1. Спектральный анализ периодических сигналов

Цель работы: Познакомиться с особенностями спектрального разложения периодических сигналов.

Построение гармонического спектра периодических сигналов основано на разложении сигналов в тригонометрический ряд Фурье:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)\right), \tag{1.1}$$

где $\omega_k = k\omega$ – циклическая частота k-ой гармоники сигнала, имеющего циклическую частоту ω. Коэффициенты ряда (1.1) определяются формулами

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(\omega_k t)\,dt, \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(\omega_k t)\,dt. \tag{1.2}$$

Здесь $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – период сигнала. Известно, что достаточным условием сходимости ряда (1.1) «почти везде» являются условия Дирихле для сигнала $x(t)$.

Ряд (1.1) можно представить и в другой форме:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \tag{1.3}$$

где $A_0 = \frac{a_0}{2}$, $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, k \in \mathbb{N}$, и $\varphi_k = \operatorname{Arg}(a_k - jb_k)$ (здесь и далее j – мнимая единица). Числа $A_k, k = 0,1,...,$ называются амплитудами k-ой гармоники, а φ_k – их фазами.

В комплексной форме ряд (1.1), (1.3) можно представить в виде

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k e^{j\omega_k t}, \tag{1.4}$$

где $\omega_{-k} = -\omega_k$. Зная связь между тригонометрической и показательной формами представления комплексного числа, несложно убедиться, что

$\left|C_0\right| = A_0$, $2\left|C_k\right| = A_k, k \in \mathbb{N}$, и $\arg C_k = \varphi_k$. Формулы (1.2) для ряда (1.4) можно записать в компактной форме

$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j\omega_k t}dt. \quad (1.5)$$

Отметим, что формулы (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) являются частным случаем разложения сигнала по ортогональному набору функций:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k f_k(t), \quad C_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \rho(t)x(t)f_k^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \rho(t)\left|f_k^2(t)\right|dt}, \quad (1.6)$$

где (*) обозначает комплексное сопряжение, $\rho(t)$ – весовая функция, которая равна 1 для тригонометрического ряда Фурье, а функции $f_k(t)$ образуют ортогональный набор функций на интервале $t \in \left[t_1;t_2\right]$, т.е.

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho(t)f_k(t)f_m^*(t)dt = \delta_{km}\int_{t_1}^{t_2} \rho(t)\left|f_k(t)\right|^2 dt. \quad (1.7)$$

где $\delta_{km} = \begin{cases} 1, k = m \\ 0, k \neq m \end{cases}$ – символ Кронекера. Отметим, что хотя в формуле (1.4) суммирование шло по всем целым числам, включая отрицательные, она остается эквивалентной формуле (1.6), так как для абсолютно сходящегося ряда мы можем менять местами слагаемые, а между множеством целых и натуральных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие.

Из курса математического анализа известно, что для частичной суммы ряда (1.6), заданной формулой

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{N} C_k f_k(t) \quad (1.8)$$

коэффициенты C_k, заданные формулами (1.6), минимизируют среднеквадратическую ошибку

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \left|x(t) - x_N(t)\right|^2 dt} . \quad (1.9)$$

Таким образом, частичная сумма ряда Фурье с коэффициентами (1.2) также минимизирует среднеквадратическую ошибку аппроксимации. Из этого в частности следует, что среднеквадратическая ошибка должна, как минимум, не расти с ростом числа N учитываемых гармоник в разложении. Однако мгновенная ошибка

$$\varepsilon_N(t) = x(t) - x_N(t), \quad x_N(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \tag{1.10}$$

ведет себя сложнее. Даже для периодического сигнала, удовлетворяющего условиям Дирихле, мгновенная ошибка (1.10) может иметь локальные экстремумы, в которых она не стремиться к нулю при $N \to \infty$. Известно, что если такие сигналы терпят разрыв первого рода, то в точке разрыва сигнал стремится к полусумме значений слева и справа от разрыва. При этом для частичной суммы ряда Фурье мгновенный скачок очевидно становится гладким. Но непосредственно точка разрыва – не единственная точка, где присутствует локальный экстремум ошибки, не стремящийся по амплитуде к нулю при $N \to \infty$. Слева и справа от точки разрыва также всегда наблюдаются локальный максимум и минимум ошибки. Если сигнал $x(t)$ терпит разрывы первого рода со скачком на величину Δx, то амплитуда ошибки $\varepsilon_N(t_{\max/\min})$ в этих экстремумах стремится по модулю к величине

$$\lim_{N\to\infty} \left|\varepsilon_N(t_{\max/\min})\right| = \left|\Delta x\right| \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{1}{2} \right) \approx 9\% \text{ от } \left|\Delta x\right|. \tag{1.11}$$

Это явление называется эффектом Гиббса. При этом амплитуда ошибки в этих точках слабо зависит от N, что позволяет качественно наблюдать эффект Гиббса даже при небольшом количестве гармоник. Более того, ошибка, возникающая как слева, так и справа от точки разрыва, имеет при этом разный знак. Т.е. при переходе через точку разрыва исходного сигнала гладкий скачок аппроксимирующей его суммы превышает Δx примерно на 18%. Учет данного эффекта важен в теории обработки сигналов, так как по сути своей он представляет собой неустранимую ошибку аппроксимации разрывных функций.

Программа работы

1) Задайте периодический разрывный сигнал, как в Приложении 1, и постройте его амплитудный и фазовый спектры.

2) Постройте частичную сумму ряда Фурье для сигнала в пункте 1, состоящую из 5, 10 и 20 первых гармоник. Сравните графики сигналов, восстановленных по данным количествам гармоник. Для этих трех сумм постройте графики мгновенной ошибки, а также найдите среднеквадратическую ошибку. Убедитесь в наличии эффекта Гиббса.

3) Повторите пункты 1 и 2 для периодически повторяющихся импульсов амплитудой A и длительностью T, заданных Приложением 2 в соответствии с вашим вариантом. Амплитуда A и длительность T сигнала задается преподавателем. Параметр τ подберите самостоятельно, чтобы график сигнала был похож на приведенный в Приложении 2. Период сигнала задайте в 1,5–2 раза больше, чем длительность одного импульса. В промежутках между импульсами сигнал положите равным нулю.

Контрольные вопросы

1) Что такое эффект Гиббса?
2) Какие сигналы можно раскладывать в ряд Фурье? Какие бывают достаточные условия для сходимости ряда Фурье?
3) Как построить спектр полигармонического сигнала?
4) Как изменится спектр периодического сигнала, если сдвинуть его по времени на некоторую величину T_c, не меняя его форму, амплитуду и частоту?
5) Что называется гармоникой периодического сигнала?
6) Поясните смысл принципа суперпозиции для гармонического спектра периодических сигналов.
7) Как ведет себя мгновенная и среднеквадратическая ошибка частичной суммы ряда Фурье при увеличении количества слагаемых в ней?
8) Какие есть отличительные особенности у амплитудного или фазового спектра периодических сигналов, которые описываются четной или нечетной функцией?
9) Найдите амплитуды и фазы гармоник сигнала по заданным коэффициентам его разложения в ряд Фурье по косинусам и синусам.
10) Что такое гармонический спектр сигнала?