

3. Аналоговые фильтры

Цель работы: Познакомиться с основными типами аналоговых фильтров низких частот. Изучить особенности процесса демодуляции сигналов.

Аналоговые фильтры

Неидеальные аналоговые линейные частотные фильтры (далее просто фильтры) являются частным случаем линейных стационарных систем, поэтому описываются передаточной функцией $H(s)$. Напомним, что линейные стационарные системы описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами вида:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $x(t)$ – входной сигнал, а $y(t)$ – выходной. В операторном виде уравнение (3.1) при нулевых начальных условиях имеет вид

$$A(s)Y(s) = B(s)X(s), \quad (3.2)$$

где $A(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k$, $B(s) = \sum_{k=0}^m b_k s^k$. Соответственно передаточная функция

$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ является рациональной, т.е. отношением двух полиномов.

Частотная передаточная функция $H(j\omega)$ получается формальной заменой $s = j\omega$ в передаточной функции. Отметим, что функции $H(j\omega)$ и $H(s)$ являются соответственно образами Фурье и Лапласа импульсной переходной функции $h(t)$, которая является реакцией $y(t)$ системы на входное воздействие в виде дельта-функции Дирака $x(t) = \delta(t)$. Частотная передаточная функция описывает реакцию системы в установившемся режиме в соответствии с соотношением

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega). \quad (3.3)$$

Фильтры должны удовлетворять следующим условиям:

- 1) Число нулей m и полюсов n передаточной функции конечно;
- 2) Количество нулей m не превышает количество полюсов n , т.е. фильтр является физически реализуемым;

3) Все полюса s_k находятся в левой полуплоскости ($\text{Re}(s_k) < 0$), т.е. фильтр – устойчив.

Напомним, что полюсами линейной стационарной системы (в том числе линейных частотных фильтров) называются нули знаменателя передаточной функции $H(s)$, т.е. решения уравнения $A(s) = 0$. Нули полинома в пакете MathCAD удобно искать с помощью встроенной функции `polyroots`. Если мы имеем уравнение $\sum_{k=0}^n a_k s^k = 0$, то нужно задать вектор значений коэффициентов полинома в порядке возрастания степени, т.е.

$V = \begin{pmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$, и функция `polyroots(V)` выдаст корни соответствующего уравнения.

На АЧХ фильтров выделяют полосу пропускания (диапазон частот, где значение АЧХ $|H(j\omega)|$ близко к единице) а также полосу подавления (диапазон частот, где значение АЧХ $|H(j\omega)|$ близко к нулю). У неидеальных фильтров всегда присутствует и переходная полоса, где значение АЧХ (коэффициента передачи) принимает значения от 0 до 1.

В зависимости от вида АЧХ выделяют следующие наиболее распространенные фильтры:

1) Фильтры Баттерворта

Его особенностью является максимально гладкая АЧХ как в полосе пропускания, так и в полосе подавления.

2) Фильтры Чебышева I рода

Данному фильтру присуща гладкая АЧХ в полосе подавления и заданный коэффициент пульсаций АЧХ в полосе пропускания.

3) Фильтры Чебышева II рода

Имеет заданный уровень пульсаций в полосе подавления и гладкую АЧХ в полосе пропускания

4) Эллиптические фильтры (фильтры Золотарёва–Кауэра)

Имеет заданный уровень пульсаций как в полосе подавления, так и пропускания.

Самый крутой спад АЧХ в переходной полосе среди перечисленных фильтров имеют эллиптические фильтры, а самый пологий – фильтры Баттерворта. На рис. 1 приведены диаграммы Боде для нормированных фильтров низких частот разных типов.

