2. Спектральный анализ импульсных непериодических сигналов

Цель работы: Познакомиться с особенностями спектрального разложения импульсных непериодических сигналов. Изучить спектр амплитудно-модулированного сигнала.

Преобразование Фурье

Разложение (1.4), (1.5) периодического сигнала $x_T(t)$ в ряд Фурье можно записать в виде:

$$x_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega_k t}}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-j\omega_k t}dt,\quad \omega_k=\frac{2\pi k}{T}. \tag{2.1}$$

Обозначим $\Delta\omega_k=\dfrac{2\pi}{T}$ и перейдем к пределу $T\to\infty$:

$$x(t)=\lim_{T\to\infty}x_T(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j\omega_k t}\Delta\omega_k\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-j\omega_k t}dt. \tag{2.2}$$

Сумма в формуле (2.2) является интегральной суммой по определению в случае если соответствующий интеграл по ω сходится:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right)\cdot e^{j\omega t}d\omega. \tag{2.3}$$

Выражение (2.3) можно представить в виде:

$$\begin{gathered}x(t)=F^{-1}\left[x(t)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega,\\ X(j\omega)=F\left[x(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Отметим, что сигнал $x(t)$ уже не является периодическим, так как мы устремили период к бесконечности. Комплексная функция $X(j\omega)$ называется образом Фурье непериодического сигнала $x(t)$, а линейный функционал F называется прямым преобразование Фурье. Соответственно, сигнал $x(t)$ называется Фурье-прообразом функции $X(j\omega)$, а линейный функционал F^{-1} – обратным преобразованием Фурье. Образ Фурье сигнала также называют его гармоническим спектром. Модуль образа Фурье $\left|X\left(j\omega\right)\right|$ называется амплитудным спектром сигнала $x(t)$, а его аргумент $\arg X\left(j\omega\right)$ – фазовым спектром.

Отметим одну особенность импульсных сигналов. Импульсными сигналами называются сигналы, описываемые функцией $x(t)$, которая строго равна нулю вне некоторого промежутка $t \in [a;b]$. Длину промежутка $b-a>0$ соответственно можно называть длиной импульса по основанию. Используя преобразование Фурье, можно построить спектр $X\left(j\omega\right)$ таких сигналов, так как интеграл (2.4) будет заведомо сходиться. С другой стороны, можно сформировать периодический сигнал с периодом $T \geq b-a$ и тоже построить его спектр, используя разложение в ряд Фурье. Модуль и аргумент коэффициентов разложения C_k будут определять соответственно амплитуду и фазу гармоник, соответствующих частоте ω_k. Сравнивая формулы (1.5) и (2.4) несложно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$C_k = \frac{1}{T} X(j\omega_k). \tag{2.5}$$

Таким образом, точки дискретного спектра периодически повторяющегося импульса с точностью до множителя $\frac{1}{T}$ лежат на спектре соответствующего одиночного импульса.

Основные свойства преобразования Фурье:

1) Линейность

$$F\left[\alpha \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t)\right] = F\left[\alpha \cdot x_1(t)\right] + F\left[\beta \cdot x_2(t)\right]. \tag{2.6}$$

Это свойство, очевидно, верно и для обратного преобразования Фурье.

2) Образ производной

$$F\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = \left(j\omega\right)^n F\left[x(t)\right]. \tag{2.7}$$

3) Образ интеграла

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{j\omega}F\left[x(t)\right], \quad если \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 0. \tag{2.8}$$

4) Образ смещенного сигнала

$$F\left[x(t-\tau)\right] = e^{-j\omega\tau}F\left[x(t)\right], \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

5) Образ растянутого или сжатого по времени сигнала

$$F\left[x(kt)\right] = \frac{1}{k}X\left(\frac{j\omega}{k}\right), \quad X(j\omega) = F\left[x(t)\right]. \tag{2.10}$$

6) Теорема Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\cdot x_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega)\cdot X_2(-j\omega)d\omega, \quad X_i(j\omega) = F\left[x_i(t)\right], \tag{2.11}$$

если интеграл в правой части выражения сходится.

Данное свойство имеет один важный частный случай:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|X(j\omega)\right|^2 d\omega. \tag{2.12}$$

Поэтому квадрат модуля образа Фурье можно ассоциировать со спектральной плотностью мощности сигнала.

7) Образ свертки

$$F\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau)\cdot x_2(\tau)dt\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}X_1(j\omega)X_2(j\omega). \tag{2.13}$$

Интеграл в левой части тождества (2.13) называется сверткой двух сигналов.

8) Обратимость

$$F^{-1}\left[F\left[x(t)\right]\right] = x(t). \tag{2.14}$$

9) Симметричность

$$X(-j\omega) = X^*(j\omega). \tag{2.15}$$

Из этого свойства в частотности следует, что амплитудный спектр – четная функция частоты, а фазовый – нечетная.

10) Связь с образом Лапласа

Если $x(t) \equiv 0$ при $t < 0$, то образ Лапласа $X(s)$ сигнала $x(t)$ в области его аналитичности является аналитическим продолжением образа Фурье $X(j\omega)$ этого же сигнала с точностью до замены $s = j\omega$.

Данное свойство является очевидным следствием определений преобразований Лапласа и Фурье. Из этого свойства, в частности, следует сходство некоторых свойств этих преобразований. Это свойство также позволяет в некоторых случаях заменить вычисление обратного преобразования Лапласа, которое, как известно, в общем случае задается контурным интегралом в комплексной плоскости, к вычислению обратного преобразования Фурье, что особенно полезно при численных расчетах.

