

6. Цифровая обработка реальных сигналов

Цель работы: Получить базовые навыки спектрального анализа и обработки реальных сигналов. Познакомиться с дискретным образованием Фурье.

Дискретное преобразование Фурье.

На практике работа с реальными сигналами осуществляется по большому количеству дискретных отсчетов (десятки тысяч и более). Поэтому использовать для анализа непрерывный по частоте спектр не представляется возможным, так как преобразование дискретных сигналов будет представлять собой сумму как минимум из десятков тысяч слагаемых с непрерывным параметром ω . Поэтому на практике используют дискретное преобразование Фурье, которое имеет вид:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left(-j \frac{2\pi k}{N} n\right), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (6.1)$$

где $x(n)$ – n -ый отсчет дискретного сигнала, N – количество дискретных отсчетов (подразумевается, что их нумерация начинается с $n=0$), k – номер дискретной частоты, которой можно сопоставить реальную циклическую частоту ω_k в спектре сигнала формулой

$$\omega_k = \frac{k}{N} \omega_s, \quad (6.2)$$

где ω_s – циклическая частота дискретизации. Функция $X(k)$ называется дискретным образом Фурье сигнала $x(n)$. Фактически дискретное преобразование получается дискретизацией образа Фурье дискретного сигнала по частоте согласно соотношению (6.2). Если N достаточно велико, то можно пренебречь краевыми эффектами и считать дискретный образ Фурье приближенным спектром дискретного сигнала.

Дискретное преобразование Фурье обратимо:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp\left(j \frac{2\pi k}{N} n\right), \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (6.3)$$

Соотношение (6.3) называют обратным дискретным преобразованием Фурье, а (6.1) – прямым дискретным преобразованием Фурье.

Широкое практическое применение дискретного преобразования Фурье для спектрального анализа обусловлено существованием алгоритма быстрого преобразования Фурье, который позволяет вычислить преобразование (6.1) или (6.3) за количество операций $\sim N \log N$ (по сравнению с N^2 при прямом суммировании). Поэтому сложность вычисления дискретного преобразования Фурье относительно медленно растет с увеличением количества дискретных отсчетов N . Отметим, что максимальное ускорение данный алгоритм дает только при $N = 2^m, m \in \mathbb{N}$. Если количество отсчетов не равно степени двойки, то алгоритм быстрого преобразования Фурье тоже можно использовать, например, доопределяя сигнал нулями до нужного количества отсчетов.

В данной работе предлагается провести спектральный анализ, а также цифровую фильтрацию одного из следующих двух видов сигналов.

1) Звуковой сигнал

Первый вид сигналов представляет собой короткую звуковую запись человеческого голоса, на которую наложен синтетический синий шум. Частота дискретизации при записи голоса составляла 44100 Гц, а разрядность – 16 бит.

2) Электрокардиограмма (ЭКГ)

Второй вид сигналов представляет собой искусственно сгенерированную запись ЭКГ с ярко выраженными PQRST пиками. На ЭКГ была наложена модель сетевой помехи, а также синтетический белый шум. Частота дискретизации сигнала ЭКГ равна 512 Гц.

Для обработки данных сигналов предлагается использовать средства математического пакета MATLAB.

Инструкция по работе в MATLAB

1) Создайте скрипт в MATLAB (файл с расширением .m) и поместите CSV-файл с вашим сигналом в ту же папку, что и скрипт MATLAB. Используя код

```
T=readtable('file_name.csv');  
X=T(:,1);
```

вы загружаете в память дискретные значения сигнала из файла `file_name.csv`. Функция `readtable` считывает данные в табличном виде, а вторая строчка кода преобразует табличные данные в массив `X` чисел в формате `double`.

2) Дискретное преобразование Фурье находится с помощью функции

```
fourx=fft(X);
```

Функция `fft` использует алгоритм быстрого преобразования Фурье. Ее аргументом является одномерный массив значений (в данном случае дискретные отсчеты сигнала, обозначенные `X`). Данная функция возвращает в себя одномерный массив комплексных значений дискретного преобразования Фурье (6.1) в порядке увеличения `k`.