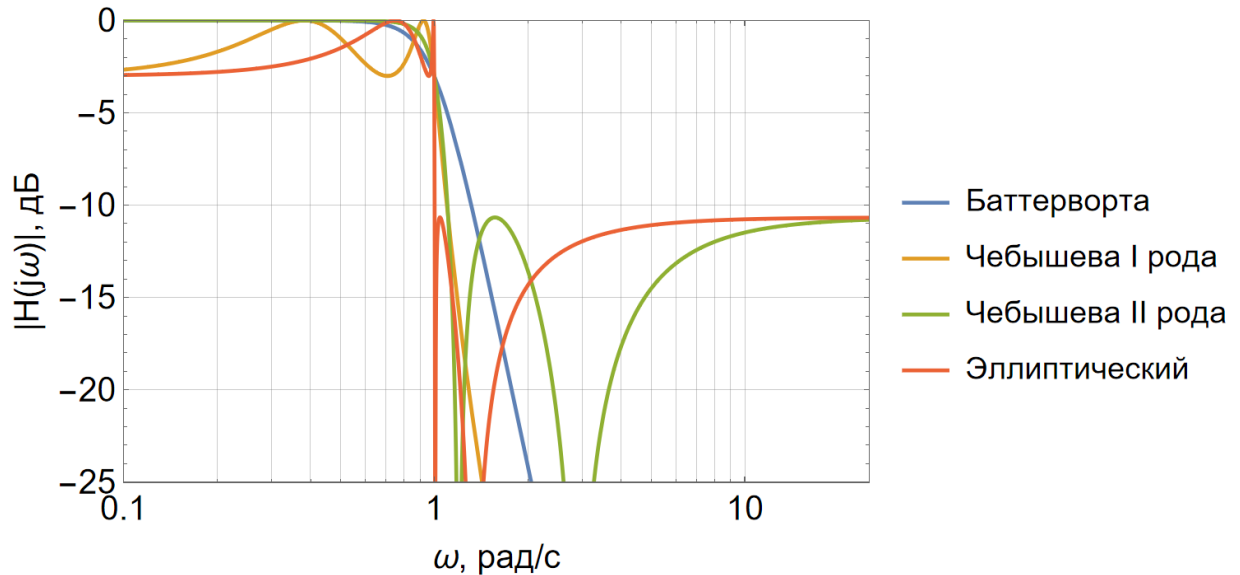


Рис. 1. Диаграммы Боде нормированных фильтров низких частот 4 порядка

Приведенные четыре типа фильтров имеют существенно нелинейную ФЧХ в полосе пропускания, поэтому при высоких требованиях к форме сигнала они требуют дополнительного использования корректоров фазы. Однако в случае, когда использование корректора фазы нецелесообразно, можно использовать еще один распространенный тип фильтра:

5) Фильтры Бесселя

Данные фильтры имеют гладкую АЧХ в полосе пропускания и подавления, а также максимально гладкий график групповой задержки в полосе пропускания. При этом спад АЧХ в переходной полосе у них еще менее крутой, чем у фильтров Баттерворта.

Напомним, что групповая задержка $\tau_g(\omega) = -\frac{d(\arg H(j\omega))}{d\omega}$ и фазовая задержка $\tau_\varphi(\omega) = -\frac{\arg H(j\omega)}{\omega}$ имеет вполне определенный физический смысл, если рассмотреть пропускание через линейную стационарную систему амплитудно-модулированного сигнала. В этом случае групповая

задержка является задержкой модуляции, а фазовая – задержка опорного колебания.

Демодуляция

Для демодуляции сигнала необходимо выделить в спектре модулированного сигнала спектр модулирующего сигнала, чтобы он не перекрывался со спектром опорного колебания. Наиболее простыми и эффективными методами являются следующие:

1) Двухполупериодное выпрямление сигнала

Пусть амплитудно-модулированный сигнал имеет вид

$$x(t) = a(t)\sin(\omega_0 t), \quad a(t) \geq 0. \quad (3.4)$$

Возьмем модуль этого сигнала:

$$x_1(t) = |x(t)| = a(t)|\sin(\omega_0 t)|. \quad (3.5)$$

Модуль синуса можно разложить в ряд Фурье:

$$|\sin(\omega_0 t)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cos(2\omega_0 t) + \dots = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \cos(2\omega_0 t) + \dots \right). \quad (3.6)$$

Тогда спектр сигнала $x_1(t)$ имеет вид

$$X_1(j\omega) = F[x_1(t)] \approx \frac{2}{\pi} \left(A(j\omega) - \frac{1}{3} A(j(\omega - 2\omega_0)) + \dots \right), \quad \omega > 0, \quad (3.7)$$

где $A(j\omega) = F[a(t)]$. Таким образом, вблизи $\omega = 0$ спектр сигнала $x_1(t)$ совпадает со спектром модулирующего сигнала, а спектр опорного колебания смещается в область удвоенной частоты $2\omega_0$ и выше. Используя фильтр нижних частот, мы можем легко выделить модулирующий сигнал.

