

6. Линейная фильтрация реальных цифровых сигналов

Цель работы: Научиться применять дискретное преобразование Фурье для спектрального анализа сигналов с большим количеством отсчетов. Получить практические навыки реализации алгоритмов шумоподавления в реальных сигналах с помощью линейных цифровых фильтров.

Дискретное преобразование Фурье.

На практике работа с реальными сигналами осуществляется по большому количеству дискретных отсчетов (десятки тысяч и более). Поэтому использовать для анализа непрерывный по частоте спектр не представляется возможным, так как преобразование дискретных сигналов будет представлять собой сумму как минимум из десятков тысяч слагаемых с непрерывным параметром ω . Поэтому на практике используют дискретное преобразование Фурье, которое имеет вид:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left(-j \frac{2\pi k}{N} n\right), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (6.1)$$

где $x(n)$ – n -ый отсчет дискретного сигнала, N – количество дискретных отсчетов (подразумевается, что их нумерация начинается с $n=0$), k – номер дискретной частоты, которой можно сопоставить реальную циклическую частоту ω_k в спектре сигнала формулой

$$\omega_k = \frac{k}{N} \omega_s, \quad (6.2)$$

где ω_s – циклическая частота дискретизации. Функция $X(k)$ называется дискретным образом Фурье сигнала $x(n)$. Фактически дискретное преобразование получается дискретизацией образа Фурье дискретного сигнала по частоте согласно соотношению (6.2). Если N достаточно велико, то можно пренебречь краевыми эффектами и считать дискретный образ Фурье приближенным спектром дискретного сигнала.

Дискретное преобразование Фурье обратимо:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp\left(j \frac{2\pi k}{N} n\right), \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (6.3)$$

Соотношение (6.3) называют обратным дискретным преобразованием Фурье, а (6.1) – прямым дискретным преобразованием Фурье.

Широкое практическое применение дискретного преобразования Фурье для спектрального анализа обусловлено существованием алгоритма быстрого преобразования Фурье, который позволяет вычислить преобразование (6.1) или (6.3) за количество операций $\sim N \log N$ (по сравнению с N^2 при прямом суммировании). Поэтому сложность вычисления дискретного преобразования Фурье относительно медленно растет с увеличением количества дискретных отсчетов N . Отметим, что максимальное ускорение данный алгоритм дает только при $N = 2^m, m \in \mathbb{N}$. Если количество отсчетов не равно степени двойки, то алгоритм быстрого преобразования Фурье тоже можно использовать, например, доопределяя сигнал нулями до нужного количества отсчетов.

В данной работе предлагается провести спектральный анализ, а также цифровую фильтрацию одного из следующих двух видов сигналов.

1) Звуковой сигнал

Первый вид сигналов представляет собой короткую звуковую запись человеческого голоса, на которую наложен синтетический синий шум. Частота дискретизации при записи голоса составляла 44100 Гц.

2) Электрокардиограмма (ЭКГ)

Второй вид сигналов представляет собой искусственно сгенерированную запись ЭКГ с ярко выраженными PQRST пиками. На ЭКГ была наложена модель сетевой помехи, а также синтетический белый шум. Частота дискретизации сигнала ЭКГ равна 512 Гц. Отметим, что ЭКГ является «почти периодическим» сигналом. Поэтому на спектре ЭКГ есть ярко выраженная основная гармоники, соответствующая частоте сердцебиения, а также высшие гармоники, имеющие кратные основной гармонике частоты.

Для обработки данных сигналов предлагается использовать средства математического пакета MATLAB. Для этого ознакомьтесь с требуемыми вам функциями в Приложении 8.

Программа работы

- 1) Постройте заданный вашим вариантом сигнал по временной области.

2) Найдите дискретный образ Фурье вашего сигнала. Постройте его дискретизованный амплитудный спектр. Определите, в каком частотном диапазоне находится полезный сигнал. Для сигналов ЭКГ определите частоту сердцебиения по спектру и приведите ее в отчете (в ударах/минуту). Для звуковых сигналов приведите в отчете содержание звукового сообщения.

3) Рассчитайте и примените к сигналу нужный фильтр (фильтры), которые позволят эффективно снизить уровень помех/шума при сохранении полезной информации. Для звукового сигнала ваша цель при фильтрации – сохранить разборчивость речи, при этом максимально понизив уровень громкости шума на фоне громкости самой речи. Для сигнала ЭКГ ваша цель – сделать PQRST пики как можно лучше различимыми во временной области.

4) Постройте отфильтрованный сигнал во временной области. Также постройте его амплитудный спектр (дискретизованный по частоте). Если вы применяли более одного фильтра к сигналу, то постройте соответствующие графики для выходного сигнала каждого из фильтров.

Контрольные вопросы

- 1) Что такое дискретное преобразование Фурье?
- 2) Во сколько примерно раз алгоритм быстрого преобразования Фурье ускоряет вычисления для 10^5 отсчетов?
- 3) Что такое оконное преобразование Фурье? Зачем оно применяется?
- 4) Какие искажения в сигнал вносит дискретизация по частоте? Как с этими искажениями можно бороться?
- 5) Что такое эффект наложения (aliasing в англоязычной литературе), возникающий при дискретизации высокочастотного сигнала?