ЛЕКЦИЯ 6

Обзор методов решения задач теплопроводности (продолжение)
Метод источников

Физическая сущность метода источников состоит в том, что любой процесс распространения тепла в теле теплопроводностью можно представить как совокупность процессов выравнивания температуры от множества элементарных источников тепла, распределенных как в пространстве, так и во времени. Решение задач теплопроводности по этому методу сводится, в основном, к правильному выбору источников и их распределению.

Действие элементарного источника в неограниченном теле при одномерном потоке тепла характеризуется формулой

$$G(x,\xi,t)=\frac{\theta}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\,exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right) \qquad (81)$$

Это есть функция источника или функция Грина на бесконечной прямой

Функция Грина удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (82)$$

Это легко показать, дифференцируя (1) по времени и дважды по координате (следующий слайд)

Функцию $G(x,\xi,t)$ обычно называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности. Непосредственной проверкой можно убедиться, что эта функция представляет температуру в точке x, если в начальный момент времени в точке ξ выделяется количество тепла $Q=\theta c\rho$

Дифференцируем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial t}&=\frac{\theta}{\sqrt{4\pi at}}\left[\frac{(x-\xi)^2}{4at}-\frac{1}{2t}\right]exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right)\\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}&=\frac{\theta}{\sqrt{4\pi at}}\left[\frac{(x-\xi)^2}{4at}-\frac{1}{2t}\right]exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}=a\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

Количество тепла на прямой равно:

$$Q(\xi,t)=\frac{c\rho\theta}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right)\frac{dx}{2\sqrt{\kappa t}}=\frac{c\rho\theta}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left(-u^2\right)du=c\rho\theta \qquad (83)$$

$$u=\frac{x-\xi}{2\sqrt{\kappa t}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$$

Следовательно, количество тепла Q не меняется с течением времени и численно равно произведению площади, ограниченной кривой G и осью абсцисс , на объемную теплоемкость $c\rho$. Для малых значений времени почти все тепло сосредоточено в окрестности точки ξ

Функция температурного влияния мгновенного источника тепла для тела конечных размеров и одномерного потока тепла может быть представлена так

$$G_l(x,\xi,t)=\frac{2\theta}{l}\sum_{n=1}^{\infty}sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\kappa t\right) \qquad (84)$$

Функция G_l показывает распределение температуры в неограниченной пластине $(0<x<l)$ в момент времени t , если температура в начальный момент времени равна нулю и в этот момент в точке ξ мгновенно выделяется количество тепла $Q=\theta c\rho$

Пример

Рассмотрим задачу о нахождении распределения температуры в неограниченном теле в произвольный момент времени при условии, что распределение температуры в начальный момент времени задано

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial T(+\infty,t)}{\partial x}=\frac{\partial T(-\infty,t)}{\partial x}=0 \qquad (85)$$
$$T(x,0)=f(x)$$

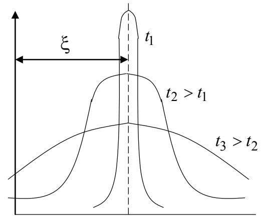
Частное решение, как было показано, имеет вид

$$T=\frac{C}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\,exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right) \qquad (86)$$

Из этого уравнения видно, что при заданном времени t кривая распределения температуры в направлении x имеет максимум, который находится в точке $x=\xi$

Перенесем начало координат в эту точку. Площадь S под кривой, т.е. площадь, образованная кривой и осью абсцисс, есть величина конечная и равная интегралу от (86) в пределах от $-\infty$ до $+\infty$

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C}{\sqrt{4\pi\kappa t}}exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right)d(x-\xi)=\frac{C}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz=C$$

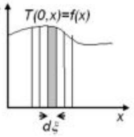


Ордината в точке максимума $\frac{C}{\sqrt{4\pi\kappa t}}$

Площадь постоянна и равна C

Пользуясь этим свойством, можно заданное начальное распределение температуры $T(x,0)=f(x)$ в неограниченном теле представить как сумму отдельных частных решений вида (85), т.е. кривую $f(x)$ заменить суммой бесконечного множества кривых вида

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{C}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right)\right]$$



При этом, не смотря на бесконечно малую ширину отдельной полоски $d\xi$, высота ее будет величиной конечной и равной $f(\xi)$. Площадь такой полоски, равная C, будет бесконечно малой величиной, т.е. $T(\xi,0)d\xi=f(\xi)d\xi=C$

Полное начальное распределение температуры в неограниченном теле будет равно

$$\lim_{t\to 0}T(x,t)=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right)d\xi\right]$$

Это соотношение будет справедливо не только для начального момента времени, но и для любого последующего промежутка времени, т.е. общее решение нашей задачи будет

$$T(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right)d\xi \qquad (87)$$

Можно сделать обобщение на случаи плоской и пространственной задач

Так, если в плоскости задано начальное распределение температуры

$$T(0,x,y)=f(x,y)$$

то в произвольный момент времени будем иметь

$$T(x,y,t)=\frac{1}{4\pi at}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4at}\right)d\xi d\eta$$

