omega t, \quad (5.4.4)$$

получим

$$\begin{aligned} Q_r &= - \int_{z_1}^{z_2} X_r dF_M = \\ &= \frac{4l^2 CB_0^2}{r\pi^2} \gamma_r \left[\omega \sin 2\omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n \right) - \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_n}{n} \ddot{q}_n \right) + \right. \\ &\quad \left. + \omega^2 \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_n}{n} q_n \right) \right] + \frac{4l^2 CB_0^2 \gamma_r}{r\pi} a\Delta z \omega^2 \cos^2 \omega t, \\ &\quad \{r = 1, 2, \dots\}. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

После подстановки (5.4.5) в (5.4.3) имеем систему взаимосвязанных дифференциальных уравнений, так как правая часть каждого из них содержит все обобщенные координаты, а также их первые и вторые производные:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r &= \\ &= \frac{8lCB_0^2}{r\pi^2 m_0} \gamma_r \left[\omega \sin 2\omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n \right) - \right. \\ &\quad \left. - \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_n}{n} \ddot{q}_n \right) + \omega^2 \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_n}{n} q_n \right) \right] + \\ &\quad + \frac{8lCB_0^2}{r\pi m_0} \gamma_r a\Delta z \omega^2 \cos^2 \omega t; \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

Полученные уравнения с одной стороны носят параметрический характер, так как содержат переменные коэффициенты, а с другой – присутствует силовое возбуждение, выраженное последним членом в правой части. Следовательно, в такой системе возможны два типа резонанса: обычный и параметрический. В случае б) возможен только параметрический резонанс. Заметим, что при $\gamma_r = 0$ электромагнитное воздействие на колебание, соответствующее данному номеру r , не проявляется, то есть, выделяются изолированные моды.

В безразмерном виде:

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = & \\
 = \mathbf{St} \frac{8}{r\pi^2} \gamma_r \left[\omega \sin 2\omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n \right) - \right. & \\
 \left. - \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_n}{n} \ddot{q}_n \right) + \omega^2 \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_n}{n} q_n \right) \right] + & \\
 + \mathbf{St} \frac{8}{r\pi} \gamma_r a \Delta z \omega^2 \cos^2 \omega t; \quad \{r = 1, 2, \dots\}. & \quad (5.4.6)
 \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{St} = \frac{lCB_0^2}{m_0}$ - число Стюарта.

Если магнитное поле стационарно, т. е. $B = \text{const}$, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{St} \frac{8}{\pi^2 r} \gamma_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \ddot{q}_n, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (5.4.7)$$

На значения числа Стюарта в этом случае ограничения не накладываются. Выясним, как влияют электромагнитные члены, стоящие в правой части уравнений (5.4.7), на свойства системы, в частности на набор парциальных частот и факторов затухания. Этот вопрос необходимо исследовать, чтобы решить проблему усечения бесконечной системы уравнений (5.4.7). В Таблице 3 приведены результаты численных расчетов для нескольких первых приближений при следующих условиях:

$$z_1 = 0; \quad z_2 = \frac{3}{4}; \quad \beta = 0,1; \quad \mathbf{St} = 3,$$

$$\gamma_1 = 0,84; \quad \gamma_2 = 0,5; \quad \gamma_3 = 0,146; \quad \gamma_4 = 1.$$

Из таблицы видно, что первая парциальная частота ω_1 существенно меньше единицы, в то время как остальные парциальные частоты близки соответственно к 2, 3 и 4. Следовательно, можно сделать вывод, что электромагнитное воздействие в данном случае существенно воздействует только на первую парциальную частоту. Но одномодовым приближением для расчета ω_1 пользоваться нельзя, т. к. учет последующих парциальных колебаний увеличивает это значение почти вдвое. Достаточно близкие к истинным значения частот получаются в данном случае при $\tilde{N} = 4$. Очевидно, проблема усечения исходной системы уравнений решается в зависимости от значения числа Стюарта и требуемой точности вычисления частот.

Таблица 3

| | $\tilde{N} = 1$ | | $\tilde{N} = 2$ | | $\tilde{N} = 3$ | |
|-----|-----------------|---------------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|
| r | ω_r | \tilde{h}_r | ω_r | \tilde{h}_r | ω_r | \tilde{h}_r |
| 1 | 0,371 | 0,018 | 0,604 | 0,018 | 0,630 | 0,018 |
| 2 | | | 1,955 | 0,049 | 1,954 | 0,049 |
| 3 | | | | | 2,997 | 0,50 |
| 4 | | | | | 3,904 | 0,049 |

Таким образом, наличие конденсатора во внешней электрической цепи при $B = \text{const}$ приводит к увеличению квазинерционных коэффициентов уравнений (5.4.7). Электромагнитное воздействие в этом случае может существенно повлиять на частоты нескольких первых тонов.

Влияние электромагнитных членов на парциальные демпфированные частоты неизолированных колебаний можно произвести и на основе расщепленной системы дифференциальных уравнений. Если в силу начальных условий наибольшим является колебание основного парциального тона, то в результате расщепления получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2} \right) \ddot{q}_1 + \beta \dot{q}_1 + 1^2 q_1 = 0; \\ \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2} \right) \ddot{q}_2 + \beta \dot{q}_2 + 2^2 q_2 = -\mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_2}{1 \cdot 2 \pi^2} \ddot{q}_1; \\ \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_3^2}{3^2 \pi^2} \right) \ddot{q}_3 + \beta \dot{q}_3 + 3^2 q_3 = -\mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_3}{1 \cdot 3 \pi^2} \ddot{q}_1 - \mathbf{St} \frac{8\gamma_2 \gamma_3}{2 \cdot 3 \pi^2} \ddot{q}_2; \\ \dots; \\ \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right) \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + r^2 q_r = -\mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{r \pi^2} \left(\frac{\gamma_1}{1} \ddot{q}_1 + \frac{\gamma_2}{2} \ddot{q}_2 + \dots + \frac{\gamma_{r-1}}{r-1} \ddot{q}_{r-1} \right); \\ \dots \end{array} \right. \quad (5.4.8)$$

Проинтегрировав систему уравнений (5.4.8) последовательно, получим рекуррентные формулы. Для первого парциального колебания

$$q_1 = q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1),$$

где

$$\omega_1 = \frac{1}{1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2}} \sqrt{1^2 \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2} \right) - \frac{\beta^2}{4}}, \quad \tilde{h}_1 = \frac{\beta}{2 \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2} \right)},$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\tilde{h}_1}{\omega_1}.$$

Для второго

$$q_2 = q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2) +$$

$$+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_2 q_{01} p_1^2 \exp(-\tilde{h}_1 t) \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1 - \theta_1)}{1 \cdot 2\pi^2 \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2} \right) \sqrt{(2^2 - 1^2)^2 + 4\tilde{h}_1(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2)(2^2 - 1^2) + 4 \cdot 1^2(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2)^2}},$$

$$\text{где} \quad p_1^2 = \frac{1^2}{1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{\tilde{h}_2}{\omega_2},$$

$$\omega_2 = \frac{1}{1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2}} \sqrt{2^2 \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2} \right) - \frac{\beta^2}{4}}, \quad \tilde{h}_2 = \frac{\beta}{2 \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2} \right)}.$$

Для третьего без учета вторичных процессов передачи энергии имеем

$$\begin{aligned}
q_3 &= q_{03} \exp(-\tilde{h}_3 t) \cos(\omega_3 t + \varepsilon_3) + \\
&+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_3 q_{01} p_1^2 \exp(-\tilde{h}_1 t) \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1 - \theta_1)}{1 \cdot 3\pi^2 \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_3^2}{3^2 \pi^2}\right) \sqrt{(3^2 - 1^2)^2 + 4\tilde{h}_1(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_3)(3^2 - 1^2) + 4 \cdot 1^2(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_3)^2}} + \\
&+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_2 \gamma_3 q_{02} p_2^2 \exp(-\tilde{h}_2 t) \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2 - \theta_2)}{2 \cdot 3\pi^2 \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_3^2}{3^2 \pi^2}\right) \sqrt{(3^2 - 2^2)^2 + 4\tilde{h}_2(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_3)(3^2 - 2^2) + 4 \cdot 2^2(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_3)^2}},
\end{aligned}$$

$$\text{где } p_2^2 = \frac{2^2}{1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2}}, \quad \text{tg } \varepsilon_3 = \frac{\tilde{h}_3}{\omega_3},$$

$$\omega_3 = \frac{1}{1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_3^2}{3^2 \pi^2}} \sqrt{3^2 \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_3^2}{3^2 \pi^2}\right) - \frac{\beta^2}{4}}, \quad \tilde{h}_3 = \frac{\beta}{2 \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_3^2}{3^2 \pi^2}\right)}.$$

Для r -ого парциального колебания:

$$\begin{aligned}
& q_r = q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) + \\
& + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_r q_{01} p_1^2 \exp(-\tilde{h}_1 t) \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1 - \theta_1)}{1 \cdot r \pi^2 \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right) \sqrt{(r^2 - 1^2)^2 + 4\tilde{h}_1 (\tilde{h}_1 - \tilde{h}_r) (r^2 - 1^2) + 4 \cdot 1^2 (\tilde{h}_1 - \tilde{h}_r)^2}} + \\
& + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2 \gamma_r q_{02} p_2^2 \exp(-\tilde{h}_2 t) \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2 - \theta_2)}{2 \cdot r \pi^2 \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right) \sqrt{(r^2 - 2^2)^2 + 4\tilde{h}_2 (\tilde{h}_2 - \tilde{h}_r) (r^2 - 2^2) + 4 \cdot 2^2 (\tilde{h}_2 - \tilde{h}_r)^2}} + \\
& + \dots + \\
& + \dots + \\
& + \mathbf{St} \frac{8\gamma_{r-1} \gamma_r q_{0r-1} p_{r-1}^2 \exp(-\tilde{h}_{r-1} t) \cos(\omega_{r-1} t + \varepsilon_{r-1} - \theta_{r-1})}{(r-1) \cdot r \pi^2 \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right)} \times \\
& \times \frac{1}{\sqrt{\left[(r^2 - (r-1)^2) \right]^2 + 4\tilde{h}_{r-1} (\tilde{h}_{r-1} - \tilde{h}_r) \left[(r^2 - (r-1)^2) \right] + 4 \cdot (r-1)^2 (\tilde{h}_2 - \tilde{h}_{r-1})^2}},
\end{aligned}
\tag{5.4.9}$$

где

$$p_{r-1}^2 = \frac{(r-1)^2}{1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_{r-1}^2}{(r-1)^2 \pi^2}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_r = \frac{\tilde{h}_r}{\omega_r},$$

$$\omega_r = \frac{1}{1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2}} \sqrt{r^2 \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right) - \frac{\beta^2}{4}}, \quad \tilde{h}_r = \frac{\beta}{2 \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right)}.$$

Из этих формул видно, что вследствие электромагнитного воздействия, демпфированные парциальные частоты уменьшаются по сравнению с частотами затухающих колебаний при наличии только механического сопротивления. Причем наиболее существенному изменению подвергаются низшие частоты неизолированных парциальных колебаний.

Обычно в подобных задачах $\beta \ll 1$, следовательно, выполняется условие малой общей диссипации. Это позволяет записать решения (5.4.9) короче:

$$\begin{aligned}
q_r &= q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) + \\
&+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_r q_{01} p_1^2 \exp(-\tilde{h}_1 t) \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1 - \theta_1)}{1 \cdot r \pi^2 \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2}\right) (r^2 - 1^2)} + \\
&+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_2 \gamma_r q_{02} p_2^2 \exp(-\tilde{h}_2 t) \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2 - \theta_2)}{2 \cdot r \pi^2 \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2}\right) (r^2 - 2^2)} + \\
&+ \dots + \\
&+ \mathbf{St} \frac{8\gamma_{r-1} \gamma_r q_{0r-1} p_{r-1}^2 \exp(-\tilde{h}_{r-1} t) \cos(\omega_{r-1} t + \varepsilon_{r-1} - \theta_{r-1})}{(r-1) \cdot r \pi^2 \left(1 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2}\right) \left[(r^2 - (r-1)^2) \right]}, \\
&\quad (r = 1, 2, \dots). \tag{5.4.10}
\end{aligned}$$

Заметим, что, аperiodическое гашение парциальных колебаний за счет электромагнитного воздействия, в этом случае невозможно, поскольку $\beta \ll 1$, а \mathbf{St} принимает только положительные значения.

Вернемся к параметрической задаче, описываемой уравнениями (5.4.6). Рассмотрим ее для случая б) в одномодовом приближении ($r = 1$), т.е. на основе уравнения:

$$\ddot{q}_1 + \frac{\beta - \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \gamma_1^2 2\omega \sin 2\omega t}{1 + \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \gamma_1^2 \cos^2 \omega t} \dot{q}_1 + \frac{1 - \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \gamma_1^2 \omega^2 \cos^4 \omega t}{1 + \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \gamma_1^2 \cos^2 \omega t} q_1 = 0. \quad (5.4.13)$$

Пусть $\gamma_1 = 1$, тогда уравнение (5.4.13) запишется в виде:

$$\ddot{q}_1 + \frac{\beta - \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} 2\omega \sin 2\omega t}{1 + \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \cos^2 \omega t} \dot{q}_1 + \frac{1 - \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \omega^2 \cos^4 \omega t}{1 + \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \cos^2 \omega t} q_1 = 0 \quad (5.4.14)$$

Отсюда можно найти ограничения, которые накладываются на число Стюарта:

$$\frac{\beta \pi^2}{160\omega} < \mathbf{St} < \frac{\pi^2}{8\omega^2}. \quad (5.4.15)$$

Уравнение (5.4.14) приводится к типу Хилла [57-61], которое в свою очередь, путем разложения коэффициенты в усеченные ряды Фурье, сводится к уравнению Матье. Пользуясь диаграммой Айнса-Стретта для заданных условий, можно определить тип движения (затухающие колебания, незатухающие колебания или параметрический резонанс).

5.5 Колебания струны с катушкой индуктивности во внешней цепи

Переходим к рассмотрению колебаний проводящей струны, концы которой замкнуты на катушку индуктивности L . В общем случае магнитное поле считаем нестационарным, и действующим на участке $\Delta l = z_2 - z_1$ (рис. 20).

Считаем, что индуктивное сопротивление ωL значительно превосходит омическое R . За счет изменения магнитного потока, лежащего в плоскости Oxz , на концах катушки создается напряжение

$$U_L = B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB}{dt} \int_{z_1}^{z_2} u dz + a \Delta z \frac{dB}{dt}.$$

Струна с катушкой в замыкающем контуре

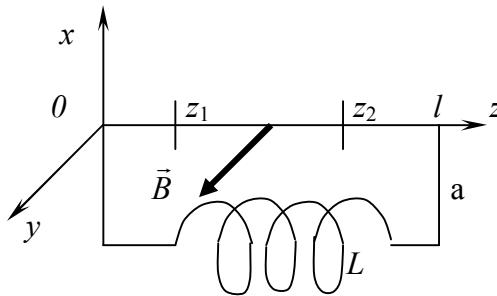


Рис. 20

В случае контура, лежащего в плоскости Oyz , последний член в этом выражении отсутствует.

С другой стороны

$$U_L = L \frac{dI}{dt},$$

тогда

$$dI = \frac{1}{L} \left(B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB}{dt} \int_{z_1}^{z_2} u dz + a \Delta z \frac{dB}{dt} \right) dt.$$

Причем здесь $L \neq 0$ в силу условия $\omega L \gg R$. Выражение для силы индуцированного тока при периодическом изменении индукции магнитного поля по закону

$$B = B_0 \cos \omega t$$

и синусоидальных амплитудных формах запишется в виде

$$I = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2B_0 l \gamma_n}{n\pi} q_n + a \Delta z B_0 \right) \cos \omega t.$$

При взаимодействии этих токов с внешним магнитным полем возникает электромагнитная сила, действующая на активном участке

$$dF_{\text{ЭМ}} = \frac{B_0}{L} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2B_0 l \gamma_n}{n\pi} q_n + a \Delta z B_0 \right) \cos^2 \omega t \cdot dz.$$

Ей соответствует обобщенная сила, отнесенная к r -ой обобщенной координате

$$Q_r = -\frac{2B_0^2 l \gamma_r}{r \pi L} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l \gamma_n}{n\pi} q_n + a \Delta z \right) \cos^2 \omega t,$$

$$(r = 1, 2, \dots).$$

В результате получим систему взаимосвязанных дифференциальных уравнений параметрического типа

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{4B_0^2 \gamma_r}{m_0 r \pi L} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l \gamma_n}{n\pi} q_n + a \Delta z \right) \cos^2 \omega t,$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}.$$

Переходя к безразмерным величинам, получим:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{St} \frac{4\gamma_r}{r\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\gamma_n}{n\pi} q_n + a\Delta z \right) \cos^2 \omega t, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (5.5.1)$$

здесь $\mathbf{St} = \frac{B_0^2 l}{m_0 L p_1^2}$ - число Стюарта.

Отсюда видно, что электромагнитное воздействие на струну является одновременно и параметрическим и силовым. Исследование колебаний такого типа проведено в монографии [57]. В случае б) электромагнитное воздействие является чисто параметрическим.

Если $B = \text{const}$, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{r\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} q_n, \quad \{r = 1, 2, \dots\} \quad (5.5.2)$$

Иследуем вопрос усечения этой системы уравнений. В Таблице 4 приведены результаты расчетов частот для нескольких первых приближений при тех же условиях, что и в случае с конденсатором.

Видно, что электромагнитное воздействие в этом случае приводит к увеличению парциальных частот. Самым значительным образом оно влияет только на первую частоту, причем одномодовое приближение, очевидно, не всегда может быть удовлетворительным. Выбор приближения зависит от числа Стюарта и требуемой точности расчетов.

Таблица 4

| | $\tilde{N} = 1$ | $\tilde{N} = 2$ | $\tilde{N} = 4$ |
|-----|-----------------|-----------------|-----------------|
| r | ω_r | ω_r | ω_r |
| 1 | 1,64 | 1,597 | 1,592 |
| 2 | | 2,077 | 2,075 |
| 3 | | | 3,001 |
| 4 | | | 4,021 |

Запишем систему уравнений (5.5.2) в расщепленном виде при тех же начальных условиях, что в предыдущем случае:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_1 + \beta \dot{q}_1 + \left(1^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2} \right) q_1 = 0; \\ \ddot{q}_2 + \beta \dot{q}_2 + \left(2^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2} \right) q_2 = -\mathbf{St} \frac{8\gamma_1}{\pi^2} \frac{\gamma_2}{1 \cdot 2} q_1; \\ \ddot{q}_3 + \beta \dot{q}_3 + \left(3^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_3^2}{3^2 \pi^2} \right) q_3 = -\mathbf{St} \frac{8\gamma_1 \gamma_3}{1 \cdot 3 \pi^2} q_1 - \mathbf{St} \frac{8\gamma_2 \gamma_3}{2 \cdot 3 \pi^2} q_2; \\ \dots; \\ \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + \left(r^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right) q_r = -\mathbf{St} \frac{8\gamma_r}{r \pi^2} \left(\frac{\gamma_1}{1} q_1 + \frac{\gamma_2}{2} q_2 + \dots + \frac{\gamma_{r-1}}{r-1} q_{r-1} \right); \\ \dots \end{array} \right. \quad (5.5.3)$$

Эту систему уравнений нетрудно проинтегрировать последовательно, получив рекуррентные формулы, описывающие парциальные колебания с соответствующим набором частот.

Факторы затухания всех парциальных колебаний в этом случае одинаковы:

$$\tilde{h}_1 = \tilde{h}_2 = \dots = \tilde{h}_r = \frac{\beta}{2},$$

а демпфированные частоты соответственно

$$\omega_1 = \sqrt{\left(1^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{\pi^2} \right) - \left(\frac{\beta}{2} \right)^2};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\left(2^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2^2}{\pi^2}\right) - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2};$$

.....;

$$\omega_r = \sqrt{\left(r^2 + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{\pi^2}\right) - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}.$$

Из этих формул видно, что электромагнитное воздействие в этом случае изменяет жесткость системы, что позволяет увеличить демпфированные частоты неизолированных парциальных колебаний в зависимости от числа Стюарта. Аперриодическое гашение колебаний за счет изменения числа Стюарта в этом случае невозможно.

Таким образом, применение реактивных электрических элементов расширяет управляющие возможности электромагнитного воздействия на колебания электромеханических систем, избирательным образом изменяя их механические свойства. При постоянном магнитном поле электроемкость увеличивает квазиинерционный коэффициент, а индуктивность - квазиупругий. В нестационарном магнитном поле эти элементы создают параметрическое и силовое воздействие на систему. При этом имеется возможность существенно воздействовать указанным образом на низкочастотные колебания струны за исключением изолированных движений.

Заметим, что здесь рассмотрены только случаи линейных реактивных параметров, поэтому обобщенная координата и ее производные входят в дифференциальные уравнения линейно. В принципе возможно использование нелинейных реактивных параметров, что приведет к нелинейным задачам.

6. Колебания одномерных систем в магнитном поле с учетом специальных свойств

6.1 Сведения о магнитострикции

Присутствие внешнего магнитного поля в некоторых случаях способно изменить свойства материала струны или стержня [136-138]. Нестационарность магнитного поля при этом делает некоторые физические параметры этого материала переменными. Такая постановка задачи приводит к актуальным с теоретической и прикладной точек зрения проблемам, имеющим место в сложных параметрических системах.

В настоящем разделе рассматриваются задачи о колебаниях электропроводных струны и стержня в нестационарном магнитном поле с учетом магнитострикции (пьезомагнитного эффекта) материала. Приведем некоторые необходимые для дальнейшего сведения об этом физическом явлении.

Магнитострикцией (пьезомагнитным эффектом) называют явление изменения размеров тел в присутствии магнитного поля. Известно [136], что наиболее значительно магнитострикция проявляется в ферромагнетиках.

По отношению к магнитному полю магнитострикция бывает продольной, т.е. вдоль направления магнитного поля и поперечной, т.е. поперек направления магнитного поля. Измерения показывают, что продольная линейная магнитострикция в два раза больше, чем поперечная и имеет другой знак. Обычно магнитострикция происходит почти без изменения объема образца, т. к. изменение его размеров в продольном поле почти полностью компенсируется поперечными изменениями размеров.

Установлено, что в зависимости от структурных особенностей ферромагнетиков продольная магнитострикция при техническом намагничивании имеет различные величины и знаки и часто сложно зависит от поля и намагниченности. Для железа продольная магнитострикция в слабом магнитном поле имеет положительный знак, а в более сильном - знак меняется на отрицательный. Наи-

большее значение магнитострикции имеют сплавы, принадлежащие к системам Fe-Co и Fe-Pt. Так, например, магнитострикция сплава 54% Pt, 46% Fe по величине почти в три раза превышает магнитострикцию никеля.

Магнитострикция обнаруживает явление гистерезиса. Последний заключается в том, что при возрастании и уменьшении поля стрикция не следует за полем. Петля гистерезиса магнитострикции тем шире, чем больше коэрцитивная сила и остаточная намагниченность образца. Остаточная магнитострикция в магнитомягких материалах (технически чистое железо, пермаллой (сплавы железа с никелем или сплавы Fe-Ni-Co)) обычно мала, а в магнитотвердых материалах (сплавы Fe-Ni-Al, Fe-Ni-Al-Co, феррит бария, феррит кобальта), наоборот, может достигать значительной величины.

Известно [137], что если перед намагничиванием наложить на ферромагнетик достаточно сильное упругое напряжение, то в зависимости от характера этой деформации (растяжение, сжатие, кручение) магнитострикция проявляется более значительно или, наоборот, возникает тенденция к ее подавлению.

В области технического намагничивания в ферромагнитном теле в общем случае, помимо линейной, возникает также объемная магнитострикция, т.к. хотя изменение длины в направлении магнитного поля и сопровождаются обратными по знаку изменениями поперечного сечения ферромагнитного образца, но они полностью не компенсируют друг друга, в результате чего ферромагнетик получает некоторое изменение объема. В большинстве случаев эти изменения весьма малы по величине и при рассмотрении магнитострикционных деформаций в области технического намагничивания ими пренебрегают.

При достижении технического насыщения, когда процессы смещения и вращения заканчиваются, линейная магнитострикция достигает своего насыщения. При дальнейшем возрастании магнитного поля начинается парапроцесс. Парапроцесс тоже сопровождается магнитострикцией, носящей, однако, чисто объемный характер.

Если магнитострикция в области смещения и вращения по природе своей связана с изменением магнитного взаимодействия в

кристаллической решетке, то магнитострикция парапроцесса связана с изменением объемной энергии в ферромагнетике и является чисто квантовомеханическим эффектом. Она представляет термодинамическое следствие того, что обменная энергия зависит от межатомного расстояния. Поэтому на основании результатов исследования магнитострикции парапроцесса возможно делать заключения о зависимости обменного взаимодействия от межатомных расстояний в различных металлах и сплавах. В большинстве ферромагнетиков магнитострикция парапроцесса весьма мала и только в отдельных группах сплавов она достигает значительной величины. В области парапроцесса магнитострикция растет в линейной зависимости от индукции магнитного поля.

Еще одним следствием изменения свойств магнетика, помещенного в магнитное поле, является магнитоупругий гистерезис [138]. Явление магнитоупругого гистерезиса в ферромагнетиках должно иметь место и в отсутствие внешнего магнитного поля. Это легче всего установить, изучая затухание упругих колебаний в ферромагнитных телах. Опыт показывает, что затухание механических колебаний в ферромагнетиках происходит гораздо быстрее, чем в неферромагнитных материалах с приблизительно такими же упругими и пластическими свойствами. Измерения показывают [138], что затухание сильно зависит от магнитного состояния образца и заметно падает при приближении к магнитному насыщению, когда векторы \vec{I}_m областей "закрепляются" в направлении внешнего магнитного поля. Известно, что при нагревании образца затухание так же быстро падает и выше точки Кюри становится так же мало, как и в состоянии магнитного насыщения.

