5. Нерекурсивные цифровые фильтры

Цель работы: Познакомиться с особенностями нерекурсивных цифровых фильтров, методом взвешивания для их расчета и функциональным назначением оконных функций.

Как и в случае рекурсивных цифровых фильтров (ЦФ), мы будем рассматривать лишь каузальные нерекурсивные цифровые фильтры, так как некаузальные фильтры всегда можно свести к каузальным путем сдвига входного сигнала. Передаточная функция таких фильтров имеет вид

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}, \tag{5.1}$$

где $h(n)$ – импульсная характеристика нерекурсивного фильтра.

При расчете нерекурсивных ЦФ удобнее оперировать импульсной характеристикой фильтра, а не передаточной функцией, как в случае рекурсивных фильтров, ибо выходной сигнал нерекурсивного ЦФ можно представить в виде конечной свертки

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x(n-k). \tag{5.2}$$

Метод взвешивания заключается в том, что мы находим импульсную характеристику идеального ЦФ, которая является бесконечной, а затем ограничиваем ее конечным количеством отсчетов.

Приведем импульсные характеристики базовых идеальных ЦФ. Для этого стоит заметить, что импульсная характеристика является коэффициентами разложения частотной передаточной функции ЦФ в комплексный ряд Фурье:

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega T n}. \tag{5.3}$$

Здесь и далее T – период дискретизации. Эти коэффициенты, как известно, можно найти по формуле

$$h(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H(e^{j\omega T}) e^{j\omega Tn} d\omega. \quad (5.4)$$

Для базовых типов идеальных фильтров частотная передаточная функция на одном периоде имеет вид

$$\begin{aligned}
&H_{ФНЧ}(e^{j\omega T}) = \begin{cases} e^{-j\omega T\xi}, & |\omega| \in [0, \omega_п], \\ 0, & |\omega| \notin [0, \omega_п]; \end{cases} \\
&H_{ФВЧ}(e^{j\omega T}) = \begin{cases} e^{-j\omega T\xi}, & |\omega| \in [\omega_з, \pi/T], \\ 0, & |\omega| \notin [\omega_з, \pi/T]; \end{cases} \\
&H_{ПФ}(e^{j\omega T}) = \begin{cases} e^{-j\omega T\xi}, & |\omega| \in [\omega_{п1}, \omega_{п2}], \\ 0, & |\omega| \notin [\omega_{п1}, \omega_{п2}]; \end{cases} \\
&H_{РФ}(e^{j\omega T}) = \begin{cases} e^{-j\omega T\xi}, & |\omega| \in [\omega_0, \omega_{з1}] \cup [\omega_{з2}, \pi/T], \\ 0, & |\omega| \in [\omega_{з1}, \omega_{з2}]. \end{cases}
\end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь $\omega_п$, $\omega_з$ – границы полос пропускания/заграждения, параметр ξ определяет угол наклона ФЧХ фильтра. Отсюда по формуле (5.4) несложно найти

$$\begin{aligned}
&h_{ФНЧ}(n) = \frac{\sin\left(\omega_п T\left(n-\xi\right)\right)}{\pi\left(n-\xi\right)}, \\
&h_{ФВЧ}(n) = \frac{\sin\left(\pi\left(n-\xi\right)\right) - \sin\left(\omega_з T\left(n-\xi\right)\right)}{\pi\left(n-\xi\right)}, \\
&h_{ПФ}(n) = \frac{\sin\left(\omega_{п2} T\left(n-\xi\right)\right) - \sin\left(\omega_{п1} T\left(n-\xi\right)\right)}{\pi\left(n-\xi\right)}, \\
&h_{РФ}(n) = \frac{\sin\left(\pi\left(n-\xi\right)\right) + \sin\left(\omega_{з1} T\left(n-\xi\right)\right) - \sin\left(\omega_{з2} T\left(n-\xi\right)\right)}{\pi\left(n-\xi\right)},
\end{aligned} \quad (5.6)$$