<u>**Аналогично**</u> в трехмерном пространстве распределение температуры описывается уравнением

$$T(x,y,z,t)=\frac{1}{\left(\sqrt{4\pi at}\right)^3}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta,\zeta)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4at}\right)d\xi d\eta d\zeta,$$

если в начальный момент времени было задано

$$T(0,x,y,z)=f(x,y,z)$$

Задача об остывании тела с заданной начальной температурой

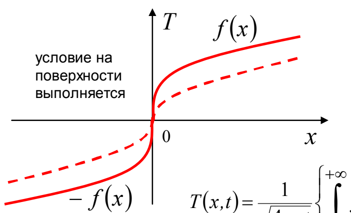
Пусть в начальный момент времени задана температура **полуограниченного** тела (стержня) $T(x,0)=f(x)$

Требуется найти распределение температуры для произвольного времени при условиях

$$T(0,t)=T_s=const \qquad \frac{\partial T(+\infty,t)}{\partial x}=0$$

<u>Для начала положим</u> $T_s=0$

Решение этой задачи может быть получено из предыдущей. Для этого продолжим стержень в отрицательном направлении оси OX.



Считаем функцию $f(x)$ нечетной, $f(x)=-f(-x)$

Из соображений симметрии распределение температуры в последующие моменты времени также будет нечетной функцией, а для x=0 ее значение всегда будет равно нулю

При замене x на ξ в кривой начального распределения температуры общее решение на основании предыдущего имеет вид

$$T(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right)d\xi+\int_{-\infty}^{+\infty}-f(\xi)\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa t}\right)d\xi\right\}$$

$$T(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\left[\mathbf{exp}\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right)-\mathbf{exp}\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa t}\right)\right]d\xi \qquad (88)$$

Это и есть общее решение нашей задачи

Если $T(x,0)=T_0=const$, то решение можно упростить

В первую часть подинтегральной функции подставим $\xi=x+2u\sqrt{\kappa t}$

а во вторую – $\xi=-x+2u\sqrt{\kappa t}$

Тогда получим

$$T(x,t)=\frac{T_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/2\sqrt{\kappa t}}^{x/2\sqrt{\kappa t}}e^{-u^2}du$$

или

$$\frac{T(x,t)}{T_0}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{\kappa t}}e^{-u^2}du=erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \qquad (89)$$

Если $T_s\neq 0$

$$w=T-T_s \qquad (90)$$

$$w(0,t)=T(0,t)-T_s=0$$

Просто сделаем замену переменных

Задача сводится к уже рассмотренной

$$\frac{T(x,t)-T_s}{T_0-T_s}=erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right)$$

Эту задачу, очевидно, можно решить и операционным методом.

Метод разделения переменных

Постановка задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1 \quad 0 < t < \infty \qquad (1)$$

Фактически это – есть задача об остывании бесконечной пластины единичной толщины

$$T(0,t) = 0 \quad T(1,t) = 0 \qquad (2)$$

$$T(x,0) = \varphi(x) \quad 0 \le x \le 1 \qquad (3)$$

Решение ищем в виде

$$T = X(x)\theta(t) \qquad (4)$$

$$X(x)\theta'(t) = \alpha^2 X''(x)\theta(t) \qquad \frac{\theta'(t)}{\alpha^2\theta(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k \qquad (5)$$

$$\theta' - k\alpha^2\theta = 0 \quad (6) \quad \text{и} \quad X'' - kX = 0 \qquad (7)$$

$$X(0) = 0 \quad X(1) = 0 \qquad (8)$$

Функция $\theta(t)$ должна убывать при $t \to \infty$ $\quad k = -\lambda^2 \ne 0$

Задача (7), (8) есть задача на собственные значения (задача Штурма-Лиувилля)

Решения имеют вид:

$$\theta(t) = Ce^{-\lambda^2\alpha^2 t}$$

$$X(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$$

$$T(x,t) = \exp(-\lambda^2\alpha^2 t)[A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)]$$

Из всего множества решений задачи (1) – (3) нам нужно выбрать те, которые удовлетворяют граничным условиям

$$T(0,t) = B\exp(-\lambda^2\alpha^2 t) = 0 \longrightarrow B = 0$$

$$T(1,t) = A\exp(-\lambda^2\alpha^2 t)\sin(\lambda) = 0 \longrightarrow \sin\lambda = 0$$

Это условие накладывает ограничения на возможные значения λ

$$\lambda = \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots \quad \text{или} \quad \lambda_n = \pm n\pi, n = 1,2,\ldots$$

$$T_n(x,t) = A_n \exp\left(-(\pi n\alpha)^2 t\right)\sin(\pi nx) = 0, \quad n = 1,2,\ldots \Rightarrow$$

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-(\pi n\alpha)^2 t\right)\sin(\pi nx) \qquad (9)$$

Подставляя (9) в начальные условия, имеем $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\pi nx)$ (10)

