

2. Спектральный анализ импульсных непериодических сигналов

Цель работы: Познакомиться с особенностями спектрального разложения импульсных непериодических сигналов. Изучить спектр амплитудно-модулированного сигнала.

Преобразование Фурье

Разложение (1.4), (1.5) периодического сигнала $x_T(t)$ в ряд Фурье можно записать в виде:

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega_k t}}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) e^{-j\omega_k \tau} d\tau, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T}. \quad (2.1)$$

Обозначим $\Delta\omega_k = \frac{2\pi}{T}$ и перейдем к пределу $T \rightarrow \infty$:

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_k t} \Delta\omega_k \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) e^{-j\omega_k \tau} d\tau. \quad (2.2)$$

Сумма в формуле (2.2) является интегральной суммой по определению в случае если соответствующий интеграл по ω сходится:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.3)$$

Выражение (2.3) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= F^{-1}[x(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega, \\ X(j\omega) &= F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Отметим, что сигнал $x(t)$ уже не является периодическим, так как мы устремили период к бесконечности. Комплексная функция $X(j\omega)$ называется образом Фурье непериодического сигнала $x(t)$, а линейный функционал F называется прямым преобразование Фурье. Соответственно, сигнал $x(t)$ называется Фурье-прообразом функции $X(j\omega)$, а линейный

функционал F^{-1} – обратным преобразованием Фурье. Образ Фурье сигнала также называют его гармоническим спектром. Модуль образа Фурье $|X(j\omega)|$ называется амплитудным спектром сигнала $x(t)$, а его аргумент $\arg X(j\omega)$ – фазовым спектром.

Отметим одну особенность импульсных сигналов. Импульсными сигналами называются сигналы, описываемые функцией $x(t)$, которая строго равна нулю вне некоторого промежутка $t \in [a; b]$. Длину промежутка $b - a > 0$ соответственно можно называть длиной импульса по основанию. Используя преобразование Фурье, можно построить спектр $X(j\omega)$ таких сигналов, так как интеграл (2.4) будет заведомо сходиться. С другой стороны, можно сформировать периодический сигнал с периодом $T \geq b - a$ и тоже построить его спектр, используя разложение в ряд Фурье. Модуль и аргумент коэффициентов разложения C_k будут определять соответственно амплитуду и фазу гармоник, соответствующих частоте ω_k . Сравнивая формулы (1.5) и (2.4) несложно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$C_k = \frac{1}{T} X(j\omega_k). \quad (2.5)$$

Таким образом, точки дискретного спектра периодически повторяющегося импульса с точностью до множителя $\frac{1}{T}$ лежат на спектре соответствующего одиночного импульса.

Основные свойства преобразования Фурье:

1) Линейность

$$F[\alpha \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t)] = F[\alpha \cdot x_1(t)] + F[\beta \cdot x_2(t)]. \quad (2.6)$$

Это свойство, очевидно, верно и для обратного преобразования Фурье.

2) Образ производной

$$F\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = (j\omega)^n F[x(t)]. \quad (2.7)$$

3) Образ интеграла

$$F\left[\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{j\omega}F[x(t)], \quad \text{если } \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 0. \quad (2.8)$$

4) Образ смещенного сигнала

$$F[x(t - \tau)] = e^{-j\omega\tau}F[x(t)], \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

5) Образ растянутого или сжатого по времени сигнала

$$F[x(kt)] = \frac{1}{k}X\left(\frac{j\omega}{k}\right), \quad X(j\omega) = F[x(t)]. \quad (2.10)$$

6) Теорема Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega) \cdot X_2(-j\omega)d\omega, \quad X_i(j\omega) = F[x_i(t)], \quad (2.11)$$

если интеграл в правой части выражения сходится.

Данное свойство имеет один важный частный случай:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega. \quad (2.12)$$

Поэтому квадрат модуля образа Фурье называется спектральной плотностью энергии сигнала.

7) Образ свертки

$$F\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - \tau) \cdot x_2(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}X_1(j\omega)X_2(j\omega). \quad (2.13)$$

Интеграл в левой части тождества (2.13) называется сверткой двух сигналов.

8) Обратимость

$$F^{-1}[F[x(t)]] = x(t). \quad (2.14)$$

9) Симметричность

$$X(-j\omega) = X^*(j\omega). \quad (2.15)$$

Из этого свойства в частотности следует, что амплитудный спектр – четная функция частоты, а фазовый – нечетная.

10) Глобальный максимум

Если $x(t) \geq 0$, то образ Фурье достигает своего максимального значения по модулю в точке $\omega = 0$.

11) Связь с образом Лапласа

Если $x(t) \equiv 0$ при $t \leq 0$, то образ Лапласа $X(s)$ сигнала $x(t)$ в области его аналитичности является аналитическим продолжением образа Фурье $X(j\omega)$ этого же сигнала с точностью до замены $s = j\omega$.

Данное свойство является очевидным следствием определений преобразований Лапласа и Фурье. Из этого свойства, в частности, следует сходство некоторых свойств этих преобразований. Это свойство также позволяет в некоторых случаях заменить вычисление обратного преобразования Лапласа, которое, как известно, в общем случае задается контурным интегралом в комплексной плоскости, к вычислению обратного преобразования Фурье, что особенно полезно при численных расчетах.

