

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

О.С. Вадутов

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2011

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

В12

Вадутов О.С.

В12

Математические основы обработки сигналов: учебное пособие / О.С. Вадутов; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 212 с.

В пособии изложены методы спектрального анализа сигналов на основе гармонических функций, функций Лагерра и Уолша. Рассмотрены характеристики и методы расчета классических фильтров Баттерворта и Чебышева. Даны основы методов описания и преобразования дискретных сигналов. Рассмотрены принципы построения рекурсивных и нерекурсивных цифровых фильтров, методы цифрового спектрального анализа.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 210100 «Электроника и нанoeлектроника».

УДК 621.372:51(075.8)

ББК 32.811.3:22.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор
заведующий кафедрой ТОЭ ТУСУРа

В.М. Дмитриев

Доктор технических наук, профессор
кафедры медицинской и биологической кибернетики СибГМУ

В.А. Фокин

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2011

© Вадутов О.С., 2011

© Обложка. Издательство Томского
политехнического университета, 2011

*Математику уже за то любить стоит,
что она ум в порядок приводит.*

М.В. Ломоносов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Обработка сигналов, и в первую очередь цифровая, применяется в таких областях, как медицина, акустика, звуковая локация, радиолокация, сейсмология, связь, и многих других. Обработка сигнала производится с целью определения его характерных параметров, отделения помех типа шума от сигнала, разделения многокомпонентных сигналов, устранения искажений, вызванных несовершенством канала передачи или погрешностями измерения и т.п. Для настоящего времени характерно неуклонное расширение областей применения цифровой обработки сигналов. Переход от аналоговых методов обработки к цифровым, с одной стороны, позволяет реализовать некоторые процедуры обработки недоступные аналоговым методам, а с другой, накладывает ряд ограничений на обрабатываемые сигналы.

Особенность современной обработки сигналов состоит в широком использовании различных математических идей и методов. Поэтому целью освоения дисциплины «Математические основы обработки сигналов» является приобретение знаний, умений, навыков и компетенций по основам теории сигналов и математических методов, лежащим в основе алгоритмов их обработки. Особое внимание уделяется методам спектрального анализа и методам фильтрации, которые занимают важное место в профессиональной подготовке специалистов по преобразовательной технике и информационным технологиям.

Учебное пособие можно разделить на две части. В первую часть входят главы 1–6, которые посвящены аналоговым сигналам. В главе 1 даны основные понятия: информации, сообщения, сигнала. Определены энергетические характеристики сигналов. Рассмотрено описание сигналов с помощью простейших и ортогональных функций. Главы 2 и 3 посвящены гармоническому анализу периодических и непериодических сигналов. Рассмотрены понятия амплитудного и фазового спектров, условия сходимости, распределение мощности и энергии в спектре сигналов. В главе 4 показано применение функций Лагерра и Уолша для ана-

лиза сигналов. Отмечены основные свойства этих функций и области применения. Глава 5 посвящена линейным стационарным системам. Рассмотрены модели типа «вход-выход». Описаны спектральный и операторный методы определения реакции системы на детерминированные сигналы. В главе 6 рассмотрены аналоговые фильтры. Основное внимание уделено свойствам и методам расчета фильтров Баттерворта и Чебышева первого рода. Приведены примеры расчета фильтров.

Во второй части, состоящей из глав 7–12, рассмотрены методы цифровой обработки. Глава 7 посвящена методам описания дискретных последовательностей во временной и частотной областях. Описаны прямое и обратное Z -преобразования. В главе 8 изложены основы теории линейных дискретных систем, в том числе методы описания, структурные схемы, условия устойчивости и методы расчета реакции на входное воздействие. Приведены алгоритмы дискретного интегрирования и дифференцирования. В главе 9 рассмотрены принципы построения и классификация цифровых фильтров, отмечены их достоинства и недостатки. Описаны этапы разработки цифровых фильтров. Глава 10 посвящена описанию свойств, методам расчета и реализации рекурсивных цифровых фильтров. В главе 11 описаны особенности свойств и реализации нерекурсивных цифровых фильтров, приведены методы их расчета (метод взвешивания и метод разложения АЧХ в ряд Фурье). В главе 12 приведены основные понятия спектрального анализа. Изложены алгоритмы быстрого преобразования Фурье, на которых базируются методы спектрального анализа. Описаны коррелограммный и периодограммный методы оценивания спектральной плотности мощности.

При подготовке учебного пособия учтен опыт чтения лекций и проведения практических и лабораторных занятий на кафедре промышленной электроники для студентов, обучающихся по направлению 210100 «Электроника и микроэлектроника». Данное учебное пособие предполагается использовать совместно с практикумом «Математические основы обработки сигналов. Практикум» (2007 г.).

Глава 1

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СИГНАЛОВ

Информация. – Сообщение. – Сигнал. – Математическая модель аналогового сигнала. – Аналоговые и дискретные сигналы. – Детерминированные и случайные сигналы. – Периодические сигналы. – Импульсные сигналы. – Энергетические характеристики сигналов – Представление детерминированного сигнала с помощью простейших функций – Представление сигналов с помощью ортогональных функций.

1.1. Основные понятия: информация, сообщение, сигнал

С большим основанием наше время можно назвать «веком информации». Все возрастающий поток информации обрушивается на человека. По существу вся деятельность человека неразрывно связана с получением и накоплением новой информации об окружающей среде. В эту среду входят естественные объекты живой и неживой природы и объекты, созданные человеком. Информация необходима человеку для удовлетворения своих все возрастающих потребностей.

Информация отражает одну из сторон реального мира и вместе с энергетическими и вещественными ресурсами образует триаду, необходимую для общественного развития. Если энергетические и вещественные потоки, образно говоря, питают некоторую систему, то потоки информации организуют ее функционирование, управляют ею.

Понятие информации, однако, в отличие от физических категорий массы и энергии, не приобрело однозначного толкования. Имеется большое количество определений понятия «информация», от наиболее простого, имеющего в своей основе конкретную практическую деятельность человека, до самого сложного, характеризующего информацию как философскую категорию.

Будем понимать под *информацией* (от лат. *informatio* – разъяснение, осведомление) совокупность каких-либо сведений, содержащих знания об изучаемом процессе или явлении. Эти сведения представляют определенный интерес для изучающего данный процесс или явление и поэтому становятся объектом хранения, передачи и преобразования. Будем полагать также, что имеется некоторый *источник информации*, обладающий способностью изменять во времени или пространстве свое состояние.

Информацию передают в виде сообщений. *Сообщение* – это сведение о состоянии источника информации, выраженное в определенной форме и предназначенное для передачи от источника информации к адресату. Отправителями и получателями сообщений могут быть как люди, так и технические устройства, которые регистрируют, хранят, преобразуют, передают и принимают информацию.

Для передачи сообщений используются сигналы. *Сигналом* (от лат. *signum* – знак) называется физический процесс, однозначно отображающий передаваемое сообщение о состоянии какого-либо объекта наблюдения и пригодный для передачи и обработки. Другими словами, под сигналом понимают материальный носитель сообщения. Физическая природа сигнала может быть различная: звуковая, механическая, оптическая, электрическая или еще какая-либо.

Сообщения и соответствующие им сигналы могут быть дискретными или непрерывными. *Дискретное сообщение* представляет конечную последовательность отдельных символов. Дискретные сообщения характерны для телеграфии, передачи данных и телеметрии. Последовательность элементов дискретного сообщения преобразуется, например, в последовательность двоичных чисел. Для их передачи по каналу связи необходим сигнал с двумя признаками: 0 и 1. Роль таких сигналов могут выполнять посылки постоянного тока разной полярности, колебания с различными частотами и др.

Непрерывные сообщения представляют собой непрерывные процессы. Примерами непрерывных сообщений служат речь, музыка, телевизионное изображение и др. С помощью специальных устройств непрерывные сообщения преобразуются в электрические непрерывные сигналы. Например, если сообщением является речь, то микрофон преобразует звуковые колебания воздушной среды в электрические колебания, которые и передаются по назначению.

Однако не всякий физический процесс следует считать сигналом. Сигналом является только тот физический процесс, который содержит информацию, то есть некоторую совокупность сведений о состоянии или положении некоторого объекта. В качестве сигнала, таким образом, можно рассматривать любой физический процесс при условии, что некоторые его параметры изменяются в соответствии с переносимым сообщением.

Сигналы можно разделить на естественные и специально создаваемые. К естественным сигналам относят, например, световые сигналы от физических объектов окружающего мира, космические сигналы, электрические поля биологических объектов и др. Примерами специально

создаваемых могут служить сигналы, посылаемые радиолокационной станцией, сигналы лазеров для зондирования атмосферы и др.

По количеству физических переменных, характеризующих состояние источника информации, сигналы делят на *одномерные, двумерные и трехмерные*. Примерами одномерных сигналов являются ток в цепи микрофона, напряжение на выходе датчика температуры и др. Двумерные сигналы используются в случае, когда состояние источника определяется двумя переменными (координатами) одновременно. Двумерные сигналы, например, используются при обработке изображений для того, чтобы задать координаты точки на плоскости. При помощи трехмерных сигналов можно определить положение пространственных объектов или описать цветные изображения.

Передача информации заключается в переносе ее на расстояние при помощи сигналов различной физической природы.

1.2. Математическая модель аналогового сигнала

Для того чтобы сделать сигнал объектом теоретического изучения или практических расчетов, необходимо указать способ его математического описания или, другими словами, создать математическую модель сигнала. Последовательно рассматривая основные значения термина «модель», автор монографии «Моделирование и философия» В.А. Штофф предлагает следующее определение: *«Под моделью понимается такая мысленно представляемая или материально реализованная система, которая, отображая и воспроизводя объект, способна замещать его так, что ее изучение дает нам новую информацию об этом объекте»*. Математической моделью называют совокупность математических соотношений, описывающих изучаемый процесс или явление. Математические модели позволяют анализировать свойства сигналов и синтезировать сигналы с требуемыми свойствами.

В простейшем случае математическая модель сигнала устанавливает соответствие между любым моментом времени $t \in T$ и величиной сигнала $x \in X$, где T – ограниченный или бесконечный интервал времени, называемый областью определения сигнала, X – множество возможных значений сигнала. Это соответствие может быть задано в форме скалярной функции $x(t)$. Например, функция

$$x(t) = \begin{cases} 10 \cdot \sin 5t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

описывает сигнал, который изменяется на интервале $[0, \infty)$ по синусоидальному закону с амплитудой 10 единиц и частотой 5 рад/с. В более

сложных случаях модель содержит математические соотношения, которые характеризуют некоторые обобщенные свойства сигнала.

Создание математической модели – это первый и очень важный этап изучения физического процесса или явления. Во-первых, математическая модель позволяет абстрагироваться от конкретной физической природы носителя сигнала. При этом она приобретает определенную универсальность, то есть способность описывать различные по своей физической природе процессы или по техническому назначению объекты. Одна и та же математическая модель может описывать изменение тока, напряжения, давления, температуры и т.д.

Во-вторых, математическая модель создается так, чтобы она описывала именно те свойства сигнала, которые наиболее важны для конкретного исследования. Необходимо учитывать, что математическая модель может хорошо работать в одних условиях и быть совершенно неприемлемой в других. Любая математическая модель имеет свою область применения и эта область, как правило, может быть определена только в результате многократного применения модели. Поэтому при составлении математической модели большое значение приобретают экспериментальные исследования и практический опыт.

Большое значение при выборе математической модели сигнала имеет ее сложность. Математическая модель, с одной стороны, должна быть достаточно сложна, чтобы отображать существенные свойства изучаемого процесса или явления, а, с другой стороны, достаточно проста, чтобы использовать более простые математические методы анализа.

Очевидно, чем полнее математическая модель отражает свойства сигнала, тем шире область ее применения, тем больший круг задач позволяет она решать. В то же самое время, чем полнее математическая модель, тем она сложнее, тем больше трудностей следует ожидать при исследовании из-за необходимости привлекать более сложные математические методы. Поэтому математическая модель сигнала не должна содержать больше подробностей, чем это необходимо для решения данной задачи.

1.3. Классификация сигналов

Детерминированные и случайные сигналы

Детерминированными или регулярными называются такие сигналы, значения которых в любой точке интервала их определения можно рассчитать заранее, имея математическую модель. Математической моделью детерминированного сигнала является детерминированная функ-

ция $x(t)$. Такая модель позволяет для любого заданного момента времени t_i однозначно определить значение сигнала $x(t_i)$.

На рис. 1.1 в качестве примера приведены графики некоторых распространенных детерминированных сигналов.

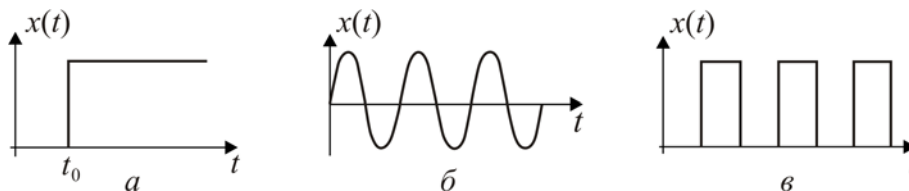


Рис. 1.1. Графики детерминированных сигналов:

a – ступенчатого сигнала $x(t) = 1(t - t_0)$;

$б$ – синусоидального сигнала $x(t) = A \cdot \sin \omega t$; $в$ – импульсного сигнала

Строго говоря, детерминированные сигналы в чистом виде в природе существовать не могут. Такие сигналы могли бы возникнуть только в изолированных системах. Любая же система находится в некоторой среде, и эта среда влияет на процессы, происходящие в системе. Поэтому детерминированные сигналы являются определенной идеализацией реальных сигналов и не содержат информации. И периодическая последовательность импульсов, и синусоидальный сигнал, а тем более единственный ступенчатый сигнал очень далеки по своим свойствам от реально действующих на системы сигналов. Однако при помощи детерминированных сигналов можно изучить многие существенные особенности установившихся и переходных процессов в линейных и нелинейных системах. Поэтому они широко используются при исследовании систем различного назначения.