3) Построить график дискретного сигнала можно используя функцию

```
plot(X);
```

В этом случае она выведет график, на котором по вертикали будут отложены значения дискретных отсчетов сигнала, обозначенного ранее `X`, а по горизонтали – номер этого отсчета. Чтобы отложить по горизонтали не номер отсчета, а время можно использовать следующий код:

```
times=0:Ts:Ts*(length-1);  
plot(times,X);
```

Здесь `Ts` – период дискретизации, а `length` – длина массива `X` (количество отсчетов). Первая строчка кода задает набор дискретных времен, соответствующих отсчетам дискретного сигнала.

Аналогично можно построить, например, амплитудный спектр сигнала:

```
plot(abs(fourx));
```

Здесь функция `abs` вычисляет модуль. По аналогии с предыдущим примером можно отложить по горизонтали не номер дискретной частоты, а саму дискретную частоту (например, в Гц). Аргумент числа в MATLAB вычисляется с помощью функции `angle`.

4) Для расчета фильтров в MATLAB также есть встроенные функции. Например, расчет нерекурсивного фильтра методом взвешивания осуществляется посредством функции

```
h=fir1(filter_order,Wn,ftype>window);
```

Здесь `filter_order` – порядок фильтра, `Wn` – граничная частота среза (или частоты среза) фильтра, нормированная на частоту Найквиста, `ftype` – тип фильтра, `window` – тип оконной функции (если не указывать тип окна, то по умолчанию используется прямоугольное окно). Напомним, что частотой Найквиста называется половина частоты дискретизации. Очевидно, частота

среза фильтра не может превышать данной частоты, поэтому W_n должно лежать в промежутке от 0 до 1. В случае расчета, например, полосового фильтра частот среза будет две и данная частота указывается в формате $[w1\ w2]$ в квадратных скобках через пробел. Под частотой среза в MATLAB понимается частота в переходной полосе, в которой коэффициент передачи составляет $\frac{1}{2}$ (примерно -6 дБ). С форматом задания аргументов `ftype` и `window` можно самостоятельно ознакомиться в справке MATLAB.

Функция `filter` возвращает в себя массив дискретных значений импульсной характеристики фильтра. Используя функцию свертки `convolve` можно применить рассчитанный фильтр к сигналу:

$$Y = \text{conv}(h, X);$$

где Y – массив дискретных значений выходного сигнала. Заметьте, что длина массива сигнала Y будет отличаться от длины массива X на количество отсчетов равное порядку фильтра.

5) В случае работы со звуковым сигналом, можно воспроизвести его в MATLAB. Делается это с помощью функции:

$$\text{soundsc}(Y, fs);$$

где Y – сигнал, который нужно воспроизвести (в формате одномерного массива дискретных значений), а fs – частота дискретизации в Гц.

Программа работы

- 1) Постройте заданный вашим вариантом сигнал по временной области.
- 2) Найдите дискретный образ Фурье вашего сигнала. Постройте его дискретизованный амплитудный спектр. Определите, в каком частотном диапазоне находится полезный сигнал. Для сигналов ЭКГ также определите частоту сердцебиения по наиболее ярко выраженной гармонике в низкочастотной области спектра.
- 3) Рассчитайте и примените к сигналу нужный фильтр (фильтры), которые позволят эффективно снизить уровень помех/шума при сохранении полезной информации. Для звукового сигнала ваша цель при фильтрации – сохранить разборчивость речи, при этом максимально понизив уровень громкости шума на фоне громкости самой речи. Для сигнала ЭКГ ваша цель – сделать PQRST пики хорошо различимыми во временной области.
- 4) Постройте отфильтрованный сигнал во временной области. Также постройте его амплитудный спектр (дискретизованный по частоте). Если вы

применяли более одного фильтра к сигналу, то постройте соответствующие графики для выходного сигнала каждого из фильтров.

Контрольные вопросы

- 1) Что такое дискретное преобразование Фурье?
- 2) Во сколько примерно раз алгоритм быстрого преобразования Фурье ускоряет вычисления для 10^4 отсчетов?
- 3) Что такое оконное преобразование Фурье? Зачем оно применяется?
- 4) Какие искажения в сигнал вносит дискретизация по частоте? Как с этими искажениями можно бороться?
- 5) Что такое эффект наложения (aliasing в англоязычной литературе), возникающий при дискретизации высокочастотного сигнала?