Система функций $\{\sin(\pi nx), n = 1,2,\ldots\}$ обладает таким свойством как ортогональность

$$\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)dx = \begin{cases} 0, & m \ne n; \\ 1/2, & m = n. \end{cases} \qquad (11)$$

Умножим обе части уравнения (10) на $\sin(m\pi x)$ и проинтегрируем

$$\int_0^1 \varphi(x)\sin(\pi mx)dx = A_m \int_0^1 \sin^2(\pi mx)dx = \frac{A_m}{2}$$

Т.е., мы нашли коэффициенты

Остальные слагаемые обратились в нуль, благодаря ортогональности

Следовательно, решение примет вид

$$T(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp\left(-(\pi m\alpha)^2 t\right)\sin(\pi mx) \qquad (12)$$

$$A_m = 2\int_0^1 \varphi(\xi)\sin(\pi m\xi)d\xi \qquad (13)$$

Это решение кажется громоздким. Но здесь следует отметить, что наличие множителя $exp\left(-(\pi m)^2\tau\right)$ делает ряд в (12) быстро сходящимся

Преобразуем полученное решение:

$$T(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} 2\left[\int_0^1 \varphi(\xi)\sin(\pi m\xi)d\xi\right]\exp\left(-(\pi m\alpha)^2 t\right)\sin(\pi mx) =$$

$$= \int_0^1 \left[2\sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-(\pi m\alpha)^2 t\right)\sin(\pi mx)\sin(\pi m\xi)\right]\varphi(\xi)d\xi$$

или

$$T(x,t) = \int_0^1 G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi$$

$$G(x,\xi,t) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-(\pi m\alpha)^2 t\right)\sin(\pi mx)\sin(\pi m\xi) \quad —$$

функция мгновенного точечного источника, или функция температурного влияния мгновенного точечного источника тепла мощности $Q = c\rho$ (см.(86))

Этим методом (методом разделения переменных) можно решать и существенно более сложные задачи теплопроводности

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x,t) \\ &\alpha_1 \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} + \beta_1 T(0,t) = g_1(t) \\ &\alpha_2 \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} + \beta_2 T(L,t) = g_2(t) \\ &T(x,0) = \varphi(x) \end{aligned} \qquad (14)$$

Заменой переменных эту задачу можно свести к другой задаче. Если эта новая задача окажется однородной, то ее можно будет решить методом разделения переменных. Если она окажется неоднородной, то возможно использовать метод интегральных преобразований и разложение по собственным функциям.

Пример 1: $f(x,t) = 0$ и заданы постоянные температуры на концах отрезка

$$T(0,t) = k_1 = const \qquad T(L,t) = k_2 = const \qquad (15)$$

Представим решение в виде $T = T_1(x) + T_2(x,t)$ (16)

$$T_1(x) = k_1 + \frac{x}{L}(k_2 - k_1)$$

– стационарное или установившееся решение для $t \to \infty$

Подставляя (16) в уравнение теплопроводности и условия (15), придем к задаче для функции T_2

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}$$

$$T_2(0,t)=0 \qquad T_2(L,t)=0$$

Однородные граничные условия

Попробуйте доделать дома!

$$T_2(x,0)=\varphi(x)-\left[k_1+\frac{x}{L}(k_2-k_1)\right]=\bar{\varphi}(x) \qquad 0\le x\le L$$

Как решать такую задачу, мы уже знаем. «Избавиться» от коэффициента температуропроводности в уравнении можно введением новых переменных $\tau=\frac{L^2}{a}$ $\xi=\frac{x}{L}$

Пример 2. Пусть теперь граничные условия зависят от времени.
Имеем задачу

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T(0,t)=g_1(t) \qquad \frac{\partial T(L,t)}{\partial x}+hT(L,t)=g_2(t) \qquad (17)$$

$$T(x,0)=\varphi(x)$$

После некоторых проб и ошибок останавливаются вот на такой форме решения

$$T(x,t)=A(t)[1-x/L]+B(t)[x/L]+T_2(x,t)$$

$A(t),B(t)$ выбирают так, чтобы «квазистационарная» часть решения удовлетворяла граничным условиям задачи (17). Введем обозначение

$$S(x,t)=A(t)[1-x/L]+B(t)[x/L]$$

В этом случае T_2 будет удовлетворять однородным граничным условиям.

Подставляя S в граничные условия задачи (17), придем к двум уравнениям, из которых определим функции :

$$A(t)=g_1(t) \qquad B(t)=\frac{g_1(t)+Lg_2(t)}{1+Lh}$$

Следовательно, решение примет вид

$$T(x,t)=g_1\left[1-\frac{x}{L}\right]+\frac{g_1(t)+Lg_2(t)}{1+Lh}\frac{x}{L}+T_2(x,t)$$

Подставив $T(x,t)$ в исходную задачу, найдем задачу для функции $T_2(x,t)$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}-S_t$$

$$\frac{\partial T_2(L,t)}{\partial x}+hT_2(L,t)=0 \qquad (18)$$

$$T_2(0,t)=0$$

$$T_2(x,0)=\varphi(x)-S(x,0)$$

Эта задача с однородными граничными условиями, но само уравнение стало неоднородным. Задача (18) не может быть прямо решена методом разделения переменных. Для этого потребуется ***метод разложения по собственным функциям.***

Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / М.: Мир, 1985. – 384 С.