Магнитострикция имеет широкое практическое применение. Если ферромагнитный стержень поместить в переменное магнитное поле, то в нем вследствие магнитострикции возбуждаются механические колебания. Первыми магнитострикционными колебательными системами были стальные и никелевые проволоки и пластинки, в которых возбуждались колебания с помощью лампового генератора. Резонанс наблюдался тогда, когда частота магнитного поля составляла половину от собственной частоты колебаний ферромагнитного стержня [139]. Последнее становится понятным, если учесть, что магнитострикция не зависит от знака магнитного поля,

поэтому периодические изменения длины, возбуждаемые магнитострикцией происходят с частотой, вдвое большей, чем частота накладываютого переменного поля. Первое практическое применение магнитострикционных колебаний было указано Пирсом для целей стабилизации частоты ламповых генераторов. При помещении ферромагнитного стержня в катушку колебательного контура генератора незатухающих электромагнитных колебаний и при настройке в резонанс всей системы стержень приходит в устойчивые магнитострикционные колебания. Эти колебания оказывают стабилизирующее действие на частоту генератора, которая остается постоянной даже при значительных изменениях режима колебательного контура. Большое практическое применение получили магнитострикционные устройства для генерации ультразвуковых колебаний. Магнитострикционные излучатели ультразвука широко применяются в подводной сигнализации, для определения глубин океана (эхолоты), в приборах ультразвуковой локации, ультразвуковой дефектоскопии металлов, в качестве датчиков, резонаторов, стабилизаторов, реле, преобразователей звуковых и ультразвуковых сигналов. Нетрудно видеть, что магнитострикционный излучатель может служить приемником ультразвука. В качестве материала для магнитострикционных излучателей-приемников (преобразователей) ультразвука применяется в большинстве случаев никель, обладающий наилучшими магнитострикционными характеристиками и хорошими антикоррозионными свойствами. Магнитострикционные преобразователи изготавливаются разных типов и форм. Это разнообразие диктуется в основном двумя соображениями: задачей уменьшения потерь в материале и требуемой характеристикой направленности излучения.

Сказанное выше имеет значение при учете магнитострикционного воздействия на колебания ферромагнитных тел в нестационарном магнитном поле. Подведем основные итоги сказанному. Четность магнитострикции указывает на независимость магнитострикционного эффекта от направления вектора индукции магнитного поля, следует различать лишь продольную и поперечную магнитострикции. В большинстве практически значимых случаев можно принять, что линейные размеры образца в каждом из направлений изменяются пропорционально квадрату магнитной

индукции внешнего магнитного поля. Растяжение и сжатие тела может усилить или подавить магнитострикционный эффект. Намагниченность тела влияет на величину и знак магнитострикции. Магнитоупругий гистерезис проявляется как фактор, увеличивающий внутренне трение при колебаниях ферромагнитных образцов.

6.2 Лине́йные колебания струны с учетом магнитострикции

Переходим к составлению дифференциальных уравнений колебаний проводящей струны в однородном нестационарном поперечном магнитном поле с учетом магнитострикции [99 – 101]. Прежде всего, необходимо заметить, что колебания в этом случае не будут плоскими, так как кроме поперечной электромагнитной силы в результате намагниченности струны возникает еще сила, направленная вдоль линий магнитного поля. Следовательно, необходимо изучать пространственные колебания струны, разложив их на движения в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Вначале составим уравнение колебаний струны поперек линий магнитного поля, то есть в плоскости Oxz .

Пусть струна имеет предварительное натяжение T_0 , причем оно не способно подавить магнитострикцию. Вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно к струне, поэтому имеет место поперечная магнитострикция. Для струны с закрепленными концами это приводит к изменению натяжения. Пусть индукция внешнего однородного магнитного поля, действующего на участке $\Delta z = z_2 - z_1$, гармоническому закону:

$$B = B_0 \cos \omega t.$$

Считаем, что намагниченность струны изменяется с той же частотой. В силу четности магнитострикционного эффекта в струне возникает дополнительное натяжение, пропорциональное квадрату магнитной индукции

$$T(t) = T_0 \pm T^* \cos^2 \omega t. \quad (6.2.1)$$

Здесь T^* - амплитудное значение магнитострикционного натяжения. Знак в этом выражении выбирается в соответствии с типом магнитострикции.

Используя результаты предыдущей главы, запишем дифференциальное уравнение с учетом (6.2.1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma AB}{lm_0} \left[B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB}{dt} \left(\int_{z_1}^{z_2} u dz + a \Delta z \right) \right] - \frac{T(t)}{m_0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (6.2.2)$$

Заметим, что для струны нет смысла учитывать явление магнитоупругого гистерезиса, так как внутренним сопротивлением вообще пренебрегается.

Как и в предыдущей главе, это уравнение сводится к бесконечной системе взаимозависимых обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим задачу о параметрических колебаниях струны основного тона.

Получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8}{\pi^2} \gamma_1^2 \cos^2 \omega t \right) \dot{q}_1 + \\ + \left[\left(1 \pm \tilde{p}_1^2 \cos^2 \omega t \right) - \mathbf{St} \frac{4}{\pi^2} \gamma_1^2 \omega \sin 2\omega t \right] q_1 = 0. \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Здесь введено обозначение $\tilde{p}_1^2 = \pi^2 T^*$.

Воспользовавшись подстановкой Хилла, и вводя новую переменную ξ_1 , приводим (6.2.3) к виду

$$\ddot{\xi}_1 + \left[1 - \frac{1}{4} \beta^2 + \left(\pm \tilde{p}_1^2 - \mathbf{St} \frac{4}{\pi^2} \beta \gamma_1^2 \right) \cos^2 \omega t - \right. \\ \left. - \mathbf{St}^2 \frac{16}{\pi^4} \gamma_1^4 \cos^4 \omega t \right] \xi_1 = 0. \quad (6.2.4)$$

Уравнение (6.2.4) сводится к типу (5.1.9). Если пренебречь механическим сопротивлением, получим

$$\ddot{\xi}_1 + \left(1 \pm \tilde{p}_1^2 \cos^2 \omega t - \mathbf{St}^2 \frac{16}{\pi^4} \gamma_1^4 \cos^4 \omega t \right) \xi_1 = 0. \quad (6.2.5)$$

При $\gamma_1 = 0$ сохраняется только параметрическое воздействие за счет переменности натяжения струны. В этом простейшем случае колебания основного тона в плоскости Oxz описываются уравнением

$$\ddot{\xi}_1 + \left(1 - \frac{\beta^2}{4} \pm \tilde{p}_1^2 \cos^2 \omega t \right) \xi_1 = 0, \quad (6.2.6)$$

которое легко может быть приведено к уравнению Матье.

Переходим к составлению уравнения поперечных колебаний струны, происходящих в плоскости Oyz . В этом случае, кроме сил натяжения и сопротивления необходимо учесть магнитную силу, действующую в направлении внешнего магнитного поля. Эта сила возникает вследствие ферромагнитных свойств материала струны, который намагничивается во внешнем магнитном поле и взаимодействует с ним. Плотность этой силы выражается формулой [136]:

$$f = \rho_m H,$$

где H - напряженность магнитного поля, ρ_m - величина, которую принято называть плотностью магнитных зарядов, определяется как

$$\rho_m = -\operatorname{div} \vec{I}_m .$$

Здесь \vec{I}_m - вектор намагниченности. В этой формуле учитывается неоднородность магнитного поля в материале струны на микроуровне.

Запишем дифференциальное уравнение, описывающее колебания струны в плоскости Oyz

$$m_0 \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \beta m_0 \frac{\partial g}{\partial t} - T(t) \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = \rho_m H(z, t) , \quad (6.2.7)$$

где $g(z, t)$ - функция смещений струны вдоль оси Oy , а магнитное поле действует лишь на некотором участке струны:

$$H(z, t) = \begin{cases} 0, & \text{при } z \notin (z_1, z_2) \\ H(t), & \text{при } z \in (z_1, z_2) \end{cases}$$

Заметим, что магнитное поле H в ферромагнетике зависит не только от индукции внешнего магнитного поля B , но от свойств самого ферромагнетика. В нашей задаче амплитудное значение напряженности магнитного поля H_0 считаем заданным. Пусть

$$H(t) = H_0 \cos \omega t.$$

Решение уравнения (6.2.7) ищем в виде:

$$g(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) Y_n(z). \quad (6.2.8)$$

Здесь $g_n(t)$ - некоторые функции времени, подлежащие определению, а $Y_n(z) = \sin \frac{n\pi z}{l}$ - собственные амплитудные функции колебаний струны в плоскости Oyz .

Подставим (6.2.8) в (6.2.7), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[m_0 \ddot{g}_n Y_n + \beta m_0 \dot{g}_n Y_n + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 T(t) g_n Y_n \right] = \rho_m H(z, t). \quad (6.2.9)$$

Умножим уравнение (6.2.9) на $Y_r(z)$ и проинтегрируем по длине струны, используя свойство ортогональности амплитудных функций, получим систему независимых линейных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{g}_r + \beta \dot{g}_r + \frac{T(t)}{m_0} \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 g_r = \frac{2\rho_m}{m_0 l} \int_{z_1}^{z_2} H(z, t) Y_r(z) dz, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (6.2.10)$$

Таким образом, введенные g_r обобщенные координаты являются главными.

С помощью подстановки Хилла приведем эти уравнения к виду

$$\ddot{\zeta}_r + \left[\frac{T(t)}{m_0} \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 - \frac{1}{4} \beta^2 \right] \zeta_r = \rho_m \frac{2}{m_0 l} \int_{z_1}^{z_2} H(z, t) Y_r(z) dz, \quad \{r = 1, 2, \dots\} \quad (6.2.11)$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta}_r + \left[\frac{T_0}{m_0} \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 - \frac{1}{4} \beta^2 \pm \frac{T^*}{m_0} \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \omega t \right] \zeta_r = \\ = \rho_m \frac{2}{m_0 l} \int_{z_1}^{z_2} H(z, t) Y_r(z) dz, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

Введенная здесь новая переменная ζ_r связана с g_r соотношением

$$g_r = \zeta_r \exp\left(-\frac{\beta t}{2}\right).$$

Уравнения (6.2.12) представим в форме

$$\ddot{\zeta}_r + \left(p_r^2 - \frac{1}{4} \beta^2 \pm \tilde{p}_r^2 \cos^2 \omega t \right) \zeta_r = \rho_m \frac{2}{m_0 l} \int_{z_1}^{z_2} H(z, t) Y_r(z) dz,$$

$$\{r = 1, 2, \dots\},$$

где

$$p_r^2 = \frac{\pi^2 T_0 r^2}{l^2 m_0}, \quad \tilde{p}_r^2 = \frac{\pi^2 T^* r^2}{l^2 m_0}.$$

Переходя к безразмерным величинам, получим

$$\ddot{\zeta}_r + \left(p_r^2 - \frac{1}{4} \beta^2 \pm \tilde{p}_r^2 \cos^2 \omega t \right) \zeta_r = 2 \mathbf{St} \rho_m \int_{z_1}^{z_2} H(z, t) Y_r(z) dz,$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}. \quad (6.2.13)$$

В рассматриваемом случае интеграл в правой части можно вычислить, в результате имеем

$$\ddot{\zeta}_r + \left(p_r^2 - \frac{1}{4} \beta^2 \pm \tilde{p}_r^2 \cos^2 \omega t \right) \zeta_r = \frac{4 \mathbf{St} \rho_m}{\pi r} \gamma_r \cos \omega t,$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}. \quad (6.2.14)$$

Вводя обозначения

$$\omega t = 2\tau; \quad \alpha_r = \frac{4}{\omega^2} \left(p_r^2 - \frac{1}{4} \beta^2 \right);$$

$$\varepsilon_r = \frac{4\tilde{p}_r^2}{\omega^2}; \quad \chi_r = \mathbf{St} \frac{16\rho_m}{\omega^2 \pi r} \gamma_r$$

получим неоднородные дифференциальные уравнения параметрического типа, причем параметрическое и силовое воздействие взаимосвязаны:

$$\frac{d^2 \zeta_r}{d\tau^2} + \left(\alpha_r \pm \varepsilon_r \cos^2 2\tau \right) \zeta_r = \chi_r \cos 2\tau, \quad (6.2.15)$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}.$$

Это обстоятельство позволяет построить плоскую диаграмму устойчивости (рис. 21). Светлые области на диаграмме соответствуют зонам параметрического возбуждения.

Как и в уравнении (6.2.4), при $\gamma_r = 0$ сохраняется только параметрическое воздействие за счет переменности натяжения струны. В этом случае для данного тона колебаний имеем дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\zeta}_r + \left(p_r^2 - \frac{1}{4} \beta^2 \pm \tilde{p}_r^2 \cos^2 \omega t \right) \zeta_r = 0, \quad \{r = 1, 2, \dots\}. \quad (6.2.16)$$

Для первой моды уравнения (6.2.5) и (6.2.16) совпадают, следовательно, параметрическое возбуждение при $\gamma_1 = 0$ в обеих плоскостях наступает при одинаковых условиях. Очевидно, это справедливо для любой изолированной моды. Если же $\gamma_r \neq 0$; ($r = 1, 2, \dots$), то условия параметрического возбуждения в координатных плоскостях различны.

Диаграмма устойчивости для уравнения типа (6.2.15)

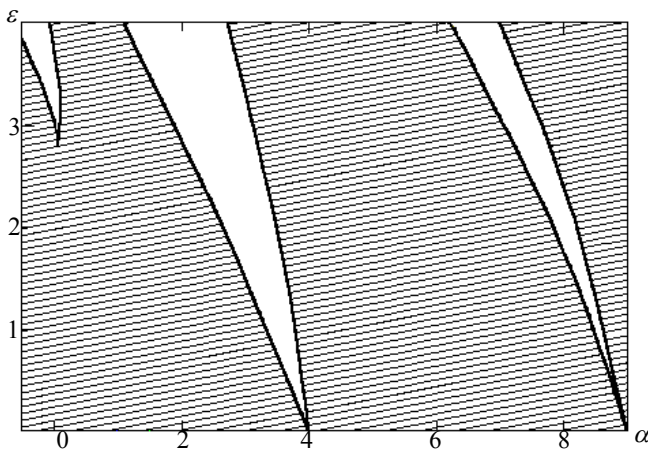


Рис. 21

Таким образом, подбором ширины и расположения активного участка можно получить случай, когда колебание данного тона резонирует в одной плоскости и не резонирует в другой. Возможен и случай одновременного параметрического возбуждения колебаний в обеих координатных плоскостях.

6.3 Поперечные колебания стержня в магнитном поле с учетом магнитострикции

Рассмотрим линейные поперечные колебания призматического ферромагнитного стержня в нестационарном магнитном поле с учетом магнитострикции. При выводе дифференциального уравнения учтем внешний и внутренний диссипативные факторы. Считаем, что в результате магнитострикции изменяется только длина стержня. Понятно, что этот эффект существенно повлияет на колебания системы только при граничных условиях, не допус-

кающих смещения его концов. В этом случае он приводит к изменению растягивающей или сжимающей стержень силы. Влиянием магнитострикции на поперечные размеры стержня пренебрежем. Магнитный гистерезис также не учитывается.

Воспользовавшись принципом Даламбера, составляем дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
 EJ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \beta * \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} \right) + m_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} \right) + N \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\
 + \frac{\sigma AB}{l} \left[B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB}{dt} \left(\int_{z_2}^{z_1} u dz + a \Delta z \right) \right] = 0
 \end{aligned}
 \tag{6.3.1}$$

Продольное усилие N в балке имеет знак '-', если оно является растягивающим и '+', если - сжимающим.

За счет магнитострикции возникает дополнительное продольное усилие ΔN_m

$$\Delta N_m = \pm \frac{EA \Delta l_m}{l} ,$$

Знак здесь выбирается в зависимости от типа магнитострикции.

В случае переменного магнитного поля

$$B = B_0 \cos \omega t ,$$

учитывая, что магнитострикция является четным эффектом, получим функцию удлинения стержня

$$\Delta l_m = \zeta_m B_0^2 \cos^2 \omega t$$

Здесь коэффициент ζ_m учитывает магнитострикционные свойства материала и в зависимости от типа магнитострикции имеет положительное или отрицательное значение. Тогда

$$\Delta N_m = \zeta_m \frac{EAB_0^2}{l} \cos^2 \omega t.$$

Следовательно, полное продольное усилие в балке складывается из двух составляющих:

$$N(t) = \pm N_0 + \zeta_m \frac{EAB_0^2}{l} \cos^2 \omega t. \quad (6.3.2)$$

При этом дифференциальное уравнение (6.3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} & EJ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \beta^* \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} \right) + m_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \\ & + \left(\pm N_0 + \zeta_m \frac{EAB_0^2}{l} \cos^2 \omega t \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ & + \frac{\sigma AB}{l} \left[B \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB}{dt} \left(\int_{z_2}^{z_1} u dz + \mathbf{a} \Delta z \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Это уравнение сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r + \left(\beta + \beta^* p_r^2 \right) \dot{q}_r + \left[p_r^2 + \left(\pm N_0 + \zeta_m \frac{EAB^2}{l} \right) \frac{\eta_r}{m_0 Y_r^*} \right] q_r = \\ = - \frac{\sigma AB}{\alpha_r l m_0 Y_r^*} \gamma_r \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{B \gamma_n}{\alpha_n} \dot{q}_n + \frac{dB}{dt} \left(\frac{\gamma_n}{\alpha_n} q_n + \mathbf{a} \Delta z \right) \right], \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

$$\{r = 1, 2, \dots\}.$$

Здесь учтено, что $\int_0^l X_n'' X_r dz = \begin{cases} 0, & \text{при } n \neq r; \\ \eta_r, & \text{при } n = r. \end{cases}$

Для исследования параметрического возбуждения в одномерном приближении в случае, когда замыкающий контур расположен в плоскости Oyz , достаточно рассмотреть однородное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{q}_1 + \left(\beta + \beta^* p_1^2 + \frac{\sigma AB^2 \gamma_1^2}{\alpha_1^2 l m_0 Y_1^*} \right) \dot{q}_1 + \left[p_1^2 + \frac{\sigma AB \gamma_1^2}{\alpha_1^2 l m_0 Y_1^*} \frac{dB}{dt} + \left(\pm N_0 + \varsigma_m \frac{EAB^2}{l} \right) \frac{\eta_1}{m_0 Y_1^*} \right] q_1 = 0$$

Запишем его в безразмерном виде

$$\ddot{q}_1 + \left(\beta + \beta^* + \frac{\mathbf{St}}{\alpha_1^2 Y_1^*} \gamma_1^2 \cos^2 \omega t \right) \dot{q}_1 + \left[1 - \frac{\mathbf{St}}{2\alpha_1^2 Y_1^*} \gamma_1^2 \omega \sin 2\omega t + \frac{1}{\mathbf{Fr}} \left(\pm N_0 + \varsigma_m \cos^2 \omega t \right) \frac{\eta_1}{Y_1^*} \right] q_1 = 0. \quad (6.3.5)$$

Здесь введено число Фруда $\mathbf{Fr} = \frac{EAB_0^2}{l^2 p_1^2}$, причем в качестве ха-

рактерной силы принято амплитудное значение магнитострикционного натяжения.

С помощью подстановки Хилла уравнение (6.3.5) можно привести к форме

$$\begin{aligned}
& \ddot{\xi}_1 + \left\{ 1 \pm \frac{N_0}{Fr} \frac{\eta_1}{\alpha_1} - \frac{1}{4} (\beta + \beta^*)^2 + \right. \\
& \left. + \left[\frac{1}{Fr} \zeta_m \frac{\eta_1}{\alpha_1} - \frac{St}{2} (\beta + \beta^*) \frac{\gamma_1^2}{\alpha_1^2 Y_1} \right] \cos^2 \omega t - \right. \\
& \left. - St^2 \frac{1}{4\alpha_1^4 Y_1 * 2} \gamma_1^4 \cos^4 \omega t \right\} \xi_1 = 0.
\end{aligned} \tag{6.3.6}$$

Новая переменная ξ_1 здесь введена так же, как и в параграфе 5.1. Параметрическое уравнение (6.3.6) относится к типу (5.1.9). Предварительное натяжение изменяет частоту колебаний системы, а натяжение за счет магнитострикции влияет на устойчивость ее положения равновесия. Если пренебречь диссипативными процессами и принять, что $N_0 = 0$; $\gamma_1 = 0$, т. е. предварительное натяжение (сжатие) стержня отсутствует и активный участок выбран таким образом, что электромагнитное воздействие отсутствует, то получим уравнение

$$\ddot{\xi}_1 + \left(1 + \frac{1}{Fr} \zeta_m \frac{\eta_1}{\alpha_1} \cos^2 \omega t \right) \xi_1 = 0.$$

Переходя к независимой переменной τ , получим уравнение типа

$$\ddot{\xi}_1 + \frac{4}{\omega^2} \left(1 + \frac{1}{Fr} \zeta_m \frac{\eta_1}{\alpha_1} \cos^2 2\tau \right) \xi_1 = 0, \tag{6.3.7}$$

которое сводится к уравнению Матье, а, следовательно, нетрудно вычислить параметры резонансного возбуждения или затухающего процесса при любых заданных условиях.

6.4 Линейные колебания струны в продольном магнитном поле с учетом магнитострикции

Рассмотрим задачу [100] о линейных колебаниях ферромагнитной струны с закрепленными концами в продольном магнитном поле, создаваемом соленоидом (рис. 22). Пусть индукция магнитного поля изменяется по гармоническому закону $\vec{B} = B_0 \vec{z}^0 \cos \omega t$ и направлена по оси Oz .

Схема колебаний струны в магнитном поле соленоида

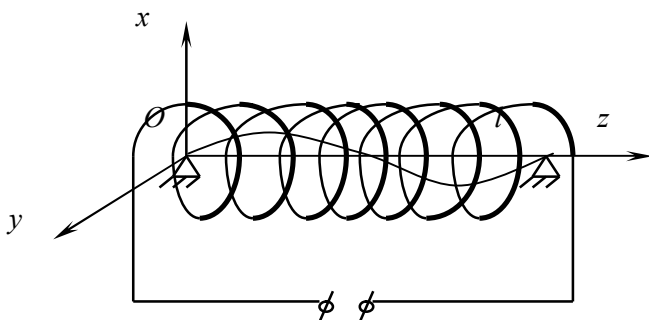


Рис. 22

При этом натяжение струны, как и в случае с поперечным магнитным полем, изменяется по закону

$$T(t) = T_0 \pm T^* \cos^2 \omega t$$

где T_0 – предварительное натяжение струны, T^* – амплитудное значение магнитострикционного натяжения.

Плоскость колебаний в этой задаче определяется начальными условиями. Пусть, например, колебания совершаются в плоскости Oxz . Запишем дифференциальное уравнение линейных поперечных колебаний струны с учетом переменности ее натяжения:

$$m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(t) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (6.4.1)$$

Метод Фурье в этом случае позволяет получить независимые дифференциальные уравнения, следовательно, использованные обобщенные координаты являются главными:

$$\ddot{q}_r + \frac{T_0 \pm T^* \cos^2 \omega t \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2}{m_0} q_r = 0; \quad \{r = 1, 2, \dots\}, \quad (6.4.2)$$

После преобразования они сводятся к уравнениям Матье:

$$\frac{d^2 q_r}{d\tau^2} + (\alpha_r \pm 2\varepsilon_r \cos 2\tau) q_r = 0; \quad \{r = 1, 2, \dots\}, \quad (6.4.3)$$

где

$$\alpha_r = \frac{2T_0 + T^* \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2}{2\omega^2 m_0}; \quad \varepsilon_r = \frac{T^* \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2}{4\omega m_0}. \quad (6.4.4)$$

Воспользовавшись диаграммой Айнса-Стретта, по заданным значениям m_0 , T_0 , T^* , l , ω можно решить вопрос об устойчивости положения равновесия струны, то есть выяснить возникает ли параметрический резонанс. Можно решить и обратную задачу: задавшись значениями α_r , ε_r , например, из неустойчивой зоны при заданной глубине пульсации натяжения T^* определить частоту изменения магнитного поля и предварительное натяжение, соответствующие параметрическому возбуждению.

Приведем некоторые оценочные расчеты для субгармонического возбуждения первой и второй мод. Пусть никелевая струна с объемной плотностью $\rho = 3,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ и модулем упругости $E = 196 \cdot 10^9 \text{ Па}$ имеет длину $l = 0,4 \text{ м}$ и площадь поперечного сечения $A = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ и находится в переменном магнитном поле, амплитудное значение индукции которого $B_0 = 250 \cdot 10^4 \text{ Тл}$. Известно [137], что в никеле возникает отрицательная магнитострикция, приводящая к укорачиванию образца, то есть к дополнительному

натяжению струны. При данном значении магнитной индукции возникает относительное удлинение

$$\frac{\Delta l^*}{l} \approx 3 \cdot 10^{-5},$$

при котором амплитудное значение магнитоэластического натяжения составляет

$$T^* = EA \frac{\Delta l^*}{l} \approx 2,4 \text{ Н.}$$

Из неустойчивой области диаграммы Айнса-Стретта выберем, например, значения $\alpha_1 = 1$, $\varepsilon_1 = 0,25$. Как показывают расчеты по формулам (6.4.4), при заданных значениях параметрическое возбуждение первой моды колебаний происходит при предварительном натяжении струны $T_0 = 2,3 \text{ Н}$ и частоте изменения магнитной индукции $\omega \approx 200 \text{ Гц}$. Вторая мода колебаний в этой же системе возбуждается при $\alpha_2 = 1$, $\varepsilon_2 = 0,25$, когда $T_0 = 2,37 \text{ Н}$, $\omega = 400 \text{ Гц}$.