2) Домножением на опорное колебания

Теперь умножим амплитудно-модулированный сигнал на опорное колебание с некоторым сдвигом фазы φ :

$$x_2(t) = x(t)\sin(\omega_0 t + \varphi) = a(t)\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.8)$$

Используя соотношение

$$\sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t + \varphi) = \frac{\cos \varphi}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t + \varphi), \quad (3.9)$$

Имеем

$$X(j\omega) \approx \frac{\cos \varphi}{2} \left(A(j\omega) - \frac{1}{2 \cos \varphi} A(j(\omega - 2\omega_0)) e^{-j\varphi} \right), \quad \omega > 0. \quad (3.10)$$

В частности, при $\varphi = 0$ имеем

$$X(j\omega) \approx \frac{1}{2} \left(A(j\omega) - \frac{1}{2} A(j(\omega - 2\omega_0)) \right), \quad \omega > 0. \quad (3.11)$$

Отметим, что качество демодуляции этим методом тем лучше, чем меньше сдвиг фазы $\varphi \geq 0$ (при его малых значениях), так как амплитуда высокочастотного «хвоста» в (3.10) растет с увеличением φ . В данной лабораторной работе мы ограничимся случаем $\varphi = 0$.

Программа работы

1) Задайте нормированные передаточные функции фильтров Баттерворта нижних частот 2 и 3 порядков (Приложение 3). Для дальнейшей демодуляции в пункте 3 сигнала из Лабораторной работы 2 частоту среза выберите равной частоте опорного колебания и денормируйте передаточную функцию фильтра.

2) Постройте амплитудные и фазовые частотные характеристики денормированных фильтров. Постройте также график групповой задержки. Найдите полюса фильтра.

3) Используя амплитудно-модулированный сигнал из Лабораторной работы 2, проведите его демодуляцию с помощью фильтров из пункта 1. Для демодуляции используйте метод умножения на опорное колебание или двухполупериодного выпрямления в зависимости от варианта (Приложение 3). Фильтрацию проведите, рассчитав реакцию системы в установившемся режиме, т.е. с помощью соотношения (3.3) и обратного преобразования Фурье. Постройте амплитудный спектр демодулированного сигнала (в масштабе, который позволяет увидеть неидеальность демодулированного сигнала) и его график во временной области. Сравните демодулированный

сигнал с исходным модулирующим сигналом, приведя в соответствие их амплитуды.

4) Повторите пункты 2 и 3 для другого фильтра 3 порядка, заданного вашим вариантом (см. Приложение 3).

Контрольные вопросы

- 1) Для чего применяются частотные фильтры?
- 2) Назовите основные типы фильтров по их функциональному назначению.
- 3) Назовите наиболее популярные типы фильтров и опишите форму их АЧХ/ФЧХ.
- 4) Как выполняется демодуляция сигнала? Назовите основные методы демодуляции.
- 5) Что такое передаточная функция линейной стационарной системы? Какой у нее физический смысл?
- 6) Что такое импульсная переходная функция линейной стационарной системы? Какой у нее физический смысл?
- 7) Что такое групповая и фазовая задержка линейной стационарной системы? Какой у нее физический смысл?
- 8) Опишите общий алгоритм расчета аналогового фильтра произвольного типа.
- 9) Что понимается под устойчивостью линейной стационарной системы? Как определить устойчивость по передаточной функции?
- 10) Каким условиям должна удовлетворять передаточная функция физически реализуемой системы?
- 11) Какие факторы привели к погрешности демодуляции в данной лабораторной работе?
- 12) Что такое квадратурная модуляция? Как производится демодуляция сигналов с такой модуляцией?
- 13) Какими должны быть АЧХ и ФЧХ системы, передающей сигнал без искажений?