Случайными или стохастическими называются такие сигналы (процессы), изменение которых во времени предсказать невозможно. В окружающем нас мире они встречаются повсеместно. Сигналы, полученные на нескольких полностью *идентичных объектах наблюдения*, оказываются различными. Под идентичными объектами наблюдения понимают объекты, в которых воспроизводятся одни и те же условия протекания процесса и одни и те же условия наблюдения и регистрации. Случайность процесса проявляется в том, что вид функции $x(t)$ случайным образом меняется от одного опыта к другому. Сигнал, наблюдаемый и регистрируемый на отдельно взятом объекте наблюдения, называется *реализацией случайной функции*. Множество реализаций образуют ансамбль реализаций, который полностью определяет случайный сигнал (рис. 1.2).

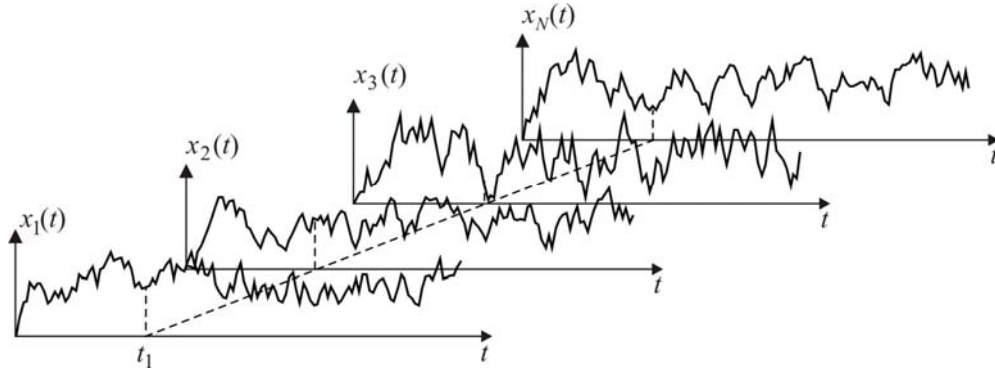


Рис. 1.2. Ансамбль реализаций случайного сигнала

Для формального обозначения зависимости случайного сигнала от аргументов применяются случайные функции. *Случайной функцией* $X(t)$ называются такая функция, значение которой при любом заданном t является случайной величиной. Поэтому можно говорить лишь о вероятности того, что в данный момент времени $t = t_i$ значение $X(t_i)$ случайной функции заключено в интервале между значениями x и $x + dx$. В этом случае при неизменных условиях эксперимента случайная функция $X(t)$ может принимать различные конкретные формы $x_j(t)$, которые и представляют собой реализации случайного процесса (рис. 1.2). Таким образом, случайный процесс можно рассматривать как совокупность случайных величин $\{X(t)\}$, зависящих от параметра t , или как совокупность ее возможных реализаций.

Очевидно, что задать случайный процесс аналитически, то есть с помощью формулы, невозможно. Следовательно, и будущие значения процесса не могут быть точно предсказаны на основе зарегистрированных ранее значений. Практически все существующие в природе процессы наблюдаются как случайные, поскольку физический механизм, лежащий в основе их возникновения, либо полностью не раскрыт, либо очень сложен.

В конце XX века была обнаружена очень интересная связь между детерминированными и случайными процессами. Оказывается, что при определенных условиях детерминированный процесс начинает вести себя как случайный. Такие процессы изучаются в новой науке – *синергетике*.

Периодические и непериодические сигналы

На практике часто приходится иметь дело с явлениями, повторяющимися в прежнем виде через определенный промежуток времени T . Сигналы, характеризующие периодические явления, возвращаются к

своим прежним значениям через указанный интервал времени. Такие явления и сигналы называются периодическими, а промежуток времени T – периодом. Они описываются периодическими функциями.

Функция $x(t)$ называется периодической, если она определена на всей действительной оси и для всякого $t \in (-\infty, \infty)$ справедливо условие

$$x(t) = x(t \pm rT), \quad r = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Основная особенность периодического сигнала состоит в том, что его значения периодически повторяются и что периодичность эта существует вечно. Очевидно, что периодических явлений и сигналов в строгом смысле соотношения (1.1) в действительности нет и быть не может из-за физического ограничения времени наблюдения сигналов. Однако периодическая функция – это удобная математическая абстракция, облегчающая теоретический анализ сигналов.

Отметим некоторые свойства этой функции:

1. Сумма, разность, произведение и частное периодических функций периода T есть периодическая функция периода T .

2. Если функция $x(t)$ имеет период T , то функция $x(at)$ имеет период T/a . Здесь a – действительное число.

3. Если для периодической функции $x(t)$ существует интеграл (собственный или несобственный), то при любом действительном числе a

$$\int_a^{a+T} x(t) dt = \int_0^T x(t) dt.$$

Импульсные сигналы

Импульсными называют сигналы, которые существуют на ограниченном отрезке времени или на совокупности ограниченных чередующихся отрезков времени, называемых областями существования.

Импульсный сигнал, имеющий единственную область существования, называется импульсом (например, на рис. 1.3, *a* показан прямоугольный импульс). Импульсный сигнал может представлять собой последовательность импульсов, продолжающихся на конечном или бесконечном интервале времени (рис. 1.3, *б*).

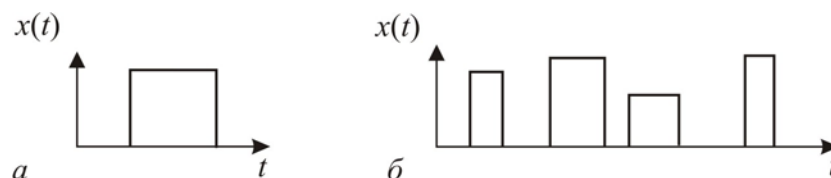


Рис. 1.3. Графики импульсных сигналов:
a – одиночного импульса; *б* – последовательности импульсов

1.4. Энергетические характеристики сигналов

В теории сигналов широко используются энергетические характеристики. Пусть сигнал представляет изменение напряжения $U(t)$ или тока $i(t)$. Тогда на резисторе с сопротивлением R выделяется мгновенная (текущая) мощность

$$p(t) = \frac{U^2(t)}{R} = R \cdot i^2(t).$$

Если мгновенная мощность сигнала используется для сравнения различных сигналов, то можно принять $R = 1$ Ом («нормировать» мощность). Тогда выражения для мгновенной мощности имеют одинаковый вид. Поэтому в теории сигналов принято определять мгновенную мощность следующим образом:

$$p(t) = x^2(t).$$

Энергия и средняя мощность сигнала, заданного на интервале $[t_1, t_2]$, соответственно определяются выражениями:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt ;$$

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt .$$

Если сигнал определен на интервале $-\infty < t < \infty$, то средняя мощность

$$P_{\text{cp}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt .$$

1.5. Представление детерминированного сигнала с помощью простейших функций

Реальный сигнал приближенно заменяется суммой сигналов, описываемых некоторыми простейшими функциями. Может быть предложено много вариантов такого представления сигнала. Рассмотрим те из них, в которых используемые простейшие сигналы возникают в последовательные, равностоящие друг от друга, моменты времени.

Вариант 1. Пусть в качестве простейших сигналов используются ступенчатые сигналы, возникающие через равные интервалы времени T (рис. 1.4, *a*). В дискретные моменты времени $0, T, 2T, \dots$ сигнал принимает соответственно значения $x(0), x(T), x(2T), \dots$. Высота каждой ступеньки равна приращению сигнала на интервале времени T .

Текущее значение сигнала при любом t приближенно равно сумме ступенчатых функций:

$$x(t) = x(0) \cdot 1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} [x(iT) - x((i-1)T)] \cdot 1(t - iT).$$

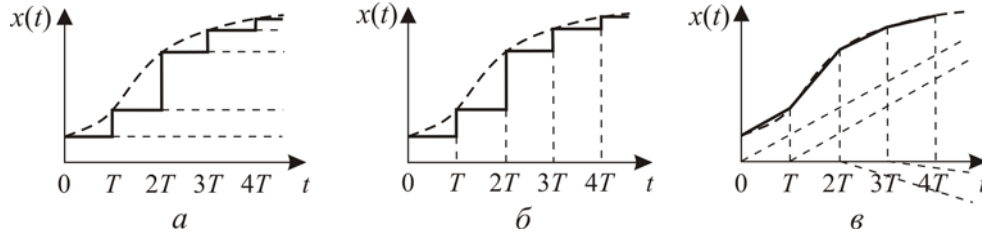


Рис. 1.4. Представление сигналов с помощью простейших функций:
 a – ступенчатых сигналов; b – прямоугольных импульсов;
 $в$ – линейно изменяющихся сигналов

Вариант 2. В качестве простейших сигналов могут быть использованы прямоугольные импульсы. Каждый импульс имеет длительность T и амплитуду, равную значению сигнала в соответствующий дискретный момент времени (рис. 1.4, b). Эти импульсы непосредственно прилегают друг к другу и образуют последовательность, вписанную в кривую $x(t)$.

Текущее значение сигнала при $t \in (iT, (i+1)T)$ приближенно равно

$$x(t) = x(iT) \cdot [1(t - iT) - 1(t - (i+1)T)].$$

Вариант 3. Сигнал $x(t)$ можно аппроксимировать кусочно-линейной функцией (рис. 1.4, $в$), которая будет представлена в виде суммы ступенчатой функции и смещенных линейных функций. Текущее значение сигнала при любом t приближенно равно

$$x(t) = x(0) \cdot 1(t) + \sum_{i=0}^{\infty} A_i \cdot (t - iT) \cdot 1(t - iT).$$

где

$$A_i = \frac{x((i+1)T) - x(iT)}{T}.$$

1.6. Представление детерминированного сигнала с помощью ортогональных функций

В общем случае сигнал требует для своего описания достаточно сложных функций. Поэтому возникает необходимость представить сложную функцию $x(t)$, используемую в качестве математической модели сигнала, комбинацией более простых функций. Простейшей

с практической точки зрения формой представления сигнала является линейная комбинация некоторых элементарных функций.

Пусть функция $x(t)$ абсолютно интегрируема на рассматриваемом интервале времени $[0, T]$. На практике это требование, как правило, выполняется. Такая функция может быть разложена по некоторой системе базисных функций $\{\varphi_i(t)\}$, абсолютно интегрируемых на том же интервале, то есть представлена в виде

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i(t). \quad (1.2)$$

Сигнал, описываемый функцией (1.2), рассматривается как совокупность элементарных сигналов $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_i(t), \dots$, каждый из которых взят со своим весовым коэффициентом $c_0, c_1, \dots, c_i, \dots$. Система функций $\{\varphi_i(t)\}$ носит название *базисной системы*, а представление сигнала (1.2) называют *разложением* сигнала по системе базисных функций. Если выбрана базисная система функций, то сигнал полностью определяется совокупностью коэффициентов $\{c_i\}$, которую называют *спектральной характеристикой*, или просто *спектром*, сигнала.

При изучении линейных систем такое представление сигнала весьма удобно. Оно позволяет решение многих задач расчленить на части, применяя принцип наложения. Например, чтобы определить реакцию линейной системы на входное воздействие $x(t)$, представленное в виде (1.2), вычисляют реакцию системы на каждое элементарное воздействие $\varphi_i(t)$, $i=0,1,2, \dots$, а затем результаты, умноженные на соответствующие коэффициенты c_i , складывают.

При решении практических задач приходится учитывать в (1.2) конечное число N членов. При этом заданная функция $x(t)$ будет представлена приближенной функцией

$$x^*(t) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \varphi_i(t). \quad (1.3)$$

Базисные функции $\varphi_i(t)$, $i=0,1, \dots, N-1$, выбираются исходя из априорной информации об исследуемом сигнале так, чтобы они имели более простое аналитическое выражение, обеспечивали быструю сходимость ряда (1.3) и позволяли легко вычислять значения коэффициентов c_i , $i=0,1,2, \dots, N-1$.

Коэффициенты c_i , $i=0,1,2, \dots, N-1$ рассчитываются из условия, чтобы некоторый заранее выбранный критерий приближения принимал

минимальное значение. Приведем критерии приближения, получившие наибольшее распространение.

1. В качестве меры расхождения исходной $x(t)$ и аппроксимирующей $x^*(t)$ функций принимается минимум среднеквадратической погрешности

$$J = \int_0^T [x(t) - x^*(t)]^2 dt . \quad (1.4)$$

Такая аппроксимация называется *приближением в среднеквадратическом*.