Задача рассмотрена в линейной постановке и без учета диссипации. Если же учесть нелинейность упругой характеристики системы и линейное сопротивление одновременно, то амплитуда колебаний при параметрическом резонансе ограничена.

6.5 Физическая линеаризация вынужденных колебаний струны при помощи магнитоэластики

Рассмотрим вынужденные нелинейные колебания ферромагнитной струны, в продольном магнитном поле. Пусть на струну действует поперечная вынуждающая сила интенсивности $F(z, t)$. С учетом магнитоэластического натяжения получим дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} -$$

(6.5.1)

$$- \frac{EA}{2lm_0} \left[\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz \right] \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \mp \frac{T^* \cos^2 \omega t}{m_0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F(z, t).$$

Из (6.5.1) получим систему неоднородных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r + \\ & + \frac{E\pi^4 r^2}{4} q_r \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q_n^2 \pm \frac{T^*}{m_0} \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \omega t \cdot q_r = f_r(t) \\ & \{r = 1, 2, \dots\}, \end{aligned} \quad (6.5.2)$$

где $f_r(t)$ - обобщенная вынуждающая сила, отнесенная к соответствующей обобщенной координате.

В одномодовом приближении рассматривается только одно уравнение:

$$\ddot{q}_1 + \beta \dot{q}_1 + p_1^2 q_1 + \frac{E\pi^4}{4\rho l^4} q_1^3 \pm \frac{T^*}{m_0} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \omega t \cdot q_1 = f_1(t). \quad (6.5.3)$$

При положительной магнитострикции, приводящей к удлинению ферромагнитного образца, в этом уравнении последний член берется со знаком минус. В этом случае при некоторых условиях в установившемся режиме колебаний можно уравновесить члены

$$\frac{E\pi^4}{4\rho l^4} q_1^3 \quad \text{и} \quad \frac{T^* \pi^2}{m_0 l^2} q_1 \cos^2 \omega t .$$

Таким образом, имеется возможность физически линеаризовать уравнение (6.5.3). Очевидно, это возможно, если установившееся решение линеаризованной системы выражается простой гармонической функцией той же частоты, что и периодическое изменение магнитного поля:

$$q_1 = q_{01} \cos \omega t .$$

При этом относительное магнитострикционное растяжение струны должно иметь амплитудное значение

$$\frac{\Delta l^*}{l} = \left(\frac{q_{01} \pi}{2l} \right)^2 . \quad (6.5.3)$$

Полученное значение относительной амплитудной деформации зависит от q_{01} , поэтому необходимо, чтобы установившейся режим колебаний был устойчив. С энергетической точки зрения это возможно, так как имеются возбуждающая и диссипативная силы. Причем, энергия, вносимая в систему возбуждающей силой, пропорциональна первой степени амплитуды колебаний q_{01} , а диссипативная функция пропорциональна второй степени q_{01} . При этих условиях образуется устойчивый предельный цикл. Не скомпенсированные нелинейные члены так же влияют на энергетическое состояние системы, но в силу сходимости ряда, их можно рассматривать как малое возмущение, не нарушающее устойчивости колебаний. Величина q_{01} определяется из условия баланса энергии:

$$\int_0^{T_1} [f_1(t) - \beta \dot{q}_1] \dot{q}_1 dt = 0 ,$$

где $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$.

В соответствие амплитудному значению относительной магнитострикционной деформации можно поставить амплитудное значение магнитной индукции B_0 , воспользовавшись графиком зависимости [139]

$$B_0 = f\left(\frac{\Delta l^*}{l}\right)$$

для данного ферромагнетика.

Итак, в качестве вывода отметим, что магнитострикционные свойства вибрационных систем можно использовать для физической линейаризации основного тона колебаний.

6.6 Замечание о термопараметрическом возбуждении колебаний

При исследовании вибраций токонесущих систем необходимо обращать внимание на тепловые эффекты, вызванные джоулевым нагревом. В работах [65-67, 101, 139] предприняты попытки теоретически и экспериментально исследовать параметрическое возбуждение колебаний струны при пропускании по ней переменного электрического тока. Это явление получило название термопараметрического возбуждения колебаний и объясняется периодическим изменением натяжения струны при импульсном нагревании.

Обычно предлагается рассмотреть эту задачу в простейшей линейной постановке, когда натяжение струны выражается явной функцией времени $T(t)$. Задача решается с использованием главных координат и приводится к системе независимых дифференциальных уравнений. Если предположить, что сила тока, пропускаемого по струне, изменяется гармонически с постоянной амплитудой, то каждое из уравнений приводится к типу Матье.

Однако результаты такой теории существенно расходятся с экспериментом. Очевидно, линейная теория в этом случае неудов-

летворительна. Какие же нелинейные эффекты следует учесть, чтобы приблизить теорию к эксперименту? Прежде всего, очевидно, следует отбросить гипотезу абсолютно гибкой струны, как это сделано в параграфе 1.7. Это позволит учесть зависимость натяжения струны от обобщенных координат. Однако в данной задаче проявляется и другая нелинейность, связанная с процессом теплообмена струны с окружающей средой. Визуальные наблюдения за цветом различных участков раскаленной струны, подсказывают, что теплообмен участков, расположенных на пучностях больше, чем в узлах. Очевидно, это связано с различными условиями теплообмена при обдуве на разных участках колеблющейся струны. Понятно, что этот процесс отразится на натяжении струны в виде зависимости функции ее натяжения от обобщенных скоростей.

Таким образом, требуется определить функцию натяжения струны в виде $T(q, \dot{q}, t)$. Обсудим лишь принципиальные моменты, связанные с решением этой проблемы.

Прежде всего, заметим, что сопротивление струны в зависимости от температуры меняется, а, следовательно, амплитудное значение силы тока не является постоянной величиной. К тому же процессы теплоотдачи запаздывают по отношению к нагреванию. Это запаздывание необходимо оценить и учесть. Таким образом, задача приводится к дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом.

Учесть теплообмен струны с окружающей средой за счет обдува не менее сложно. К сожалению, нам неизвестны экспериментальные работы, в которых исследуются процессы теплообмена колеблющихся систем с окружающей средой с учетом обдува.

Таким образом, при исследовании статики и динамики токонесущих конструкций необходимо производить расчеты на их термопараметрическую устойчивость. Комбинируя задачи, рассмотренные в предыдущих главах и параграфах с условиями термопараметрического возбуждения, можно получить интересные случаи с возможными практическими приложениями. В частности, параметрическое возбуждение при определенных условиях может проявляться во всех задачах, рассмотренных в третьей главе. То есть может возникнуть необходимость изучения одновременного силового и параметрического воздействий. Интересными могут ока-

заться задачи об одновременном воздействии двух параметрических факторов. Это возможно, например, при одновременном обеспечении условий магнитострикционного и термопараметрического возбуждений. Очевидно, возможен случай, когда эти два фактора параметрического возбуждения энергетически компенсируют друг друга. При некоторых условиях термическую зависимость натяжения струны с закрепленными концами можно использовать для физической линеаризации вибрационной системы по принципу, описанному в параграфе 6.5.

7 Колебания электропроводной струны в магнитном поле с неклассическими граничными условиями

7.1 Собственные колебания струны с демпферным закреплением на одном из концов

Существует класс задач, в которых граничные условия систем с распределенными параметрами учитывают упругие, инерционные, диссипативные и другие свойства закреплений. Такие граничные условия будем называть неклассическими. Значительный цикл работ по исследованию колебаний систем с распределенными параметрами при различных неклассических типах граничных условий выполнен в Нижнем Новгороде (Горьком) [58-59] и на Украине [129,130]. Основной особенностью систем с неклассическими граничными условиями является образование двухволновых процессов, которым соответствуют комплексные амплитудные формы.

В работах [80-87] показано, что для одномерных упругих систем при наличии вязкого демпфера на одном из концов собственные формы представляют собой суперпозицию двух амплитудных функций, т. е. колебания носят двухволновой характер. В главе первой настоящей монографии показано, что электромагнитное воздействие на колебания систем с распределенными параметрами даже при классических граничных условиях тоже приводит к двухволновым процессам.

Исследуем проблему электромагнитного воздействия на собственные колебания электропроводной немагнитной струны с демпферным закреплением на правом конце. При такой постановке задачи имеется одновременно два фактора, приводящих к возникновению двухволновых процессов.

Пусть струна, изготовленная из диа- или парамагнитного материала, помещена в однородное стационарное магнитное поле, действующее на участке $[z_1; z_2]$, а концы струны замкнуты идеальной электрической цепью. Вектор магнитной индукции \vec{B} направлен по оси Oy (рис. 23).

Схема колебаний струны с демпферным закреплением
на правом конце

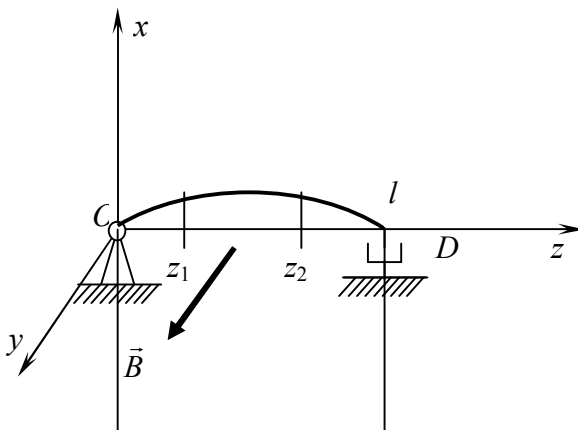


Рис. 23

Граничные условия на левом конце запишем как обычно:

$$u(0, t) = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{z=0} = 0. \quad (7.1.1)$$

Граничное условие на правом конце запишем с учетом инерционных свойств подвижных частей демпфера, масса которых m_D . Следовательно, в точке D возникает сила инерции:

$$F_{ин} = m_D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Считаем, что сила вязкого сопротивления демпфера пропорциональна первой степени скорости:

$$F_c = \mu_D \frac{\partial u}{\partial t},$$

где μ_D - коэффициент вязкости демпфера.

В точке D возникает также нормальная реакция связи \vec{N} . На основании принципа Даламбера для точки D имеем:

$$\vec{T}_0 + \vec{F}_c + \vec{N} + \vec{F}_{un} = 0.$$

В проекции на ось Ox получим:

$$T_0 \sin \gamma + F_c + F_{un} = 0.$$

Здесь γ - угол, образованный силой натяжения струны \vec{T}_0 с направлением оси Oz . В рамках гипотезы абсолютно гибкой струны допустимо принять, что

$$\sin \gamma \approx \gamma = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Тогда граничное условие на правом конце струны запишется в виде:

$$\left(T_0 \frac{\partial u}{\partial z} + \mu_D \frac{\partial u}{\partial t} + m_D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \Bigg|_{z=l} = 0. \quad (7.1.2)$$

Задача с такими граничными условиями, но без электромагнитного воздействия исследована в работе [82], где показано, что решение удобно искать в комплексном виде, в частности вводятся комплексные волновые числа:

$$\lambda_n = \tilde{\alpha}_n + i\tilde{\beta}_n, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7.1.3)$$

При этом значения $\tilde{\alpha}_n$ и $\tilde{\beta}_n$ учитывают свойства демпфера. Назовем их соответственно: $\tilde{\alpha}_n$ - волновой показатель, $\tilde{\beta}_n$ - диссипативный показатель.

Введем величины, характеризующие свойства демпфера

$$R = \frac{\mu_D}{\sqrt{m_0 T_0}} \quad \text{и} \quad R_1 = \frac{m_D}{m_0},$$

причем R - величина безразмерная, а R_1 имеет размерность длины.

Значения $\tilde{\alpha}_n$ и $\tilde{\beta}_n$ находятся из соответствующих частотных уравнений. В случае, когда внешнее сопротивление и магнитное поле отсутствуют, а масса подвижных частей демпфера не учитывается, т.е. $R_1 = 0$, имеется три варианта решений:

1) при "мягком" демпфере $R < 1$

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}; & (n = 1, 2, 3, \dots), \\ \tilde{\beta} = \frac{1}{l} \operatorname{arcth} R. \end{cases} \quad (7.1.4)$$

2) при "жестком" демпфере $R > 1$

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_n = \frac{n\pi}{l}; & (n = 1, 2, 3, \dots), \\ \tilde{\beta} = \frac{1}{l} \operatorname{arcth} \frac{1}{R}. \end{cases} \quad (7.1.5)$$

3) при $R \rightarrow 1$ $\tilde{\beta} \rightarrow \infty$ периодических решений нет, демпфер гасит всякие колебания, возникающие в струне.

Заметим, что при $R_1 = 0$ в случаях 1) и 2) для всех парциальных колебаний $\tilde{\beta}_n$ имеет одинаковые значения, то есть является частотно независимым. При этом функции смещений для того и другого случаев запишутся в виде:

$$u(z, t) = \exp(-\tilde{\beta} \cdot at) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[X_n^*(z) \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) + X_n^{**}(z) \sin(\omega_n t + \varepsilon_n) \right], \quad (7.1.6)$$

где A_n и ε_n - амплитуды и начальные фазы парциальных колебаний, определяемые из начальных условий, $\omega_n = \tilde{\alpha}_n a$ - собственные частоты, а амплитудные функции, здесь по-прежнему

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{m_0}}.$$

В решении (7.1.6) для каждого парциального колебания выделяются две амплитудные функции:

$$X_n^*(z) = \sin(\tilde{\alpha}_n z) \cdot \operatorname{ch}(\tilde{\beta} \cdot z), \quad (7.1.7)$$

$$X_n^{**}(z) = -\cos(\tilde{\alpha}_n z) \cdot \operatorname{sh}(\tilde{\beta} \cdot z).$$

В случае, когда масса подвижных частей демпфера учитывается ($R_1 \neq 0$), частотные уравнения образуют систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\alpha}_n = \frac{1}{R_1} \sqrt{\left[(R_1 \tilde{\beta}_n - R) \cdot \operatorname{th}(\tilde{\beta}_n l) + 1 \right] \cdot \left[(R - R_1 \tilde{\beta}_n) \frac{1}{\operatorname{th}(\tilde{\beta}_n l)} - 1 \right]}, \\ \tilde{\alpha}_n = \frac{1}{l} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\left[(R_1 \tilde{\beta}_n - R) \cdot \operatorname{th}(\tilde{\beta}_n l) + 1 \right]}{\left[(R - R_1 \tilde{\beta}_n) \frac{1}{\operatorname{th}(\tilde{\beta}_n l)} - 1 \right]}} + (n-1)\pi \right], \quad (n=1,2,3..), \end{array} \right. \quad (7.1.8)$$

которую не удастся решить аналитически. Из этих уравнений видно, что фактор затухания в этом случае является частотно зависимым.

Проведенный анализ [82], показывает, что с увеличением коэффициента вязкости демпфера понижаются значения частот собственных парциальных колебаний, а факторы затухания растут. А с увеличением массы подвижных частей демпфера снижаются и частоты собственных парциальных колебаний и факторы затухания.

Функция смещений при колебаниях струны с учетом массы подвижных частей демпфера записывается в виде:

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\tilde{\beta}_n \cdot at) \left[X_n^*(z) \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) + X_n^*(z) \sin(\omega_n t + \varepsilon_n) \right] \quad (7.1.9)$$

Здесь амплитудные функции учитывают частотную зависимость фактора затухания:

$$X_n^*(z) = \sin(\tilde{\alpha}_n z) \cdot \operatorname{ch}(\tilde{\beta}_n \cdot z), \quad (7.1.10)$$

$$X_n^{**}(z) = -\cos(\tilde{\alpha}_n z) \cdot \operatorname{sh}(\tilde{\beta}_n \cdot z).$$

Воспользуемся дифференциальным уравнением (1.1.4), описывающим колебания струны в магнитном поле, и рассмотрим его при граничных условиях (7.1.1) и (7.1.2) в случае, когда $R_1 = 0$, то есть масса подвижных частей демпфера не учитывается.

Применим метод Фурье, представив динамическую функцию смещений в виде бесконечного ряда

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(z)$$

по собственным комплексным амплитудным функциям:

$$\begin{aligned} X_n(z) &= X_n^*(z) + iX_n^{**}(z) = \\ &= \sin(\tilde{\alpha}_n z) \cdot \operatorname{ch}(\tilde{\beta} z) + i \cdot \cos(\tilde{\alpha}_n z) \cdot \operatorname{sh}(\tilde{\beta} z) = \sin(\lambda_n z), \end{aligned}$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots). \quad (7.1.11)$$

Заметим, что при таком представлении функция смещений для каждого парциального колебания является комплексной, ее действительная и мнимая части соответствуют движениям струны, смещенным относительно друг друга по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Оба движения совершаются с одной парциальной частотой, поэтому для описания движения данного парциального колебания достаточно одной действительной обобщенной координаты.

Применив процедуру Фурье к уравнению (1.1.4), получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_n X_n - a^2 \frac{d^2 X_n}{dz^2} q_n + \beta \dot{q}_n X_n + \frac{\sigma B^2 A}{m_0 l} \cdot \dot{q}_n \int_{z_1}^{z_2} X_n dz \right] = 0. \quad (7.1.12)$$

Используем для поставленной в этом параграфе задачи функции (1.7.11), хотя, строго говоря, они не точно соответствуют ей, поскольку получены без учета внешней диссипации и электромагнитного воздействия.

Заметим, что функции (7.1.11) удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{d^2 X_n}{dz^2} = -\lambda_n^2 \cdot X_n(z).$$

Тогда дифференциальное уравнение (7.1.12) можно записать в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_n \sin(\lambda_n z) + \beta \dot{q}_n \sin(\lambda_n z) + p_n^2 q_n \sin(\lambda_n z) + \frac{\sigma B^2 A}{m_0 l} \cdot \dot{q}_n \int_{z_1}^{z_2} \sin(\lambda_n z) dz \right] = 0, \quad (7.1.13)$$

где

$$p_n^2 = \lambda_n^2 \cdot a^2 = (\tilde{\alpha}_n + i\tilde{\beta})^2 a^2. \quad (7.1.14)$$

Используем и комплексно-сопряженную форму записи:

$$\begin{aligned} \hat{X}_n(z) &= X_n^*(z) - iX_n^{**}(z) = \\ &= \sin(\tilde{\alpha}_n z) \cdot \operatorname{ch}(\tilde{\beta} z) - i \cdot \cos(\tilde{\alpha}_n z) \cdot \operatorname{sh}(\tilde{\beta} z) = \sin(\hat{\lambda}_n z), \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

где $\hat{\lambda}_n = \tilde{\alpha}_n - i\tilde{\beta}$.

Соответственно получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{q}_n \sin(\hat{\lambda}_n z) + \beta \dot{q}_n \sin(\hat{\lambda}_n z) + \hat{p}_n^2 q_n \sin(\hat{\lambda}_n z) + \right. \\ \left. + \frac{\sigma B^2 A}{m_0 l} \cdot \dot{q}_n \int_{z_1}^{z_2} \sin(\hat{\lambda}_n z) dz \right] = 0, \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

где

$$\hat{p}_n^2 = \hat{\lambda}_n^2 \cdot a^2 = (\tilde{\alpha}_n - i\tilde{\beta})^2 a^2. \quad (7.1.17)$$

Вычислим интегралы

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} \sin(\lambda_n z) dz &= \int_{z_1}^{z_2} [\sin(\tilde{\alpha}_n z) \cdot \operatorname{ch}(\tilde{\beta} \cdot z) + i \cdot \cos(\tilde{\alpha}_n z) \cdot \operatorname{sh}(\tilde{\beta} \cdot z)] dz = \\ &= \gamma_n^{(1)} + i\gamma_n^{(2)}, \end{aligned}$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \sin(\hat{\lambda}_n z) dz = \int_{z_1}^{z_2} [\sin(\tilde{\alpha}_n z) \cdot \operatorname{ch}(\tilde{\beta} \cdot z) - i \cdot \cos(\tilde{\alpha}_n z) \cdot \operatorname{sh}(\tilde{\beta} \cdot z)] dz =$$

$$= \gamma_n^{(1)} - i \gamma_n^{(2)},$$

здесь обозначено

$$\gamma_n^{(1)} = \int_{z_1}^{z_2} \sin(\tilde{\alpha}_n z) \cdot \operatorname{ch}(\tilde{\beta} \cdot z) \cdot dz, \quad (7.1.17)$$

$$\gamma_n^{(2)} = \int_{z_1}^{z_2} \cos(\tilde{\alpha}_n z) \cdot \operatorname{sh}(\tilde{\beta} \cdot z) dz.$$

Умножим X_n на функцию

$$f_r(z) = \frac{\sin(\tilde{\alpha}_r z)}{\operatorname{ch}(\tilde{\beta} z)}, \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

и их произведение проинтегрируем в пределах длины струны. С учетом обозначения

$$\chi_{nr} = \int_0^l \cos(\tilde{\alpha}_n z) \cdot \sin(\tilde{\alpha}_r z) \cdot \operatorname{th}(\tilde{\beta} z) dz, \quad (7.1.18)$$

получим

$$\int_0^l X_n(z) f_r(z) dz = \begin{cases} l + i \chi_{nr}; & \text{при } n = r \\ & (n, r = 1, 2, 3, \dots), \\ i \chi_{nr}; & \text{при } n \neq r \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение (7.1.13) примет вид:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{r-1} \left[i \cdot \chi_{nr} (\ddot{q}_n + \beta \dot{q}_n + p_n^2 q_n) \right] + (l + i \cdot \chi_{rr}) \cdot (\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r) + \\
& \quad + \sum_{n=r+1}^{\infty} \left[i \cdot \chi_{nr} (\ddot{q}_n + \beta \dot{q}_n + p_n^2 q_n) \right] + \\
& \quad + \frac{\sigma AB_0^2}{lm_0} \cdot \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin(\tilde{\alpha}_r z)}{\operatorname{ch}(\tilde{\beta} z)} dz \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\gamma_n^{(1)} + i \cdot \gamma_n^{(2)}) \dot{q}_n \right] = 0, \\
& \quad \{r = 1, 2, 3, \dots\}. \tag{7.1.18}
\end{aligned}$$

Проделав то же для комплексно-сопряженного уравнения, получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \hat{X}_n(z) \cdot f_r(z) dz = \begin{cases} l - i \cdot \chi_{nr}; \text{ при } n=r \\ \\ -i \cdot \chi_{nr}; \text{ при } n \neq r \end{cases} \quad (n, r = 1, 2, 3, \dots) \\
& - \sum_{n=1}^{r-1} \left[i \cdot \chi_{nr} (\ddot{q}_n + \beta \dot{q}_n + \hat{p}_n^2 q_n) \right] + (l - i \cdot \chi_{rr}) \cdot (\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + \hat{p}_r^2 q_r) - \\
& \quad - \sum_{n=r+1}^{\infty} \left[i \cdot \chi_{nr} (\ddot{q}_n + \beta \dot{q}_n + \hat{p}_n^2 q_n) \right] + \\
& \quad + \frac{\sigma AB_0^2}{lm_0} \cdot \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin(\tilde{\alpha}_r z)}{\operatorname{ch}(\tilde{\beta} z)} dz \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\gamma_n^{(1)} - i \cdot \gamma_n^{(2)}) \cdot \dot{q}_n \right] = 0 \\
& \quad \{r = 1, 2, 3, \dots\} \tag{7.1.19}
\end{aligned}$$

Сложив (7.1.18) с уравнением (7.1.19), получим:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + \Omega_r^2 \cdot q_r + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} [\chi_{nr} \cdot \hat{\Omega}_n^2 \cdot q_n] +$$

(7.1.20)

$$+ \frac{\sigma AB_0^2}{l^2 m_0} \tilde{\delta}_r \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^{(1)} \cdot \dot{q}_n) = 0,$$

$$\{r = 1, 2, 3, \dots\},$$

где

$$\Omega_r^2 = \operatorname{Re}(p_r^2) = (\tilde{\alpha}_r^2 - \tilde{\beta}^2) \cdot a^2, \quad \hat{\Omega}_n^2 = \operatorname{Im}(p_n^2) = 2\tilde{\alpha}_n \tilde{\beta} \cdot a^2$$

и введено обозначение

$$\tilde{\delta}_r = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin(\tilde{\alpha}_r z)}{\operatorname{ch}(\tilde{\beta} z)} dz. \quad (7.1.21)$$

Уравнение (7.1.20) содержит только действительные параметры. А наличие суммы, с производными обобщенных координат, указывает на взаимосвязь парциальных колебаний посредством электромагнитного взаимодействия.

Если выполняется условие:

$$\tilde{\delta}_r = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin(\tilde{\alpha}_r z)}{\operatorname{ch}(\tilde{\beta} z)} dz = 0, \quad (r = 1, 2, 3, \dots), \quad (7.1.22)$$

то r -е парциальное колебание изолировано от электромагнитного воздействия.

Представим уравнения (7.1.20) в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_r + \beta \dot{q}_r + \tilde{\Omega}_r^2 \cdot q_r + \sum_{n=1}^{\infty} (\chi_{nr} \hat{\Omega}_n^2 \cdot q_n) + \mathbf{St} \cdot \tilde{\delta}_r \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^{(1)} \cdot \dot{q}_n) = 0,$$

$$\{r = 1, 2, 3, \dots\}. \quad (7.1.23)$$

Определив границы числа Стюарта по одномодовому приближению, получим

$$\frac{0,1\beta}{\tilde{\delta}_1 \cdot \gamma_1^{(1)}} < \mathbf{St} < \frac{2\sqrt{(\tilde{\Omega}_1^2 + \chi_{11} \hat{\Omega}_1^2)} - \beta}{\tilde{\delta}_1 \cdot \gamma_1^{(1)}}.$$

7.2 Метод редукции

В каждом из уравнений (7.1.23) присутствует по два члена, выраженных бесконечными рядами. Один из них возник за счет демпферного закрепления правого конца струны, другой выражает электромагнитное воздействие. Оба этих фактора приводят к возникновению двухволновых процессов. Займемся анализом уравнений (7.1.23) с целью исследования одновременного влияния обоих двухволновых факторов на характеристики колебательного процесса струны.