Князева А.Г. Теплофизические основы современных высокотемпературных технологий / Томск: изд-во ТПУ, 2009. – 357 с.

Решения краевых задач теории теплопроводности в виде произведения функций

Довольно часто решение краевой задачи теплопроводности в двух- и трехмерных областях можно записать в виде произведения решений одномерных задач. Для этого начальная температура должна выражаться в виде произведении функций, каждая из которых зависит только от одной пространственной переменной, а граничными условиями должны служить условия либо нулевой температуры, либо нулевого потока, либо конвективного теплообмена со средой нулевой температуры.

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \qquad (1)$$

$$0<x_i<l_i \qquad t>0 \qquad i=1,2,3$$

$$T(0,x_1,x_2,x_3)=\Phi_{10}(x_1)\cdot\Phi_{20}(x_2)\cdot\Phi_{30}(x_3) \qquad (2)$$

$$\left(\lambda_i\frac{\partial T}{\partial x_i}-\beta_i T\right)_{x_i=0}=0 \quad (3) \qquad \left(\gamma_i\frac{\partial T}{\partial x_i}+\delta_i T\right)_{x_i=l_i}=0 \quad i=1,2,3 \quad (4)$$

Решение этой краевой задачи можно представить в виде произведения решений одномерных задач

$$T(t,x_1,x_2,x_3)=T_1(t,x_1)\cdot T_2(t,x_2)\cdot T_3(t,x_3) \qquad (5)$$

$T_i(t,x_i)$ удовлетворяют решению частных задач

$T_i(t,x_i)$ удовлетворяют решению частных задач

$$\frac{\partial T_i}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T_i}{\partial x_i^2} \quad 0<x_i<l_i \quad t>0 \quad (6) \qquad T_i(0,x_i)=\Phi_{i0}(x_i) \quad (7)$$

$$\left(\lambda_i\frac{\partial T}{\partial x_i}-\beta_i T\right)_{x_i=0}=0 \qquad \left(\gamma_i\frac{\partial T}{\partial x_i}+\delta_i T\right)_{x_i=l_i}=0 \qquad (8)$$

Подставим (5) в (1):

$$T_2\cdot T_3\left(\frac{\partial T_1}{\partial t}-a\frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^2}\right)+T_1\cdot T_3\left(\frac{\partial T_2}{\partial t}-a\frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2}\right)+T_1\cdot T_2\left(\frac{\partial T_3}{\partial t}-a\frac{\partial^2 T_3}{\partial x_3^2}\right)=0 \qquad (9)$$

В частности, если в начальный момент времени в прямоугольном параллелепипеде задано распределение температуры

$$T(t,x_1,x_2,x_3)=T_m\,exp\left(-\frac{x_1^2}{R_1^2}\right)exp\left(-\frac{x_2^2}{R_2^2}\right)exp\left(-\frac{x_3^2}{R_3^2}\right) \qquad (10)$$

то распределение температуры в этом параллелепипеде в произвольный момент времени будет следовать из решения задач (6)-(8), где

$$\Phi_{i0}(x_i)=T_m^{1/3}\,exp\left(-\frac{x_i^2}{R_i^2}\right)$$

Теплообмен излучением. Сложный теплообмен

1.Основные понятия

Тепловое излучение представляет собой процесс распространения внутренней энергии излучающего тела электромагнитными колебаниями и фотонами. Любые тела, температура которых выше абсолютного нуля, излучают электромагнитные колебания. Генераторами электромагнитных волн являются заряженные электромагнитные частицы – электроны и ионы, входящие в состав вещества. Помимо волновых свойств, излучение обладает и корпускулярными свойствами, т.е. лучистая энергия испускается и поглощается веществами не непрерывно, а дискретными порциями – фотонами.

Интенсивность теплового излучения зависит от материала и температуры тела, длины волны, состояния поверхности, а для газов – еще и от толщины слоя и давления. С возрастанием температуры энергия излучения увеличивается, так как увеличивается внутренняя энергия тела. При высоких температурах основным видом переноса теплоты может оказаться тепловое излучение, так как интенсивность излучения зависит от температуры значительно сильнее, чем конвекция и теплопроводность.

В отличие от других видов теплообмена, поток лучистой энергии передается как от более нагретого тела к менее нагретому, так и наоборот. Конечным результатом такого воздействия и будут количество теплоты, переданной излучением.

Все виды излучения различаются длиной волны. Для нас наибольший интерес представляют носители тепловой лучистой энергии : видимые (световые) лучи с длиной волны 0,4-0,8 мкм и особенно инфракрасные с длиной волны 0,8-800 мкм.