2. Можно потребовать, чтобы максимальное значение погрешности аппроксимации

$$\delta x(t) = x(t) - x^*(t)$$

было минимальным на заданном интервале определения функции $x(t)$. Такое приближение называется *равномерным приближением*.

3. Если в качестве меры приближения выбрать среднюю погрешность

$$P(\mathbf{c}) = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t) - x^*(t)| dt ,$$

то говорят, что имеет место *приближение в среднем*.

Чаще всего в качестве критерия приближения используется квадратичный критерий вида (1.4). Запишем его в следующем виде

$$J(\mathbf{c}) = \int_0^T [x(t) - \sum_{i=0}^{N-1} c_i \varphi_i(t)]^2 dt$$

и рассмотрим, как он может быть использован для расчета численных значений коэффициентов $c_i, i = 0, 1, \dots, N - 1$.

Известно, что функция принимает экстремальное значение только в том случае, когда частные производные по ее аргументам обращаются в нуль. Отсюда имеем

$$\frac{\partial J(\mathbf{c})}{\partial c_i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (1.5)$$

Условия (1.5) приводят к системе линейных алгебраических, так называемых нормальных, уравнений вида

$$\int_0^T [x(t) - \sum_{j=0}^{N-1} c_j \varphi_j(t)] \varphi_i(t) dt = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 . \quad (1.6)$$

Введем следующие обозначения для коэффициентов этой системы уравнений:

$$a_{ij} = \int_0^T \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt; \quad b_i = \int_0^T \varphi_i(t) x(t) dt. \quad (1.7)$$

Тогда систему уравнений (1.6) можно записать в виде

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_{ij} c_j = b_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.8)$$

Для расчета численных значений коэффициентов $c_i, i = 0, 1, \dots, N-1$, можно использовать известные формулы Крамера:

$$c_i = \Delta_i / \Delta, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

где $\Delta = \det \|a_{ij}\|$ – определитель, составленный из коэффициентов системы уравнений (1.8), а определители $\Delta_i, i = 0, 1, \dots, N-1$, получают из определителя Δ заменой i -го столбца столбцом свободных членов уравнений (1.8).

Система уравнений (1.8) имеет единственное решение, если определитель $\Delta \neq 0$. Если не предъявлять к базисной системе функций $\{\varphi_i(t)\}$ никаких дополнительных требований, кроме абсолютной интегрируемости и линейной независимости, то использование модели сигнала в виде разложения (1.3) наталкивается на некоторые трудности. Во-первых, для решения системы уравнений (1.8) необходимо вычислить $N(N+1)/2$ интегралов вида (1.7). Во-вторых, каждый из коэффициентов c_i зависит от всех остальных, и добавление новых членов ряда требует пересчета всех коэффициентов.

Для упрощения решения системы уравнений (1.8) функции $\varphi_i(t), i = 0, 1, \dots, N-1$, целесообразно выбрать ортогональными на интервале $[0, T]$. Счетный набор ортогональных функций $\varphi_i(t), i = 0, 1, \dots, N-1$, на интервале $[0, T]$ удовлетворяет условиям

$$\int \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \begin{cases} d_i & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

где d_i – некоторая постоянная.

Если функции $\varphi_i(t), i = 0, 1, \dots, N-1$, ортогональны, то система уравнений (1.8) приобретает вид

$$d_i c_i = b_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Формулы для коэффициентов $c_i, i = 0, 1, \dots, N-1$, упрощаются:

$$c_i = \frac{b_i}{d_i} = \frac{1}{d_i} \int_0^T \varphi_i(t) x(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.9)$$

Если постоянные $d_i \equiv 1, i = 0, 1, \dots, N-1$, то система функций $\{\varphi_i(t)\}$ называется *ортонормированной*. Тогда выражение (1.9) для вычисления коэффициентов $c_i, i = 0, 1, \dots, N-1$ принимает наиболее простой вид

$$c_i = \int_0^T \varphi_i(t) x(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Коэффициенты c_i разложения сигнала по выбранной базисной системе однозначно определяют весь сигнал. Поэтому при решении многих задач вместо функции времени $x(t)$ можно использовать только коэффициенты c_i разложения.

Для того чтобы по выбранной базисной системе функций можно было разложить любой сигнал из заданного множества, необходимо, чтобы система была полной. Система ортогональных функций называется *полной*, если к ней нельзя добавить ни одной новой функции, которая была бы ортогональна ко всем другим функциям этой системы. Если система ортогональных функций является неполной, то по ней нельзя разложить любой сигнал (в частности сигнал, который совпадает с ортогональной функцией, отсутствующей в системе).

Методы представления сигналов в виде (1.3) составляют основу обобщенной спектральной теории сигналов. Обобщенная спектральная теория исследует общие закономерности спектрального анализа для различных систем базисных функций и рассматривает особенности выбора базисных систем при решении задач передачи и обработки сигналов.

Для разложения сигналов можно использовать многие разработанные к настоящему времени системы базисных функций, такие как тригонометрические функции, полиномы Эрмита, Лежандра, Чебышева, функции Бесселя, Лагерра, Уолша, Хаара и другие. При выборе системы базисных функций необходимо выполнить следующие требования:

- 1) область определения сигналов и базисной системы должна быть одна и та же;
- 2) базисная система должна быть линейно независимой;
- 3) базисная система должна быть полной, а образующие ее функции – ортогональными;
- 4) базисные функции должны иметь конечную энергию

$$E_i = \int_{t_1}^{t_2} |\varphi_i(t)|^2 dt < \infty.$$

Обычно для анализа сигналов рекомендуют выбирать систему базисных функций, обеспечивающую наиболее быструю сходимость ряда (1.3), то есть требующую наименьшего числа членов ряда для заданной точности представления сигнала. В ряде случаев решающим при выборе системы функций является простота физического генерирования базисных функций, образующих систему.

1.7. Дискретизация аналоговых сигналов. Дискретные и цифровые последовательности

Большинство сигналов имеют аналоговую природу. Они изменяются непрерывно во времени и могут принимать любые значения в некоторой области. Ввести такой сигнал в компьютер и обработать его невозможно, так как на любом интервале времени он имеет бесконечное множество значений. Поэтому в системах цифровой обработки сигнал представлен значениями сигнала, взятыми в отдельные дискретные моменты времени (рис. 1.5). Эти значения называются *отсчетами*.

Отсчеты могут быть взяты в произвольные моменты времени t_n , $n = 0, 1, \dots, N$ (рис. 1.5, а). Тогда сигнал будет представлен двумя последовательностями чисел: последовательностью t_0, t_1, \dots, t_N и последовательностью отсчетов $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_N)$. Меняя длительность интервала между отсчетами в зависимости от свойств аналогового сигнала, можно повысить точность их сохранения. Однако в виду сложности реализации данный способ не нашел широкого применения в системах обработки сигналов.

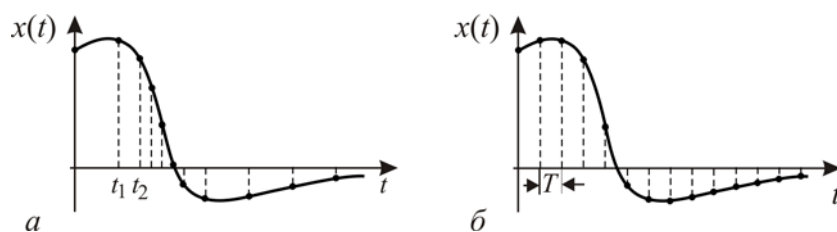


Рис. 1.5. Представление сигнала последовательностью отсчетов:
а – в произвольные дискретные моменты времени t_i ;
б – в дискретные моменты времени nT , $n = 0, 1, 2, \dots$, $T = \text{const}$.

На практике получил распространение другой способ представления сигнала последовательностью, в которой отсчеты располагаются через равные промежутки времени T (рис. 1.5, б).

• В этом случае сигнал определяется последовательностью его значений $x(0), x(T), x(2T), \dots$. Эту последовательность называют *дискретной последовательностью*. Обозначают дискретную последовательность $x(n)$.

- Аналитически дискретная последовательность $x(n)$ может быть описана функцией, которая называется *решетчатой*.

- Интервал T называют *периодом дискретизации*, или интервалом дискретизации. Величина, обратная периоду дискретизации, называется *частотой дискретизации*, или частотой взятия отсчетов f_d .

- Преобразование аналогового сигнала в последовательность отсчетов называется *дискретизацией (квантованием)* по времени.

Очевидно, что представление сигнала дискретной последовательностью отсчетов приводит к потере информации о поведении сигнала в промежутках между отсчетами. Чтобы эти потери были минимальны, период дискретизации T необходимо уменьшать. Однако уменьшение периода дискретности приводит к увеличению числа отсчетов и, как следствие, к увеличению объема вычислений. Поэтому при выборе периода дискретизации приходится искать компромиссное решение.

Для точного представления значения сигнала в дискретные моменты времени требуются числа бесконечной разрядности. В системах обработки сигналов разрядность чисел ограничена. Представление дискретной последовательности числами конечной разрядности называется *квантованием по уровню*. Вся область значений сигнала при этом разбивается на уровни, количество которых зависит от числа разрядов. Эти уровни называются *уровнями квантования*. Расстояние между ними называется *шагом квантования*. Квантование сигнала по уровню – принципиально нелинейная операция.

Дискретные последовательности, подвергнутые процедуре квантования по уровню, принято называть цифровыми дискретными последовательностями. Примером цифровой последовательности могут служить сведения о температуре больного, измеряемой в течение болезни через определенные интервалы времени.

Пример 1. Произведем дискретизацию с периодом $T = 0,5$ с сигнала, описываемого функцией

$$x(t) = \exp(-0,5t), \quad t \geq 0. \quad (1.10)$$

Для этого в (1.10) подставим $t = Tn = 0,2n$. Получим дискретную последовательность $x(n)$, описываемую решетчатой функцией

$$x(n) = \exp(-0,25n), \quad n \geq 0. \quad (1.11)$$

На рис. 1.6, *а* изображен график функции $x(t)$. Точками на этом графике выделены значения, соответствующие дискретным моментам времени $t = Tn = 0,2n$. Дискретная последовательность $x(n)$ является функцией дискретного времени n . Её график показан на рис. 1.6, *б*.

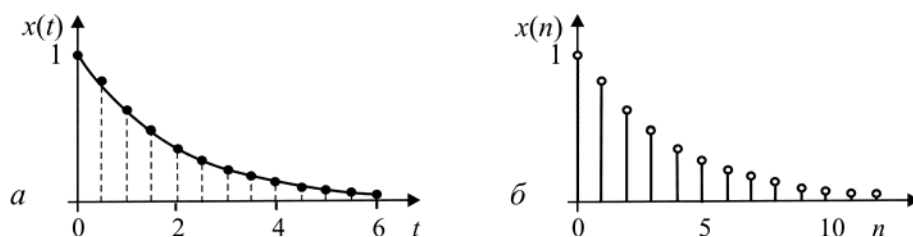


Рис. 1.6. Графики экспоненциального импульса:
 a – в области непрерывного времени t ; b – в области дискретного времени n

1.8. Обработка сигналов

Сигналы, в любой форме материального представления, содержат определенную полезную информацию. Главная цель обработки физических сигналов заключается в необходимости получения содержащейся в них информации. Эта информация обычно присутствует в амплитуде сигнала (абсолютной или относительной), в частоте или в спектральном составе, в фазе или в относительных временных зависимостях нескольких сигналов.

Приведем некоторые примеры сигналов и необходимости их обработки с целью извлечения содержащейся в них информации.

- Параметры перехваченного радиосигнала (частоты излучения, типа модуляции, начала и конца посылок) позволяет идентифицировать объект наблюдения.
- Анализ сейсмических сигналов помогает получить представление о конфигурации геологических объектов и предсказать землетрясения.
- Изучение отклика геодезического зонда позволяет обнаружить полезные ископаемые и определить характеристики залежей.
- Анализ электрокардиограммы способствует диагностированию болезней сердца, в том числе на ранних стадиях их возникновения.

Как правило, весь процесс обработки сигнала делится на первичную обработку и вторичную – интерпретацию полученных результатов. Например, при анализе электрокардиограмм первичная обработка заключается в усилении сигналов датчиков, фильтрации помех и аналого-цифровом преобразовании. Вторичная обработка может состоять в определении длительностей RR -интервалов и построении RR -интервалограммы, которая характеризует не только функциональное состояние сердца, но и общее состояние систем организма.

Одну из самых распространенных операций первичной обработки сигналов представляет фильтрация. Цель фильтрации состоит в подавлении помех, содержащихся в сигнале, или в выделении отдельных составляющих сигнала. Другой широко распространенной задачей обра-

ботки сигналов является оценка спектра, которая позволяет получить представление о внутренней структуре наблюдаемого явления.

До недавнего времени обработка сигналов, как правило, выполнялась при помощи аналоговых методов и устройств. Цифровая обработка сигналов заявила о себе в начале второй половины прошлого века и вызвала оживленные дискуссии, вплоть до полного отрицания со стороны некоторых ученых.

Основной предметной областью теории и практики во второй половине XX века стали цифровая фильтрация и спектральный анализ, причем оба направления рассматривались с общей позиции частотных представлений. В это время появились алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ), прибавившие оптимизма сторонникам методов цифровой обработки. За последние десятилетия благодаря интенсивному развитию микроэлектроники цифровая обработка сигналов вышла на передовые позиции и во многих прикладных областях вытеснила аналоговую.