Прежде всего, выясним особенности метода расщепления в применении к системам дифференциальных уравнений, содержащих по два бесконечных монотонно сходящихся ряда. Принципиально возможны три случая: 1) члены обоих рядов, соответствующие одному номеру n , имеют одинаковый порядок; 2) одинаковый порядок имеют члены рядов, при различных номерах n ; 3) все члены одного из рядов существенно меньше соответствующих членов другого.

В третьем случае одним из рядов можно просто пренебречь и применить схему расщепления, использованную ранее. В первом случае в каждом из уравнений следует оставить одинаковое количество членов рядов. Например, когда в силу начальных условий наибольшей энергией обладает колебание основного парциального тона, то в первом уравнении следует оставить по одному члену

каждого ряда, во втором – по два, и так далее. Второй случай неудобен для применения метода расщепления, так как при сохранении в уравнениях членов одного порядка, содержащих различные обобщенные координаты и скорости, получим систему уравнений, которую невозможно проинтегрировать последовательно.

Расчеты показывают, что при $R \gg 1$ и $R \ll 1$ можно пренебрегать суммой $\sum_{n=1}^{\infty} (\chi_{nr} \hat{\Omega}_n \cdot q_n)$, оставляя во всех уравнениях

электромагнитный член. Но при значениях R близких к единице, его пренебрегать нельзя, причем допустимо оставить одинаковое количество слагаемых каждой из сумм, то есть имеет место первый из возможных случаев.

Запишем расщепленную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_1 + 2\tilde{h}_1 \dot{q}_1 + \Omega_1^2 q_1 = 0; \\ \ddot{q}_2 + 2\tilde{h}_2 \dot{q}_2 + \Omega_2^2 q_2 = -\mathbf{St} \cdot \tilde{\delta}_2 \cdot \gamma_2^{(1)} \cdot \dot{q}_1 - \chi_{12} \hat{\Omega}_1^2 \cdot q_1; \\ \dots\dots\dots; \\ \ddot{q}_r + 2\tilde{h}_r \dot{q}_r + \Omega_r^2 q_r = -\mathbf{St} \tilde{\delta}_r \gamma_1^{(1)} \dot{q}_1 - \mathbf{St} \tilde{\delta}_r \gamma_2^{(1)} \dot{q}_2 - \dots \\ \dots - \mathbf{St} \tilde{\delta}_r \gamma_{r-1}^{(1)} \dot{q}_{r-1} - \chi_{1r} \hat{\Omega}_1^2 q_1 - \chi_{2r} \hat{\Omega}_2^2 q_2 - \dots - \chi_{(r-1)r} \hat{\Omega}_{r-1}^2 \cdot q_{r-1} \end{array} \right. \quad (7.2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1 &= \frac{1}{2} \left(\beta + \mathbf{St} \tilde{\delta}_1 \gamma_1^{(1)} \right), & \Omega_1^2 &= \tilde{\Omega}_1^2 + \chi_{11} \hat{\Omega}_1^2, \\ \tilde{h}_2 &= \frac{1}{2} \left(\beta + \mathbf{St} \tilde{\delta}_2 \gamma_2^{(1)} \right), & \Omega_2^2 &= \tilde{\Omega}_2^2 + \chi_{22} \hat{\Omega}_2^2, \\ \tilde{h}_r &= \frac{1}{2} \left(\beta + \mathbf{St} \tilde{\delta}_r \gamma_r^{(1)} \right), & \Omega_r^2 &= \tilde{\Omega}_r^2 + \chi_{rr} \hat{\Omega}_r^2. \end{aligned}$$

Решение первого уравнения системы (7.2.1), описывающее колебание основного парциального тона имеет вид:

$$q_1 = q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \cos \omega_1 t, \quad (7.2.2.)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\Omega_1^2 - \tilde{h}_1^2}$.

Здесь начальная фаза принята равной нулю. По форме это решение совпадает с решением первого уравнения (1.2.11).

Запишем второе дифференциальное уравнение (7.2.1) с учетом (7.2.2):

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2 + 2\tilde{h}_2 \dot{q}_2 + \Omega_2^2 q_2 = \\ = \sqrt{\left(St\tilde{\delta}_2 \gamma_1^{(1)} - \chi_{12} \hat{\Omega}_1^2\right)^2 + \omega_1^2} \cdot q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \cdot \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1), \end{aligned}$$

где $\operatorname{tg} \varepsilon_1 = -\frac{\omega_1}{\left(St\tilde{\delta}_2 \gamma_1^{(1)} - \chi_{12} \hat{\Omega}_1^2\right)}$.

По своей математической форме это уравнение совпадает со вторым уравнением (1.2.11), после подстановки в него решения первого уравнения этой системы. Поэтому и их решения записываются в одинаковом математическом виде:

$$\begin{aligned} q_2 = q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2) + \\ + \frac{\sqrt{\left(St\tilde{\delta}_2 \gamma_1^{(1)} - \chi_{12} \hat{\Omega}_1^2\right)^2 + \omega_1^2} \cdot q_{01} \Omega_1 \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1)}{\sqrt{\left(\Omega_2^2 - \Omega_1^2\right)^2 + 4\tilde{h}_1(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2)(\Omega_2^2 - \Omega_1^2) + 4\Omega_1^2(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2)^2}}, \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

где $\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\tilde{h}_1}{\omega_1}$, а q_{02} и ε_2 определяются начальными условиями: $q_2(0)$ и $\dot{q}_2(0)$, соответствующими второму парциальному тону.

При условии малой общей диссипации допустимо записать приближенно:

$$q_2 = q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \cos(\omega_2 t + \varepsilon_2) + \frac{\sqrt{(\mathbf{St}\tilde{\delta}_2\gamma_1^{(1)} - \chi_{12}\hat{\Omega}_1^2)^2 + \omega_1^2 \cdot q_{01}\Omega_1 \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1)}}{(\Omega_2^2 - \Omega_1^2)}.$$

Третье уравнение системы (7.2.1) запишем без учета вторичного процесса передачи энергии:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_3 + 2\tilde{h}_3\dot{q}_3 + \Omega_3^2 q_3 = \\ = \sqrt{(\mathbf{St}\tilde{\delta}_3\gamma_1^{(1)} - \chi_{13}\hat{\Omega}_1^2)^2 + \omega_1^2 \cdot q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \cdot \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1)} + \\ + \sqrt{(\mathbf{St}\tilde{\delta}_3\gamma_2^{(1)} - \chi_{23}\hat{\Omega}_2^2)^2 + \omega_2^2 \cdot q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \cdot \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2)}, \end{aligned}$$

где $\operatorname{tg}\varepsilon_2 = -\frac{\omega_2}{(\mathbf{St}\tilde{\delta}_3\gamma_2^{(1)} - \chi_{23}\hat{\Omega}_2^2)}.$

Тогда его решения представится в виде трех составляющих:

$$\begin{aligned}
q_3 = & q_{03} \exp(-\tilde{h}_3 t) \cos(\omega_3 t + \varepsilon_3) + \\
& + \frac{\sqrt{\left(\mathbf{St} \tilde{\delta}_3 \gamma_1^{(1)} - \chi_{13} \hat{\Omega}_1^2\right)^2 + \omega_1^2 \cdot \Omega_1 q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1)}}{\sqrt{\left(\Omega_3^2 - \Omega_1^2\right)^2 + 4\tilde{h}_1(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_3)\left(\Omega_3^2 - \Omega_1^2\right) + 4 \cdot \Omega_1^2(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_3)^2}} + \\
& + \frac{\sqrt{\left(\mathbf{St} \tilde{\delta}_3 \gamma_2^{(1)} - \chi_{23} \hat{\Omega}_2^2\right)^2 + \omega_2^2 \cdot \Omega_2 q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2 + \theta_2)}}{\sqrt{\left(\Omega_3^2 - \Omega_2^2\right)^2 + 4\tilde{h}_2(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_3)\left(\Omega_3^2 - \Omega_2^2\right) + 4 \cdot \Omega_2^2(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_3)^2}},
\end{aligned} \tag{7.2.4}$$

где $\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\tilde{h}_2}{\omega_2}$, а q_{03} и ε_3 находятся из соответствующих начальных условий.

В случае малой общей диссипации:

$$\begin{aligned}
q_3 = & q_{03} \exp(-\tilde{h}_3 t) \cos(\omega_3 t + \varepsilon_3) + \\
& + \frac{\sqrt{\left(\mathbf{St} \tilde{\delta}_3 \gamma_1^{(1)} - \chi_{13} \hat{\Omega}_1^2\right)^2 + \omega_1^2 \cdot \Omega_1 q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1)}}{\left(\Omega_3^2 - \Omega_1^2\right)} + \\
& + \frac{\sqrt{\left(\mathbf{St} \tilde{\delta}_3 \gamma_2^{(1)} - \chi_{23} \hat{\Omega}_2^2\right)^2 + \omega_2^2 \cdot \Omega_2 q_{02} \exp(-\tilde{h}_2 t) \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2 + \theta_2)}}{\left(\Omega_3^2 - \Omega_2^2\right)}.
\end{aligned}$$

Решение r -го уравнения с учетом только прямых процессов передачи энергии от низших парциальных колебаний к высшим содержит r членов:

$$q_r = q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\sqrt{\left(\mathbf{St} \tilde{\delta}_r \gamma_k^{(1)} - \chi_{kr} \hat{\Omega}_k^2\right)^2 + \omega_k^2} \cdot \Omega_k q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_k + \theta_k)}{\sqrt{\left(\Omega_r^2 - \Omega_k^2\right)^2 + 4\tilde{h}_k (\tilde{h}_k - \tilde{h}_r) \left(\Omega_r^2 - \Omega_k^2\right) + 4\Omega_k^2 (\tilde{h}_k - \tilde{h}_r)^2}},$$

$$(r = 1, 2, \dots), \quad (7.2.5)$$

где $\operatorname{tg} \theta_k = \frac{\tilde{h}_k}{\omega_k}$, а q_{0r} и ε_r находятся из начальных условий

для r -ого дифференциального уравнения (1.2.11).

При малой общей диссипации имеем:

$$q_r = q_{0r} \exp(-\tilde{h}_r t) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\sqrt{\left(\mathbf{St} \tilde{\delta}_r \gamma_k^{(1)} - \chi_{kr} \hat{\Omega}_k^2\right)^2 + \omega_k^2} \cdot \Omega_k q_{0k} \exp(-\tilde{h}_k t) \sin(\omega_k t + \varepsilon_k + \theta_k)}{\left(\Omega_r^2 - \Omega_k^2\right)}.$$

Возможен и случай, когда упрощенные формулы следует применять, начиная с некоторого парциального тона.

Определим пределы значений числа Стюарта для r -ого парциального колебания:

$$\frac{0,1\beta}{\tilde{\delta}_r \cdot \gamma_r^{(1)}} < \mathbf{St} < \frac{2\sqrt{\left(\tilde{\Omega}_r^2 + \chi_{rr} \hat{\Omega}_r^2\right)} - \beta}{\tilde{\delta}_r \cdot \gamma_r^{(1)}}. \quad (7.5.6)$$

Как показывают расчеты, существует возможность такого выбора \mathbf{St} , при котором одно или несколько первых парциальных колебаний затухают аperiodически, а более высокие парциальные колебания остаются периодическими.

Определенным выбором начальных условий можно добиться того, что наибольшую исходную амплитуду будет иметь любое

($r \neq 1$) парциальное колебание. Тогда при расщеплении системы дифференциальных уравнений следует в первом уравнении сохранить первый и r -ый члены. Во втором уравнении – первые два и r -ый члены, и т.д. В r -ом уравнении сохраняется только r -ый член. Интегрирование начинается с r -ого уравнения, затем находится решение первого уравнения, второго, и так далее.

7.3 Амплитудные формы

Решения, полученные в предыдущем параграфе, позволяют составить приближенно выражения для форм главных колебаний, как это было сделано в параграфе 1.5.

Запишем модули комплексных амплитудных функций (7.1.11)

$$\begin{aligned} \tilde{X}_n &= \sqrt{X_n^{*2} + X_n^{*2}} = \\ &= \sqrt{\sin^2(\tilde{\alpha}_n z) \cdot \operatorname{ch}^2(\tilde{\beta} \cdot z) + \cos^2(\tilde{\alpha}_n z) \cdot \operatorname{sh}^2(\tilde{\beta} \cdot z)}, \quad (7.3.1) \\ &(n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Приближенное выражение для функции смещений первого главного колебания, используя (7.3.1) и решения, полученные в предыдущем параграфе, примет вид:

$$\begin{aligned}
u_1(z, t) = & \tilde{X}_1 q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \cos(\omega_1 t + \varepsilon_1) + \\
& + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tilde{X}_k \Omega_1 \sqrt{\left(\mathbf{St} \tilde{\delta}_k \gamma_1^{(1)} - \chi_{1k} \hat{\Omega}_1^2 \right)^2 + \omega_1^2}}{\sqrt{\left(\Omega_k^2 - \Omega_1^2 \right)^2 + 4\tilde{h}_1 (\tilde{h}_1 - \tilde{h}_k) \left(\Omega_k^2 - \Omega_1^2 \right) + 4\Omega_1^2 (\tilde{h}_1 - \tilde{h}_k)^2}} \times \\
& \times q_{01} \exp(-\tilde{h}_1 t) \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1 + \theta_1).
\end{aligned} \tag{7.3.2}$$

Пользуясь этим выражением, запишем обе амплитудные функции, соответствующие двухволновому процессу:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_1^* = & \tilde{X}_1 + \\
& + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tilde{X}_k \Omega_1 \sqrt{\left(\mathbf{St} \tilde{\delta}_k \gamma_1^{(1)} - \chi_{1k} \hat{\Omega}_1^2 \right)^2 + \omega_1^2}}{\sqrt{\left(\Omega_k^2 - \Omega_1^2 \right)^2 + 4\tilde{h}_1 (\tilde{h}_1 - \tilde{h}_k) \left(\Omega_k^2 - \Omega_1^2 \right) + 4\Omega_1^2 (\tilde{h}_1 - \tilde{h}_k)^2}} \sin \theta_1,
\end{aligned} \tag{7.3.3}$$

$$\tilde{X}_1^{**} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tilde{X}_k \Omega_1 \sqrt{\left(\mathbf{St} \tilde{\delta}_k \gamma_1^{(1)} - \chi_{1k} \hat{\Omega}_1^2 \right)^2 + \omega_1^2}}{\sqrt{\left(\Omega_k^2 - \Omega_1^2 \right)^2 + 4\tilde{h}_1 (\tilde{h}_1 - \tilde{h}_k) \left(\Omega_k^2 - \Omega_1^2 \right) + 4\Omega_1^2 (\tilde{h}_1 - \tilde{h}_k)^2}} \cos \theta_1.$$

Аналогично для второго главного колебания получим:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_2^* = & \tilde{X}_2 + \\
& + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\tilde{X}_k \Omega_2 \sqrt{\left(\mathbf{St} \tilde{\delta}_k \gamma_2^{(1)} - \chi_{2k} \hat{\Omega}_2^2 \right)^2 + \omega_2^2}}{\sqrt{\left(\Omega_k^2 - \Omega_2^2 \right)^2 + 4\tilde{h}_2 (\tilde{h}_2 - \tilde{h}_k) \left(\Omega_k^2 - \Omega_2^2 \right) + 4\Omega_2^2 (\tilde{h}_2 - \tilde{h}_k)^2}} \sin \theta_2,
\end{aligned}$$

(7.3.4)

$$\tilde{X}_2^{**} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tilde{X}_k \Omega_2 \sqrt{\left(\mathbf{St} \tilde{\delta}_k \gamma_2^{(1)} - \chi_{2k} \hat{\Omega}_2^2\right)^2 + \omega_2^2}}{\sqrt{\left(\Omega_k^2 - \Omega_2^2\right)^2 + 4\tilde{h}_2 \left(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_k\right) \left(\Omega_k^2 - \Omega_2^2\right) + 4\Omega_2^2 \left(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_k\right)^2}} \cos \theta_2.$$

Для любого главного колебания с номером r имеем:

$$\tilde{X}_r^* = \tilde{X}_r +$$

$$+ \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{\tilde{X}_k \Omega_r \sqrt{\left(\mathbf{St} \tilde{\delta}_k \gamma_r^{(1)} - \chi_{rk} \hat{\Omega}_r^2\right)^2 + \omega_r^2}}{\sqrt{\left(\Omega_k^2 - \Omega_r^2\right)^2 + 4\tilde{h}_r \left(\tilde{h}_r - \tilde{h}_k\right) \left(\Omega_k^2 - \Omega_r^2\right) + 4\Omega_r^2 \left(\tilde{h}_r - \tilde{h}_k\right)^2}} \sin \theta_r, \quad (7.3.5)$$

$$\tilde{X}_r^{**} = \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{\tilde{X}_k \Omega_r \sqrt{\left(\mathbf{St} \tilde{\delta}_k \gamma_r^{(1)} - \chi_{rk} \hat{\Omega}_r^2\right)^2 + \omega_r^2}}{\sqrt{\left(\Omega_k^2 - \Omega_r^2\right)^2 + 4\tilde{h}_r \left(\tilde{h}_r - \tilde{h}_k\right) \left(\Omega_k^2 - \Omega_r^2\right) + 4\Omega_r^2 \left(\tilde{h}_r - \tilde{h}_k\right)^2}} \cos \theta_r.$$

Полученные амплитудные функции являются приближенными, так как для их составления использованы решения, полученные при помощи метода расщепления. Тем не менее, они отражают воздействие каждого из двух факторов, приводящих к возникновению двухволновых процессов.

Подчеркнем еще раз, что записанные амплитудные функции пригодны для случая, когда в силу заданных начальных условий наибольшей исходной энергией обладает колебание основного тона.

7.4 Метод главных координат

Будем искать решение уравнения (1.6.1) с граничными условиями (7.1.1.) и (7.1.2) в виде

$$\begin{aligned}
u(z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ q_{0n} \exp(-\tilde{h}_n t) \cdot \left[X_n^* \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + X_n^{**} \sin(\omega_n t + \varepsilon_n) \right] \right\} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tilde{X}_n q_{0n} \exp(-\tilde{h}_n t) \cdot \sin(\omega_n t + \tilde{\varepsilon}_n) \right],
\end{aligned} \tag{7.4.1}$$

где, как и в параграфе 1.6 \tilde{X}_n модуль комплексной амплитудной функции, учитывающей заданные граничные условия и электромагнитное воздействие. Начальные фазы колебаний $\tilde{\varepsilon}_n$ здесь являются постоянными и определяются для каждого n начальными условиями.

Так как уравнение (1.6.1) записано в безразмерном виде, то и граничные условия следует записать с использованием тех же характерных величин: l, m_0, p_1 . При этом вид условий (7.1.1) и (7.1.2) остается прежним.

Далее проделав ту же процедуру, что и в параграфе 1.6, получим общее решение в виде (1.6.9). Из него следует условие изолированности мод от электромагнитного воздействия в том же виде, что и в 1.6.

Применим к решению (1.6.9) граничное условие (7.1.2). Получим два уравнения:

$$\left\{ \begin{aligned} & 2\tilde{h}_n = \frac{\mu_D}{m_D}; \\ & \left[T_0 \frac{d\tilde{X}_n}{dz} + (m_D \tilde{h}_n^2 - m_D \omega_n^2 - \mu_D \tilde{h}_n) \tilde{X}_n \right]_{z=1} = 0. \end{aligned} \right. \tag{7.4.2}$$

$$(n=1,2,\dots).$$

Отсюда видно, что отношение $\frac{\mu_D}{m_D}$ является частотно-зависимым параметром. Используя первое соотношение (7.4.2) и (1.6.4), можно записать

$$\left(T_0 \frac{d\tilde{X}_n}{dz} - \tilde{X}_n m_D n^2 \right)_{z=1} = 0, \quad (n=1,2,\dots). \quad (7.4.3)$$

Применив граничные условия (7.1.1) и (7.4.3), имеем

$$\left\{ \begin{aligned} \sin \delta_n &= \mathbf{St} \frac{2\tilde{h}_n \gamma_n^*}{\pi\tilde{p}_n (\tilde{p}_n^2 + \mathbf{St} \cdot \tilde{h}_n \Delta z)}; \\ T_0 \pi\tilde{p}_n \cos(\pi\tilde{p}_n + \delta_n) + m_D n^2 \sin(\pi\tilde{p}_n + \delta_n) &= \\ &= \mathbf{St} \frac{2\tilde{h}_n n^2 m_D \gamma_n^*}{\pi\tilde{p}_n (\tilde{p}_n^2 + \mathbf{St} \cdot \tilde{h}_n \Delta z)}; \end{aligned} \right. \quad (7.4.4)$$

Отсюда вытекает уравнение:

$$T_0 \pi\tilde{p}_n \cos(\pi\tilde{p}_n + \delta_n) + 2m_D n^2 \sin \frac{\pi\tilde{p}_n}{2} \cos \left(\frac{\pi\tilde{p}_n}{2} + \delta_n \right) = 0, \quad (7.4.5)$$

Чтобы определить неизвестные $\tilde{p}_n, \omega_n, \delta_n, \tilde{h}_n$, необходимо совместно рассмотреть систему четырех уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \tilde{p}_n^2 = \omega_n^2 - \tilde{h}_n^2 + \beta \cdot \tilde{h}_n; \\
 n^2 = \omega_n^2 + \tilde{h}_n^2; \\
 T_0 \pi \tilde{p}_n \cos(\pi \tilde{p}_n + \delta_n) + 2m_D n^2 \sin \frac{\pi \tilde{p}_n}{2} \cos\left(\frac{\pi \tilde{p}_n}{2} + \delta_n\right) = 0, \\
 \sin \delta_n = \mathbf{St} \frac{2\tilde{h}_n \gamma_n^*}{\pi \tilde{p}_n (\tilde{p}_n^2 + \mathbf{St} \cdot \tilde{h}_n \Delta z)}, \\
 (n = 1, 2, \dots).
 \end{array} \right. \quad (7.4.6)$$

Таким образом, метод главных колебаний позволяет получить решение и в случае неклассических граничных условий. Однако при этом параметры колебательного процесса $\tilde{p}_n, \omega_n, \delta_n, \tilde{h}_n$ связаны сложной системой уравнений, требующей численного решения.

8 Вибрации электропроводных пластин в стационарном магнитном поле

8.1 Собственные вибрации прямоугольной пластины в магнитном поле

В настоящей главе исследуются особенности электромагнитного воздействия при вибрациях двумерных проводящих систем – пластин в магнитном поле. Пластины иногда используются в электромеханических преобразователях акустического типа в качестве вибраторов, и составляют основу некоторых типов звуковоспроизводящей аппаратуры. Однако, известно, что все звуковоспроизводящие системы такого типа имеют дефекты, а строгий анализ явлений, приводящих к искажению воспроизводимого сигнала, отсутствует. Исходя из результатов исследования одномерных систем, можно предположить, что упомянутые дефекты объясняются, в частности, наличием у вибрирующей пластины изолированных от электромагнитного воздействия мод.

Исследуем поперечные колебания прямоугольной пластины со свободно опертыми краями [105]. Пусть вектор индукции однородного стационарного магнитного поля направлен вдоль оси Oy на участке шириной от z_1 до z_2 . Размеры пластины указаны на рис. 24.

Поперечные колебания прямоугольной пластины в направлении оси Ox описываются функцией смещений $u(y, z, t)$, которую представим в виде ряда по собственным амплитудным функциям $U_{nr}(y, z)$:

$$u(y, z, t) = \sum_{n,r=1}^{\infty} q_{nr}(t) U_{nr}(y, z),$$

Обобщенные координаты q_{nr} здесь характеризуют смещение центральной точки участка, ближайшего к началу координат. Собственные амплитудные функции и собственные частоты при колебаниях двумерных систем характеризуются двумя числами

$$n_z, r_y = 1, 2, 3, \dots,$$

которые указывают на количество участков параллельных соответственно осям Oz и Oy и колеблющихся в противоположных фазах. Следует иметь в виду, что числа соответствующих узловых линий на единицу меньше. При записи индексов координатные указатели опускаем.

Схема колебаний прямоугольной пластины

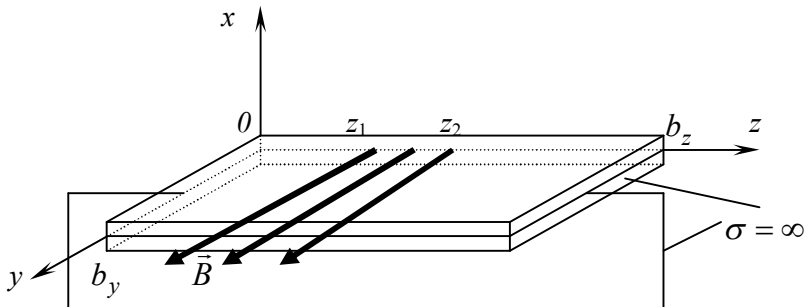


Рис. 24

Пусть края пластины, параллельные Oy , по всей своей длине соприкасаются с идеально проводящими поверхностями, замкнутыми между собой идеальной электрической цепью как показано на рис. 24. При вибрациях пластины на этих поверхностях возникают электрические потенциалы, а по замыкающей цепи протекает ток

$$I(t) = \chi \frac{\sigma B h b_y}{b_z} \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{b_y} \frac{\partial u(y, z, t)}{\partial t} dy,$$

где b_y, b_z - размеры пластины, h - ее толщина, χ - безразмерный положительный коэффициент, учитывающий частичное замыкание токов внутри пластины, а также через идеально проводящие торцевые поверхности. Величина этого коэффициента в зависимости от характера колебаний пластины и ее проводимости имеет значения

от нуля до единицы. Определение значений коэффициента χ представляет самостоятельный интерес. Однако в поставленной нами задаче достаточно знать, равен он нулю или нет.