Большинство твердых и жидких тел имеют сплошной спектр излучения, т.е. излучают энергию всех длин волн $0 \le \lambda \le \infty$

Чистые металлы, металлы с полированной поверхностью, и газы характеризуются прерывистым спектром излучения, имеющим ограниченный диапазон длин волн. Излучение, соответствующее узкому интервалу длин волн, (от λ до $\lambda + d\lambda$), называется монохроматическим

Тепловое излучение количественно характеризуется полным потоком и плотностью потока.

Суммарная энергия, излучаемая с поверхности тела, во всем интервале длин волн спектра в единицу времени, называется интегральным или полным потоком излучения. Измеряется в ваттах – Вт (т.е., это – мощность):

$$Q = \int_F E dF \qquad (6.1)$$

E - энергия, излучаемая с единицы поверхности тела в единицу времени по всем направлениям полусферического пространства, Вт/см^2; зависит только от температуры и физических свойств тела и называется собственным излучением или излучательной способностью тела. Эта величина является ***плотностью потока*** интегрального излучения $E = q$

$$E = dQ / dF \qquad (6.2)$$

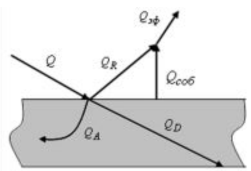
Длина волны – это пространственный период волны, т.е. расстояние между двумя ближайшими точками гармонической бегущей волны, или удвоенное расстояние между двумя ближайшими узлами или пучностями стоячей волны. Длина волны связана с периодом колебаний и фазовой скоростью распространения волны в данном направлении

Отношение плотности интегрального лучистого потока, испускаемого в бесконечно малом интервале длин волн, к величине этого интервала называется спектральной плотностью потока излучения $E_\lambda = dE/d\lambda$ Вт/м^3

Рассмотрим тело, участвующее в лучистом теплообмене с другими телами (см. рисунок). На поверхность данного тела падает энергия излучения других тел Q - падающее излучение. Эта энергия частично поглощается телом, частично отражается, а частично проходит сквозь тело. Каждая из этих частей характеризуется соответствующими потоками – потоком поглощенного излучения Q_A; потоком отраженного излучения Q_R ; потоком пропускаемого излучения Q_D :

$$Q_D = DQ \quad Q_R = RQ \quad Q_A = AQ$$

A - поглощательная способность тела; R - отражательная способность тела; D - пропускательная способность тела. В соответствии с законом сохранения энергии интегральный лучистый поток, падающий на тело, равен сумме всех составляющих



$$Q = Q_A + Q_R + Q_D$$

$$A + R + D = 1 \qquad (6.3)$$

Каждый из этих коэффициентов в общем случае может меняться в пределах от 0 до 1.

Тела, поглощающие всю падающую на них энергию, называются ***абсолютно черными***.

Поглощенная энергия электромагнитных колебаний вновь превращается во внутреннюю энергию тела. Таким образом, теплообмен излучением связан с двойным превращением энергии: теплота трансформируется в энергию излучения, которая, частично поглощаясь другим телом, вновь превращается во внутреннюю энергию тела.

Если предмет поглощает все лучи, то он зрительно воспринимается как черное тело. Если же поверхность поглощает все лучи, кроме видимых, то она не кажется черной, хотя по лучистым свойствам может быть близка к абсолютно черному телу. Например, снег по поглощательной способности ($A = 0{,}95 \div 0{,}98$) относится к абсолютно черным телам, хотя имеет белый цвет. Дело в том, что белая поверхность хорошо отражает только видимые (световые) лучи, что используется в жизни: белые костюмы, окраска вагонов-рефрижераторов, цистерн и т.д., а невидимые тепловые лучи белая краска и ткань поглощают также хорошо, как и темные поверхности.

Тело, для которого $R = 1$ и, соответственно, $A = D = 0$, отражает всю лучистую энергию. Если это отражение происходит по законам геометрической оптики, то его поверхность называется ***зеркальной***, если же отражение – рассеянное, то ***абсолютно белой***.

Тело, для которого $D = 1$, а $A = R = 0$, пропускает всю лучистую энергию и называется ***абсолютно прозрачным***. Тела, для которых $0 < D < 1$, называются ***полупрозрачными***. Многие твердые тела и жидкости для тепловых лучей практически непрозрачны. Существуют тела, которые прозрачны только для определенных длин волн. Например, оконное стекло прозрачно для световых лучей и непрозрачно для ультрафиолетовых, а кварц – прозрачен для световых и ультрафиолетовых лучей, но непрозрачен для тепловых. Этот эффект широко используется в технике и химической технологии.

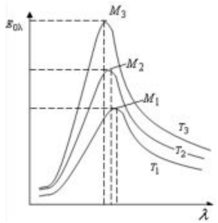
Таким образом, цветовые и оптические ощущения человека не всегда соответствуют способностям тела отражать, поглощать ли пропускать тепловое излучение.