Цифровая обработка сигналов – одна из самых динамичных и быстро развивающихся технологий в мире. Сегодня обработка аналоговых сигналов с использованием цифровых методов все шире используется для решения множества прикладных задач в связи, радиолокации, звуковой локации, акустике, измерительной технике, медицине, ядерной энергетике и других областях науки и техники, в которых прежде доминировали аналоговые системы.

Процесс цифровой обработки сигналов состоит из трех этапов:

- преобразование аналогового сигнала $x(t)$ в дискретную последовательность $x(n)$, каждый отсчет которой представлен в виде двоичного числа;
- преобразование дискретной последовательности $x(n)$ по заданному алгоритму в дискретную последовательность $y(n)$;
- преобразование дискретной последовательности $y(n)$ в аналоговый сигнал $y(t)$.

На практике цифровая обработка сигналов реализуется в виде программы на компьютере, либо в виде специализированного устройства, содержащего микропроцессор и электронные схемы ввода-вывода.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Поясните характер связи между сигналом и сообщением.
2. Приведите примеры естественных природных процессов, используемых человеком в качестве сигналов.
3. На конкретном примере поясните понятия информации, сообщения и сигнала.
4. Поясните утверждение о том, что детерминированный сигнал не несет информации.
5. Приведите пример периодического природного процесса.
6. Какова основная причина использования ортогональных функций для разложения сигналов?
7. Запишите условия ортогональности и ортонормированности функций.
8. Рассчитайте среднюю мощность периодических сигналов, описываемых функциями:

а)
$$x(t) = \begin{cases} 5 & \text{при } 0 \leq t < T/2, \\ -3 & \text{при } T/2 \leq t < T; \end{cases}$$
 б) $x(t) = 2 \cdot |t|, \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}.$

9. Рассчитайте энергию сигналов, описываемых функциями:

а) $x(t) = \begin{cases} 2 & \text{при } -0,1 \leq t \leq 0,1; \\ 0 & \text{при } t < -0,1 \text{ и } t > 0,1; \end{cases}$ б) $x(t) = \begin{cases} e^{-0,2t} & \text{при } 0 \leq t \leq 5; \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > 5. \end{cases}$

10. Импульсный сигнал $x(t)$ прямоугольной формы имеет длительность $\tau = 20$ мс и амплитуду $D = 50$ В. Запишите аналитическое выражение этого сигнала, если:

- а) передний фронт импульса совпадает с началом отсчета времени;
- б) передний фронт импульса совпадает с моментом времени $t = 5$ мс.

11. Сигнал $x(t)$ треугольной формы описывается функцией

$$x(t) = \begin{cases} 2t & \text{при } 0 \leq t \leq 0,5; \\ 2 - 2t & \text{при } 0,5 \leq t \leq 1,0. \end{cases}$$

Запишите функцию в виде суммы трех смещенных линейных функций.

12. Вычислите первые пять значений дискретной последовательности $x(n)$, полученной в результате дискретизации с периодом $T = 0,01$ с сигналов:

а) $x(t) = 10 \cos(2t)$; б) $x(t) = 0,25t^2$.

Глава 2

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Базисная система гармонических функций. – Тригонометрический ряд Фурье. – Амплитудный и фазовый спектры периодического сигнала. – Комплексный ряд Фурье. – Понятие отрицательной частоты. – Историческая справка. – Спектры простейших периодических сигналов. – Условия и теорема Дирихле. – Явление Гиббса. – Распределение мощности в спектре периодического сигнала. – Практическая ширина спектра периодического сигнала.

2.1. Базисная система сигналов

Функция $x(t)$, описывающая периодически повторяющийся во времени сигнал, удовлетворяет условию

$$x(t) = x(t \pm rT), \quad r = 1, 2, \dots,$$

где T – период повторения сигнала.

При формировании математической модели периодического сигнала могут использоваться различные системы ортогональных функций. Однако наибольшее распространение получила система, в которой базис образуют ортогональные гармонические функции:

$$\begin{aligned} &1, \cos \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \dots, \cos n\omega_1 t, \dots \\ &\sin \omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots, \sin n\omega_1 t, \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\omega_1 = 2\pi/T$ – основная частота.

Это объясняется тем, что сигнал, описываемый гармонической функцией, сохраняет свою форму при прохождении через линейные системы. Если на входе линейной системы действует гармонический сигнал, то и выходной сигнал по окончании переходного процесса будет гармоническим, отличаясь от входного лишь амплитудой и фазой. Графики нескольких первых функций системы показаны на рис. 2.1.

Система тригонометрических функций (2.1) является полной и ортогональной на интервале, длительность которого равна $T = 2\pi/\omega_1$. Условия ортогональности имеют следующий вид:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos n\omega_1 t \cdot \cos m\omega_1 t \cdot dt = \begin{cases} 0 & \text{для } n \neq m, \\ T/2 & \text{для } n = m, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin n\omega_1 t \cdot \sin m\omega_1 t \cdot dt = \begin{cases} 0 & \text{для } n \neq m, \\ T/2 & \text{для } n = m, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin n\omega_1 t \cdot \cos m\omega_1 t \cdot dt = 0. \quad (2.4)$$

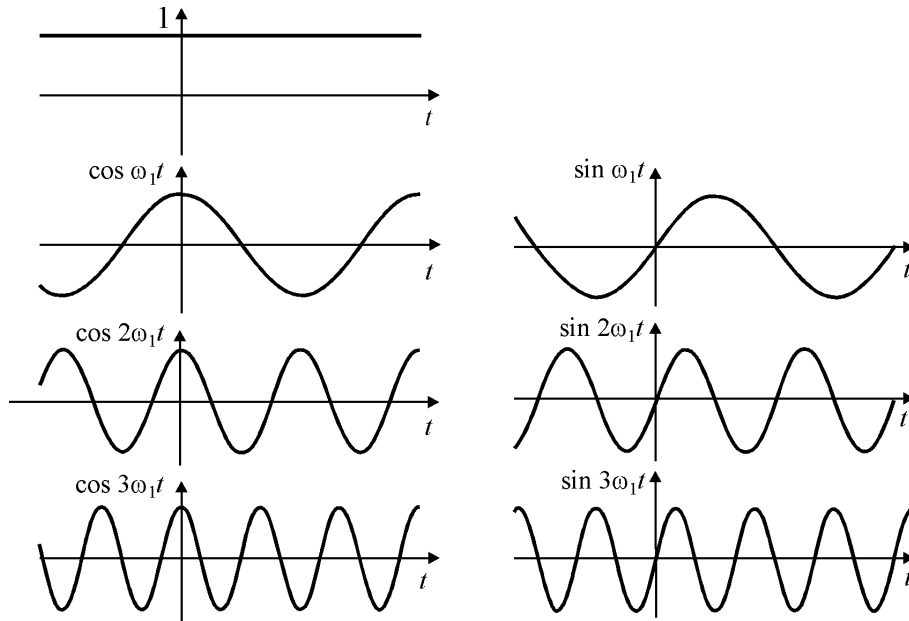


Рис. 2.1. Базисные тригонометрические функции

В качестве примера покажем справедливость соотношения (2.2). Сначала преобразуем подынтегральную функцию:

$$\cos n\omega_1 t \cdot \cos m\omega_1 t = \frac{1}{2} \cos(n-m)\omega_1 t + \frac{1}{2} \cos(n+m)\omega_1 t.$$

После этого для первого интеграла при $n \neq m$ найдем

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_0+T} \cos n\omega_1 t \cdot \cos m\omega_1 t \cdot dt = \\ & = \frac{1}{2(n-m)\omega_1} \sin(n-m)\omega_1 t \Big|_{t_0}^{t_0+T} + \frac{1}{2(n+m)\omega_1} \sin(n+m)\omega_1 t \Big|_{t_0}^{t_0+T} = 0. \end{aligned}$$

При $n = m$ получим

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 n\omega_1 t \cdot dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos 2n\omega_1 t \cdot dt = \frac{T}{2}.$$

Аналогичным образом можно убедиться в справедливости соотношений (2.3) и (2.4).

2.2. Тригонометрический ряд Фурье

Всякая периодическая функция времени $x(t)$, которая в пределах периода ее изменения T удовлетворяет условиям Дирихле (о них скажем позже), может быть представлена в виде разложения по тригонометрическим функциям Фурье:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t]. \quad (2.5)$$

Этот ряд называется тригонометрическим рядом Фурье. Коэффициенты ряда определяются по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt; \quad (2.6)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos n \omega_1 t dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \sin n \omega_1 t dt. \quad (2.7)$$

При расчете коэффициентов ряда Фурье необходимо выбрать начальный момент времени t_0 периода интегрирования в формулах (2.6)–(2.7). Как правило, значение t_0 выбирают так, чтобы упростить вычисления. Обычно, исходя из этого условия, принимают $t_0 = -T/2$. При этом формулы (2.6)–(2.8) приобретают следующий вид:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt; \quad (2.8)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \cos n \omega_1 t dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \sin n \omega_1 t dt \quad (2.9)$$

Непосредственно из формул (2.8)–(2.9) следуют два свойства, которые упрощают вычисления коэффициентов ряда Фурье в случае, когда функция $x(t)$ удовлетворяет условиям нечетности или четности.

Если функция $x(t)$, описывающая сигнал, является нечетной, то есть $x(t) = -x(-t)$, то коэффициенты $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и в разложении (2.5) остаются только синусоидальные составляющие:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \omega_1 t.$$

Если функция $x(t)$, описывающая сигнал, является четной, то есть $x(t) = x(-t)$, то коэффициенты $b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, и в разложении (2.5) остаются только постоянная и косинусоидальные составляющие:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \omega_1 t).$$

Получила распространение и другая форма записи тригонометрического ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n), \quad (2.10)$$

где амплитуда A_n и фаза φ_n n -ой гармонической составляющей связаны с коэффициентами a_n и b_n соотношениями:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \varphi_n = \arg(a_n - jb_n) = -\arctg \frac{b_n}{a_n} \quad (2.11)$$

или

$$a_n = A_n \cos \varphi_n; \quad b_n = A_n \sin \varphi_n. \quad (2.12)$$

Согласно (2.10) периодический сигнал $x(t)$ содержит в себе независимую от времени постоянную составляющую $A_0/2$ и бесконечный набор гармонических колебаний, так называемых гармоник, с частотами $\omega_n = n \omega_1$ ($n = 1, 2, \dots$), кратными основной частоте $\omega_1 = 2\pi/T$ периодического сигнала. Спектральную составляющую с частотой ω_1 называют *основной гармоникой*, а составляющие с частотами $\omega_n = n \omega_1$ ($n > 1$) – *высшими гармониками* периодического сигнала.

Представление произвольного сигнала в виде совокупности постоянной составляющей и суммы гармонических колебаний с кратными частотами называют *спектральным разложением* этого сигнала в базисе гармонических функций, или *гармоническим анализом* сигнала.

Совокупности величин A_n и φ_n ($n = 1, 2, \dots$) называют соответственно *амплитудным и фазовым* частотными спектрами сигнала или, иначе, спектром амплитуд и спектром фаз. Графически частотные спектры изображают в виде отрезков A_n , φ_n , проведенных перпендикулярно к оси, на которую наносятся значения $0, \omega_1, \omega_2 = 2\omega_1, \omega_3 = 3\omega_1, \dots$ (рис.2.2).

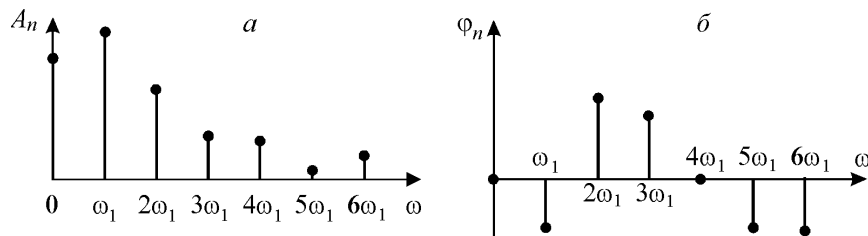


Рис.2.2. Спектральные диаграммы периодического сигнала:
а – амплитудная; б – фазовая.

Спектр периодического сигнала называется *линейчатым* или дискретным, так как состоит из отдельных линий, соответствующих дискретным частотам $\omega = n \cdot \omega_1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Графическое изображение амплитудного и фазового частотных спектров принято называть *амплитудной и фазовой спектральной диаграммами*.

Отметим, что между периодическими сигналами и их частотными спектрами существует взаимно-однозначное соответствие: периодический сигнал $x(t)$ полностью определяет ее частотные спектры и, наоборот, имея частотные спектры, можно определить, какому периодическому сигналу они принадлежат. Имея в виду это соответствие, при решении многих практических задач операции над периодическими сигналами заменяют операциями над частотными спектрами сигналов.

Спектр сигналов, описываемых относительно гладкими функциями, быстро убывает (с ростом номера коэффициенты быстро стремятся к нулю). Спектр относительно «изрезанных» сигналов убывает медленно, так как для представления разрывов и «изломов» функции нужны синусоиды с большими частотами.

2.3. Комплексный (экспоненциальный) ряд Фурье

Применяется также запись ряда Фурье в комплексной форме, получаемая при замене тригонометрических функций экспоненциальными с введением в рассмотрение комплексных величин.