Считаем, что при $I(t) \neq 0$, то есть когда индуцированные токи замыкаются посредством внешней электрической цепи, результирующий ток равномерно распределяется его по всему объему пластины (скин-эффектом пренебрегаем). При этом $\chi = 1$, а плотность тока является лишь функцией времени:

$$j(t) = \frac{\sigma B}{b_z} \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{b_y} \frac{\partial u(y, z, t)}{\partial t} dy. \quad (8.1.1)$$

Интегрирование здесь выполняется в срединной плоскости, с которой совмещается координатная плоскость $0yz$.

Собственные формы главных колебаний прямоугольной однородной пластины со свободно опертыми краями выражаются функциями [118, 119]:

$$U_{nr}(y, z) = \sin \frac{n_z \pi y}{b_y} \sin \frac{r_y \pi z}{b_z}. \quad (8.1.2)$$

Запишем магнитную силу, действующую на элемент объема пластины $hdydz$:

$$dF_M = jBhdydz = \frac{\sigma B^2 h}{b_z} \left(\int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{b_y} \frac{\partial u}{\partial t} dy \right) dydz. \quad (8.1.3)$$

Интенсивность распределенной по срединной плоскости нагрузки за счет электромагнитного воздействия обозначим

$$f_M(t) = \frac{dF_M}{dydz}.$$

Магнитная сила является диссипативной и, вообще говоря, влияет на частоты колебаний, однако, этим влиянием пренебрежем, полагая магнитную диссипацию малой. Воспользуемся набором собственных частот колебаний, который для прямоугольной пластины с опертыми краями определяется [119] по известной формуле

$$p_{nr} = \pi^2 \left(\frac{n_z^2}{b_z^2} + \frac{r_y^2}{b_y^2} \right) \sqrt{\frac{D}{h\rho}}, \quad (n_z, r_y = 1, 2, \dots),$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^{*2})}$ - цилиндрическая жесткость на изгиб, σ^* - коэффициент Пуассона.

С учетом формул (8.1.1), (8.1.2) и (8.1.3) вычислим обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате

$$q_{\hat{n}\hat{r}} \quad (\hat{n}_z, \hat{r}_y = 1, 2, \dots):$$

$$Q_{(M)\hat{n}\hat{r}} = -\frac{16\sigma B^2 b_z b_y^2 h}{\pi^4 \hat{n}_z \hat{r}_y} \hat{\eta}_r \sum_{n,r=1}^{\infty} \frac{\dot{q}_{nr}}{n_z r_y} \eta_r,$$

где

$$\eta_r = \sin \frac{r_y \pi (z_2 - z_1)}{2b_z} \sin \frac{r_y \pi (z_1 + z_2)}{2b_z};$$

$$\hat{\eta}_r = \sin \frac{\hat{r}_y \pi (z_2 - z_1)}{2b_z} \sin \frac{\hat{r}_y \pi (z_1 + z_2)}{2b_z}.$$

Отсюда видно, что при условии

$$\hat{\eta}_r = \sin \frac{\hat{r}_y \pi (z_2 - z_1)}{2b_z} \sin \frac{\hat{r}_y \pi (z_2 + z_1)}{2b_z} = 0, \quad (\hat{r}_y = 1, 2, \dots), \quad (8.1.4)$$

электромагнитное воздействие отсутствует, то есть выделяются изолированные от электромагнитного воздействия моды.

Возможны случаи, когда $\chi = 0$, то есть индуцированные токи полностью замыкаются в самой пластине и не текут по замыкающей цепи. Это возможно, например, при нечетном числе узловых линий, параллельных оси Oz (четные числа n_z). В этих случаях электромагнитное воздействие есть, хотя не обеспечивается однородность распределения тока в пластине.

Условие (8.1.4) учитывает ширину и расположение активного участка, на котором действует магнитное поле. Оно совпадает с аналогичным условием для струны или стержня с той лишь разницей, что для пластины оно применяется для чисел \hat{n}_z .

Рассмотрим более общий случай, когда магнитное поле, действующее на участке от z_1 до z_2 , является неоднородным

$$\vec{B}(z) = B(z)\vec{y}^0.$$

В этом случае токи, индуцированные при собственных колебаниях пластины, имеют плотность

$$j(t) = \frac{\sigma}{b_z} \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{b_y} B(z) \frac{\partial u(y, z, t)}{\partial t} dy.$$

Интенсивность магнитной силы по срединной поверхности в этом случае зависит не только от времени, но и от координаты z

$$f_M(z, t) = \frac{\sigma B(z)h}{b_z} \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{b_y} B(z) \frac{\partial u(y, z, t)}{\partial t} dy.$$

Как и раньше, пренебрежем влиянием магнитной силы на собственные частоты и определим условия выделения мод, изолированных от электромагнитного воздействия при ее поперечных вибрациях. Вычислив обобщенную силу, получим

$$Q_{(M)\hat{n}\hat{r}} = 4 \frac{\sigma h b_y^2}{\pi^2 b_z \hat{n}_z} \int_{z_1}^{z_2} B(z) \sin \frac{\hat{r}_y \pi z}{b_z} dz \sum_{n,r=1}^{\infty} \left[\frac{\dot{q}_{nr}}{n_z} \int_{z_1}^{z_2} B(z) \sin \frac{r_y \pi z}{b_z} dz \right]; \quad (8.1.5)$$

Отсюда видно, что возможны нулевые значения обобщенной силы, когда

$$\int_{z_1}^{z_2} B(z) \sin \frac{\hat{r}_y \pi z}{b_z} dz = 0. \quad (8.1.6)$$

Как и в параграфе 4.2 задача об определении $B(z)$ при заданных z_1 и z_2 однозначного решения не имеет. Однако, из последнего уравнения можно, задав функцию $B(z)$ и z_1 , определить z_2 , т.е. вычислить ширину активного участка.

Эту же задачу можно решить методом множества участков, которые располагаются параллельно оси Oy . Пронумеруем их $k = 1, 2, 3, \dots, K$. Тогда выражение для плотности тока примет вид

$$j(t) = \frac{\sigma}{b_z} \sum_{k=1}^K \left[B_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} dz \int_0^{b_y} \frac{\partial u(y, z, t)}{\partial t} dy \right].$$

А для интенсивности магнитной силы на конкретном \hat{k} -ом участке получим выражение

$$f_{(M)\hat{k}}(t) = \frac{B_{\hat{k}} \sigma h}{b_z} \sum_{k=1}^K \left[B_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} dz \int_0^{b_y} \frac{\partial u(y, z, t)}{\partial t} dy \right], \quad (\hat{k} = 1, 2, \dots, K).$$

Динамическую функцию смещений представим в виде

$$u(y, z, t) = \sum_{n,r=1}^{\infty} q_{nr}(t) \sin \frac{n_z \pi y}{b_y} \sin \frac{r_y \pi z}{b_z}.$$

Вычислив обобщенную магнитную силу, отнесенную к обобщенной координате $q_{\hat{n}\hat{r}}$ ($\hat{n}_z, \hat{r}_y = 1, 2, \dots$), получим

$$Q_{(M)\hat{n}\hat{r}} = \frac{16b_z b_y^2 \sigma h}{\hat{r}_y \hat{n}_z \pi^4} \sum_{n,r=1}^{\infty} \left(\frac{\dot{q}_{nr}}{r_y n_z} \sum_{k,k=1}^K B_k B_{\hat{k}} \eta_{nk} \hat{\eta}_{r\hat{k}} \right), \quad (8.1.7)$$

$$(\hat{n}_z = 1, 2, 3, \dots; \quad \hat{r}_y = 1, 2, 3, \dots),$$

где введены обозначения

$$\eta_{rk} = \sin \frac{r_y \pi (z_{k+1} - z_k)}{2b_z} \sin \frac{r_y \pi (z_{k+1} + z_k)}{2b_z},$$

$$\hat{\eta}_{r\hat{k}} = \sin \frac{\hat{r}_y \pi (z_{\hat{k}+1} - z_{\hat{k}})}{2b_z} \sin \frac{\hat{r}_y \pi (z_{\hat{k}+1} + z_{\hat{k}})}{2b_z},$$

$$(r_y, \hat{r}_y = 1, 2, 3, \dots).$$

Обобщенная электромагнитная сила при этом зависит от всех обобщенных скоростей. А условие отсутствия электромагнитного воздействия заключается в одновременном выполнении условий

$$\sum_{\hat{k}=1}^K B_{\hat{k}} \hat{\eta}_{r,\hat{k}} = 0, \quad (\hat{r}_y = 1, 2, 3, \dots). \quad (8.1.8)$$

Вихревой характер магнитного поля является причиной его неоднородности. Рассмотрим общий случай, когда вектор магнитной индукции, лежащий в плоскости Oyz , имеет две составляющих, каждая из которых зависит от двух координат:

$$\vec{B}(y, z) = B_y(y, z)\vec{y}^0 + B_z(y, z)\vec{z}^0. \quad (8.1.9)$$

Пусть идеальной электрической цепью замыкаются только токи, направленные по Oz , порожденные движением проводящей среды по оси Ox в магнитном поле $B_y(y, z)$. Неоднородность этого поля по z учтем путем разбиения всей пластины на K участков, тогда в пределах каждого участка поле будет неоднородным только по y т. е. $B_k(y)$. Тогда получим следующее выражение для плотности индуцированных токов

$$j(t) = \frac{\sigma}{b_z} \sum_{k=1}^K \left[\int_{z_k}^{z_{k+1}} dz \int_0^{b_y} B_k(y) \frac{\partial u(y, z, t)}{\partial t} dy \right].$$

А плотность магнитной силы на \hat{k} -ом активном участке в этом случае зависит не только от времени, но и от y :

$$f_{(M)\hat{k}}(y, t) = \frac{B_{\hat{k}}(y)\sigma h}{b_z} \sum_{k=1}^K \left[\int_{z_k}^{z_{k+1}} dz \int_0^{b_y} B_k(y) \frac{\partial u(y, z, t)}{\partial t} dy \right],$$

$$(\hat{k} = 1, 2, \dots, K)$$

В выражение обобщенной силы при этом входит сумма

$$\sum_{n,r=1}^{\infty} \left(\dot{q}_{nr} \sum_{k,\hat{k}=1}^K \eta_{rk}^* \hat{\eta}_{r\hat{k}}^* \right),$$

где обозначено

$$\eta^*_{rk} = \int_{z_k}^{z_{k+1}} dz \int_0^{b_y} B_k(y) \sin \frac{n_z \pi y}{b_y} \sin \frac{r_y \pi z}{b_z} dy; \quad (n_z, r_y = 1, 2, \dots);$$

$$\hat{\eta}^*_{r\hat{k}} = \int_{z_k}^{z_{k+1}} dz \int_0^{b_y} B_{\hat{k}}(y) \sin \frac{\hat{n}_z \pi y}{b_y} \sin \frac{\hat{r}_y \pi z}{b_z} dy; \quad (\hat{n}_z, \hat{r}_y = 1, 2, \dots).$$

Отсутствие электромагнитного воздействия заключается в выполнении условий

$$\sum_{\hat{k}=1}^K \hat{\eta}^*_{r\hat{k}} = 0; \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (8.1.10)$$

8.2 Собственные вибрации круглой пластины в магнитном поле

Рассмотрим поперечные колебания круглой однородной проводящей пластины с жестко закрепленными краями [106]. Узловые линии при этом представляют собой только концентрические окружности. В силу центральной симметрии собственные формы не зависят от полярного угла.

Пусть в плоскости пластины действует стационарное азимутальное осесимметричное магнитное поле $\vec{B}(r)$. В общем случае его считаем неоднородным (рис. 25).

Заметим, что создать азимутальное магнитное поле в ограниченной кольцевой области весьма затруднительно. Однако если идеальная электрическая цепь замыкает идеально проводящие тонкие коаксиальные электроды, с радиусами r_1 и r_2 , то электромагнитная сила действует только в указанной кольцевой области. Считаем электроды безинерционными и не нарушающими однородности пластины.

Схема колебаний круглой пластины

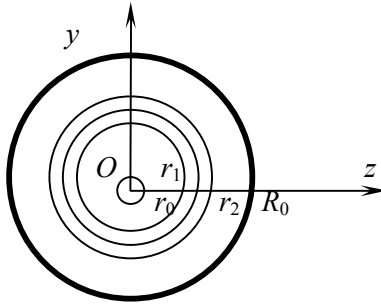


Рис. 25

При собственных колебаниях пластины в ней индуцируются радиальные токи, текущие в области $r_1 < r < r_2$, причем $r_1 > r_0$, а $r_2 < R_0$ (r_0 - радиус малой центральной области, R_0 - радиус пластины). Плотность этих токов обратно пропорциональна радиальной координате:

$$j(t) = \frac{1}{2\pi r h R} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} B(r) dr,$$

где R - сопротивление кольцевого слоя ($r_1 < r < r_2$), h - толщина пластинки.

Вычислим сопротивление кольцевого слоя, расположенного в пределах $r_1 < r < r_2$,

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{2\pi r \sigma h} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi r \sigma h}.$$

Тогда

$$j(t) = \frac{\sigma}{r \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} B(r) dr. \quad (8.2.1)$$

Радиальных узловых линий при закрепленных краях пластины нет, поэтому функция смещений не зависит от полярного угла и интегрирование в азимутальном направлении здесь не требуется.

Запишем выражение для магнитной силы, действующей на элемент объема пластины $d\tau = hrd\theta dr$

$$dF_M = j(t)B(r)hrd\theta dr = \frac{B(r)h\sigma}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \left[\int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial u(r,t)}{\partial t} B(r)dr \right] d\theta dr.$$

Следовательно, интенсивность распределенной нагрузки за счет электромагнитного воздействия

$$f(r,t) = \frac{B(r)h\sigma}{r \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \left[\int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial u(r,t)}{\partial t} B(r)dr \right]. \quad (8.2.2)$$

Введем какие-либо обобщенные координаты, характеризующие вибрации пластины. В качестве таких удобно взять углы прогиба центра пластины при колебаниях, соответствующих различным n . Обозначим их q_n . На рис. 26 изображена обобщенная координата, определяющая колебание основного тона.

Геометрический смысл обобщенных координат

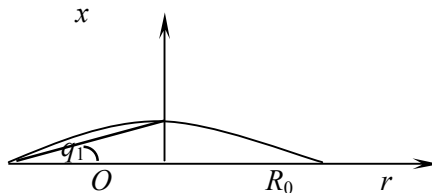


Рис. 26

Функцию смещений представим в виде ряда по собственным амплитудным функциям $w(r)$:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) W_n(r), \quad (8.2.3)$$

Числа n показывают количество кольцевых участков, колеблющихся в противоположных фазах, причем число соответствующих узловых линий на единицу меньше.

В качестве амплитудных функций используем собственные формы, которые имеют место при данных граничных условиях без магнитного поля и выражаются в функциях Бесселя первого рода действительного и мнимого аргументов [105, 121]:

$$W_n(r) = C_1 J_0(k_n r) + C_2 J_0(ik_n r), \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (8.2.4)$$

где $k_n^4 = \frac{hp_n^2}{D\rho}$. Цилиндрическая жесткость на изгиб, как и в предыдущем параграфе, обозначена D . Одну из констант интегрирования, например, C_2 положим равной единице, а C_1 определим из условия на периферии:

$$W_n(R_0) = 0.$$

Получим
$$C_1 = -\frac{J_0(ik_n R_0)}{J_0(k_n R_0)}, \quad C_2 = 1.$$

Уравнение собственных частот для круглой пластинки, защемленной по периферии, имеет вид [104]

$$J_0(k_n R_0) J_1(ik_n R_0) - J_0(ik_n R_0) J_1(k_n R_0) = 0, \quad (8.2.5)$$

$$(n = 1, 2, \dots).$$

и требует числового решения. Значение основной частоты найдено Рэлеем:

$$p_1 = \frac{10,24}{R_0^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}.$$

С учетом (8.2.2) и (8.2.3) вычислим обобщенную магнитную силу, отнесенную к обобщенной координате q_s :

$$\begin{aligned} Q_s &= -2\pi \int_{r_1}^{r_2} W_s(r) f(r, t) r dr = \\ &= -\frac{2\pi h \sigma}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \int_{r_1}^{r_2} W_s(r) B(r) dr \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \int_{r_1}^{r_2} W_n(r) B(r) dr. \end{aligned} \quad (8.2.6)$$

Поскольку в выражение магнитной силы входят все обобщенные скорости, введенные обобщенные координаты не являются главными, и относятся лишь к парциальным колебаниям.

Из (7.2.6) следует условие отсутствия электромагнитного демпфирования s -ого парциального колебания

$$\int_{r_1}^{r_2} W_s(r) B(r) dr = 0; \quad (8.2.7)$$

Пользуясь условием (7.2.7) можно подобрать такие распределения магнитного поля, чтобы электромагнитное демпфирование отсутствовало. Заметим, что при $n=1$ токи, индуцированные в любой точке активной кольцевой зоны в данный момент времени направлены либо все к периферии, либо все к центральной области и не могут компенсировать друг друга. При других значениях n условие отсутствия электромагнитного демпфирования может выполняться, причем для этого можно подобрать несколько вариан-

тов расположения активного участка при заданном распределении магнитного поля.

Пусть, например, $B(r) = \alpha_0 r$, где α_0 - константа, имеющая размерность Тл/м. Тогда из (7.2.7) после интегрирования получим

$$C_1[r_2 J_1(k_s r_2) - r_1 J_1(k_s r_1)] + [r_2 J_1(ik_s r_2) - r_1 J_1(ik_s r_1)] = 0. \quad (s = 2, 4, 6, \dots) \quad (8.2.8)$$

Зададим значение $r_2 = R_0$ и определим r_1 , рассмотрев одновременно уравнения (7.2.5) и (7.2.8) при $n=s$. Получим уравнение для определения возможных значений r_1 :

$$J_0(ik_s R_0) J_1(k_s r_1) - J_0(k_s R_0) J_1(ik_s r_1) = 0.$$

Известно, что функции Бесселя первого рода действительного аргумента являются знакопеременными, а мнимого аргумента - знакпостоянными. Нетрудно показать, что при $s = 1$ полученное уравнение корней не имеет, а при других значениях s имеется несколько корней, их количество зависит от значений функций Бесселя $J_0(ik_s R_0)$, $J_0(k_s R_0)$.

Для решения этой же задачи можно применить метод участков. Пусть кольцевая зона между замыкающим коаксиальными электродами с радиусами r_1^* , r_2^* разбита на N участков. Магнитное поле на каждом из участков является однородным и обозначается B_m . Знак магнитной индукции на каждом участке выбирается в соответствии с направлением магнитных силовых линий. Границы участков обозначим

$$r_1, r_2, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_{N-1}, r_N,$$

причем $r_1 = r_1^*$, $r_N = r_2^*$, а значения магнитной индукции на участках соответственно равны

$$B_1, B_2, \dots, B_m, B_{m+1}, \dots, B_N.$$

Плотность токов, индуцированных при собственных колебаниях пластины, тогда выразится формулой

$$j(t) = \frac{1}{2\pi r h R} \sum_{m=1}^N \left[B_m \int_{r_m}^{r_{m+1}} \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} dr \right]. \quad (8.2.9)$$

Здесь R - сопротивление кольцевого слоя между электродам:

$$R = \frac{\ln\left(\frac{r_2^*}{r_1^*}\right)}{2\pi\sigma h}.$$

С учетом этого выражения (8.2.7) примет вид

$$j = \frac{\sigma}{r \cdot \ln\left(\frac{r_2^*}{r_1^*}\right)} \sum_{m=1}^N \left[B_m \int_{r_1^*}^{r_2^*} \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} dr \right].$$

Для интенсивности магнитной силы на k -ом участке получим выражение

$$f_k(t) = \frac{B_k h \sigma}{r \cdot \ln\left(\frac{r_2^*}{r_1^*}\right)} \left[\sum_{m=1}^N B_m \int_{r_m}^{r_{m+1}} \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} dr \right], \quad (8.2.10)$$

$$(k = 1, 2, \dots).$$

Представим функцию смещений в виде (8.2.3) и вычислим обобщенную электромагнитную силу с учетом (8.2.10)

$$Q_s = -2\pi \sum_{k=1}^N \int_{r_k}^{r_{k+1}} W_s(r) f_k(t) r dr =$$

$$- \frac{2\pi h \sigma}{\ln\left(\frac{r_2^*}{r_1^*}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \dot{q}_n \sum_{m,k=1}^N B_m B_k \zeta_{nm} \zeta_{sk} \right\},$$
(8.2.11)

здесь индексы $s = 1, 2, \dots$ означают номер парциального колебания и введены обозначения

$$\zeta_{nm} = \int_{r_m}^{r_{m+1}} W_n(r) dr; \quad \zeta_{sk} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} W_s(r) dr.$$
(8.2.12)

Из (8.2.11) вытекает условие, которому удовлетворяют изолированные моды:

$$\sum_{k=1}^N B_k \zeta_{sk} = 0; \quad (s = 1, 2, \dots).$$
(8.2.13)

8.3 Вынужденные вибрации пластин в магнитном поле

Рассмотрим вопрос об электромагнитном возбуждении вибраций в прямоугольной пластине со свободно опертыми краями. Пусть ток от внешнего источника э.д.с. подводится через идеально проводящие боковые поверхности, параллельные плоскости Oxy , и равномерно распределяется по пластине с объемной плотностью $j_B(t)$ и течет вдоль оси Oz . В однородном стационарном магнитном поле, действующем в пределах одного активного участка, на элемент $hdydz$ действует сила

$$dF_{\mathcal{EM}} = j_B(t)Bhdydz.$$

Вычислив обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам, выбранным в параграфе 8.1, получим

$$\begin{aligned} Q_{(\mathcal{EM})nn} &= j_B(t)Bh \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{b_y} \sin \frac{n_z \pi y}{b_y} \sin \frac{n_y \pi z}{b_z} dy = \\ &= \frac{4j_B h b_z b_y}{\pi^2 r_y n_z} \sin \frac{r_y \pi (z_2 + z_1)}{2b_z} \sin \frac{r_y \pi (z_2 - z_1)}{2b_z}; \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

Из (8.3.1) видно, что возбуждаются только те колебания, для которых выполняется условие

$$\eta_r = \sin \frac{r_y \pi (z_2 + z_1)}{2b_z} \sin \frac{r_y \pi (z_2 - z_1)}{2b_z} \neq 0, \quad (r_y = 1, 2, \dots).$$

Сравнив это условие с (8.1.4), заключаем, что электромагнитному возбуждению не поддаются колебания, которые не испытывают магнитного демпфирования.

Пусть имеется несколько активных участков: $k = 1, 2, 3, \dots, K$. Запишем выражение для интенсивности электромагнитной силы на конкретном \hat{k} -ом активном участке:

$$f_{(\mathcal{EM})\hat{k}} = j_B(t)B\hat{k}$$

и вычислим обобщенную электромагнитную силу, соответствующую обобщенной координате q_{nr} на \hat{k} -ом активном участке:

$$Q_{(\mathcal{EM})nr} = \frac{4j_B b_z b_y}{\pi^2 r_y n_z} \sum_{\hat{k}=1}^K B_{\hat{k}} \hat{\eta}_{rk}, \quad (8.3.2)$$

$$(n_z = 1, 2, 3, \dots \quad r_y = 1, 2, 3, \dots).$$

Из (8.3.2) видно, что условием отсутствия электромагнитного возбуждения колебаний является

$$\sum_{\hat{k}=1}^K B_{\hat{k}} \hat{\eta}_{rk} = 0, \quad (r_y = 1, 2, 3, \dots), \quad (8.3.3)$$

Сравнивая условие (8.3.3) с условиями (8.1.8), заключаем, что, как и в случае одномерных систем, все изолированные моды при собственных и при вынужденных колебаниях пластины совпадают.

Рассмотрим аналогичную задачу для круглой пластины с закрепленными краями. Пусть в пластине за счет внешнего источника э.д.с. текут радиальные токи между тонкими concentрическими электродами радиусов r_1^* и r_2^* плотности

$$j_B(t) = \frac{I_0(t)}{2\pi r h},$$

где I_0 - сила тока в замыкающей цепи.

Как и в параграфе 8.2 разбиваем всю токонесящую зону на N активных кольцевых участков

$$r_1, \quad r_2, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_{N-1}, r_N,$$

причем $r_1 = r_1^*$, $r_N = r_2^*$. В пределах каждого участка магнитное поле считаем однородным. На элемент $rd\theta dr$ k -го активного участка действует электромагнитная сила

$$dF_{(ЭМ)k} = j_B(t) B_k r d\theta dr = \frac{I_0(t)}{2\pi h} B_k d\theta dr, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Вычислим обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам, введенным в предыдущем параграфе

$$Q_{(\mathcal{M})s} = \frac{I_0(t)}{h} \sum_{k=1}^N B_k \int_{r_k}^{r_{k+1}} w_s(r) dr = \frac{I_0(t)}{h} \sum_{k=1}^N B_k \zeta_{sk} . \quad (8.3.4)$$

Из (8.3.4) вытекает условие, при котором электромагнитным образом невозможно возбудить колебание s -ой моды:

$$\sum_{k=1}^N B_k \zeta_{sk} = 0, \quad (s = 1, 2, \dots). \quad (8.3.5)$$

Сравнивая (8.3.5) с (8.2.13) делаем вывод о полном пересечении условий отсутствия магнитного демпфирования и электромагнитного возбуждения.

9 Электромагнитное воздействие на колебания вязкой электропроводной жидкости

9.1 Постановка задачи

В настоящем разделе рассматривается задача о колебаниях вязкой электропроводной жидкости в магнитном поле. Подобные задачи в различных постановках неоднократно исследовались [140-142]. Однако, исключительная сложность и многоплановость физических процессов, возникающих при взаимодействии жидкости с магнитным полем позволяет ставить новые задачи, выявлять новые эффекты [107- 110].