Как было сказано, каждое тело характеризуется потоком собственного излучения . Его сумма с потоком отраженного излучения составляет ***поток эффективного излучения тела***

$$Q_{эф} = Q_{соб} + Q_R \qquad (6.4)$$

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
Закон Планка

В 1900 году М.Планк, исходя из электромагнитной природы излучения, и разработанной им квантовой теории установил для абсолютно черного тела (индекс 0) зависимость интенсивности собственного излучения тела от длины волны и температуры



$$E_{0\lambda} = \frac{C_1\lambda^{-5}}{e^{C_2/(\lambda T)} - 1} \qquad (6.5)$$

λ - длина волны, м; T - абсолютная температура тела, К; C_1, C_2 - константы: $C_1 = 3{,}74\cdot10^{-16}$ Вт·м²; $C_2 = 0{,}0144$ М·К.

Из графика видно, что с увеличением длины волны при любой температуре ($T_1, T_2, T_3, ...$) интенсивность излучения сначала быстро возрастает, достигая максимума (точки M_1, M_2, M_3), а затем медленно убывает. С повышением температуры тела ($T_3 > T_2 > T_1$) энергия его излучения существенно возрастает (на графике она изображается площадью под соответствующей изотермой). Кроме того, с повышением температуры увеличивается энергия луча одной и той же длины волны.

Квантова́ние — процедура построения чего-либо с помощью дискретного набора величин, например, целых чисел, в отличие от построения с помощью непрерывного набора величин, например, действительных чисел.
Квантование в физике — построение квантового варианта некоторой неквантовой (классической) теории или физической модели в соответствии с фактами квантовой физики.
В информатике и электронике: **Квантование** — разбиение диапазона значений некоторой величины на конечное число интервалов.

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
Закон смещения Вина

Из закона Планка можно определить длину волны, соответствующую максимальной плотности потока излучения: решая уравнение

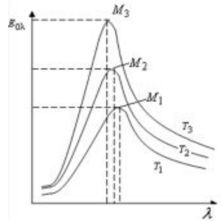
$$dE_{0\lambda}/d\lambda = 0 \qquad (6.6)$$

получим зависимость

$$\lambda_{max} = 2{,}9\cdot10^{-3}/T \qquad (6.7)$$

представляющую собой математическое выражение ***закона Вина***.

Максимальная спектральная плотность потока излучения с повышением температуры смещается в сторону более коротких длин волн.



Из рисунка видно, что если $T_3 > T_2 > T_1$, то $\lambda_{3,max} < \lambda_{2,max} < \lambda_{1,max}$

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
Закон Стефана-Больцмана

Закон Стефана-Больцмана, открытый в 1879 году чешским ученым Й.Стефаном и теоретически обоснованный в 1884 году австрийским ученым Л.Больцманом, устанавливает зависимость излучательной способности абсолютно-черного тела от его температуры

$$E_0 = \int_0^\infty E_{0\lambda}\,d\lambda = \sigma_0 T^4 \qquad (6.8)$$

где $\sigma_0 = 5{,}77\cdot10^{-8}$ Вт/(м²К⁴) – постоянная Стефана-Больцмана.

Таким образом, плотность потока излучения абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры.

Для удобства расчетов выражение (6.8) представляют в виде

$$E_0 = C_0 (T/100)^4 \qquad (6.9)$$

$C_0 = 5{,}77$ – коэффициент излучения абсолютно черного тела.

Для реальных тел, т.е., неабсолютно черных (серых тел) плотность потока излучения выражается такой же формулой $E = C(T/100)^4$

но величина C относится уже к серым телам.

Закон Стефана-Больцмана для серого тела записывается следующим образом

$$E = \varepsilon\sigma_0 T^4 = \varepsilon C_0 (T/100)^4$$

Для серых тел величина $\varepsilon < 1$ и зависит от природы тела, состояния поверхности, температуры и находится экспериментальным путем

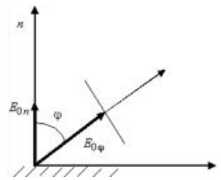
ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
Закон Ламберта

Распределение энергии излучения, испускаемой абсолютно черным телом, в различных направлениях пространства неодинаково. В 1760 году немецкий ученый И.Ламберт установил зависимость величины энергии излучения от направления ее распространения. Математическая запись закона Ламберта для плотности потока излучения в направлении m, составляющем с нормалью n к поверхности излучения угол φ , имеет вид (рис. 5.3)

$$E_{0\varphi} = E_{0n}\cos\varphi \qquad (6.10)$$

E_{0n} - плотность потока излучения абсолютно черного тела в направлении нормали к поверхности . $(\varphi = 0)$

Таким образом, для абсолютно черного тела поток излучения в данном направлении пропорционален потоку излучения в направлении нормали к излучающей поверхности и косинусу угла между ними



В направлении нормали к поверхности излучается наибольшее количество энергии. Интегрируем по углу:

$$E_{0n} = E_0/\pi$$

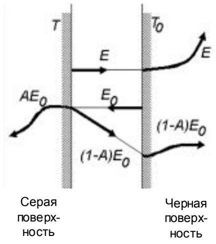
т.е., плотность потока излучения в направлении нормали к поверхности в π раз меньше полной плотности потока излучения.