Тригонометрический ряд Фурье записывается в виде

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t]. \quad (2.13)$$

По формулам Эйлера имеем:

$$\begin{aligned} \cos n\omega_1 t &= \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2}; \\ \sin n\omega_1 t &= j \frac{-e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2}. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (2.10), получим

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right). \quad (2.14)$$

Запись формулы (2.14) можно упростить. Для этого введем в рассмотрение отрицательные индексы n и с учетом, что коэффициенты a_n четны, а коэффициенты b_n нечетны относительно индексов, обозначим

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad \text{для } n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.15)$$

Тогда, объединив все слагаемые в (2.14) под один знак суммы, приходим к следующей форме записи ряда Фурье:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (2.16)$$

где

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (2.17)$$

Достоинством этой формы записи ряда Фурье является компактность. Согласно (2.16) сигнал $x(t)$ представлен суммой комплексных составляющих вида $c_n e^{jn\omega_1 t}$, где n изменяется от $-\infty$ до ∞ . Отрицательному значению n соответствует отрицательная частота $-n\omega_1$. Очевидно, что отрицательные частоты в природе не существуют. Они являются математической абстракцией и появляются в результате формального представления гармонических функций в комплексной форме. Легко показать, что при переходе от комплексной формы записи (2.16) к тригонометрической (2.13) отрицательная частота исчезает. Выделим в (2.16) пару слагаемых, соответствующих некоторому значению n :

$$x_n(t) = \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t}.$$

Векторная диаграмма этих комплексных составляющих ряда показана на рис. 2.3. Векторы с длиной $|c_n|$ вращаются с угловой частотой $n\omega_1$ во взаимно противоположных направлениях. Сумма этих векторов дает вещественную функцию

$$x_n(t) = 2|c_n| \cos(n\omega_1 t + \varphi_n).$$

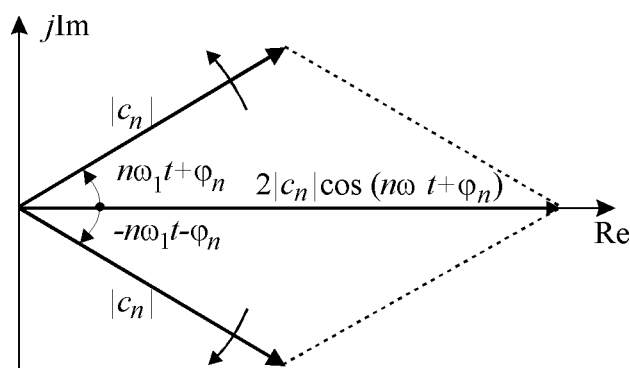


Рис.2.3. Векторная диаграмма гармонического сигнала

Коэффициенты c_n являются комплексными величинами. Поэтому для представления периодического сигнала в частотной области в общем случае необходимо иметь два вещественных спектра: амплитудный

спектр $|c_n|$ и фазовый спектр $\varphi_n = \arg c_n$. Спектральные диаграммы при использовании комплексного ряда Фурье строятся как для положительных, так и для отрицательных значений ω (или n). Легко убедиться в том, что амплитудный спектр является четной функцией, фазовый спектр – нечетной функцией. и в общем случае имеют вид, подобный показанному на рис.2.4.

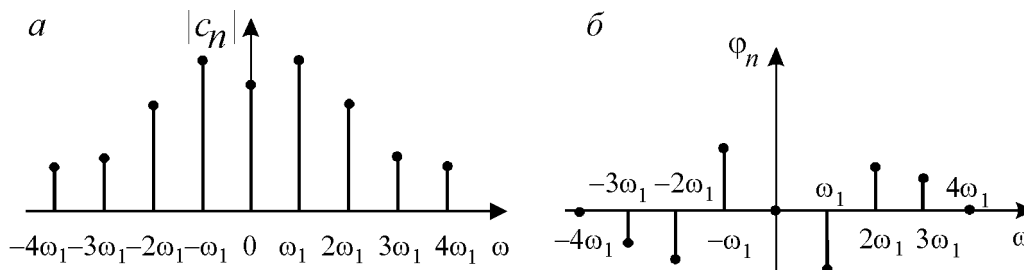


Рис.2.4. Спектральные диаграммы: *a* – амплитудная; *б* – фазовая.

Для положительных n коэффициенты тригонометрического и комплексного рядов Фурье, как следует из (2.11) и (2.15), связаны следующим образом:

$$|c_n| = A_n/2, \quad \varphi_n = \arg c_n = \arg(a_n - j b_n).$$

2.4. Историческая справка

Основы математического аппарата гармонического анализа были заложены еще в середине XVIII века. Именно тогда Даламбер получил уравнение колебания струны, а Д. Бернулли записал общее решение этого уравнения в форме ряда, содержащего гармонические функции. Затем в 1755 году Л. Эйлер, развивая работы Д. Бернулли, нашел связь между коэффициентами ряда и параметрами струны. Эйлер первым указал на возможность аппроксимации произвольных функций тригонометрическими рядами.

Спустя полвека, на сессии Французской академии наук 21 декабря 1807 года математик и инженер Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830) сделал сообщение, ставшее историческим. Фурье, изучавший проблему теплопроводности, заявил, что произвольную функцию, заданную на конечном интервале, *всегда* можно представить в виде суммы синусоидальных и косинусоидальных составляющих. Как утверждал Фурье, функция может состоять из произвольного числа «кусков», аналитическое выражение которых совершенно различно. Не требуется и непрерывность функций. Членам академии, в том числе и великому аналитику Лагранжу, утверждение Фурье показалось совершенно невероятным. В то время считалось, что гармонический анализ можно применять лишь к функциям, которые не только непрерывны, но имеют и непрерывные производные любого порядка.

Фурье снял это ограничение и дал примеры гармонического анализа функций, имевших конечное число разрывов на заданном интервале. Фурье

не смог предложить строгих доказательств своего утверждения. Последующие исследования, однако, показали, что утверждение Фурье было абсолютно справедливо. Через несколько лет его исследования были обобщены и получили теоретическое подтверждение в работах математиков Ш. Штурма и Ж. Лиувилля. Дирихле детально исследовал условия, при которых «произвольная функция» Фурье может быть представлена гармоническим рядом Фурье. Теоретические исследования Фурье быстро нашли и практическое применение. Английский ученый У. Томсон (лорд Кельвин) создал первый механический гармонический анализатор и использовал его для предсказания высоты приливов. В своих оптических исследованиях применял гармонический анализатор А. Майкельсон.

Если ряды, которые теперь называют по имени Фурье, были хорошо известны к началу его работы по проблеме гармонического анализа, то интеграл Фурье (см. следующую главу учебного пособия) безусловно является открытием Фурье.

2.5. Спектры простейших периодических сигналов

Прямоугольное колебание

Рассмотрим спектральный состав прямоугольного колебания (рис. 2.5), которое часто называют *меандром*. Покажем одновременно, как влияет выбор начала отсчета времени на спектр этого сигнала.

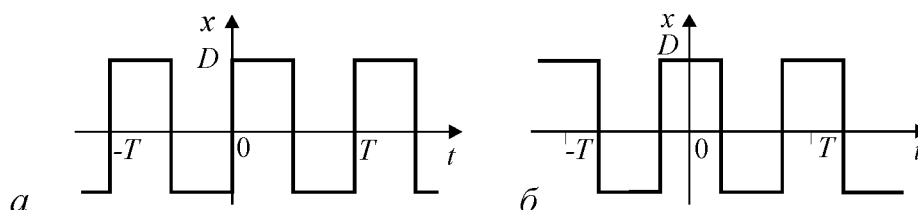


Рис. 2.5. График прямоугольных колебаний (меандра)

Вариант 1. Пусть начало отсчета времени совпадает с началом положительной полуволны (рис. 2.5, *a*). В этом случае функция $x(t)$, описывающая сигнал, является нечетной. Согласно приведенным выше формулам имеем:

$$a_n = \frac{2D}{T} \int_{-T/2}^0 (-1) \cos n\omega_1 t dt + \int_0^{T/2} \cos n\omega_1 t dt = 0,$$

$$b_n = \frac{2D}{T} \left[\int_{-T/2}^0 (-1) \sin n\omega_1 t dt + \int_0^{T/2} \sin n\omega_1 t dt \right] = \frac{2D}{n\pi} (1 - \cos n\pi), n = 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что коэффициенты b_n при четных n равны нулю. Поэтому ряд Фурье записывается в следующем виде

$$x(t) = \frac{4D}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right). \quad (2.18)$$

Ряд (2.18) можно привести к форме записи (2.10). В результате будем иметь

$$x(t) = \frac{4D}{\pi} \left[\cos \left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{3} \cos \left(3\omega_1 t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{5} \cos \left(5\omega_1 t - \frac{\pi}{2} \right) + \dots \right]. \quad (2.19)$$

Результаты гармонического анализа приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Значения амплитуды и фазы гармонических составляющих

n	–	1	2	3	4	5	6	7
A_n	–	$4D/\pi$	0	$4D/3\pi$	0	$4D/5\pi$	0	$4D/7\pi$
φ_n	рад	$-\pi/2$	–	$-\pi/2$	–	$-\pi/2$	–	$-\pi/2$

Вариант 2. Рассмотрим вариант, когда начало отсчета времени располагается в середине импульса (рис. 2.5, б). Теперь функция $x(t)$, описывающая прямоугольное колебание, будет четной относительно t . Для этого случая получим

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = 0;$$

$$a_n = \frac{4D}{T} \left[\int_0^{T/4} \cos n\omega_1 t dt + \int_{T/4}^{T/2} (-1) \cos n\omega_1 t dt \right] = \frac{4D}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ряд Фурье приобретает вид

$$x(t) = \frac{4D}{\pi} \left[\cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t - \dots \right] \quad (2.20)$$

После приведения ряда (2.20) к форме записи (2.10) получим

$$x(t) = \frac{4D}{\pi} \left[\cos \omega_1 t + \frac{1}{3} \cos (3\omega_1 t - \pi) + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t + \dots \right]. \quad (2.21)$$

Результаты гармонического анализа приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Значения амплитуды и фазы гармонических составляющих

n	–	1	2	3	4	5	6	7
A_n	–	$4D/\pi$	0	$4D/3\pi$	0	$4D/5\pi$	0	$4D/7\pi$
φ_n	рад	0	–	$-\pi$	–	0	–	$-\pi$

Сравнивая выражения (2.19) и (2.21), или данные гармонического анализа в табл. 2.1 и 2.2, можно сделать следующее заключение. При смещении начала отсчета амплитудный спектр сигнала не изменяется, изменяется лишь фазовый спектр.

Из выражений (2.19) и (2.20) следует, что в разложении прямоугольного колебания отсутствуют постоянная составляющая и четные гармоники. На рис.2.6 сплошными линиями показаны графики функции $x^*(t)$, полученные при учете различного числа членов ряда.

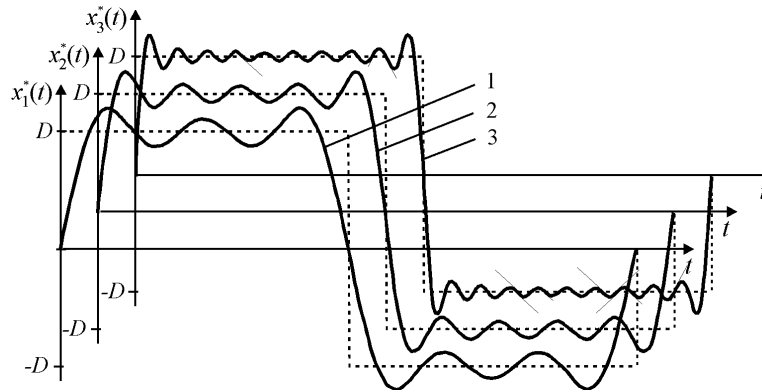


Рис. 2.6. Аппроксимация прямоугольного колебания усеченным рядом Фурье с различным числом N гармоник:
1 – $N=5$, 2 – $N=9$, 3 – $N=19$

Вариант 3. Найдем разложение прямоугольного колебания в комплексный ряд Фурье (2.16). Приняв за начало отсчета начало положительной полуволны (рис. 2.5, а), для коэффициентов ряда согласно (2.17) будем иметь

$$c_n = \frac{D}{T} \int_{-T/2}^0 (-1)e^{-jn\omega_1 t} dt + \frac{D}{T} \int_0^{T/2} e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

После несложных преобразований получим

$$c_n = \frac{D}{j\pi n} (1 - e^{-j\pi n}) = \frac{D}{j\pi n} (1 - \cos \pi n).$$

Значения модуля и аргумента коэффициентов c_n комплексного ряда Фурье, рассчитанные по этой формуле, приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3.

Значения модуля и аргумента коэффициентов c_n

n	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$ c_n $...	$2D/3\pi$	0	$2D/\pi$	0	$2D/\pi$	0	$2D/3\pi$...
Φ_n	...	$\pi/2$	-	$\pi/2$	-	$-\pi/2$	-	$-\pi/2$...