В отличие от струн, стержней и пластинок движение жидкости имеет несравнимо более сложный характер. Значительные трудности возникают уже при выборе обобщенных координат. Поэтому математический аппарат гидродинамики существенно отличается от использованного в предыдущих главах. Однако, сущность колебательных процессов едина. Это приводит к мысли, что эффекты, обнаруженные в исследованных выше системах, должны аналогичным образом проявляться и в магнитной гидродинамике.

Рассмотрим колебания тяжелой маловязкой, слабопроводящей несжимаемой жидкости в присутствии внешнего магнитного поля [107, 108]. Ограничимся линейной постановкой плоской задачи, полагая, амплитуду колебания жидкости малой, а волны плоскими. Подобная классическая задача для обычной жидкости приводится в монографии Н. Н. Моисеева и В. В. Румянцева [143].

Пусть имеет место случай «мелкой воды», внешнее однородное стационарное магнитное поле индукции \vec{B} направлено по оси Oy и действует на весь объем жидкости (рис. 27). Движение жидкости при этом описывается уравнениями магнитной гидродинамики (МГД) [144 – 145]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} &= \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} (\vec{j} \times \vec{B}) + \nu^* \Delta \vec{V}; \\ \operatorname{div} \vec{V} &= 0, \end{aligned} \right. \quad (9.1.1)$$

где ρ - плотность жидкости, ν^* - кинематическая вязкость, p - давление, \vec{g} - ускорение свободного падения.

Схема колебаний электропроводной жидкости в магнитном поле

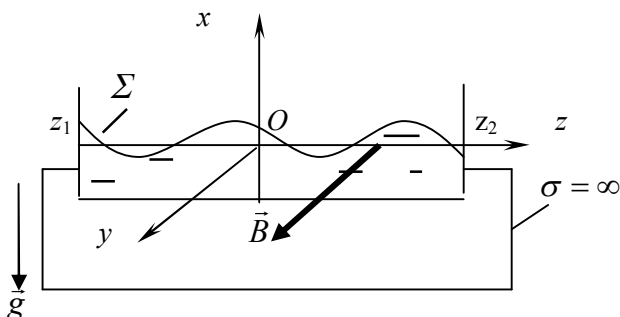


Рис. 27

При смещении жидких частиц по оси Ox в проводящем объеме возникают электрические токи, направленные вдоль ось Oz . Предположим, что жидкость соприкасается с твердыми идеально проводящими поверхностями (Γ), через которые происходит замыкание индуцированных токов посредством внешней идеальной электрической цепи. Эта цепь интегрирует токи вдоль оси Oz , усредняет их по глубине и распределяет их по всему объему жидкости с плотностью

$$j_z(t) = \frac{\sigma B}{L_0} \int_{-H_0}^0 dx \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial t} dz,$$

где L_0 - размер сосуда по оси Oz , H_0 - глубина жидкости.

Если условие «мелкой воды» не выполняется, то плотность токов в жидкости может оказаться пренебрежимо малой и задача сводится к обычной гидродинамике.

Волны, возникающие на поверхности вязкой жидкости, не являются строго поперечными, так как жидкие частицы смещаются и по оси Oz . Таким образом, вообще говоря, движение жидкости имеет вихревой характер.

Запишем уравнения (9.1.1) в проекциях на выбранные оси:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g - \frac{1}{\rho} \frac{\sigma B^2}{L_0} \int_{-H_0}^0 dx \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial t} dz + \nu^* \Delta V_x; \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu^* \Delta V_z; \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

(9.1.2)

Вводим характерные величины: вязкости ν^* , проводимости σ , плотности ρ , магнитной индукции B , линейного размера L_0 , частоты ω_0 (частота колебаний основного тона идеальной жидкости). Обезразмерим все величины:

$$V = V^* L_0 \omega_0, \quad x = x^* L_0, \quad z = z^* L_0,$$

$$t = \frac{t^*}{\omega_0}, \quad p = p^* \rho L_0^2 \omega_0^2.$$

Запишем систему уравнений (9.1.2) в безразмерном виде, опуская звездочку *.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{Fr} - St \int_{-H_0}^0 dx \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial t} dz + \frac{1}{Re} \Delta V_x; \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \Delta V_z; \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (9.1.3)$$

Здесь $Re = \frac{\omega_0 L^2}{\nu^*}$ - число Рейнольдса, $Fr = \frac{\omega_0^2 L}{g}$ - число Фруда,

$St = \frac{\sigma B^2}{\rho \omega_0}$ - число Стюарта.

Целью исследования является изучение особенностей электромагнитного воздействия на волновые движения слабо проводящей тяжелой жидкости при сформулированных выше условиях.

Дифференциальные уравнения (9.1.3) следует рассматривать при следующих граничных условиях:

1) прилипания жидкости на стенках сосуда (на Γ)

$$V_x = V_z = 0, \quad (9.1.4)$$

2) равенства нулю касательных напряжений на свободной поверхности жидкости (на Σ)

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} = 0, \quad (9.1.5)$$

3) равенства нулю нормальных напряжений на Σ

$$p = \frac{2}{\mathbf{Re}} \frac{\partial V_x}{\partial x}. \quad (9.1.6)$$

4) кинематическому условию на Σ

$$\left[\frac{\partial u(x, z, t)}{\partial t} \right]_{x=0} = V_x. \quad (9.1.7)$$

Задача плоская, поэтому условия (9.1.5), (9.1.6) и (9.1.7) удовлетворяются на прямой $x = 0$.

Представим скорость жидкости в виде суперпозиции потенциальной и вихревой составляющих:

$$\vec{V} = \nabla \varphi + \nabla^* \psi, \quad (9.1.8)$$

где $\varphi(x, z, t)$ - потенциал скоростей, $\psi(x, z, t)$ - вихревая функция поля скоростей, оператор

$$\nabla^* = \frac{\partial}{\partial x} \bar{z}^0 - \frac{\partial}{\partial z} \bar{x}^0.$$

Потребуем, чтобы φ была гармонической функцией в объеме, занимаемом жидкостью, т. е. удовлетворяла бы уравнению Лапласа.

С учетом (9.1.8) имеем

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Тогда, преобразовав первое уравнение (9.1.3), получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + \frac{x}{\mathbf{Fr}} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\Delta \psi}{\mathbf{Re}} \right) - \mathbf{St} \int_{-H_0}^0 dx \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz.$$

Здесь учтено, что $\frac{\partial u}{\partial t} \approx V_x$.

Последний член в этом уравнении преобразуем:

$$\mathbf{St} \int_{-H_0}^0 dx \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz = \mathbf{St} \left[\int_{z_1}^{z_2} (\varphi_0 - \varphi_H) dz - \int_{-H_0}^0 (\psi_2 - \psi_1) dx \right],$$

где

$$\varphi_0 = \varphi(0, z); \quad \varphi_H = \varphi(-H_0, z); \quad \psi_1 = \psi(x, z_1); \quad \psi_2 = \psi(x, z_2).$$

Как видно, он зависит только от t , поэтому, предыдущее уравнение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + \frac{x}{\mathbf{Fr}} + x \cdot \mathbf{St} \int_{z_1}^{z_2} (\varphi_0 - \varphi_H) dz - x \cdot \mathbf{St} \int_{-H_0}^0 (\psi_2 - \psi_1) dx \right\} = \\ = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\Delta \psi}{\mathbf{Re}} \right). \end{aligned} \tag{9.1.9}$$

Преобразовав второе уравнение (9.1.3), получим:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + p \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\Delta \psi}{\mathbf{Re}} \right). \tag{9.1.10}$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x}{\mathbf{Fr}} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ x \cdot \mathbf{St} \int_{z_1}^{z_2} (\varphi_0 - \varphi_H) dz - x \cdot \mathbf{St} \int_{-H_0}^0 (\psi_2 - \psi_1) dx \right\} = 0.$$

(9.1.10) можно записать в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + \frac{x}{\mathbf{Fr}} + x \cdot \mathbf{St} \int_{z_1}^{z_2} (\varphi_0 - \varphi_H) dz - x \cdot \mathbf{St} \int_{-H_0}^0 (\psi_2 - \psi_1) dx \right\} = \\ = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\Delta \psi}{\mathbf{Re}} \right). \end{aligned} \quad (9.1.11)$$

Сравнивая (9.1.9) и (9.1.11), приходим к выводу, что необходимые условия для φ и ψ выражаются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + \frac{x}{\mathbf{Fr}} + x \cdot \mathbf{St} \int_{z_1}^{z_2} (\varphi_0 - \varphi_H) dz - x \cdot \mathbf{St} \int_{-H_0}^0 (\psi_2 - \psi_1) dx = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\Delta \psi}{\mathbf{Re}}. \end{aligned} \quad (9.1.12)$$

Перепишем граничные условия в функциях φ и ψ .

1) Условие прилипания жидкости на Γ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (9.1.13)$$

2) Условие равенства нулю касательных напряжений на Σ

$$2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0.$$

3) Условие равенства нулю нормальных напряжений на Σ

$$p = \frac{2}{\mathbf{Re}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right).$$

С помощью первого уравнения (9.1.12) это условие можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u(0, z, t)}{\mathbf{Fr}} + u(0, z, t) \cdot \mathbf{St} \left[\int_{z_1}^{z_2} (\varphi_0 - \varphi_H) dz - \int_{-H_0}^0 (\psi_2 - \psi_1) dx \right] = \\ = \frac{2}{\mathbf{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (9.1.14)$$

Здесь учтено, что в силу условия о малости волновых движений на Σ можно принять $u(0, z, t) \approx x$.

4) Кинематическое условие на Σ

$$\frac{\partial u(0, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (9.1.15)$$

Имея в виду второе уравнение (9.1.12), условие равенства нулю касательных напряжений запишем в форме

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{2}{\mathbf{Re}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right). \quad (9.1.16)$$

Продифференцировав (9.1.14) по t и исключив с помощью (9.1.15) $\frac{\partial u(0, z, t)}{\partial t}$, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\mathbf{Fr}} + \mathbf{St} \left[\int_{z_1}^{z_2} (\varphi_0 - \varphi_H) dz - \int_{-H_0}^0 (\psi_2 - \psi_1) dx \right] \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + u(0, z, t) \cdot \mathbf{St} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{z_1}^{z_2} (\varphi_0 - \varphi_H) dz - \int_{-H_0}^0 (\psi_2 - \psi_1) dx \right] = \quad (9.1.17) \\
& = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\psi}{Fr} + \psi \cdot \mathbf{St} \left[\int_{z_1}^{z_2} (\varphi_0 - \varphi_H) dz - \int_{-H_0}^0 (\psi_2 - \psi_1) dx \right] + \frac{2}{\mathbf{Re}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь учтено соотношение, вытекающее из уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Решение поставленной краевой задачи ищем в виде:

$$\varphi = \exp(\Omega t) \Phi(x, z); \quad \psi = \exp(\Omega t) \Psi(x, z); \quad (9.1.18)$$

где

$$\Omega = \tilde{\alpha} + i\tilde{\beta},$$

$\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ - действительные числа, причем $\tilde{\alpha}$ является фактором затухания. Функции Φ, Ψ должны удовлетворять соответственно уравнениям Лапласа:

$$\Delta \Phi = 0; \quad (9.1.19)$$

и Гельмгольца:

$$\Omega \Psi = \frac{1}{\mathbf{Re}} \Delta \Psi, \quad (9.1.20)$$

при следующих граничных условиях:

1) прилипания на Γ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0; \quad (9.1.21)$$

2) равенства нулю касательных напряжений на Σ

$$\Omega\Psi = \frac{2}{\mathbf{Re}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right); \quad (9.1.22)$$

3) равенства нулю нормальных напряжений на Σ

$$\begin{aligned} & \Omega^2\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\mathbf{Fr}} + \mathbf{St} \left[\int_{z_1}^{z_2} (\Phi_0 - \Phi_H) dz - \int_{-H_0}^0 (\Psi_2 - \Psi_1) dx \right] \right\} + \\ & + u(0, z, t) \cdot \Omega \cdot \mathbf{St} \left[\int_{z_1}^{z_2} (\Phi_0 - \Phi_H) dz - \int_{-H_0}^0 (\Psi_2 - \Psi_1) dx \right] = \\ & = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\Psi}{\mathbf{Fr}} + \Psi \cdot \mathbf{St} \left[\int_{z_1}^{z_2} (\Phi_0 - \Phi_H) dz - \int_{-H_0}^0 (\Psi_2 - \Psi_1) dx \right] + \frac{2\Omega}{\mathbf{Re}} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right) \right\}. \end{aligned}$$

В виду малости волновых движений, приближенно можно записать

$$\Omega^2\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\mathbf{Fr}} + \mathbf{St} \left[\int_{z_1}^{z_2} (\Phi_0 - \Phi_H) dz - \int_{-H_0}^0 (\Psi_2 - \Psi_1) dx \right] \right\} = \quad (9.1.23)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\Psi}{\mathbf{Fr}} + \Psi \cdot \mathbf{St} \left[\int_{z_1}^{z_2} (\Phi_0 - \Phi_H) dz - \int_{-H_0}^0 (\Psi_2 - \Psi_1) dx \right] + \right. \\ \left. + \frac{2\Omega}{\mathbf{Re}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right\}.$$

При дальнейшем рассмотрении следует выделить два случая:

- 1) размер сосуда по z настолько велик, что превышают расстояние L_0 , на котором волны практически полностью затухают (случай неограниченной жидкости);
- 2) размер сосуда по z меньше L_0 (колебания жидкости в канале между вертикальными стенками).

9.2 Случай неограниченной жидкости

Рассмотрим задачу о демпфировании плоских волн на поверхности неограниченной по оси Oz электропроводной маловязкой жидкости при условии, что магнитное поле действует на участке $z_2 - z_1$ и направлено по оси Oy .

В качестве характерного размера берем L_0 - расстояние, на котором обычные гидродинамические волны практически затухают полностью. При этом $z_2 - z_1 \ll L_0$ и на активном участке образуются только бегущие волны. При отсутствии магнитного поля данная постановка совпадает с известной задачей Ламба [129] на «мелкой воде».

Решив уравнение Лапласа (9.1.19) при условии $\Phi(-H_0, z) = 0$, получим

$$\Phi(x, z) = \hat{A} \sin(\hat{k}z) \cdot \left[\text{ch}(\hat{k}x) + \text{cth}(\hat{k}H_0) \text{sh}(\hat{k}x) \right] \quad (9.2.1)$$

где \hat{A} , \hat{k} - действительные числа. При записи последующих формул тильду при этих числах опускаем.

Рассеяние энергии колебаний жидкости происходит в основном в поверхностном пограничном слое. Следуя стандартным методам теории пограничного слоя при больших значениях числа Рейнольдса, сделаем в (9.1.20) замену

$$\xi = x\sqrt{\mathbf{Re}}.$$

Тогда уравнение (9.1.20) после отбрасывания членов порядка $1/\mathbf{Re}$ запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - \Omega \Psi = 0. \quad (9.2.2)$$

Глубина H_0 даже при «мелкой воде» существенно больше толщины поверхностного пограничного слоя, поэтому общее решение уравнения (9.2.2) должно быть ограниченным при $\xi \rightarrow -\infty$, представим его в виде

$$\Psi(\xi, z) = C(z) \exp(\sqrt{\Omega} \xi). \quad (9.2.3)$$

Для определения $C(z)$ используем условие (9.1.22). Получим уравнение с большим параметром

$$C'' - \frac{\mathbf{Re}}{2} \Omega C = Ak^2 \cdot \text{cth}(kH_0) \cdot \cos(kz),$$

общее решение которого можно записать в форме

$$C(z) = -\frac{2Ak^2}{\mathbf{Re}\Omega} \text{cth}(kH_0) \cdot \cos(kz).$$

Здесь учтено, что $\frac{\mathbf{Re}}{2} \Omega \gg k^2$. Тогда решение уравнения (9.2.3)

после перехода к старым переменным запишется в виде

$$\Psi(x, z) = -\frac{2Ak^2}{\mathbf{Re}\Omega} \operatorname{cth}(kH_0) \cdot \cos(kz) \cdot \exp(\sqrt{\mathbf{Re}\Omega}x), \quad (9.2.4)$$

Необходимо, чтобы решения (9.2.1) и (9.2.4) удовлетворяли условию отсутствия нормальных напряжений на Σ (9.1.23). Этого можно добиться соответствующим подбором величины Ω . Подставим (9.2.1) и (9.2.4) в (9.1.23) и, отбросив члены имеющие порядок малости выше $1/\mathbf{Re}$, при $x = 0$ получим

$$\begin{aligned} \Omega^2 \mathbf{Fr} + k \cdot \operatorname{cth}(kH_0) - 2A \cdot \mathbf{St} \cdot \mathbf{Fr} \cdot \operatorname{cth}(kH_0) \cdot \left(1 + \frac{2k^2}{\mathbf{Re}\Omega}\right) \gamma_k = \\ = \frac{2k^2}{\mathbf{Re}} \left[\frac{k}{\Omega} \operatorname{cth}(kH_0) - \Omega \mathbf{Fr} \right], \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

где

$$\gamma_k = \sin \frac{k(z_2 - z_1)}{2} \sin \frac{k(z_2 + z_1)}{2}.$$

Из (9.2.5) вытекают условия, при которых электромагнитное воздействие на жидкость отсутствует:

$$k \frac{z_2 - z_1}{2} = \pi n; \quad k \frac{z_2 + z_1}{2} = \pi n; \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Волновое число k связано с длиной соответствующей бегущей волны Λ_k соотношением

$$k = \frac{2\pi}{\Lambda_k},$$

поэтому эти условия можно записать так

$$z_2 - z_1 = n\Lambda_k; \quad z_2 + z_1 = n\Lambda_k; \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (9.2.6)$$

Первое условие выполняется, если на длине активного участка укладывается целое число бегущих волн. Результирующий индуцированный ток в этом случае равен нулю. Второе условие соответствует случаю, когда волновая поверхность симметрична относительно середины активного участка. Понятно, что второе условие не может выполняться для бегущей волны в любой момент времени.

Исследуем асимптотику корней уравнения (9.2.5), полагая, что два его корня близки по значениям к частотам свободных колебаний обычной слабовязкой жидкости:

$$\Omega = \pm i \sqrt{\frac{k}{Fr}} + \frac{\Omega_1}{Re} + O\left(\frac{1}{Re^2}\right). \quad (9.2.7)$$

Подставив (9.2.8) в (9.2.6) и пренебрегая членами порядка $\frac{1}{Re}$, получим единственный корень, отвечающий физическому смыслу задачи

$$\Omega_1 = -k^2 \left[1 + \left(\frac{2A \cdot St \cdot Fr}{k} \gamma_k + 1 \right) \text{cth}(kH_0) \right]. \quad (9.2.8)$$

При $\gamma_k = 0$, т. е. для изолированных мод, это значение приближается к классическому, известному из обычной гидродинамики при $H_0 \rightarrow \infty$

$$\Omega_1 = -2k^2,$$

а для прочих парциальных колебаний несколько отличается от обычного гидродинамического. Следовательно, электромагнитное демпфирование избирательно воздействует на бегущие плоские парциальные волны.

Значение числа Стюарта здесь ограничено только снизу условием, при котором магнитное воздействие ничтожно мало:

$$\mathbf{St} \ll \frac{k}{2A \cdot \mathbf{Fr} \cdot \gamma_k}.$$

Пользуясь решением (9.2.8) можно рассчитать значение \mathbf{St} , при котором волны практически полностью затухают на активном участке.

В соответствии с (9.2.7) запишем фактор затухания для k – парциальной волны:

$$|\tilde{\alpha}_k| = \frac{k^2}{\mathbf{Re}} \left[1 + \left(\frac{2A \cdot \mathbf{St} \cdot \mathbf{Fr}}{k} \gamma_k + 1 \right) \text{cth}(kH_0) \right]. \quad (9.2.9)$$

Теперь, когда решение задачи найдено, вернемся к члену, выражающему магнитную силу в первом уравнении (9.1.3) и запишем его в явном виде с учетом (9.2.1) и (9.2.4):

$$\begin{aligned} \mathbf{St} \cdot \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial t} dz &= \mathbf{St} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz = \\ &= -2A \cdot \mathbf{St} \cdot \exp(\Omega t) \cdot \gamma_k \times \\ &\times \left[\text{ch}(kx) + \text{cth}(kH_0) \cdot \text{sh}(kx) - \frac{2k^2}{\mathbf{Re}\Omega} \text{cth}(kH_0) \cdot \exp(\sqrt{\mathbf{Re}\Omega} x) \right]. \end{aligned}$$

Эта сила имеет демпфирующее воздействие только на те волновые движения жидкости, для которых не выполняется условие $\gamma_k = 0$. Причем для колебаний низких парциальных тонов последним членом в квадратной скобке можно пренебречь, так как потенциальные движения жидкости значительно больше вихревых.

9.3 Колебания жидкости в канале между вертикальными стенками

Наиболее интересным является вопрос об особенностях электромагнитного воздействия на стоячие волны, образующиеся на поверхности электропроводной жидкости в неглубоком канале между двумя вертикальными плоскостями. Именно этот случай в наибольшей степени аналогичен волновым процессам в струне или стержне.

В качестве характерного размера примем ширину канала L_0 , в безразмерных величинах она равна единице. Пусть имеется активная зона шириной $\Delta z = z_2 - z_1$, в которой действует однородное стационарное магнитное поле. Вектор индукции магнитного поля направлен вдоль канала. По вертикали размер активной зоны больше глубины канала. Боковые стенки канала считаем идеально проводящими и замкнутыми идеальной электрической цепью (рис. 28).

Существенное отличие этой задачи от задачи Ламба заключается в наличии трех пограничных слоев: поверхностного и двух слоев на твердых вертикальных поверхностях

$$z = \frac{1}{2}; \quad z = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, вихревую функцию необходимо представить в виде трех слагаемых:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3.$$

Схема колебаний жидкости в канале между вертикальными стенками

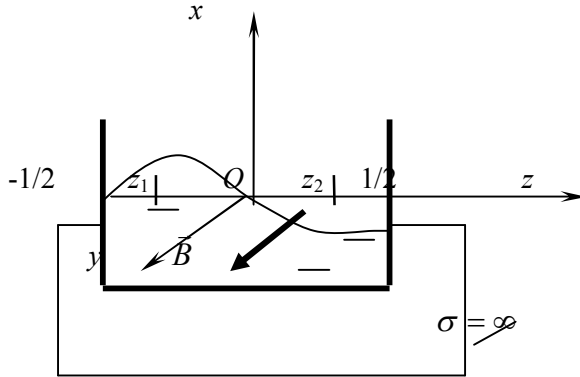


Рис. 28

Пусть функция Ψ_3 соответствует поверхностному пограничному слою. Она получена в предыдущем параграфе, причем ее разложение начинается с членов порядка $O\left(\frac{1}{\mathbf{Re}}\right)$. В монографии [129]

показано, что разложение вихревых функций Ψ_1, Ψ_2 в пограничных слоях у твердых стенок начинается с членов порядка $O\left(\frac{1}{\sqrt{\mathbf{Re}}}\right)$. Если предположить, что активная зона занимает все

пространство между стенками, то образующийся на них пограничный слой будет магнитогидродинамическим. Оценка толщины МГД - пограничного слоя в случае, когда вектор индукции магнитного направлен параллельно стенке, приводится в монографии [131]:

$$\delta_2 \approx \frac{1}{\sqrt{\mathbf{Re}(1 - \mathbf{Eu}_m)}},$$

где \mathbf{Eu}_m - магнитное число Эйлера, характеризующее отношение плотности магнитной энергии к плотности кинетической энергии жидкости.

Однако, в нашем случае магнитное число Эйлера существенно меньше единицы, следовательно, как и в обычной гидродинамике, допустимо принять, что разложение вихревых функций на стенках начинается с членов порядка $O\left(\frac{1}{\sqrt{\mathbf{Re}}}\right)$.

Из этих рассуждений приходим к выводу, что Ψ_3 следует пренебречь по сравнению с Ψ_1 и Ψ_2 . То есть, как и в обычной гидродинамике [129], имеем

$$\Psi = -\frac{1}{\sqrt{\Omega \mathbf{Re}}} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{z=-\frac{1}{2}} \exp \left[-\sqrt{\Omega \mathbf{Re}} \left(z + \frac{1}{2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{z=\frac{1}{2}} \exp \left[\sqrt{\Omega \mathbf{Re}} \left(z - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}. \quad (9.3.1)$$

Условия прилипания (9.21) с учетом (9.3.1) записываются в форме

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{\Omega \mathbf{Re}}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad \text{при} \quad z = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{\sqrt{\Omega \mathbf{Re}}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad \text{при} \quad z = \frac{1}{2}.$$

Кроме того, записанная вихревая функция должна удовлетворять условию (9.1.23) равенства нулю нормальных напряжений на свободной поверхности. Подставив (9.3.1) в (9.1.23), получим

$$\begin{aligned}
& \Omega^2 \Phi + \frac{1}{Fr} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + St \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \left\{ \int_{z_1}^{z_2} (\Phi_0 - \Phi_H) dz + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\sqrt{\Omega Re}} \int_{-H_0}^0 \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{z=-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2z_2+1}{2z_1+1}\right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{z=\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2z_2-1}{2z_1-1}\right) \right] dx \right\} = \\
& = \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{z=-\frac{1}{2}} \exp\left[-\sqrt{\Omega Re} \left(z + \frac{1}{2}\right)\right] - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{z=\frac{1}{2}} \exp\left[\sqrt{\Omega Re} \left(z - \frac{1}{2}\right)\right] \right\} \times \\
& \quad \times \left(\frac{1}{Fr} + St \right) \left\{ \int_{z_1}^{z_2} (\Phi_0 - \Phi_H) dz + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\Omega Re}} \int_{-H_0}^0 \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{z=-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2z_2+1}{2z_1+1}\right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{z=\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2z_2-1}{2z_1-1}\right) \right] dx \right\},
\end{aligned} \tag{9.3.2}$$

где $\Phi_0 = \Phi(0, z)$, $\Phi_H = \Phi(H_0, z)$.