Отметим, что для сигналов с ненулевой длительностью амплитудный спектр стремится к нулю при $\omega \rightarrow \pm\infty$, причем большая часть энергии сигнала заключена в некотором промежутке $\omega \in [-\Delta\omega; \Delta\omega]$. Величина $\Delta\omega$ обратно пропорциональна длине импульса и называется практической шириной спектра. Однозначного рецепта, как определять $\Delta\omega$, в общем случае нет за исключением случаев, когда спектр строго ограничен по частоте. В данной лабораторной работе предлагается оценить его следующим образом. Берется максимальное значение амплитудного спектра сигнала A . Затем находится наименьшая положительная частота $\omega = \Delta\omega > 0$, такая что $|X(j\Delta\omega)| < 0.05 \cdot A$. Это значение $\Delta\omega$ и считается оценочным значением практической ширины спектра. На практике также часто пользуется подобным методом оценки не по амплитудному спектру, а по спектру мощности сигнала с тем или иным отклонением граничной спектральной мощности от нуля. Использование понятия практической ширины спектра позволяет со сколь угодно большой точностью заменить работу с бесконечным по частоте спектром на работу со спектром конечной ширины $\omega \in [-\Delta\omega; \Delta\omega]$. Очевидно, что чем больше будет $\Delta\omega$, тем точнее будут такие приближенные операции. Например, можно приближенно восстановить сигнал по его спектру, используя приближенное соотношение

$$x^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^{\Delta\omega} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \right). \quad (2.16)$$

Основное назначение формулы (2.16), очевидно, это численные расчеты. Аналогичным образом можно приближенно рассчитать и энергию сигнала по его спектру.

Амплитудная модуляция

Широко используются в науке и технике сигналы с различными типами модуляции. Различают частотную, фазовую и амплитудную модуляции. Основные особенности спектрального состава модулированных сигналов мы рассмотрим на примере амплитудной модуляции.

Амплитудно-модулированным сигналом называют сигнал вида

$$x(t) = a(t) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad a(t) \geq 0. \quad (2.17)$$

Здесь ω_0 и φ_0 – частота и начальная фаза опорного гармонического колебания $\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. Модулирующий сигнал $a(t)$ считается неотрицательным. Случай знакопеременной модуляции тоже допустим, хотя и приводит к некоторым трудностям на практике. Мы будем рассматривать случай, когда модулирующий сигнал $a(t)$ изменяется намного медленней, чем опорное колебание, т.е. практическая ширина спектра $\Delta\omega$ сигнала $a(t)$ значительно меньше, чем ω_0 . Этот случай представляет наибольший интерес с практической точки зрения, так как для таких сигналов легко осуществляется процесс демодуляции, который будет рассмотрен в Лабораторной работе 3.

Для простоты здесь и далее будем полагать $\varphi_0 = 0$. Пусть $A(j\omega) = F[a(t)]$ – спектр модулирующего сигнала. Тогда спектр сигнала (2.17) $X(j\omega) = F[x(t)]$ имеет вид

$$X(j\omega) = \frac{A(j(\omega + \omega_0)) - A(j(\omega - \omega_0))}{2j}. \quad (2.18)$$

Если $\Delta\omega < \omega_0$, то имеем

$$X(j\omega) \approx \frac{1}{2} A(j(\omega - \omega_0)) e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad \omega > 0. \quad (2.19)$$

Для отрицательных частот формулу (2.19) можно доопределить по свойству (2.15). Таким образом, спектр амплитудно-модулированного сигнала при достаточно медленной модуляции представляет собой спектр модулирующего сигнала, сдвинутый на ω_0 в сторону положительных частот, умноженный на коэффициент $\frac{1}{2}$ и повернутый на некоторый угол в комплексной плоскости в зависимости от фазы опорного колебания (в случае $\varphi_0 = 0$ этот поворот составляет $-\pi/2$).

Программа работы

1) Задайте сигнал в виде одиночного импульса из Приложения 2 в соответствии с вашим вариантом (такой же, как в Лабораторной работе 1). Постройте его амплитудный и фазовый спектр. Сравните этот спектр со спектром периодического сигнала в Лабораторной работе 1.

2) Определите практическую ширину спектра заданного сигнала по уровню 5% от максимальной амплитуды спектра. Используя обратное преобразование Фурье, восстановите сигнал из его спектра по заданной ширине спектра. Изменяя ширину спектра в большую или меньшую сторону, определите практическую ширину спектра, исходя из визуального сопоставления графиков исходного и восстановленного сигналов. Сравните энергию оригинального и восстановленного сигнала, используя формулы (2.12).

3) Задайте гармонический сигнал с амплитудной модуляцией, определяемой сигналом из пункта 1. Период опорного колебания задайте в 5–10 раз меньше, чем длительность модулирующего сигнала, так чтобы практическая ширина спектра модулирующего сигнала была существенно меньше частоты опорного колебания. Постройте амплитудный и фазовый спектры амплитудно-модулированного сигнала.

Контрольные вопросы

- 1) Чем отличается спектр периодического и непериодического импульсного сигнала?

- 2) Как связаны спектры периодически повторяющегося и одиночного импульсов?
- 3) Дайте определение преобразования Фурье.
- 4) Что такое дельта-функция Дирака? Моделью каких сигналов она является и какой у нее спектр?
- 5) Как построить амплитудный и фазовый спектры сигнала?
- 6) Что такое амплитудная, частотная и фазовая модуляция?
- 7) Что представляет собой спектр амплитудно-модулированного сигнала?
- 8) Что понимается под узкополосной модуляцией?
- 9) Что такое практическая ширина спектра сигнала?
- 10) Как изменится спектр сигнала, если растянуть его по времени в 2 раза?
- 11) Как изменится спектр сигнала, если сдвинуть его по времени, не меняя формы?
- 12) Что такое спектральная плотность энергии сигнала?