Пилообразный сигнал

Рассмотрим пилообразный сигнал (рис. 2.7). В пределах периода этот сигнал описывается линейной функцией:

$$x(t) = \frac{2D}{T}t, \quad -\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}. \quad (2.22)$$

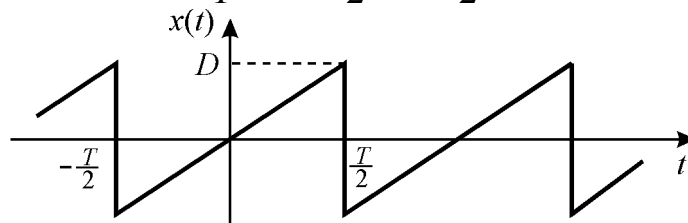


Рис. 2.7. График пилообразного сигнала

Данная функция является нечетной. Поэтому коэффициенты ряда Фурье, записанного в тригонометрической форме, равны:

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (2.23)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2D}{T}t \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt = -\frac{2D}{\pi n} \cos n\pi = \frac{2D}{\pi n} (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

Ряд Фурье записывается в следующем виде:

$$x(t) = \frac{2D}{\pi} \left[\sin(\pi t) - \frac{1}{2} \sin(2\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t) - \frac{1}{4} \sin(4\pi t) + \dots \right].$$

Последовательность прямоугольных импульсов

Найдем спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов с амплитудой D , длительностью τ и периодом следования T (рис. 2.8). На интервале $(-T/2, T/2)$ сигнал описывается функцией

$$x(t) = \begin{cases} D & \text{при } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2; \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

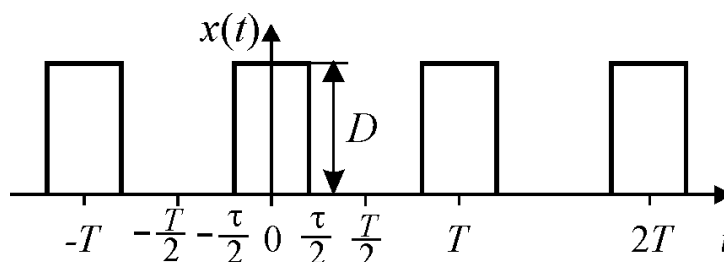


Рис. 2.8. Последовательность прямоугольных импульсов

Функция $x(t)$ является четной, поэтому ряд Фурье содержит только постоянную и косинусоидальные составляющие. Коэффициенты ряда вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} D dt = 2D \frac{\tau}{T};$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} D \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{2D\tau}{T} \left[\frac{\sin(n\omega_1 \tau/2)}{n\omega_1 \tau/2} \right] = \frac{2D}{\pi n} \sin \frac{n\pi\tau}{T}. \quad (2.25)$$

Амплитуды гармонических составляющих равны

$$A_n = |a_n| = \frac{2D}{\pi n} \left| \sin \frac{n\pi\tau}{T} \right|, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.26)$$

На рис. 2.9 приведена амплитудная спектральная диаграмма исследуемой последовательности импульсов для $\tau/T = 0,5$. По оси ординат отложены относительные значения амплитуд гармоник A_n/D .

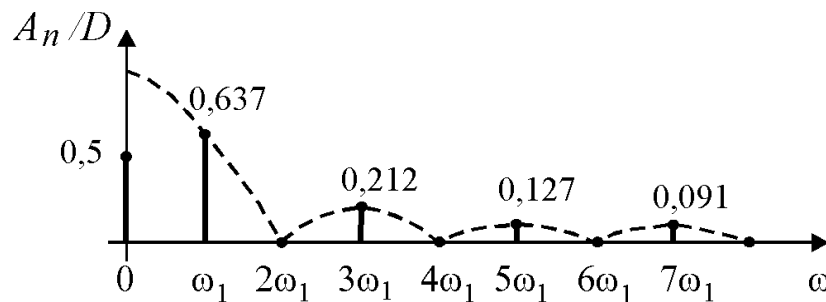


Рис. 2.9. Амплитудная спектральная диаграмма последовательности прямоугольных импульсов для $\tau/T = 0,5$

2.6. Условия сходимости ряда Фурье. Явление Гиббса

Итак, периодический сигнал, описываемый на интервале $[-T/2, T/2]$ функцией $x(t)$, может быть описан тригонометрическим рядом Фурье (2.7). При практических расчетах в тригонометрическом ряде Фурье учитывается конечное число N членов ряда и исходная функция аппроксимируется усеченным рядом

$$x^*(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]. \quad (2.27)$$

Очевидно, представляют практический интерес:

- условия, при выполнении которых аппроксимирующая функция $x^*(t)$ сходится к исходной функции $x(t)$;
- особенности поведения аппроксимирующей функции $x^*(t)$ при увеличении числа N членов ряда.

Как отмечалось выше, функция, разлагаемая в ряд Фурье, должна удовлетворять условиям Дирихле. Эти условия формулируются следующим образом.

Функция $x(t)$ на интервале $[-T/2, T/2]$:

- 1) должна иметь конечное число максимумов и минимумов;
- 2) может иметь разрывы непрерывности первого рода при некоторых значениях аргумента $t = t_i$, число которых должно быть конечно;
- 3) должна иметь конечные (равные или неравные между собой) предельные значения $x(-T/2 + 0)$ и $x(T/2 - 0)$;
- 4) должна быть абсолютно интегрируемой, то есть удовлетворять неравенству

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt < \infty.$$

Эти условия названы в честь немецкого математика Петера Густава Дирихле (1805–1859), который первым их опубликовал в 1828 г.

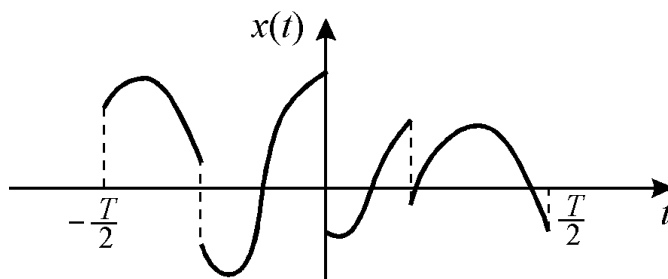


Рис.2.10. Пример сигнала, удовлетворяющего условиям Дирихле

На рис. 2.10 показан график функции, имеющей пять разрывов непрерывности первого рода и неравные предельные значения $x(-T/2 + 0)$ и $x(T/2 - 0)$. Такая функция удовлетворяет приведенным выше условиям Дирихле.

Если функция удовлетворяет условиям Дирихле, то в отношении ее доказана следующая теорема, называемая теоремой Дирихле.

Теорема. Если заданная функция $x(t)$ в промежутке от $-T/2$ до $T/2$ удовлетворяет условиям Дирихле, то для всех значений t этого же промежутка предел суммы N первых членов ряда Фурье при неограниченном увеличении числа N :

- 1) равен $x(t)$ во всех точках непрерывности внутри промежутка;
- 2) равен $[x(t_i - 0) + x(t_i + 0)]/2$ во всех точках разрыва;
- 3) равен $[x(-T/2 + 0) + x(T/2 - 0)]/2$ на концах промежутка.

Ряд Фурье обеспечивает наилучшее в смысле среднеквадратической погрешности приближение к исходной функции. Это значит, что если число членов ряда Фурье ограничено и исходный сигнал $x(t)$ ап-

проксимирован функцией $x^*(t)$, то наименьшая среднеквадратическая ошибка

$$M = \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - x^*(t)]^2 dt \quad (2.28)$$

имеет место в том случае, когда коэффициенты ряда Фурье определены по формулам (2.6)–(2.7). С увеличением числа членов ряда Фурье ранее подсчитанные коэффициенты не изменяются, а среднеквадратическая ошибка аппроксимации (2.28) уменьшается. При увеличении числа членов ряда Фурье до бесконечности среднеквадратичная погрешность разложения стремится к нулю.

Явлением Гиббса называется особенность поведения усеченного ряда (2.27) Фурье в окрестности точки разрыва функции, проявляющаяся в виде выбросов. Впервые это явление было открыто в 1848 г. Уилбрейамом и вновь обнаружено в 1898 г. Дж. Гиббсом.

При добавлении гармоник все более высоких порядков аппроксимирующая функция $x^*(t)$ приближается к исходной во всех точках за исключением точек разрыва. Согласно теореме Дирихле аппроксимирующая функция $x^*(t)$ стремится к значению, равному среднеарифметическому значений слева и справа от точки разрыва. Однако это не единственная особенность, обусловленная наличием разрыва функции $x(t)$. Вблизи точки разрыва, слева и справа от нее, функция $x^*(t)$ имеет выбросы (рис. 2.11). Добавление новых гармоник сдвигает эти выбросы к точкам разрыва и уменьшает их длительность, но размах выброса остается постоянным и составляет 18%.

Для многих аналитических исследований наличие явления Гиббса вызывает определенные трудности.

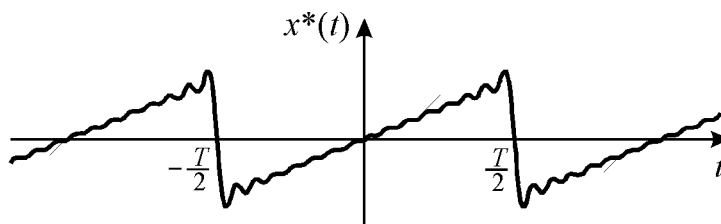


Рис. 2.11. Аппроксимация пилообразного колебания усеченным рядом Фурье (2.27) при $N = 15$

2.7. Распределение мощности в спектре периодического сигнала

Пусть сигнал $x(t)$ (ток, напряжение) представляет собой сложную периодическую функцию времени с периодом T . Энергия такого сигнала, длящегося от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, бесконечно велика. Основным интерес представляет средняя мощность периодического сигнала и распределение этой мощности между отдельными гармониками. Очевидно, что средняя мощность периодического сигнала совпадает со средней мощностью за период и она в предположении, что сопротивление нагрузки равно 1 Ом, записывается в виде

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt. \quad (2.29)$$

Представим сигнал $x(t)$ рядом Фурье

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n). \quad (2.30)$$

Подставив (2.30) в (2.29), получим

$$\begin{aligned} P_{\text{cp}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \right]^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{A_0^2}{4} \int_0^T dt + A_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^T \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) dt + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{n,m=1, \\ n \neq m}}^{\infty} A_n A_m \int_0^T \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \cos(m\omega_1 t + \varphi_m) dt + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_0^T \cos^2(n\omega_1 t + \varphi_n) dt \right). \end{aligned}$$

Вторая и третья группы слагаемых в силу ортогональности гармонических функций обращаются в нуль. Интегрирование оставшихся слагаемых дает

$$P_{\text{cp}} = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2.$$

Таким образом, *средняя мощность периодического сигнала равна сумме средних мощностей, выделяемых отдельными гармониками и его постоянной составляющей.*

Для усеченного ряда будем иметь

$$P_{\text{cp}}^* = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^2.$$

Отметим, что средняя мощность не зависит от фаз отдельных гармоник. Это означает, что изменение формы сигнала, получающегося при нарушении фазовых соотношений внутри спектра, не связано с изменением средней мощности сигнала. Отсюда также следует, что для определения средней мощности выбор начала отсчета при разложении в ряд Фурье не играет роли.

Пример. Рассмотрим пилообразный сигнал, описываемый функцией (2.22). Средняя мощность, выделяемая сигналом в активном сопротивлении $R = 1 \text{ Ом}$, равна

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\frac{2D}{T} t \right)^2 dt = \frac{8D^2}{T^3} \int_0^{T/2} t^2 dt = \frac{D^2}{3} = 0,333D^2$$

Согласно (2.23) и (2.24) амплитуды гармоник равны

$$A_n = |b_n| = \frac{2D}{\pi n}.$$

Средняя мощность, выделяемая в активном сопротивлении $R = 1 \text{ Ом}$ N гармониками, равна

$$P_{\text{cp}}^* = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^2 = \frac{2D^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}. \quad (2.31)$$

При $N = 10$ из (2.31) получим $P_{\text{cp}}^* = 0,314D^2 = 0,943P_{\text{cp}}$. При $N = 50$ будем иметь $P_{\text{cp}}^* = 0,329D^2 = 0,988P_{\text{cp}}$.

2.8. Практическая ширина спектра

Реальные устройства и системы из-за наличия в них инерционных элементов не могут передавать колебания сколь угодно высоких частот. Следовательно, при решении практических задач, связанных с передачей периодических сигналов через устройства и системы, может быть учтено лишь определенное количество гармонических составляющих.

В связи с этим вводится понятие *практической ширины спектра*. Очевидно, необходимо учитывать ту часть спектра сигнала, которая содержит гармонические составляющие с относительно большими амплитудами. Поэтому под *практической шириной спектра* сигнала понимается та область частот, в пределах которой лежат гармонические составляющие сигнала с амплитудами, превышающими наперед заданную величину. С энергетической точки зрения практическая ширина спектра может быть определена как область частот, в пределах которой сосредоточена подавляющая часть мощности сигнала.

Пример. Рассмотрим периодическую последовательность прямоугольных импульсов (рис.2.8) с амплитудой D , периодом следования T и длительностью $\tau = T/2$.

Определим практическую ширину спектра, если требуется учесть все гармонические составляющие сигнала, амплитуды которых более 10% от амплитуды первой гармоники.

Согласно формуле (2.26) амплитуды гармонических составляющих при $\tau = T/2$ равны

$$A_n = \frac{2D}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Число подлежащих учету гармоник n может быть получено из выражения

$$\frac{A_n}{A_1} = \frac{2D}{n\pi} \cdot \frac{\pi}{2D} = \frac{1}{n} = 0,1.$$

Отсюда $n = 10$. Практическая ширина спектра составляет $10\omega_1$.

