4. Рекурсивные цифровые фильтры

Цель работы: Познакомиться с методом билинейного преобразования для расчета рекурсивных цифровых фильтров по аналоговому прототипу.

Дискретизация сигналов

В наше время обработка сигналов в большинстве случаев проходит в цифровом виде. Для цифровой обработки сигналов требуется сначала дискретизовать сигнал. Дискретизация аналогового сигнала $x_a(t)$ – это преобразование его к дискретному набору значений $x(n)$ посредством формулы

$$x(n) = x_a(n \cdot T_s), \quad n = 0,...,N. \tag{4.1}$$

где T_s – период дискретизации. Выбор периода дискретизации является важным моментом в цифровой обработке сигналов. Одной из фундаментальных теорем, которая отвечает на вопрос, как его выбирать, является теорема Котельника.

Теорема Котельника. Пусть сигнал $x_a(t)$ имеет конечный по частоте спектр $X_a(j\omega)$, т.е. $X_a(j\omega) = 0$ при $\omega \notin \left[-\Delta\omega; \Delta\omega\right]$. Тогда сигнал $x_a(t)$ однозначно можно восстановить по его дискретным отсчетам, если взять период дискретизации $T_s < \dfrac{\pi}{\Delta\omega}$ (т.е. взять частоту дискретизации не меньше, чем в 2 раза превышающую ширину спектра $\Delta\omega$).

Отметим, что на практике обычно приходится работать с сигналами, которые имеют бесконечный по частоте спектр, а ширина спектра для них – лишь приближенное практическое понятие. Например, любой сигнал, ограниченный по времени, априори имеет бесконечный по частоте спектр. То же самое верно и для сигналов с разрывами первого рода. Поэтому на практике период дискретизации берут не в 2 раза больше, чем практическая ширина спектра, а в 3-4 и более раз в зависимости от требуемой точности цифровой обработки.

При спектральном анализе дискретных сигналов дискретизованные сигналы имеют конечное количество отсчетов, т.е. число N в (4.1) – конечно. Для таких сигналов образ Фурье определяется соотношением

$$X\left(e^{j\omega T_s}\right) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega T_s}}, \tag{4.2}$$

где $X(z)$ – Z-образ сигнала $x(n)$, имеющий вид

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N} x(n) z^{-n}. \tag{4.2}$$

Амплитудный и фазовый спектр определяется соответственно модулем $\left|X\left(e^{j\omega T_s}\right)\right|$ и аргументом спектра $\arg X\left(e^{j\omega T_s}\right)$. Отметим, что спектр дискретного сигнала $X\left(e^{j\omega T_s}\right)$ – периодическая функция частоты ω с периодом равным частоте дискретизации $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T_s}$. При этом в силу симметричности спектра, вся информация о нем заключена в промежутке частот $\omega \in \left[0; \omega_s/2\right]$, что согласуется с теоремой Котельникова.

Рекурсивные цифровые фильтра (ЦФ)

Каузальные линейные дискретные стационарные системы (ЛДСС) описываются линейными разностными уравнениями вида:

$$\begin{aligned} &a_k y(n+k) + a_{k-1} y(n+k-1) + \ldots + a_0 y(n) = \\ &= b_m x(n+m) + b_{m-1} x(n+m-1) + \ldots + b_0 x(n), \quad k \ge m. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Передаточная функция такой системы имеет вид

$$H(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \ldots + a_1 z + a_0}. \tag{4.2}$$

Порядком каузального цифрового фильтра называется степень k многочлена в знаменателе приведенной передаточной функции (2.2) (под приведенной рациональной функцией понимается функция, многочлены в числителе и знаменателе которой не имеют общих нулей).

Цифровые фильтры являются устойчивыми ЛДСС, т.е. все полюса z_i функции (2.2) (нули знаменателя) должны удовлетворять условию $|z_i| < 1$.

Как и аналоговые фильтры, цифровые фильтры можно разделить по характеру их полос пропускания и подавления на четыре базовых типа: фильтры нижних частот (ФНЧ), фильтры высоких частот (ФВЧ), полосовые фильтры (ПФ), режекторные фильтры (РФ). Помимо этого, бывают и мультиполосные цифровые фильтры. Однако в отличие от аналоговых фильтров АЧХ цифровых фильтров, как и для любой ЛДСС, является периодической с периодом ее повторения равным частоте дискретизации, причем рабочий диапазон цифрового фильтра равен половине частоты дискретизации в силу симметричности частотной передаточной функции, которая, напомним, получается из передаточной функции в z-представлении (2.2) заменой $z = e^{j\omega T}$, где T – период дискретизации. Поэтому «высокими» частотами для цифрового фильтра в отличие от аналогового являются не $\omega \to \infty$, а $\omega \to \pi/T$.