Отметим, что для сигналов с конечной длительностью (строго равных нулю вне некоторого промежутка времени или быстро затухающих при $t \to \pm\infty$) амплитудный спектр стремится к нулю при $\omega \to \pm\infty$, причем большая часть энергии сигнала заключена в некотором промежутке $\omega \in [-\Delta\omega; \Delta\omega]$. Величина $\Delta\omega$ обратно пропорциональна длине импульса и называется практической шириной спектра. Однозначного рецепта, как определять $\Delta\omega$, в общем случае нет за исключением случаев, когда спектр строго ограничен по частоте. В данной лабораторной работе предлагается оценить его следующим образом. Берется максимальное значение амплитудного спектра сигнала A. Затем находится наименьшая положительная частота $\omega = \Delta\omega > 0$, такая что $|X(j\Delta\omega)| < 0.05 \cdot A$. Это значение $\Delta\omega$ и считается оценочным значением практической ширины спектра. На практике также часто пользуется подобным методом оценки не по амплитудному спектру, а по спектру мощности сигнала с тем или иным отклонением граничной спектральной мощности от нуля. Использование понятия практической ширины спектра позволяет со сколь угодно большой точностью заменить работу с бесконечным по частоте спектром на работу со спектром конечной ширины $\omega \in [-\Delta\omega; \Delta\omega]$. Очевидно, что чем больше будет $\Delta\omega$, тем точнее будут такие приближенные операции. Например, можно приближенно восстановить сигнал по его спектру, используя приближенное соотношение

$$x^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \mathrm{Re}\left(\int_{0}^{\Delta\omega} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \right). \qquad (2.16)$$

Основное назначение формулы (2.16), очевидно, это численные расчеты. Аналогичным образом можно приближенно рассчитать и энергию сигнала по его спектру.

Амплитудная модуляция

Широко используются в науке и технике сигналы с различными типами модуляции. Различают частотную, фазовую и амплитудную модуляции. Основные особенности спектрального состава модулированных сигналов мы рассмотрим на примере амплитудной модуляции.

Амплитудно-модулированным сигналом называют сигнал вида

$$x(t) = a(t) \cdot \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right), \quad A(t) \geq 0. \tag{2.17}$$

Здесь ω_0 и φ_0 – частота и начальная фаза опорного гармонического колебания $\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$. Модулирующий сигнал $a(t)$ считается неотрицательным. Случай знакопеременной модуляции тоже допустим, хотя и приводит к некоторым трудностям на практике. Мы будем рассматривать случай, когда модулирующий сигнал $a(t)$ изменяется намного медленней, чем опорное колебание, т.е. практическая ширина спектра $\Delta\omega$ сигнала $a(t)$ значительно меньше, чем ω_0. Этот случай представляет наибольший интерес с практической точки зрения, так как для таких сигналов легко осуществляется процесс демодуляции, который будет рассмотрен в Лабораторной работе 3.

Для простоты здесь и далее будем полагать $\varphi_0 = 0$. Пусть $A(j\omega) = F\left[a(t)\right]$ – спектр модулирующего сигнала. Тогда спектр сигнала (2.17) $X(j\omega) = F\left[x(t)\right]$ имеет вид

$$X(j\omega) = \frac{A\left(j\left(\omega + \omega_0\right)\right) + A\left(j\left(\omega - \omega_0\right)\right)}{2}. \tag{2.18}$$

Если $\Delta\omega < \omega_0$, то имеем

$$X(j\omega) \approx A\left(j\left(\omega - \omega_0\right)\right), \quad \omega > 0. \tag{2.19}$$

Для отрицательных частот формулу (2.19) можно доопределить по свойству (2.15). Таким образом, спектр амплитудно-модулированного сигнала при достаточно медленной модуляции представляет собой спектр модулирующего сигнала, сдвинутый на ω_0 в сторону положительных частот.

Программа работы

1) Задайте сигнал в виде одиночного импульса из Приложения 2 в соответствии с вашим вариантом (такой же, как в Лабораторной работе 1). Постройте его амплитудный и фазовый спектры. Сравните эти спектра со спектром периодического сигнала в Лабораторной работе 1.
2) Определите практическую ширину спектра заданного сигнала по уровню 5% от максимальной амплитуды спектра. Используя обратное преобразование Фурье, восстановите сигнал из его спектра по заданной ширине спектра. Изменяя ширину спектра в большую или меньшую сторону, определите практическую ширину спектра, исходя из визуального сопоставления графиков исходного и восстановленного сигналов, и найдите соответствующую ему амплитуду крайних гармоник. Сравните энергию оригинального и восстановленного сигнала (например, используя свойство (2.12)).
3) Задайте гармонический сигнал с амплитудной модуляцией, определяемой сигналом из п. 1. Период опорного колебания задайте в 5–10 раз меньше, чем длительность модулирующего сигнала, так чтобы практическая ширина спектра модулирующего сигнала была существенно меньше частоты опорного колебания. Постройте амплитудный и фазовый спектры амплитудно-модулированного сигнала.

Контрольные вопросы

1) Чем отличается спектр периодического и непериодического импульсного сигнала?
2) Как связаны спектры периодически повторяющегося и одиночного импульсов?
3) Дайте определение преобразования Фурье.
4) Что такое дельта-функция Дирака? Моделью каких сигналов она является и какой у нее спектр?
5) Как построить амплитудный и фазовый спектры сигнала?
6) Что такое амплитудная, частота и фазовая модуляция?
7) Что представляет собой спектр амплитудно-модулированного сигнала?
8) Что такое практическая ширина спектра сигнала?

9) Как изменится спектр сигнала, если растянуть его по времени в 2 раза?
10) Как изменится спектр сигнала, если сдвинуть его по времени, не меняя формы?