Контрольные задания и упражнения

1. Поясните свойства периодических функций.
2. Охарактеризуйте основные особенности базисной системы, состоящей из тригонометрических функций.
3. Даны функции
 - а) $x(t) = 5\sin(250\pi t + \pi/2)$; б) $x(t) = 8\cos(100\pi t - \pi/3)$.

Запишите: 1) амплитуду; 2) фазу; 3) частоту в Гц; 4) круговую частоту; 5) период.

4. Докажите соотношение (2.3).
5. Какие формы записи гармонических функций используются в рядах Фурье?

6. Дан периодический сигнал, описываемый функцией

$$x(t) = 5 \cdot \cos(20\pi \cdot t + \pi/3) + 3 \cdot \cos(30\pi \cdot t - \pi).$$

Определите период сигнала. Постройте амплитудный и фазовый спектры.

7. Как отразится на значениях A_n и φ_n тригонометрического ряда Фурье изменение положения отсчета времени $t = 0$?
8. Поясните причины, которые позволяют упростить расчеты коэффициентов a_n, b_n тригонометрического ряда Фурье для нечетных и четных функций.
9. Как возникает понятие отрицательной частоты?

10. Найдите коэффициенты экспоненциального ряда Фурье для следующих сигналов:

а) $x(t) = \cos(2\pi t)$;

в) $x(t) = \cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)$;

б) $x(t) = \sin(2\pi t)$;

г) $x(t) = \cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)$.

11. Поясните отличия спектральных диаграмм, построенных на основе тригонометрической и комплексной форм записи ряда Фурье.

12. Как изменится спектр последовательности прямоугольных импульсов, если уменьшить длительность τ и период T импульсов в два раза?

13. Дан периодический сигнал (рис. 2.12, а). Рассчитайте постоянную составляющую, амплитуду и фазу первой гармоники.

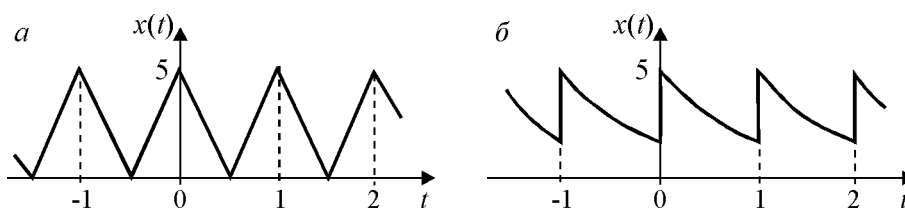


Рис. 2.12. Графики периодических сигналов для упражнений 13 и 14

14. Периодический сигнал (рис. 2.12, б) на интервале $t \in [0; 1]$ описывается функцией $x(t) = e^{-t}$. Найдите коэффициенты c_n комплексного ряда Фурье. Рассчитайте значения первых трех коэффициентов.

15. Периодический сигнал $x(t)$ на отрезке $-T/2 \leq t \leq T/2$ описывается функцией $x(t) = D \cdot \cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)$ (рис. 2.13). Найдите выражения для коэффициентов ряда Фурье.

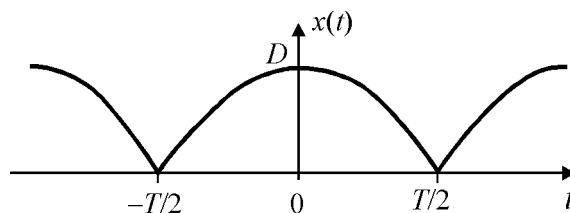


Рис. 2.13. График периодического сигнала для упражнения 15

16. Рассчитайте среднюю мощность периодического сигнала, описываемого функцией

$$x(t) = 2 \cdot \cos(5t) - \sin(10t) + 0,5 \sin(15t).$$

Глава 3

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Прямое и обратное преобразования Фурье. – Спектральная характеристика сигнала. – Амплитудно-частотный и фазо-частотный спектры. – Спектральные характеристики простейших сигналов. – Свойства преобразования Фурье. – Распределение энергии в спектре непериодического сигнала.

3.1. Преобразование Фурье

Гармонический анализ можно распространить и на непериодические сигналы. Рассмотрим сигнал, который определен некоторой функцией $x(t)$ на интервале $[t_1, t_2]$ и равен нулю за пределами этого интервала (этот сигнал показан на рис. 3.1 сплошной линией). Будем полагать, что эта функция удовлетворяет условиям Дирихле и абсолютно интегрируема.

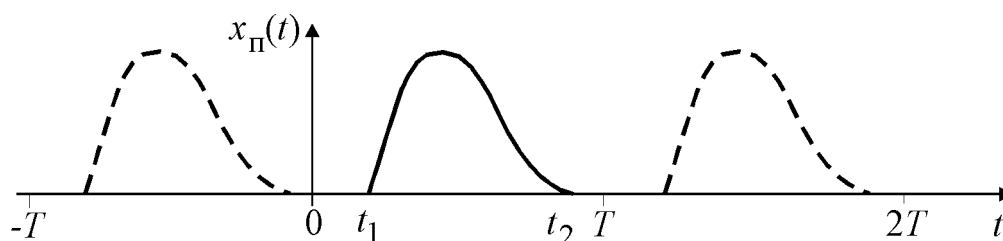


Рис. 3.1. Периодическая функция, образованная повторением $x(t)$

Возьмем произвольный отрезок времени длительностью T , целиком включающий интервал $[t_1, t_2]$, и образуем функцию

$$x_{\text{п}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT).$$

в которой функция $x(t)$ повторяется через интервал T (фрагмент этой функции показан на рис. 3.1).

Очевидно, что

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_{\text{п}}(t). \quad (3.1)$$

Периодическую функцию $x_{\text{п}}(t)$ можно записать в виде ряда Фурье в комплексной форме

$$x_{\text{п}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (3.2)$$

где

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (3.3)$$

Подставив (3.3) в (3.2) и заменив $T = 2\pi/\omega_1$, получим

$$x_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} [x(\tau) e^{-jn\omega_1 \tau} d\tau] e^{jn\omega_1 t} \omega_1 \right]. \quad (3.4)$$

Чтобы получить спектральное представление сигнала $x(t)$, подставим (3.4) в (3.1) и устремим T к бесконечности. При $T \rightarrow \infty$ угловая частота $\omega_1 = 2\pi/T$ превращается в бесконечно малое приращение частоты $d\omega$, частота n -ой составляющей ряда $n\omega_1$ – в текущую частоту ω , а операция суммирования может быть заменена операцией интегрирования. В результате получим

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[\int_{t_1}^{t_2} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right] d\omega. \quad (3.5)$$

С учетом, что значения t_1 и t_2 не определены, для внутреннего интеграла в (3.5) введем обозначение

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.6)$$

Функцию $X(j\omega)$ называют *спектральной характеристикой* сигнала $x(t)$.

Выражение (3.5) с учетом (3.6) принимает вид

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.7)$$

Формулы (3.6) и (3.7) образуют пару преобразований Фурье и устанавливают однозначное соответствие между представлением $x(t)$ сигнала во временной области и его представлением $X(j\omega)$ в области частот. Формулу (3.6) называют прямым преобразованием Фурье, а функцию $X(j\omega)$ – спектральной характеристикой сигнала $x(t)$. Формула (3.7) позволяет осуществить обратное преобразование и вычислить мгновенное значение сигнала $x(t)$, если известна его спектральная характеристика $X(j\omega)$. Символически эти преобразования записываются в виде

$$X(j\omega) = \mathfrak{F}[x(t)], \quad x(t) = \mathfrak{F}^{-1}[X(j\omega)].$$

Спектральная характеристика $X(j\omega)$ сигнала $x(t)$ в общем случае является комплексной функцией частоты. Применяв известную формулу Эйлера, ее можно записать в следующем виде

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t \cdot dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t \cdot dt \quad (3.8)$$

$$= a(\omega) - j b(\omega) = X(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

Действительная часть

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t \cdot dt$$

спектральной характеристики есть четная функция частоты, а мнимая часть

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t \cdot dt$$

– нечетная функция частоты. Отсюда следует, что модуль спектральной характеристики

$$X(\omega) = |X(j\omega)| = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}$$

есть четная функция частоты, а аргумент спектральной характеристики

$$\varphi(\omega) = \arg X(j\omega)$$

– нечетная функция частоты.

Графически спектральную характеристику $X(j\omega)$ сигнала $x(t)$ в общем случае можно представить в виде годографа на комплексной плоскости (рис. 3.2, *а*). Однако чаще строят амплитудно-частотную $X(\omega)$ и фазо-частотную $\varphi(\omega)$ спектральные характеристики (рис. 3.2, *б*, *в*). Учитывая симметричность спектральных характеристик при положительных и отрицательных значениях частоты ω , их, как правило, строят только для положительных значений частоты ω .

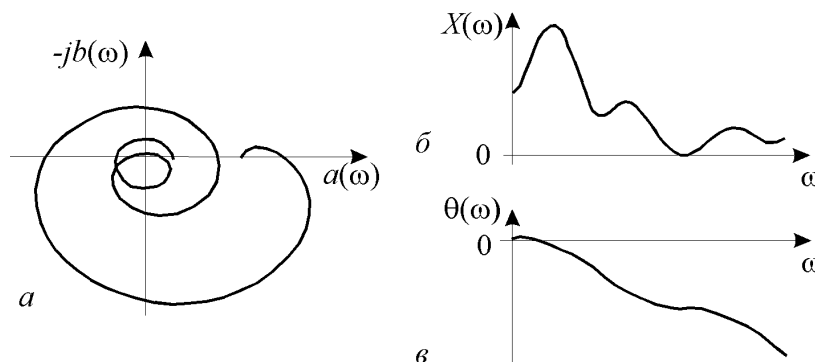


Рис. 3.2. Спектральные характеристики сигнала:
а – годограф, *б* – амплитудная, *в* – фазовая

Формулу (3.7) обратного преобразования Фурье при помощи формулы Эйлера и выражения (3.8) можно преобразовать к виду:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega . \quad (3.9)$$

3.2. Спектральные характеристики простейших непериодических сигналов

Спектральная характеристика одиночного прямоугольного импульса

Прямоугольный импульс с началом отсчета, совмещенным с его серединой (рис. 3.3, а), описывается выражением

$$x(t) = D \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} D & \text{при } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0 & \text{при } t < -\tau/2 \text{ и } t > \tau/2. \end{cases}$$

Применяя формулу (3.6), находим

$$X(j\omega) = D \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{D}{-j\omega} (e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{\frac{j\omega\tau}{2}}) = D\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} . \quad (3.10)$$

Спектральная характеристика прямоугольного импульса при выбранном начале отсчета является вещественной функцией (рис. 3.3, б). Максимальное значение $X(j\omega)$ достигается при $\omega = 0$. Его можно вычислить по правилу Лопиталья: $X(0) = D\tau$. Спектральная характеристика обращается в нуль при значениях аргумента

$$\frac{\omega\tau}{2} = \pi n \quad (\omega = \frac{2\pi}{\tau} n),$$

где n – любое (положительное или отрицательное) целое число.

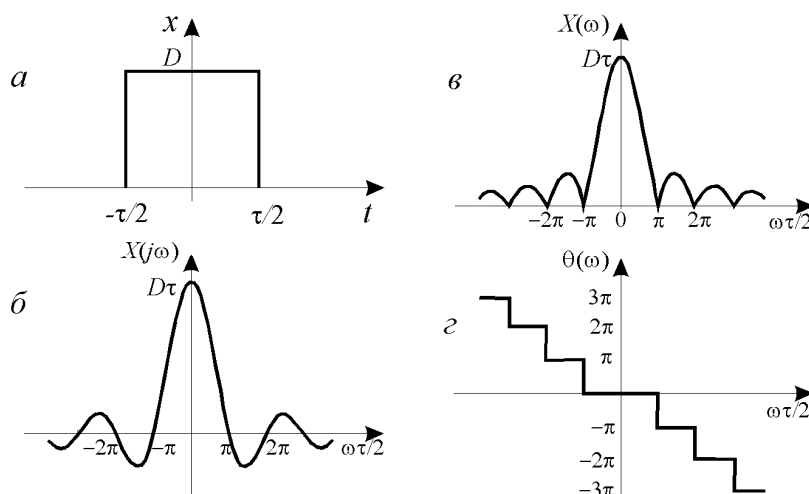


Рис. 3.3. Спектральные характеристики прямоугольного импульса (а): б – общая; в – амплитудная; г – фазовая

При увеличении длительности τ импульса расстояние между нулями функции $X(j\omega)$ уменьшается, то есть спектр сужается. Значение $X(0)$ при этом возрастает. При уменьшении длительности τ импульса, наоборот, расстояние между нулями функции $X(j\omega)$ увеличивается, что свидетельствует о расширении спектра с одновременным уменьшением значения $X(0)$.

Амплитудная спектральная характеристика $X(\omega)$ прямоугольного импульса показана на рис. 3.3, в. При построении фазовой спектральной характеристики $\theta(\omega)$ (рис. 3.3, з) каждая перемена знака функции $X(j\omega)$ учитывается приращением фазы на π .