Рекурсивные цифровые фильтры обеспечивают наибольшую крутизну АЧХ в переходной полосе при заданном порядке фильтра. Однако, в отличие от нерекурсивных фильтров, они могут быть неустойчивыми.

Одним из методов расчет рекурсивных цифровых фильтров является расчет по аналоговому прототипу с помощью билинейного преобразования. Он заключается в том, что вы определяете передаточную функцию цифрового фильтра $H(z)$ через передаточную функцию аналогового фильтра $H_a(s)$ заданного типа с помощью билинейного преобразования:

$$H(z) = H_a\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right). \tag{4.3}$$

Соотношение (2.3) получается в результате использования аппроксимации Паде для формулы $s = \frac{1}{T}\ln z$.

Алгоритм расчета рекурсивного ЦФ методом билинейного преобразования состоит из следующих шагов:

1) Пересчет характерных граничных частот целевого ЦФ (например, границ полос пропускания/задерживания или частоты среда) на аналоговый прототип с помощью формулы

$$\omega_a = \frac{2}{T}\mathrm{tg}\left(\frac{\omega_d T}{2}\right), \tag{4.4}$$

где ω_d – характерные граничные частоты ЦФ, определяемые техническим заданием, а ω_a – характерные граничные частоты для аналогового прототипа.

2) Далее рассчитывается передаточная функция $H_a(s)$ аналогового прототипа фильтра.

3) Наконец с билинейного преобразования (4.3) получаем передаточную функцию рекурсивного ЦФ. Так как для расчета реакции фильтра используется обычно разностное уравнение ЦФ, то следует по полученной передаточной функции вида (4.2) составить разностное уравнение вида (4.1) и разрешить его относительно последнего дискретного значения выходного сигнала, т.е. представить в виде

$$\begin{gathered} y(n) = \frac{1}{a_k}\big(-a_{k-1}y(n-1) - \ldots - a_0 y(n-k) + \\ +b_m x(n-k+m) + b_{m-1}x(n-k+m-1) + \ldots + b_0 x(n-k)\big). \end{gathered} \tag{4.5}$$

В Приложении 4 подробнее рассмотрен данный алгоритм расчета с использованием встроенных функций MATLAB.

Программа работы

1) Задайте сигнал вида

$$x(t) = x_1(t) + \frac{A}{2}\sin(\omega_2 t), \tag{4.6}$$

где $x_1(t)$ – одиночный импульс, соответствующий вашему варианту (Приложение 2), а A – амплитуда этого импульса, которая была задана в Лабораторной работе 1. Частота ω_2 выбирается исходя из практической ширины спектра, найденной в Лабораторной работе 2, и вашего варианта в Приложении 5. Считайте, что сигнал (4.6) задан на конечном промежутке времени $t \in [0; 2T]$, где T – длительность импульса из Приложения 2. Проведите дискретизацию сигнала на промежутке $t \in [0; 2T]$ с частотой дискретизации в 4 раза превыщающей ω_2. Постройте график дискретизованного сигнала во временной области и амплитудный спектр дискретизованного сигнала.

2) Рассчитайте передаточную функцию ЦФ в соответствии со своим вариантом из Приложения 5. Граничную частоту или частоту среза при расчете ЦФ выберите самостоятельно по построенному амплитудному спектру дискретизованного сигнала таким образом, чтобы фильтр подавил дискретизованный сигнал $x_1(t)$ и пропустил дискретизованную синусоиду $\frac{A}{2}\sin\left(\omega_2 t\right)$. Постройте АЧХ и ФЧХ ЦФ. С помощью разностного уравнения ЦФ примените данный фильтр к дискретизованному сигналу из п. 1. Постройте график выходного сигнал фильтра, а также его амплитудный и фазовый спектры.

3) Повторите п. 1 и 2, увеличив частоту дискретизации в 2 раза.

Контрольные вопросы

1) Что является математической моделью ЛДСС во временном представлении?
2) Что такое z-преобразование? Как находится прямое и обратное z-преобразование?
3) Назовите критерий устойчивости ЛДСС.
4) Как найти передаточную функцию из разностного уравнения ЛДСС и наоборот?
5) Как находится преобразование Фурье дискретного сигнала?
6) Чем отличается спектр дискретного и непрерывного сигнала?
7) Расскажите теорему Котельникова.
8) Нарисуйте структурную схему ЦФ. Объясните назначение ее составляющих.
9) Назовите преимущества и недостатки ЦФ перед аналоговыми.
10) Какой рабочий диапазон частот у ЦФ?
11) Чем отличаются рекурсивные ЦФ от нерекурсивных? Какие у них преимущества и недостатки?
12) Чем отличается деление ЦФ на фильтры с конечной и бесконечной импульсной характеристикой от деления на рекурсивные и нерекурсивные?
13) Какие есть методы расчета рекурсивных ЦФ?
14) Объясните принцип метода билинейного преобразования. Какие у него есть преимущества и недостатки?