Для реальных тел закон Ламберта подтверждается лишь при $\varphi = 0 \div 60^\circ$

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Закон Кирхгофа

Закон Кирхгофа устанавливает взаимосвязь между способностями тела излучать и поглощать энергию. Эта связь может быть получена из рассмотрения термодинамического равновесия при лучистом теплообмене между двумя параллельными поверхностями (см. рисунок), левая из которых – серая, а правая – черная. Серая поверхность характеризуется температурой T, поглощательной способностью A и плотностью потока собственного излучения E, а абсолютно черная – величинами T_0, A_0 и E_0. Собственное излучение серой поверхности E поглощается абсолютно черным телом. Абсолютно черная поверхность за то же время излучает поток, который частично поглощается (в количестве AE_0) серой поверхностью, а частично – в количестве $(1-A)E_0$ отражается от нее. Отраженная часть затем поглощается абсолютно черным телом. Плотность потока результирующего излучения в случае $T > T_0$ находится из энергетического баланса на серой поверхности



$$E_{рез} = E - AE_0 \qquad (6.11)$$

При $T = T_0$ система находится в термодинамическом равновесии, т.е. между поверхностями имеет место лучистый теплообмен, но $E_{рез} = 0$, откуда найдем $E/A = E_0$ (6.12)

Соотношение (6.12) справедливо для любых серых тел, поэтому $E_1/A_1 = E_1/A_2 = ... = E_0$ (6.13)

Зависимость (6.13) есть математическое выражение закона Кирхгофа: ***отношение плотности потока излучения серого тела к его поглощательной способности не зависит от природы тела и равно плотности потока излучения абсолютно черного тела при такой же температуре***

Так как $E/E_0 = \varepsilon$, то $\varepsilon = A$.

Это – вторая форма записи закона Кирхгофа, в соответствии с которой при термодинамическом равновесии ***поглощательная способность и степень черноты численно равны между собой.***

Из закона Кирхгофа можно сделать следующие выводы.

1. Чем больше тело способно излучать, тем больше его возможность поглощать лучистую энергию.

2. Чем меньше поглощательная способность тела, тем меньше его излучательная способность. Следовательно, тела, хорошо отражающие лучистую энергию, сами излучают очень мало (излучательная способность абсолютно белого тела равна нулю). Поэтому для уменьшения тепловых потерь аппарата его поверхность должна иметь наименьшее значение.

3. При одинаковой температуре излучательная способность абсолютно черного тела всегда больше излучательной способности серого тела.

Лучистый теплообмен между телами

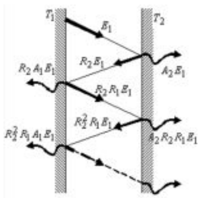


Рис. 6.5. Теплообмен излучением между параллельными поверхностями

$T_1 > T_2$

Лучистый теплообмен между параллельными плоскостями происходит следующим образом. Пусть имеются две параллельные бесконечно большие пластины из разных серых материалов, каждая из которых характеризуется своей температурой (T_1 и T_2) и степенью черноты (ε_1 и ε_2). Определим теплоту, переданную лучеиспусканием от первой (левой) пластины ко второй (правой). Сначала определим теплоту, переданную от первой пластины ко второй, исключив из рассмотрения собственное излучение второй платины. Собственный поток излучения первой пластины - E_1. При попадании на вторую пластину часть этого потока A_2E_1 - поглощается ею, а остальная - R_2E_1 - отражается. Отраженная часть потока в количестве $R_2A_1E_1$ поглощается первой пластиной и частично (в количестве $R_2R_1E_1$) отражается от нее и т.д.

Плотность теплового потока , обусловленного собственным излучением первой пластины и поглощенного второй в результате одностороннего теплообмена, определится как сумма

$$q_2 = A_2E_1 + A_2R_2R_1E_1 + A_2R_2^2R_1^2E_1 + ... = A_2\left[1 + R_1R_2 + (R_1R_2)^2 + ...\right]E_1$$

Так как $R_1 < 1$ и $R_2 < 1$, то выражение в скобках представляет собой убывающую геометрическую прогрессию, просуммировав которую, получим

$$q_2 = \frac{A_2E_1}{1 - R_1R_2}$$

Аналогично определится плотность теплового потока, обусловленного собственным излучением второй пластины и поглощенного первой в результате одностороннего теплообмена

$$q_1 = \frac{A_1E_2}{1 - R_1R_2}$$

Суммарная плотность теплового потока от первой пластины ко второй есть

$$q = q_2 - q_1 = \frac{A_2E_1 - A_1E_2}{1 - R_1R_2}$$

$$\left.\begin{aligned} E &= C(T/100)^4 \\ R &= 1 - A = 1 - \varepsilon \end{aligned}\right\} \Longrightarrow q = \varepsilon_П C_0\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] \qquad (6.14)$$

$$\varepsilon_П = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}$$ приведенная степень черноты двух тел

