8. Передискретизация сигналов с повышением частоты

Фильтр Гаусса

Фильтры, которым были посвящены лабораторные работа 3, 4 и 5, обладают тем свойством, что при стремлении порядка фильтра к бесконечности их передаточная функция стремится к передаточной функции идеального фильтра. Однако это приводит к тому, что импульсная переходная функция таких фильтров обязательно имеет колебания. Из-за этого реакция таких фильтров на монотонные сигналы может быть немонотонной. В частности, реакция на ступенчатое воздействие имеет колебания в окрестности разрыва (не путать с эффектом Гиббса, проявляющимся на АЧХ, который нивелируется гладкими окнами). Такое поведение реакции фильтра в некоторых случаях является недопустимым, так как существенно искажает вид сигнала во временной области. Например, такие искажения хорошо заметны при сглаживании изображений, где в роли «времени» выступает пространственная координата, а частотные искажения картинки воспринимаются глазом намного меньше. В таких случаях используют «мягкие» фильтры, которые имеют гладкую импульсную характеристику, монотонную относительно центрального отсчета, но имеющие непрямоугольную АЧХ. Наиболее известным представителем таких фильтров является фильтр Гаусса, получивший широкое распространение во многих задачах, связанных с обработкой сигналов.

В цифровой обработке сигналов фильтром Гаусса называется семейство фильтров, которые являются дискретной версией аналогового фильтра Гаусса, который получил свое название благодаря тому, что имеет гауссову передаточную и импульсную переходную функции. В форме с нулевой ФЧХ они имеют вид:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}\right), \\ h(t) &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right). \end{aligned} \tag{8.1}$$

Фильтр Гаусса (8.1) обеспечивает в некотором смысле минимальное время фронта реакции фильтра на ступенчатое изменение входного сигнала (это

следует из того, что гауссовы функции (8.1) минимизируют соотношение неопределенностей) при монотонном характере такой реакции. Дискретные варианты фильтра Гаусса могут быть получены различными способами и при достаточно большом порядке с высокой степенью точности наследуют замечательные свойства аналогового прототипа.

Рекурсивный фильтр Гаусса

Чтобы аппроксимировать передаточную функцию (8.1), представим ее в следующем виде

$$H(s) = \frac{1}{\exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{s}{\sqrt{2}\sigma}\right)^{2k}}. \quad (8.2)$$

Ограничивая бесконечный ряд в знаменателе (8.2) конечным количеством слагаемых, мы получим передаточную функцию конечного порядка, полюса p которой определяются уравнением

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(-\frac{p}{\sqrt{2}\sigma}\right)^{2k} = 0. \quad (8.3)$$

Выберем среди решений уравнения (8.3) лишь те, которые удовлетворяют условию $\text{Re}(p_n) < 0$ (таких будет ровно N штук, т.е. $n = 1, 2, \dots, N$). Тогда передаточная функция N -го порядка, аппроксимирующая (8.2) будет иметь вид

$$H_a(s) = \frac{(-1)^N \prod_{n=1}^N p_n}{\prod_{n=1}^N (s - p_n)}. \quad (8.4)$$

Тогда передаточную функцию цифрового рекурсивного фильтра можно получить, используя уже известный нам метод билинейного преобразования. Чтобы найти коэффициенты передаточной функции (8.4), к которой будет применяться билинейное преобразование, можно воспользоваться следующим кодом MATLAB:

```
coef=1/(2*sigma^2);
coefs=[(-coef)^2/factorial(2) 0 -coef 0 1];
poles=roots(coefs);
```

```

poles=poles(real(poles)<0);
[b,a] = zp2tf([],poles,prod(-poles));
[db,da]=bilinear(b,a,1/ts);

```

В примере выше приведен пример расчета фильтра 2-го порядка. На практике часто используются нерекурсивные Гауссовы фильтры 3–4 порядка, так как они дают достаточно хорошую точность аппроксимации АЧХ. Число σ в приведенном коде соответствует параметру σ , который определяется выражением

$$\sigma = \frac{\Omega_c}{\sqrt{2 \ln 4}}, \quad (8.5)$$

где Ω_c – частота среза аналогового прототипа по уровню -6 дБ. Элементарные функции, используемые в коде выше, а также необходимые для записи формулы (8.5) в MATLAB, описаны в Приложении 8.

Нерекурсивный фильтр Гаусса

Одним из вариантов построения нерекурсивного фильтра Гаусса, являющегося цифровым аналогом фильтра (8.1), является использование уже знакомого нам по Лабораторной работе 5 метода взвешивания. Гладкие оконные функции при этом не используются, так как передаточная функция (8.1) не имеет разрывов. Импульсная характеристика такого фильтра имеет вид

$$h(n) = \frac{\sigma T_s}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 n^2 T_s^2}{2}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (8.6)$$

где N – порядок фильтра. Чтобы такой фильтр был фильтром типа 1 (с линейной ФЧХ), число N должно быть нечетным. В лабораторной работе предлагается ограничиться таким случаем. Тогда формула (8.6) может быть реализована в MATLAB следующим кодом:

```

alpha=(N-1)*ts*sigma/2;
h=sigma*ts*gausswin(N,alpha)/sqrt(2*pi);

```

Здесь h – массив значений импульсной характеристики (8.6).

Программа работы

1) Импортируйте звуковой сигнал с частотой дискретизации 44100 Гц в соответствии с вашим вариантом, который является смесью двух звуковых сигналов разной тональности. Постройте временную зависимость и амплитудный спектр сигнала, а также прослушайте его.

Примечание: Амплитудный спектр в этой лабораторной строится с алгоритма быстрого преобразования Фурье (см. дискретное преобразование Фурье (6.1)). Его реализация в MATLAB описана в Приложении 8.

2) Рассчитайте рекурсивный фильтр Гаусса. Порядок фильтра возьмите равным 3, если у вас нечетный вариант, или 4, если ваш вариант – четное число. Частоту среза подберите так, чтобы фильтр минимально исказил речь в звуковом сигнале и максимально ослабил громкость музыкальных инструментов.

Примечание: С функциональным назначением используемых в лабораторной работе функций MATLAB, описание которых не приведено в методическом пособии, ознакомьтесь самостоятельно в справке MATLAB.

3) Рассчитайте нерекурсивный фильтр Гаусса с той же частотой среза. В качестве порядка фильтра возьмите минимальное нечетное число, выше которого АЧХ нерекурсивного фильтра уже не становится более близкой к рекурсивному. Сравните АЧХ рекурсивного и нерекурсивного фильтров Гаусса.

4) Проведите фильтра звукового сигнала с помощью двух рассчитанных фильтров. Постройте график выходного сигнала фильтра и его амплитудный спектр, прослушайте результат.

Контрольные вопросы

- 1) Что такое дискретное преобразование Фурье?
- 2) Что такое фильтр Гаусса? Какие у него отличительные особенности?
- 3) Как рассчитывается рекурсивный фильтр Гаусса?
- 4) Как рассчитывается нерекурсивный фильтр Гаусса?