Применим метод Галеркина, представив искомую функцию в виде ряда

$$\Phi(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{\psi}_n(z) \exp k_n x, \tag{9.3.3}$$

где a_n – коэффициенты разложения, подлежащие определению, а функции $\tilde{\psi}_n$ ортогональны и нормированы условием

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\psi}_n^2 dz = 1.$$

В монографии [129] показано, что аналогичной гидродинамической задаче удовлетворяют функции

$$\tilde{\psi}_n(z) = \sin k_n \left(z + \frac{1}{2} \right) - \frac{k_n}{\sqrt{\Omega \mathbf{Re}}} \cos k_n \left(z + \frac{1}{2} \right), \quad (9.3.4)$$

$$(n = 1, 2, \dots).$$

где

$$k_n = n\pi + \frac{2n\pi}{\sqrt{\Omega \mathbf{Re}}}.$$

Отсюда видно, что волновой процесс на поверхности жидкости отличается от колебаний струны с закрепленными концами. Диссипативные процессы в струне происходят по всей ее длине, а в жидкости - в основном в пограничных слоях на стенках. Второе слагаемое в (9.3.4) характеризует эти диссипативные процессы.

Подставив (9.3.3) в (9.3.2) и, имея в виду, что на свободной поверхности $x = 0$, получим

$$\Omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{\psi}_n(z) + \frac{1}{\mathbf{Fr}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n \tilde{\psi}_n(z) +$$

$$+ \mathbf{St} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n \tilde{\psi}_n(z) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n [1 - \exp(-k_n H_0)] \int_{z_1}^{z_2} \tilde{\psi}_n(z) dz + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{\Omega \operatorname{Re}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \tilde{\psi}_n \left(-\frac{1}{2} \right) \exp \left(\frac{2z_2 + 1}{2z_1 + 1} \right) + a_n \tilde{\psi}_n \left(\frac{1}{2} \right) \exp \left(\frac{2z_2 - 1}{2z_1 - 1} \right) \right] \times \\
& \times [1 - \exp(-k_n H_0)] \} = \left\{ \exp \left[-\sqrt{\Omega \operatorname{Re}} \left(z + \frac{1}{2} \right) \right] \sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n \tilde{\psi}_n \left(-\frac{1}{2} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \exp \left[\sqrt{\Omega \operatorname{Re}} \left(z - \frac{1}{2} \right) \right] \sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n \tilde{\psi}_n \left(\frac{1}{2} \right) \right\} \times \\
& \quad \times \left(\frac{1}{Fr} + St \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n [1 - \exp(-k_n H_0)] \int_{z_1}^{z_2} \tilde{\psi}_n(z) dz + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{\Omega \operatorname{Re}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \tilde{\psi}_n \left(-\frac{1}{2} \right) \exp \left(\frac{2z_2 + 1}{2z_1 + 1} \right) + a_n \tilde{\psi}_n \left(\frac{1}{2} \right) \exp \left(\frac{2z_2 - 1}{2z_1 - 1} \right) \right] \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times [1 - \exp(-k_n H_0)] \right\} \right).
\end{aligned}$$

Умножим это уравнение на $\tilde{\psi}_m$ ($m = 1, 2, \dots$), проинтегрируем по z в пределах ширины канала и, имея в виду ортогональность функций (9.3.4), получим систему уравнений для определения коэффициентов a_m :

$$\Omega^2 a_m + \frac{a_m k_m}{Fr} + St \cdot a_m k_m \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n [1 - \exp(-k_n H_0)] \int_{z_1}^{z_2} \tilde{\psi}_n(z) dz + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{\Omega \operatorname{Re}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \tilde{\psi}_n \left(-\frac{1}{2} \right) \exp \left(\frac{2z_2 + 1}{2z_1 + 1} \right) + a_n \tilde{\psi}_n \left(\frac{1}{2} \right) \exp \left(\frac{2z_2 - 1}{2z_1 - 1} \right) \right] \times \\
& \times [1 - \exp(-k_n H_0)] = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n \tilde{\psi}_n \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\sqrt{\Omega \operatorname{Re}} \left(z + \frac{1}{2} \right) \right] \tilde{\psi}_m dz - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n \tilde{\psi}_n \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp \left[\sqrt{\Omega \operatorname{Re}} \left(z - \frac{1}{2} \right) \right] \tilde{\psi}_m dz \right\} \times \quad (9.3.5) \\
& \times \left(\frac{1}{Fr} + St \cdot a_m k_m \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n [1 - \exp(-k_n H_0)] \int_{z_1}^{z_2} \tilde{\psi}_n(z) dz + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{\Omega \operatorname{Re}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \tilde{\psi}_n \left(-\frac{1}{2} \right) \exp \left(\frac{2z_2 + 1}{2z_1 + 1} \right) + a_n \tilde{\psi}_n \left(\frac{1}{2} \right) \exp \left(\frac{2z_2 - 1}{2z_1 - 1} \right) \right] \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times [1 - \exp(-k_n H_0)] \right\}, \quad (m = 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

В электромагнитные члены уравнений (9.3.5) в виде множителя входит интеграл $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\psi}_m dz$. Пределы в этом интеграле следует ста-

вить лишь по ширине активной зоны, так как вне ее электромагнитные силы не действуют. Вычислим его с учетом (9.3.4)

$$\int_{-1/2}^{1/2} \tilde{\psi}_m dz = \int_{z_1}^{z_2} \tilde{\psi}_m dz = - \left\{ \frac{2}{k_m} \sin \frac{k_m(z_2 + z_1)}{2} \sin \frac{k_m(z_2 - z_1)}{2} + \frac{2}{\sqrt{\Omega \text{Re}}} \sin \frac{k_m(z_2 - z_1)}{2} \cos \frac{k_m(z_2 + z_1)}{2} \right\},$$

$$(m=1, 2, \dots).$$

При $z_1 = -1/2$; $z_2 = 1/2$ интеграл (9.3.6) всегда равен нулю, то есть электромагнитное воздействие на колебания жидкости в этом случае отсутствует. Этого следовало ожидать, так как в силу условия сохранения объема жидкости в канале может образовываться только четное число поверхностных стоячих волн. Если активная зона уже поперечного размера канала, то магнитное поле не воздействует на те моды, у которых по ширине активной зоны укладывается четное число стоячих волн.

Теперь запишем электромагнитный член, вошедший в первое уравнение (9.1.3), и выражающий магнитную силу, отнесенную к единице массы для магнитной силы, сохранив в нем, как и в параграфе 9.2, только потенциальную составляющую движения:

$$\mathbf{St} \cdot \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial t} dz \approx \mathbf{St} \cdot \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dz =$$

$$= \mathbf{St} \cdot \exp \Omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n k_n \exp k_n x \cdot \int_{z_1}^{z_2} \tilde{\psi}_n dz \right).$$

В это выражение тоже входит интеграл (9.3.6), следовательно, для него справедливо сформулированное выше условие отсутствия электромагнитного воздействия на парциальные колебания жидкости. Используя полученное условие, можно с помощью магнитного поля избирательно воздействовать на колебания жидкости в канале, добиваясь гашения определенных составляющих движения.

10 Прикладные задачи

10.1 Электромагнитный способ частотного анализа колебаний проводящих механических систем

Установленные теоретически особенности электромагнитного воздействия на колебания электропроводных систем с распределенными параметрами можно использовать при решении некоторых прикладных вопросов динамики сложных систем. Например, при проектировании многих ответственных конструкций необходимо производить расчеты собственных частот, либо определять их экспериментально. Для этого существует много приближенных методов, однако, теория не позволяет учесть все особенности данной конструкции: неоднородность, дефекты соединений и концевых креплений и так далее. Это обстоятельство делает актуальными экспериментальные способы частотного анализа и требует их развития.

На основе изложенной в предыдущих разделах теории предложим идею экспериментального способа частотного анализа проводящих одномерных конструкций с однородными граничными условиями, или приводимыми к ним хотя бы приближенно. Суть его покажем вначале на примере струны [112].

Допустим, что требуется определить спектр собственных демпфированных частот при колебаниях электропроводящей струны с закрепленными концами в среде с неопределенной механической диссипацией.

Для экспериментального решения задачи замкнем концы струны электрической цепью, электрическое сопротивление которой ничтожно мало по сравнению с сопротивлением самой струны. Пусть струна совершает собственные колебания в однородном стационарном магнитном поле, вектор индукции которого направлен по нормали к плоскости колебаний струны. Плотность индуцированных при этом в струне токов можно выразить через обобщенные скорости парциальных колебаний:

$$j = \frac{\sigma B}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dot{q}_n \int_{z_1}^{z_2} X_n dz \right) = \frac{2\sigma B}{\pi l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} \dot{q}_n. \quad (10.1.1)$$

При вычислении γ_n здесь использованы синусоидальные амплитудные функции. Как показано в первом разделе, парциальные частоты при этом близки к демпфированным частотам главных колебаний при условии одновременного действия механической и магнитной диссипации.

Индукцированные в струне токи при ее собственных колебаниях в магнитном поле легко регистрировать, включив в цепь частотный анализатор. Резонансным способом этот прибор определяет любое количество собственных частот: $\omega_1, \dots, \omega_n, \dots$, входящих в функцию тока $j(t)$. Так как электромагнитное воздействие на струну является избирательным, в каждом случае расположения активного участка выделяются изолированные моды. Поэтому этот набор включает в себя только частоты неизолированных парциальных колебаний. Чтобы определить все частоты необходимо несколько раз изменить ширину и расположение активного участка. Заметим, что присутствие магнитного поля само по себе влияет на демпфированные частоты колебаний системы, так как создает магнитную диссипацию. Следовательно, необходимо установить соотношение между определяемыми экспериментально частотами в присутствии магнитного поля ω_r и собственными частотами системы p_r^* , с учетом только механической диссипации. Используем систему (1.2.11) расщепленных дифференциальных уравнений, описывающую колебания струны в магнитном поле при наличии одного активного участка, запишем факторы затухания для колебания каждого парциального колебания:

$$\tilde{h}_1 = \frac{1}{2} \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{1^2 \pi^2} \right);$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_2 &= \frac{1}{2} \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_2^2}{2^2 \pi^2} \right); \\ &\dots\dots\dots; \\ \tilde{h}_r &= \frac{1}{2} \left(\beta + \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right). \end{aligned} \quad (10.1.2)$$

Вторые слагаемые в правых частях этих выражений представляют собой факторы магнитной диссипации.

Известно, что собственные частоты колебаний системы p_r , определенные без учета всех видов сопротивления, соотносятся с демпфированными частотами ω_r реальной системы следующим образом

$$p_r = \sqrt{\omega_r^2 + \tilde{h}_r^2} = \sqrt{\omega_r^2 + \left(\frac{\beta}{2} + \mathbf{St} \frac{4\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right)^2}, \quad (10.1.3)$$

$$(r = 1, 2, \dots).$$

Колебания системы только при наличии механического сопротивления совершаются с частотами

$$p_r^* = \sqrt{p_r^2 - \frac{\beta^2}{4}}, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (10.1.4)$$

Входящий в (10.1.4) и (10.1.5) коэффициент внешней механической диссипации β имеет одно значение при всех r и легко определяется экспериментально. Обычно по изменению амплитуды колебаний струны за определенное время вначале вычисляют логарифмический декремент затухания δ_r , который, например, при линейной зависимости сопротивления от скорости связан с демпфированной частотой и фактором затухания соотношением

$$\tilde{\delta}_r = \frac{2\pi\tilde{h}_r}{\sqrt{p_r^2 - \tilde{h}_r^2}} = \frac{2\pi\tilde{h}_r}{\omega_r}, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (10.1.5)$$

Затем отсюда можно найти h_r , так как $\tilde{\delta}_r$ и ω_r определены экспериментально:

$$\tilde{h}_r = \frac{\tilde{\delta}_r \omega_r}{2\pi}. \quad (10.1.6)$$

С учетом (10.1.2) находим коэффициент механической диссипации

$$\beta = \frac{\tilde{\delta}_r \omega_r}{\pi} - \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi}. \quad (10.1.7)$$

Все входящие в правую часть этого выражения величины известны, так как часть из них задается, а часть определяется экспериментально. Значение β удобно находить по основному тону, для которого

$$\beta = \frac{\tilde{\delta}_1 \omega_1}{\pi} - \mathbf{St} \frac{8\gamma_1^2}{\pi}. \quad (10.1.8)$$

Теперь, пользуясь формулой (10.1.4), нетрудно вычислить демпфированные частоты колебаний реальной системы, в которой действует только механическое сопротивление.

Аналогичным способом можно определить собственные частоты колебаний реальных стержневых конструкций при однородных концевых условиях, или приводимых к ним.

В отличие от струны для стержня учтем внутреннее трение. Используем систему расщепленных дифференциальных уравнений (2.1.5) и запишем факторы затухания для каждого парциального колебания:

$$\tilde{h}_1 = \frac{1}{2} \left(\beta + \beta^* + \mathbf{St} \frac{\gamma_1^2}{\alpha_1^2 Y_1^*} \right);$$

$$\tilde{h}_2 = \frac{1}{2} \left(\beta + \beta^* p_2^2 + \mathbf{St} \frac{\gamma_2^2}{\alpha_2^2 Y_2^*} \right); \quad (10.1.9)$$

$$\dots\dots\dots; \\ \tilde{h}_r = \frac{1}{2} \left(\beta + \beta^* p_r^2 + \mathbf{St} \frac{\gamma_r^2}{\alpha_r^2 Y_r^*} \right); \\ \dots\dots\dots$$

Факторы затухания для стержня, как и для струны, определяются по найденным экспериментально значениям ω_r и $\tilde{\delta}_r$. Формулы (10.1.3), (10.1.4), (10.1.5) и (10.1.6) справедливы и в этом случае при значениях \tilde{h}_r , определяемых из (10.1.9). Тогда суммарный фактор механического сопротивления (внешнего и внутреннего) вычисляется по формуле

$$\beta + \beta^* p_r^2 = \frac{\tilde{\delta}_r \omega_r}{\pi} - \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi}, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (10.1.10)$$

Механический фактор затухания в этом случае является частотно-зависимым и его следует определять для каждого парциального колебания. Частота колебаний реальной системы находится по формуле

$$p_r^* = \sqrt{p_r^2 - \frac{(\beta + \beta^* p_r^2)^2}{4}}, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (10.1.11)$$

Если требуется произвести частотный анализ неэлектропроводного стержня, то вдоль него можно наклеить тонкую проводящую пленку (сенсор) и ее подключить к частотному анализатору.

10.2 Активное электромагнитное гашение собственных колебаний одномерных проводящих систем

Иногда в технологических целях возникает необходимость устранения вибраций определенных парциальных тонов (частот) конкретных механических систем, сохранив при этом вибрации других тонов. В частности, такая проблема возникает в акустической звуковоспроизводящей технике, в отношении фоновых шумов. Избирательность электромагнитного воздействия на проводящие системы позволяет решать эту задачу. Изложим вначале идею метода применительно к струне [112].

Включим во внешнюю цепь, замыкающую концы струны, источник э.д.с., создающий переменный ток плотности $j_B(t)$, который в общем случае можно представить в виде гармонического ряда с любым набором частот при любых начальных фазах. В частности разложение функции $j_B(t)$ можно произвести по частотам ω_r , способ экспериментального определения которых изложен в предыдущем параграфе. Тогда обобщенные силы (все или их часть) совпадут с соответствующими диссипативными магнитными силами и увеличат факторы затухания всех или нескольких колебаний. Иными словами, при помощи усилителя с электронным частотным анализатором можно за счет внешнего источника э.д.с. увеличить индуцированные токи. В отличие от пассивной магнитной диссипации (за счет только индуцированных токов), предложенный способ электромагнитного демпфирования назовем активным.

Предположим, что при помощи устройства с частотным электронным анализатором удастся отфильтровать из всех индуцированных токов ток, с частотой r -ого парциального колебания и усилить его в ν раз, одновременно скомпенсировав токи остальных частот. Тем самым мы исключим влияние на данное парциальное колебание со стороны остальных парциальных колебаний и увеличим его магнитный демпфирующий фактор. Тогда дифференциальное уравнение r -ого парциального колебания можно рассматривать отдельно от других, оно имеет вид

$$\ddot{q}_r + \left(\beta + \nu \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = 0; \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (10.2.1)$$

Таким образом, увеличенный фактор затухания r – ого парциального колебания составит

$$\tilde{h}_r = \frac{1}{2} \left(\beta + \nu \mathbf{St} \frac{8\gamma_r^2}{r^2 \pi^2} \right), \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (10.2.2)$$

Это, конечно, приводит к изменению собственной демпфированной частоты по сравнению с частотой пассивной диссипации. Она уменьшится и составит

$$\omega_r = \sqrt{p_r^2 - \tilde{h}_r^2}.$$

Именно на эту частоту следует настраивать ток от внешнего источника э.д.с. Соответствующим подбором коэффициента усиления ν можно добиться даже аperiodического затухания r - ого колебания. Конечно, все вышеизложенное сделано в предположении, что $\gamma_r \neq 0$, в противном случае активное электромагнитное гашение данного колебания невозможно. Заметим, что активным образом можно гасить не только отдельные парциальные колебания, но и определенную группу или даже все колебания.

Аналогичную задачу рассмотрим для однородного призматического проводящего стержня с классическими однородными граничными условиями.

После фильтрации токов и усиления тока с частотой r - ого парциального колебания в ν раз получим уравнение

$$\ddot{q}_r + \left(\beta + \beta^* p_r^2 + \nu \mathbf{St} \frac{\gamma_r^2}{\alpha_r^2 Y_r^*} \right) \dot{q}_r + p_r^2 q_r = 0, \quad (10.2.3)$$

$$(r = 1, 2, \dots).$$

Из (10.2.3) следует, что фактор затухания r -ого парциального колебания составит

$$\tilde{h}_r^* = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^*}{2} p_r^2 + \nu St \frac{\gamma_r^2}{2\alpha_r^2 Y_r^*}. \quad (10.2.4)$$

Колебание r -ого тона при этом происходит с частотой

$$\omega_r^* = \sqrt{p_r^2 - \tilde{h}_r^{*2}}.$$

Предложенный способ активного электромагнитного гашения вибраций можно применять для сложных электромеханических систем составного типа с однородными (или приводимыми к ним) граничными условиями. Если исследуемая конструкция не является электропроводной, активное гашение ее колебаний возможно при помощи наклеенных вдоль нее проводящих пленок (актуаторов), по которым пропускается электрический ток.

Очевидно, идею активного электромагнитного гашения колебаний можно распространить и на двумерные системы.

Список использованных источников

1. Мартыненко Ю.Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. - М.: Наука, 1988.- 368 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука, 1982. - 620 с.
3. Сермонс Г. Я. Динамика твердых тел в электромагнитном поле. - Рига: Зинатне, 1974.- 248 с.
4. Голубков В. В. Момент сил в магнитном поле // Космические исследования. - 1972.- Т. 10, № 1 . - С. 20 - 39.
5. Астахов В. И. К расчету силового воздействия магнитного поля на тела, несущие токи // Изв. вузов. Электромеханика. - 1984. - № 10.- С.5 - 14.
6. Астахов В. И. Задача расчета квазистационарного электромагнитного поля в проводящих оболочках // Изв. вузов. Электромеханика. - 1985.- №1. - С. 15 - 30.
7. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. - М.: Наука, 1965. - 416 с.
8. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. - 308 с.
9. Белецкий В. В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. - М.: Наука, 1985. - 288 с.
10. Кобрин А.И. Асимптотическое решение задачи о движении твердого тела в магнитном поле // Дифференциальные уравнения - 1985. - Т. 21, № 10. - С. 1808 - 1811.
11. Кобрин А.И. Момент сил, действующий на ротор гироскопа в магнитном поле // Межвузовск. сб. трудов. - М.: Моск. энерг. ин-т. - № 80.- С. 106 - 110.
12. Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г. Динамика проводящего твердого тела в высокочастотном магнитном поле // Докл. АН СССР. - 1980. - Т.255, № 5.- С. 1063 - 1065.
13. Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г. Движение проводящего твердого тела около центра масс в медленно изменяющемся магнитном поле // Докл. АН СССР. - 1981. - Т. 261, № 5. - С. 1070 - 1073.

14. Линьков Р. В. Медленные движения проводящего волчка при резонансном взаимодействии с переменным магнитным полем // Журн. техн. физики. - 1980. - Т. 50, № 6. - С. 1152 - 1159.
15. Линьков Р. В. , Урман Ю. М. Силы и моменты, действующие на проводящую оболочку, вращающуюся в магнитном поле // Журн. техн. физики. - 1977. - Т. 47, № 5. - С. 889 - 896.
16. Линьков Р. В., Урман Ю. М. Быстрые вращения проводящего магнитного волчка в неоднородном переменном магнитном поле // Журн. техн. физики. - 1978. - Т. 48, № 6. - С. 1123 - 1131.
17. Урман Ю.М., Комаров В.Н. Активное гашение нутаций ротора неконтактного гироскопа // Изв. вузов. Приборостроение. - 1982. - Т. 25, № 12.- С.44-47.
18. Урман Ю.М., Комаров В.Н. О влиянии неконтактного подвеса на движение гироскопа // Прикладная механика. - 1986. - Т. 22, № 10.- С. 109 - 114.
19. Мартыненко Ю. Г. Движение проводящего твердого тела около неподвижной точки в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. - 1977. - № 4. - С. 36 - 45.
20. Мартыненко Ю. Г. Аналитическая динамика электромеханических систем. - Моск. энерг. ин.-т, 1984. - 64 с.
21. Поливанов К. М. Электродинамика движущихся тел. - М.: Энергоиздат, 1982.- 192 с.
22. Рябов А. Б. Определение главного вектора и главного момента сил, действующих на сверхпроводящее тело в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. - 1969.- № 6. - С. 34 - 37.
23. Самсонов В. А. О вращении тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. - 1984. - № 4. - С. 32 - 34.
24. Богоявленский О.И. Новые интегрируемые случаи динамики твердого тела в силовом поле // Докл. АН ССР. - 1984 - Т. 275, № 6. - С. 1359 - 1363.
25. Кирко И.М., Кирко Г.Е. Магнитная гидродинамика при экстремальных процессах.- М.: Наука, 1982.- 136 с.
26. Кузнецов С.Е. Вращение цилиндра в проводящей жидкости в осевом магнитном поле// Магнитная гидродинамика.- № 2, 1973.- С. 12-18.

27. Никитин Н.В., О МГД-вращении электропроводящих сред в скрещенных полях// Магнитная гидродинамика.- №1, 1978. – С. 73-82.
28. Ганницкий А.И., Дробышевский Э.М., Розов С.И. Трехмерное нестационарное движение газоразрядной плазмы в гомополярнике// ЖТФ.- т.40, вып. 10.- 1970.-С. 2156-2163.
29. Алдошина И.А. Электродинамические громкоговорители. - М.: Радио и связь, 1989.- 272 с.
30. Алдошина И.А., Войшвилло А.Г. Высококачественные акустические системы и излучатели. - М.: Радио и связь, 1985. - 165 с.
31. Пондемоторное действие электромагнитного поля (Теория и приложения). Под ред. Валитова Р. А. - М.: Сов. радио.- 1975.- 226 с.
32. А.с. № 777490 СССР. Струнный датчик// Привалов В.Д., Козин М.П., Левин М.Н., Ляпидов В.С. Офиц. бюллетень ГК СССР по делам изобр. и откр. – 1980.- № 41. С. 179.
33. А. с. № 1464051. Магнитоупругий преобразователь силы// Агабеков М.Г., Гершуни А. А. Офиц. бюл. ГК СССР по делам изобр. и откр. – 1980.- № 41. С. 180.
34. Саркисян С. О. Задача о вибродиагностике тонкой упругой проводящей цилиндрической оболочки с использованием метода магнитоупругости// Научно-технический прогресс в машиностроении (Москва). - 1989.- № 17. С. 81 - 90.
35. Варданян Л. В. Колебания двух параллельных электропроводящих прямоугольных пластин в продольном магнитном поле// Изв. АН Арм. ССР. Мех. - 1988. - Т.41, № 4. - С. 19-25.
36. Багдасарян Г. Е., Даноян Э. А. Математическое моделирование колебаний двухслойных магнитострикционных пластин // Изв. РАН. МГТ. - 1992. - № 3. С. 87 - 94.
37. Багдасарян Г. Е., Саноян А. А. Параметрические колебания проводящей цилиндрической оболочки, обусловленные нестационарным магнитным полем// Прикладная математика (Ереван). - 1988.- № 7. - С. 48 - 57.
38. Багдасарян Г. Е., Пилипосян Г. Т. Математическое моделирование и исследование колебаний сверхпроводящей прямоуголь-

- ной пластинки в нестационарном магнитном поле// Изв. АН Армении. Мех. - 1993. - Т. 46, № 1-2. - С. 5 - 13.
39. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В., Минасян М. М. Осесимметричные колебания нелинейно-упругой цилиндрической оболочки в продольном магнитном поле// Изв. АН Армении. Мех. - 1995. - Т.48, № 2. - С. 3 - 12.
40. Багдасарян Г.Е., Пилипосян Г. Т. Исследование магнитоупругой устойчивости сверхпроводящей пластинки на основе численного решения внешней задачи Неймана// Изв. АН Армении. Мех. - 1995 - Т.48, № 2. - С. 13 - 26.
41. Саркисян А. В. О распространении волн в нелинейно-упругой анизотропной цилиндрической оболочке в продольном магнитном поле// Междунар. н.-т. конф. "Инж.-физ. пробл. авиации и косм. техники". Егорьевск, 1995. - Тез. докл. - С. 109.
42. Саркисян А.В. Волны модуляции ортотропной цилиндрической оболочки, расположенной в магнитном поле// 4 Междунар. совещ.-сем. "Инж. - физ. пробл. новой техники": Тез. докл. - М., 1996. - С. 100 - 101.
43. Казарян К. Б. Низкочастотные колебания упругой токонесящей пластинки // 4 Междунар. совещ.-сем. "Инж. - физ. пробл. новой техники": Тез. докл. - М., 1996. - С. 118.
44. Белоконь А. В., Наседкин А. В. О некоторых свойствах собственных частот электроупругих тел ограниченных размеров// ПММ. - 1996 - Т. 60, № 1. - С. 151 - 158.
45. Скубов Д. Ю., Ходжаев К. Ш. Системы с магнитоэлектрическими гасителями колебаний// Изв. АН. Мех. тв. тела. - 1996. - № 2. - С. 64 - 74.
46. Попов А. Н. Загадки теории динамики электромеханических систем с упругими связями// Автоматиз. и соврем технол. - 1996. - № 2. - С. 23 - 24.
47. Мольченко Л. В., Лоос И. И., Индиаминов Р. Ш. Нелинейное демпфирование конической оболочки, находящейся в магнитном поле// Прикл. мех. (Киев).- 1997. - Т. 33, № 3. - С. 58 - 63.
48. Карнаухов В. Г., Сенченков И. К., Михайленко В. В. Резонансные колебания осесимметричной электромеханической системы с автоподстройкой частоты// Прикладная механика (Киев). - 1995. - Т. 31, № . - С. 57 - 63.

49. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. - М.: Мир, 1991.- 560 с.
50. Lu Xiaobo, Tao Yungang, He Yanwei. Active vibration control of a cantilever beam using piezoelectric sensors and actuators// Trans. Nanjing Univ. Aeron. and Astron. - 1997. - Т. 14, № 3. - С. 67 - 72.
51. Mizuno Takeshi, Araki Kenji. Active dynamic vibration absorber with automatic frequency- tracking performance// Nihon kikai gakkai ronbunshu. C. Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. - 1997. - Т. 63, № 612. - С. 2616 - 2621.
52. Yang S. M., Jeng C. A. Structural vibration suppression by concurrent piezoelectric sensor and aktuator // Smart Mater. and Struct. - 1996.- Т. 5, №6. - С. 806 - 813.
53. Pietzakowski Marek. Dynamik model of beam - piezoceramic aktuator coupling for active vibration control// Mech. teor. i stosow. - 1997. - Т. 35, № 1. - С. 3 - 20.
54. Smyser C. P., Chandrachekhara K. Robust vibration control of composite beams using piezoelectric devices and neural networks// Smart Mat. and Struct. - 1997. - Т.6, № 2. - С. 178 - 189.
55. Sun Dongchang, Wang Dajun, Xu Z. L. Distributed piezoelectric segmntnt method for vibration control of smart beans// AIAA Jornal. - 1997. - Т. 35, № 3 - С. 583 - 584.
56. Фомин В. Н. Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. - Л.: Изд-во ЛГУ. - 1972. - 238 с.
57. Шмидт Г. Параметрические колебания. - М.: Мир. - 1978.- 336 с.
58. Весницкий А. И., Потапов А. И. Теория колебаний распределенных параметрических систем: Учебное пособие. Ч. 1.- Горький : Изд-во ГГУ. - 1977.- 67 с.
59. Весницкий А. И., Потапов А. И. Теория колебаний распределенных параметрических систем: Учебное пособие. Ч. 2.- Горький : Изд-во ГГУ. - 1980.- 87 с.
60. Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. - АН СССР. Сиб. отд. Иркут. ВЦ. - Новосибирск: Наука Сиб. отд.. - 1987. - 229 с.

61. Чечурин С. Л. Параметрические колебания и устойчивость периодического движения. - Л.: Изд-во ЛГУ. - 1983. - 219 с.
62. Нагаев Р. Ф., Ходжаев К. Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. - Ташкент: Фан. - 1973. - 269 с.
63. Jones Lowell Dale, Garcia Ephrahim. Self-sensing magnetostrictive actuator for vibration suppression// J. Cuid., Contr. and Dyn. - 1996. - Т.19, № 3. - С. 713 - 715.
64. Несис С.Е., Кармацкий Н.П., Борисов Е.В. Экспериментальное исследование параметрического возбуждения поперечных колебаний горизонтальной струны электротермическими модуляциями// Вестник Ставропольского гос. ун-та.- 1996.- № 7.-С.76-78.
65. Потапов А.И., Романов Н.Д., Севастьянов А.С. Экспериментальные исследования нелинейных колебаний токонесущих тел// Тез. докл. V Междунар. конф. "Нелинейные колебания механических систем". - Н. Новгород, 1999. - С. 186 - 187.
66. Потапов А.И., Ступнин В.В. Термопараметрическое возбуждение нелинейных колебаний струны // ПМТФ, 1985. № 5.- С. 142-146.
67. Кадинская И.А., Потапов А.И. Термопараметрическая дестабилизация токонесущего стержня// Прикл. механика. - 1988. Т. 24. № 12. - С. 100-104.
68. Томилин А.К. О магнитном демпфировании и возбуждении упругих колебаний проводящей балки// Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат. - 1991, № 5.- С. 84-87.
69. Томилин А.К. Колебания упругих проводящих систем с распределенными параметрами в магнитном поле// Материалы научн. сессии отд. физ.-мат. наук АН РК.- Алматы, 1993. - С. 136-139.
70. Томилин А.К. О магнитном демпфировании четных форм колебаний в системах с распределенными параметрами// Вестник КазГУ, сер. матем. Алма-Ата. - 1993.- С. 60-65.
71. Томилин А.К. Поперечные колебания проводящего упругого стержня в магнитном поле// Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. - 1995. № 1.- С. 76-80.

72. Томилин А. К. О собственных формах колебаний проводящих систем с распределенными параметрами во внешнем магнитном поле// Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. - 1995, № 5. - С. 74-80.
73. Томилин А.К. Поперечные колебания проводящей балки в магнитном поле// Тез докл. научн. конф. "Моделирование сложных систем": Ташкент, 1991. С. 21-22.
74. Томилин А.К. Общая задача о колебаниях одномерных континуальных проводящих систем в магнитном поле// Изв. МН-АН РК. Сер. физ.-мат. - 1996, № 5. - С. 80-85.
75. Tomilin A. K. Nonlinear vibrations of electroconductive string in magnetic field// Труды XXIX летней школы «Актуальные проблемы механики», т. 1.: С.-Петербург, 2001. С. 334-341.
76. Томилин А.К. Нелинейные колебания электропроводной струны в магнитном поле// Региональный вестник Востока. Усть-Каменогорск. – 2000, № 4. – С. 32-41.
77. Томилин А.К. Нелинейный резонанс при электромагнитном возбуждении колебаний проводящей струны// Вестник КазНТУ. Алматы - 1995, № 3. - С. 28-31.
78. Томилин А. К. Об электромагнитном возбуждении вибраций в проводящих континуальных системах вблизи резонанса // Вестник КазГУ. Сер. физ.-мат. - Алматы, 1995. - № 2.- С. 88-96.
79. Томилин А.К., Половин В. М. Колебания упругих проводящих континуальных систем в неоднородном магнитном поле // Некоторые проблемы теоретич. и эксперим. физики, матем. и их приложения.: Сб. научн. тр. - Усть-Каменогорск. - 1995. - С. 64-69.
80. Томилин А. К., Мамырбаева И. К. О влиянии магнитного поля на двухволновые процессы континуальных колебательных систем // Тез. докл. шк.-сем. по механике и ее приложениям. - Алматы, 1996.- С. 78.
81. Томилин А. К., Мамырбаева И.К. О магнитном демпфировании двухволновых процессов континуальных систем// Материалы I Респ. съезда по теоретич. и прикл. мех.- Алматы, 1996. - С. 34.
82. Томилин А. К., Мамырбаева И.К. Колебания струны с неклассическими граничными условиями// Вестник КазНТУ.- Алматы.- 1996, № 1. - С. 24 - 30.

83. Томилин А. К., Мамырбаева И. К. О влиянии магнитного поля на двухволновые процессы континуальных колебательных систем// Вестник КазГУ. Сер. матем., механика, информат. - Алматы, 1997.- С. 104 - 111.
84. Мамырбаева И.К., Томилин А.К. Колебания струны с неклассическими граничными условиями в неоднородном магнитном поле// Совр. научн.-техн. проблемы в авиации. : Сб. научн. тр. АГА. - Вып. 1. - Алматы, 1998. - С. 66 -70.
85. Томилин А.К., Мамырбаева И.К. О двухволновых процессах в электромеханических системах// Международная научно-практическая конференция "Третьи Окуневские чтения". Материалы докладов. В 2-х томах. Т.2. Теоретическая и прикладная механика. – С-Петербург.: БГТУ, 2002.- 159-160.
86. Томилин А.К., Мамырбаева И.К. Колебания струны с демпферным закреплением в магнитном поле с продольной неоднородностью// Тез. докл. Научно-практической конференции «Актуальные проблемы машиностроения и металлургии». - Алматы, 2002.- С. 22-23.
87. Томилин А.К., Мамырбаева И.К. Исследование колебаний электропроводной струны с демпферным закреплением в магнитном поле// Материалы МНТК «Индустриально-инновационная политика – новый этап развития Казахстана», ч.III Усть-Каменогорск, 2003. С. 140-142.
88. Томилин А. К. Исследование вибраций континуальных электромеханических систем// Материалы I Респ. съезда по теоретич. и прикл. мех. - Алматы, 1996. - С. 44.
89. Tomilin A. K. Nonlinear electromagnetic influence on vibrations of electroconductive string// Доклады АН РК, 2000, - № 2.- С.18-23.
90. Томилин А.К. Колебания упругой проводящей струны в нестационарном магнитном поле// Теоретич. и метод. аспекты подгот. спец. в условиях университета. - Усть-Каменогорск. - Изд. ВКГУ, 1996. - С. 320 - 324.
91. Томилин А. К. Параметрические колебания проводящих систем в нестационарном магнитном поле// Тез. докл. шк.-сем. по механике и ее приложениям. - Алматы, 1996. - С. 106.
92. Томилин А. К., Афанасьева И.С. Параметрические колебания континуальных проводящих систем в нестационарном магнит-

- ном поле// Вестник КазГУ. Сер. матем., механика, информат. - Алматы, 1997.- С. 163- 169.
93. Томилин А.К., Афанасьева И.С. Исследование трехмерных параметрических систем вибрационного типа// Региональный вестник Востока. Научный журнал. – Усть-Каменогорск, 1999. - № 3 – С. 22-29.
94. Томилин А. К. Колебания упругих проводящих континуальных систем в нестационарном магнитном поле// Изв. МН-АН РК. Сер. физ.-мат. - 1996, № 3. - С. 85-89.
95. Афанасьева И.С., Томилин А.К. О построении диаграмм устойчивости некоторых параметрических систем// Совр. научн.-техн. проблемы в авиации. : Сб. научн. тр. АГА. - Вып. 1. - Алматы, 1998. -С. 40-48.
96. Курильская Н.Ф., Томилин А.К. Колебания проводящей струны в нестационарном неоднородном магнитном поле// Совр. научн.-техн. проблемы в авиации. : Сб. научн. тр. АГА. - Вып. 1. - Алматы, 1998. - С. 61-66.
97. Томилин А.К. Общая задача о колебаниях проводящих континуальных систем в нестационарном магнитном поле// Региональный вестник Востока. Научный журнал. - Усть-Каменогорск, 1999. -№ 1 (1). - С. 110-117.
98. Томилин А.К. Параметрические колебания электромеханических систем// Тез. докл. V Междунар. конф. "Нелинейные колебания механических систем". - Н. Новгород, 1999. - С. 213-214.
99. Томилин А.К., Никитин Е.А. Параметрические колебания континуальных проводящих систем с учетом магнитострикции// Теоретич. и метод. аспекты подгот. спец. в усл. университета. - Усть-Каменогорск. - Изд. ВКГУ, 1996. - С. 324-328.
100. Томилин А. К. О параметрических колебаниях ферромагнитной струны с учетом магнитострикции// Вестник КазНТУ. – Алматы.- 1995, № 4. - С. 72-77.
101. Томилин А.К., Никитин Е.А., Рогачев А.В. Об электротермическом и магнитострикционном методах возбуждения поперечных колебаний струны// Некоторые проблемы теоретич. и эксперим. физики, матем. и их приложения.: Сб. научн. тр. - Усть-Каменогорск. - 1995. - С. 70 -73.

102. Томилин А.К., Байзакова Г.А. О динамических свойствах электромеханических вибрационных систем// Международная научно-практическая конференция "Третьи Окуневские чтения". Материалы докладов. В 2-х томах. Т.2. Теоретическая и прикладная механика.– С-Петербург.- БГТУ, 2002. -157-158 с.
103. Томилин А.К., Байзакова Г.А. Колебания электромеханических систем с учетом динамических свойств// Материалы III Респ. НТК ВКГТУ, Усть-Каменогорск, 2002. – С. 286-288.
104. Томилин А.К., Байзакова Г.А. Параметрические колебания систем в нестационарном магнитном поле при наличии во внешней цепи электроемкости// Вестник ВКГТУ, № 2, 2003. - Усть-Каменогорск.- С. 39-44.
105. Томилин А. К. Собственные вибрации проводящих пластин в магнитном поле. - Вестник КазГУ. Сер. матем. мех., информ.- Алматы, 1998, № 11. - С. 200 -206.
106. Томилин А.К. Собственные вибрации круглой пластины в стационарном магнитном поле// Вестник КазГУ. Сер. матем. мех., информ. - Алматы, 1998, № 13. - С. 196 - 201.
107. Томилин А.К. Влияние магнитного поля на волновые движения вязкой проводящей жидкости// Соврем. пробл. матем., мех., физики. – Сб. научн. тр. - Усть-Каменогорск, 1994. - С.82- 88.
108. Томилин А.К. Колебания слабовязкой электропроводной жидкости в магнитном поле// Мат. междунар. научно-прак. конф. "Проблемы вычисл. матем. и информ. технологий". - Алматы, 25-26 марта 1999. - С. 359-360.
109. Диденко Ю.А., Сапа В.А., Томилин А.К. О кондукционном вращении деформируемой проводящей среды// "Динамика твердого тела". Сб. научн. тр. Алма-Ата, 1991. С. 10-17.
110. Шустова Е.В., Томилин А.К. Динамическое уравнивание систем переменного состава с жидким наполнением// Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 1995, № 1. С. 70-75.
111. Томилин А. К. Колебания вязкой электропроводной жидкости в неоднородном магнитном поле// Региональный вестник Востока.// Научный журнал. – Усть-Каменогорск, 2000 . - № 1 – С. 49 – 56.

112. Тюреходжаев А.Н., Томилин А.К. Активное электромагнитное гашение собственных колебаний проводящих одномерных систем // Вестник КазНТУ. – Алматы, 1998. - № 1-2. - С. 3- 6.
113. Томилин А.К. Колебания электропроводных систем с распределенными параметрами в магнитном поле// Тез. докл конф. «Выч. матем. и кибернетика», посв. 80-летию Ю.И. Неймарка. - Н.. Новгород, 2000.- С.32.
114. Томилин А.К., Береговая О.А. Вибрации двухопорного проводящего стержня в магнитном поле при кинематическом возбуждении// Тез. докл. Научно-практической конференции «Актуальные проблемы машиностроения и металлургии». - Алматы, 2002.- С. 21-22.
115. Томилин А.К., Береговая О.А. Вибрации проводящего стержня в магнитном поле при кинематическом возбуждении// Материалы III Респ. НТК ВКГТУ. - Усть-Каменогорск, 2002. – С. 289-291.
116. Томилин А.К., Береговая О.А. Вибрации проводящего стержня в магнитном поле при кинематическом возбуждении// Вестник ВКГТУ. Научный журнал. – Усть-Каменогорск.- №3, 2002. – С. 136- 142.
117. Томилин А.К. Исследование колебаний электропроводной струны в магнитном поле// Вестник ВКГТУ, № 2, 2003. Усть-Каменогорск. – С. 44-51.
118. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. - М.: Высш. школа. - 1980. - 408 с.
119. Бабаков И.М. Теория колебаний.- М.: Наука, 1968. - 560 с.
120. Тамм И.Е. Основы теории электричества. - М.: Наука. - 1976.- 616 с.
121. Blekhnman I.I., Lurie K.A. On Material Dynamics via Dinamic Materials// Proceeding of the XXVIII summer school APM. St. Petersburg. 2000.- V1.- С.309-315.
122. Василенко Н.В. Теория колебаний. -Киев: Наукова думка.- 1992. - 430 с.
123. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. -М.: Наука.-1976. - 320 с.

124. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. - М.: Учпедгиз.- 1960. -396 с.
125. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем. - М.: Мир. - 1969.- 341 с.
126. Гуляев В.И., Баженов В.А., Попов С.Л. Прикладные задачи теории нелинейных механических колебаний. - М.: Высш. шк., - 1989. - 383 с.
127. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. - М.: Высш. школа. - 1975. - 248 с.
128. Левитский Н. И. Колебания в механизмах. - М.: Наука. - 1988. - 336 с.
129. Горошко О.А., Демьяненко А.Г., Киба С. П. Двохвильові процеси в механічних системах. - Киев: Либідь. - 1991. - 188 с.
130. Горошко О.А., Демьяненко А. Г. О двухволновом представлении решения дифференциальных уравнений, описывающих динамику некоторых конструкций с подвижной нагрузкой// Укр. мат. журн. - 1974. Т. 26, № 5. - С. 648 - 651.
131. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний . - М.: Наука. - 1971.- 240 с.
132. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем . - М.: Наука. - 1987. - 352 с.
133. Магнус К. Колебания. - М.: Мир, - 1982 . - 304 с.
134. Светлицкий В.А. Механика стержней. Ч. II. Динамика. М.: Высш. школа.- 1987.- 304 с.
135. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука. - 1976. - 576 с.
136. Белов К.П. Упругие, тепловые и электрические явления в ферромагнитных металлах. - М.-Л., 1951.- 254 с.
137. Мишин Д. Д. Магнитные материалы. М. : Высшая школа.- 1991.- 383 с.
138. Кринчик Г.С. Физика магнитных явлений. - М.: Изд. МГУ.- 1985.- 336 с.
139. Грабовский М.А. Колебания и волны. Лекционные демонстрации по физике № 7. - М.: ГТТЛ.- 1952. - 231 с.

140. Данов К. Д., Рудерман М.С. Нелинейные волны на мелкой воде в присутствии горизонтального магнитного поля// Изв. Ан ССР. МЖГ. - 1983, № 5. - С. 110 - 115.
141. Hofman M. Nonlinear waves on free surface of an electrically conducting liquid// Wave Motion. - 1983. - 5, №2. 115 - 124.
142. Bhimsen K. Shivamoggi A variational principle for surface waves in magnetohydrodynamics// Quarterly of applied mathematics. - 1983 April, 31 - 33.
143. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. - М.: Наука, 1965. - 439 с.
144. Брановер Г. Г., Цинобер А. Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред.- М.: Наука, 1970. - 412 с.
145. Новиков И.И. Прикладная магнитная гидродинамика. - М.: Атомиздат, 1969. - 314 с.
146. Бондарь Н.Г. Некоторые автономные задачи нелинейной механики.-«Наукова думка», Киев.- 1969, -302 с.
147. Мак-Лакхан Н.В. Теория и приложения функций Маттье.- М.: ИЛ.- 1969.- 474 с.
148. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1976. – 576 с.
149. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике.- «Наукова думка», Киев.- 1974.- 743 с.
150. Воробьев Н.Н. Теория рядов.- М.: Наука, 1975.- 367 с.
151. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа.- М.: Наука, 1980.- 336 с.
152. Курильская Н.Ф. Точечные преобразования и инвариантное решение одного интегро-дифференциального уравнения// "Математическое образование на Алтае". Тез. 3-ей межрегион. конф., Барнаул, изд-во БГПУ, 2002, с. 18.
153. Курильская Н.Ф. Groups of symmetries and invariant solutions of equation of conductive string's vibrations in magnetic field// XXXI Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics", St. Petersburg, 2003, p. 65.
154. Курильская Н.Ф. Группы симметрий и инвариантные решения уравнения колебаний проводящего стержня в магнитном поле//

- "Математическое образование на Алтае". Тез. регион. научно-техн. конф., Барнаул, изд-во АлтГТУ, 2003, с. 55-59.
155. Курильская Н.Ф. О групповых свойствах и инвариантных решениях интегро-дифференциального уравнения колебаний проводящего стержня в магнитном поле// "Современные проблемы математики и естествознания". Материалы 7 Всероссийской научно-техн. конф. Н. Новгород, МВВО АТ РФ, 2003, с. 29-30.
156. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей .- М., 1978.- 222 с.
157. Светлицкий В.А., Стасенко И.В. Сборник задач по теории колебаний. -М., 1979.- 268 с.
158. Гришина С.В., Ершова О.А., Сорокин С.В. Применение высокочастотной параметрической модуляции жесткости для контроля резонансных колебаний сотовых пластин// Proceeding of the XXVIII summer school APM. St. Petersburg. 2000.- V1.- С.316-327.
159. Саркисян С.О. Свободные и вынужденные колебания нелинейно-упругих электропроводящих тонких пластин в магнитном поле// Тез. докл. II Всесоюзной конф. «Нелинейные колебания механических систем», ч.2.- Горький, 1990.- С. 27-28.
160. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек.- Ереван, 1992. С. 234.

Содержание

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| От автора | 3 |
| Введение..... | 6 |
| 1 Собственные колебания электропроводной струны в однородном стационарном магнитном поле | |
| 1.1 Постановка линейной задачи..... | 11 |
| 1.2 Анализ линейной задачи..... | 14 |
| 1.3 Сходимость метода расщепления (редукции)..... | 33 |
| 1.4 Случай нескольких активных участков..... | 37 |
| 1.5 Собственные формы колебаний струны..... | 43 |
| 1.6 Метод главных координат..... | 58 |
| 1.7 Нелинейные колебания струны..... | 66 |
| 2 Собственные колебания электропроводного стержня в однородном стационарном магнитном поле | |
| 2.1 Поперечные колебания однородного призматического стержня..... | 72 |
| 2.2 Случай нескольких активных участков..... | 83 |
| 2.3 Собственные формы колебаний стержня..... | 87 |
| 3 Вынужденные колебания одномерных проводящих систем в однородном стационарном магнитном поле | |
| 3.1 Линейная задача об электромагнитном возбуждении колебаний струны..... | 94 |
| 3.2 Электромагнитное возбуждение поперечных колебаний стержня..... | 99 |
| 3.3 Формы колебаний струны при электромагнитном возбуждении..... | 101 |
| 3.4 Формы колебаний стержня при электромагнитном возбуждении | 108 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.5 Нелинейный резонанс струны..... | 112 |
| 3.6 Электромагнитное демпфирование колебаний стержня при кинематическом возбуждении | 116 |

4 Колебания одномерных систем в неоднородном магнитном поле

| | |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1 Колебания струны в магнитном поле с продольной неоднородностью..... | 122 |
| 4.2 Поперечные колебания стержня в неоднородном магнитном поле..... | 129 |
| 4.3 Случай магнитного поля, неоднородного в направлении смещений струны..... | 133 |

5 Колебания одномерных проводящих систем в нестационарном магнитном поле

| | |
|--------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1 Колебания струны в нестационарном магнитном поле..... | 141 |
| 5.2 Колебания стержня в нестационарном магнитном поле..... | 147 |
| 5.3 Случай нестационарного и неоднородного магнитного поля..... | 149 |
| 5.4 Колебания струны с конденсатором во внешней цепи..... | 153 |
| 5.5 Колебания струны с катушкой индуктивности во внешней цепи..... | 165 |

6 Колебания одномерных систем в магнитном поле с учетом специальных свойств

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.1 Сведения о магнитострикции | 171 |
| 6.2 Линейные колебания струны с учетом магнитострикции..... | 175 |
| 6.3 Поперечные колебания стержня в магнитном поле с учетом магнитострикции..... | 182 |

| | | |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.4 | Линейные колебания струны в продольном магнитном поле с учетом магнитострикции..... | 187 |
| 6.5 | Физическая линеаризация вынужденных колебаний струны при помощи магнитострикции | 189 |
| 6.6 | Замечание о термопараметрическом возбуждении колебаний | 192 |

7 Колебания электропроводной струны в магнитном поле с неклассическими граничными условиями

| | | |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.1 | Собственные колебания струны с демпферным закреплением на одном из концов | 195 |
| 7.2 | Метод редукции | 206 |
| 7.3 | Амплитудные формы..... | 212 |
| 7.4 | Метод главных координат..... | 214 |

8 Вибрации электропроводных пластин в стационарном магнитном поле

| | | |
|-----|-------------------------------------------------------------------|-----|
| 8.1 | Собственные вибрации прямоугольной пластины в магнитном поле..... | 218 |
| 8.2 | Собственные вибрации круглой пластины в магнитном поле..... | 226 |
| 8.3 | Вынужденные вибрации пластин в магнитном поле..... | 233 |

9 Электромагнитное воздействие на колебания вязкой электропроводной жидкости

| | | |
|-----|---------------------------------------------------------------|-----|
| 9.1 | Постановка задачи..... | 237 |
| 9.2 | Случай неограниченной жидкости..... | 247 |
| 9.3 | Колебания жидкости в канале между вертикальными стенками..... | 252 |

10 Прикладные задачи

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 10.1 Электромагнитный способ частотного анализа колебаний проводящих механических систем..... | 261 |
| 10.2 Активное электромагнитное гашение собственных колебаний одномерных проводящих систем..... | 266 |
| Литература..... | 269 |