Тепловой поток лучеиспусканием через поверхность F

$$Q = qF = \varepsilon_П C_0\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]F \qquad (6.15)$$

Рассмотрим случай теплообмена излучением для тела произвольной формы, замкнутого внешним телом большей поверхности (рис. 6.6). Тела характеризуются площадью поверхности, температурой, степенью черноты поверхности, причем $T_1 > T_2$

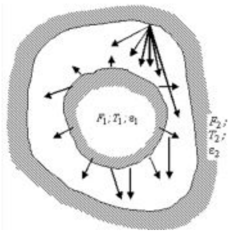


Рис. 6.6. Теплообмен излучением между телом и его оболочкой

Тепловой поток, передаваемый от первого тела ко второму, может быть определен по формуле, аналогичной (6.15)

$$Q_{12} = \varepsilon_П C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_1 \qquad (6.16)$$

$$\varepsilon_П = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + (F_1/F_2)(1/\varepsilon_2 - 1)}$$

Из последнего уравнения следует, что при $F_2 >> F_1$ приведенная степень черноты есть $\varepsilon_П \approx \varepsilon_1$

Уравнение (6.16) справедливо только для случая, когда меньшее тело – выпуклое.

Закон Ламберта-Бугера

Постепенное ослабление параллельного монохроматического пучка света при его распространении в поглощающем веществе описывает закон ***Ламберта-Бугера***

$$q_A = q_0\, exp(-\kappa x) = AE\, exp(-\kappa x) \qquad (6.17)$$

Показатель поглощения зависит от природы и состояния вещества и от длины волны проходящего света

Закон Ламберта-Бугера-Бэра связывает ослабление света с наличием поглощающих центров (их концентрацией) и математически следует из предположений, что относительное ослабление света в бесконечно тонком слое не зависит от интенсивности света и пропорционально толщине этого слоя и концентрации поглощающего вещества

$$\frac{dq}{q} = -\kappa_0 C dx \qquad (6.18)$$

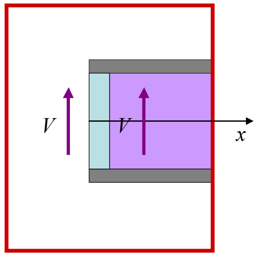
Однако предположение о пропорциональности поглощения света концентрации C имеет лишь приближенный характер. При высоких значениях концентраций в газах и растворах показатель поглощения обычно начинает заметно изменяться вследствие физико-химического взаимодействия молекул. Независимость показателя поглощения κ_0 от интенсивности света выполняется для некоторых веществ в широких пределах изменения энергии поглощаемого света. Но вследствие квантовой природы света и конечной длительности возбужденных состояний молекул значительная часть поглощающих центров при достаточно большой мощности света вскоре оказывается в возбужденном состоянии, и поглощение уменьшается. Величина $\kappa_0 C$ зависит и от толщины поглощающего слоя при поглощении света в люминесцирующем веществе, когда расстояние между светящейся и поглощающей молекулами меньше длины световой волны. Причина этого заключается в резонансных взаимодействиях между светящейся и поглощающей молекулами.

Сложный теплообмен

В реальных условиях перенос теплоты лучеиспусканием сопровождается другими видами теплопереноса – конвекцией или теплопроводностью. Такой ***совместный процесс теплопередачи носит название сложного теплообмена.*** Если перенос теплоты в пространстве всеми тремя видами одновременно, (радиацией, теплопроводностью и конвекцией), то он называется радиационно-конвективным теплообменом.

Наиболее типичным случаем сложного теплообмена является сочетание конвективного теплообмена с лучистым: при воздушном охлаждении продуктов в аппаратах туннельного типа , термобарокамерах и т.п. Во всех случаях важно оценить вклад каждого составляющего процесса в теплообмен. В процессах охлаждения воздуха определяющим, как правило, является конвективный теплообмен. Влияние лучистого теплообмена на суммарный перенос теплоты оказывается тем существеннее, чем меньше конвективная составляющая. Например, в термобарокамерах плотность воздуха при низких давлениях мала, и это существенно снижает отвод теплоты конвекцией. Поэтому для охлаждения изделий до нужной температуры в этих камерах охлаждающие устройства выполняют таким образом, чтобы максимально использовать эффект лучистого теплообмена. Доля лучистого теплообмена может быть существенной и для охлаждающих устройств с естественной конвекцией (пристенные и потолочные батареи). При глубоком вакууме (в космосе) перенос теплоты лучеиспусканием является практически основным способом передачи теплоты во внешнее пространство.

Постановка граничных условий, учитывающих сложный теплообмен



1.Горячее тело остывает на воздухе
2.горячее тело остывает за счет теплообмена с другим телом и вследствие теплообмена с воздухом
3.Горячее тело, контактирующее с подложкой, остывает в вакуумной камере
4.Боковые поверхности теплоизолированы