где $n \in \mathbb{Z}$. Чтобы ЦФ был каузальным, отсчеты должны начинаться с нуля, т.е. нужно ограничить импульсную характеристику отсчетами с $n = 0,...,N-1$. При этом для получения ЦФ с линейной ФЧХ дополнительно потребуем

$$\xi = \frac{N-1}{2}, \quad N - \text{нечетное}. \quad (5.7)$$

Конечная импульсная характеристика $h_{ЦФ}(n)$, полученная из формул (5.6) ограничением $n = 0,...,N-1$, соответствует взвешиванию с прямоугольным окном, так как она может быть выражена через бесконечную импульсную характеристику $h(n)$, определяемую по формулам (5.6) для базовых типов фильтра, соотношением вида

$$h_{ЦФ}(n) = h(n)w(n), \tag{5.8}$$

где функция $w(n)$ называется окном. В случае прямоугольного окна, она имеет вид

$$w_{пр}(n) = \begin{cases} 1, & n \in \{0,...,N-1\}, \\ 0, & n \notin \{0,...,N-1\}. \end{cases} \tag{5.9}$$

Однако соотношение (5.3) в этом случае становится частичной суммой ряда Фурье, причем целевая передаточная функция (5.5) терпит разрыв на границах полос пропускания/заграждения. Поэтому на АЧХ полученной частотной передаточной функции реального ЦФ (5.8), (5.9) будет проявляться эффект Гиббса, что не позволит нам получить достаточно маленькую амплитуду колебаний АЧХ в полосе пропускания и заграждения даже при большом порядке фильтра $(N-1)$. Поэтому для фильтров высокого порядка применяют «гладкие» окна, использование которых позволяет полностью или частично избавиться от эффекта Гиббса ценой некоторого уменьшения крутости спада АЧХ в переходной полосе. Примеры таких окон приведены в Приложении 6.

Программа работы

1) Рассчитайте импульсную характеристику ЦФ заданного типа (см. вариант в Приложении 7), полученную с помощью прямоугольного окна. Постройте график АЧХ и групповой задержки рассчитанного ЦФ. Порядок фильтра возьмите равным 50, т.е. $N = 51$ в обозначениях (5.1). Убедитесь, что рассчитанный фильтр имеет линейную ФЧХ.

Примечание: Обратите внимание, что знаменатель в формулах (5.6) обращается в нуль при $n = \dfrac{N-1}{2}$. Поэтому нужно задавать в математическом пакете импульсную характеристику как кусочно-заданную функцию. Например, для ФНЧ она будет иметь вид

$$h(n)=\begin{cases} A \text{ if } n=\dfrac{N-1}{2} \\ \dfrac{\sin\left(\omega_n T\left(n-\dfrac{N-1}{2}\right)\right)}{\pi\left(n-\dfrac{N-1}{2}\right)} \text{otherwise} \end{cases}$$

где $A=\lim\limits_{n\to\frac{N-1}{2}}\dfrac{\sin\left(\omega_n T\left(n-\dfrac{N-1}{2}\right)\right)}{\pi\left(n-\dfrac{N-1}{2}\right)}=\dfrac{\omega_n T}{\pi}$. Число A для вашего типа фильтра следует предварительно вычислить, используя первый замечательный предел.

2) Сформируйте дискретный сигнал, соответствующий вашему варианту (Приложение 7). Количество отсчетов $n_{\max}$ возьмите равным $5\cdot N$, чтобы выходной сигнал успел выйти на установившийся режим. Постройте график полученного дискретного сигнала. Постройте также амплитудный спектр данного дискретного сигнала.

3) Используя формулу свертки (5.2) постройте реакцию ЦФ на входной сигнал в установившемся режиме. Убедитесь, что ЦФ корректно выполнил свою задачу.

4) Повторите пункты 1 и 3 для окна, заданного вашим вариантом (Приложение 6). Сравните с результатами для прямоугольного окна.

Контрольные вопросы

1) В чем преимущества нерекурсивных фильтров перед рекурсивными?
2) Как выглядит зависимость выходного сигнала нерекурсивного ЦФ от входного?
3) Каким условием обеспечивается линейность ФЧХ нерекурсивного ЦФ при его расчете?
4) Зачем используются гладкие окна при расчете нерекурсивных ЦФ? Какие преимущества у прямоугольного окна перед гладкими окнами? Когда имеет смысл использовать прямоугольное окно при расчете ЦФ?
5) Когда следует использовать ЦФ более высокого порядка, а когда — более низкого?
6) Какие есть методы расчета нерекурсивных ЦФ? Расскажите кратко алгоритм расчета ЦФ с помощью этих методов.
7) Как проявляется эффект Гиббса при расчете нерекурсивных ЦФ?

8) Расскажите принцип каскадной реализации алгоритма цифровой фильтрации. Какие преимущества дает последовательная и параллельная реализация алгоритма?