Спектральная характеристика дельта-функции

Дельта-функция (функция Дирака) определяется формулой:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0. \end{cases}$$

Функция обладает следующими важными свойствами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0).$$

Получить на практике сигнал, описываемый такой функцией, нельзя. Однако дельта-функция является очень удобной математической моделью. На рис. 3.4, а приведено графическое представление дельта-функции в виде вертикального отрезка, заканчивающегося стрелкой. Длина этого отрезка, принимается пропорциональной площади дельта-импульса.

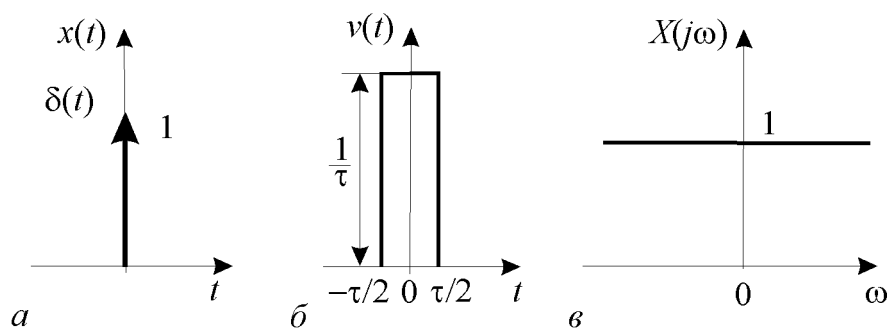


Рис. 3.4. К определению спектральной характеристики дельта-функции:
 а – дельта-функция; б – прямоугольный импульс;
 в – спектральная характеристика

Найдем спектральную характеристику дельта функции. Для этого возьмем прямоугольный импульс, описываемый функцией $v(t)$ (рис. 3.4, б). Длительность импульса равна τ , а амплитуда $-1/\tau$. Поэтому площадь импульса равна единице. Будем уменьшать длительность импульса до нуля, при этом его амплитуда будет стремиться к бесконечности. Следовательно,

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} v(t).$$

Спектральная характеристика прямоугольного импульса определяется выражением (3.10). Отсюда с учетом, что $A = 1/\tau$, получим спектральную характеристику дельта-функции

$$X(j\omega) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = 1.$$

Таким образом, дельта-импульс имеет равномерный спектр на всех частотах (рис. 3.4, в).

Спектральная характеристика экспоненциального сигнала

Рассмотрим сигнал, описываемый функцией

$$x(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$$

при положительном вещественном значении параметра α (рис. 3.5, а).

Спектральная характеристика экспоненциального сигнала равна

$$X(j\omega) = A \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = -\frac{A}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{\alpha + j\omega}.$$

Годограф спектральной характеристики приведен на рис. 3.5, б. Амплитудный и фазовый спектры определяются соответственно выражениями:

$$X(\omega) = |X(j\omega)| = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \arg X(j\omega) = -\arctg(\omega/\alpha).$$

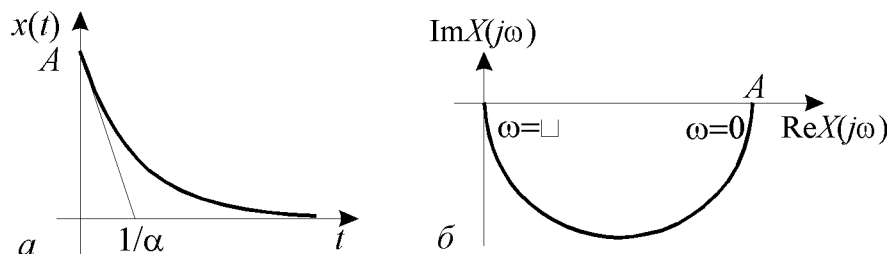


Рис. 3.5. К определению спектральной характеристики экспоненциального импульса:
 а – экспоненциальный импульс; б – спектральная характеристика

Спектральная характеристика ступенчатого сигнала

Рассмотрим сигнал, описываемый ступенчатой функцией

$$x(t) = A \cdot 1(t). \quad (3.11)$$

Ступенчатая функция $1(t)$ не является абсолютно интегрируемой функцией, поэтому формулу прямого преобразования Фурье использовать нельзя. Однако функцию (3.11) можно представить как предел экспоненциальной функции:

$$x(t) = A \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha t}.$$

В этом случае спектральную характеристику $X(j\omega)$ можно определить как предел спектральной характеристики экспоненциального сигнала при $\alpha \rightarrow 0$:

$$X(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{A}{\alpha + j\omega} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{A \cdot \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{A \cdot \omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

При $\alpha \rightarrow 0$ первое слагаемое в правой части этого выражения равно нулю на всех частотах, кроме $\omega = 0$, где оно обращается в бесконечность. Найдем площадь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A \cdot \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{1 + (\omega/\alpha)^2} d\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = A \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = A \cdot \pi.$$

Следовательно, предел первого слагаемого равен $A\pi\delta(\omega)$. Предел второго слагаемого очевиден. Поэтому окончательно получим

$$X(j\omega) = A\pi\delta(\omega) + \frac{A}{j\omega}.$$

3.3. Основные свойства преобразования Фурье

Между сигналом $x(t)$ и его спектром $X(j\omega)$ существует однозначное соответствие. Для решения практических задач необходимо знать связь между изменениями сигнала и соответствующими изменениями спектральной характеристики. Рассмотрим наиболее важные преобразования сигналов и соответствующие им изменения спектральной характеристики.

1. Линейность. Если сигналы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ преобразуемы по Фурье и их спектральными характеристиками являются соответственно функции $X_1(j\omega) = \mathfrak{F}\{x_1(t)\}$ и $X_2(j\omega) = \mathfrak{F}\{x_2(t)\}$, то справедливы следующие равенства:

$$\mathfrak{F}\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha X_1(j\omega) + \beta X_2(j\omega),$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\{\alpha X_1(j\omega) + \beta X_2(j\omega)\} = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

где α, β – постоянные коэффициенты. Это свойство следует непосредственно из определения преобразования Фурье.

2. Спектральная характеристика производной. Если функция $x(t)$, описывающая сигнал, и ее производная $y(t) = dx/dt$ преобразуемы по Фурье и $x(t)$ имеет спектральную характеристику $X(j\omega)$, то спектральная характеристика производной

$$Y(j\omega) = \mathfrak{F} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = j\omega X(j\omega). \quad (3.12)$$

Таким образом, дифференцирование сигнала по времени эквивалентно простой алгебраической операции умножения спектральной характеристики на множитель $j\omega$. Поэтому принято говорить, что мнимое число $j\omega$ является оператором дифференцирования, действующим в частотной области.

Формула (3.12) обобщается на случай спектра производной n -го порядка. Легко показать, что если производная

$$y(t) = dx^n(t)/dt^n$$

абсолютно интегрируема в интервале $(-\infty, \infty)$, то

$$Y(j\omega) = (j\omega)^n X(j\omega).$$

3. Спектральная характеристика интеграла. Если функция $x(t)$, описывающая сигнал, преобразуема по Фурье, имеет спектральную характеристику $X(j\omega)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 0$, то спектральная характеристика

интеграла $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ равна

$$Y(j\omega) = \mathfrak{F} \left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} = \frac{X(j\omega)}{j\omega}.$$

Таким образом, множитель $(1/j\omega)$ является оператором интегрирования в частотной области. Это свойство распространяется и на интегралы кратности n .

4. Спектральная характеристика смещенного сигнала. Пусть имеется сигнал $x_1(t)$ (рис. 3.6, *a*) произвольной формы, существующий на интервале $[t_1, t_2]$ и обладающий спектральной характеристикой $X_1(j\omega)$. Рассмотрим такой же сигнал, но возникающий на время τ позднее и поэтому описываемый функцией

$$x_2(t) = x_1(t - \tau).$$

Эта функция определена на интервале $[t_1 + \tau, t_2 + \tau]$ (рис. 3.6, б).

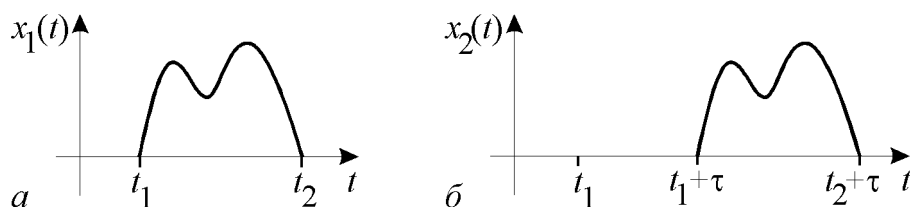


Рис. 3.6. Исходный (а) и «запаздывающий» (б) сигналы

Если сигнал $x_1(t)$ преобразуем по Фурье и имеет спектральную характеристику $X_1(j\omega)$, то спектральная характеристика «запаздывающего» сигнала $x_2(t)$ равна

$$X_2(j\omega) = \mathfrak{F}\{x_1(t - \tau)\} = e^{-j\omega\tau} X_1(j\omega).$$

В случае «опережающего» сигнала $x_2(t) = x_1(t + \tau)$ будем иметь

$$X_2(j\omega) = \mathfrak{F}\{x_1(t + \tau)\} = e^{j\omega\tau} X_1(j\omega).$$

5. Смещение спектральной характеристики. Если функция $x(t)$ преобразуема по Фурье и имеет спектральную характеристику $X(j\omega)$, то

$$\mathfrak{F}\{e^{-jat} x(t)\} = X[j(\omega + a)],$$

где a – любое вещественное неотрицательное число.

6. Сжатие и растяжение сигналов. Пусть задан сигнал $x_1(t)$ и ее спектральная характеристика $X_1(j\omega)$. Подвергнем эту функцию изменению масштаба времени, образовав новую функцию

$$x_2(t) = x_1(kt),$$

где k – некоторое вещественное число. На рис. 3.7 приведены, например, графики сигнала, описываемого функцией

$$x_2(t) = e^{-0,5kt} \cos \pi kt, \quad (3.13)$$

для значений $k = 0,5; 1; 2$.

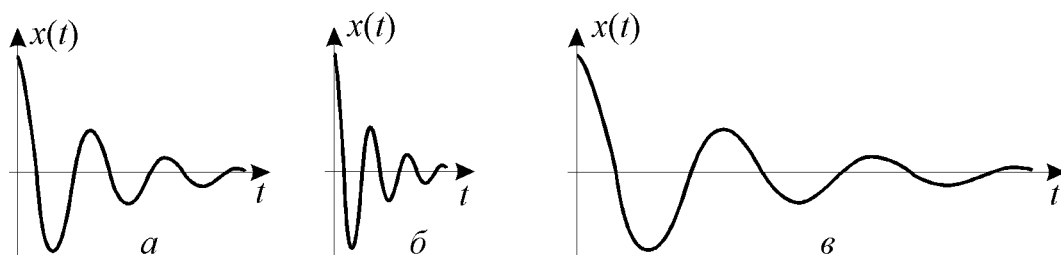


Рис. 3.7. Графики сигнала (3.13): а – $k = 1$; б – $k = 2$; в – $k = 0,5$

Легко заметить, что при $k > 1$ происходит «сжатие» сигнала (рис. 3.7, б), а при $0 < k < 1$ – «растяжение» сигнала (рис. 3.7, в).

Можно показать, что спектральная характеристика сигнала $x_2(t)$ определяется выражением

$$X_2(j\omega) = \mathfrak{F}\{x_1(kt)\} = \frac{1}{k} X_1(j\frac{\omega}{k}).$$

Из этого выражения следует, что при сжатии сигнала на временной оси в k раз во столько же раз расширяется его спектр на оси частот. Модуль спектральной характеристики при этом уменьшается в k раз. При растяжении сигнала во времени, то есть при $0 < k < 1$, имеют место сужение спектра и увеличение модуля спектральной характеристики.

7. Спектральная характеристика произведения сигналов. Пусть имеются два сигнала, которые описываются функциями $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Образум сигнал

$$y(t) = x_1(t) x_2(t).$$

Если сигналы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ преобразуемы по Фурье и их спектральные характеристики есть соответственно $X_1(j\omega)$ и $X_2(j\omega)$, то спектральная характеристика сигнала $y(t)$ определяется выражением

$$Y(j\omega) = F\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1[j(\omega-\sigma)] X_2(j\sigma) d\sigma.$$

8. Теорема Парсеваля. Если функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ преобразуемы по Фурье и их спектральные характеристики соответственно равны $X_1(j\omega)$ и $X_2(j\omega)$, причем интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega) d\omega, \int_{-\infty}^{\infty} X_2(j\omega) d\omega$$

сходятся абсолютно, то справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega) X_2(-j\omega) d\omega. \quad (3.14)$$

Формула (3.14) позволяет найти интеграл в бесконечных пределах от произведения двух функций, произведя соответствующие операции со спектральными характеристиками функций. После несложных преобразований формулу (3.14) можно записать в вещественной форме

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X_1(j\omega)| |X_2(j\omega)| \cos[\varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)] d\omega.$$

Если $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$, то $X_1(j\omega) = X_2(j\omega) = X(j\omega)$ и из (3.14) получим равенство, которое называют *формулой Парсеваля*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

9. Обратимость преобразования Фурье. Нетрудно заметить, что формулы прямого преобразования

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

и обратного преобразования Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

похожи друг на друга. По этой причине все «пары» преобразований имеют близкие зеркальные образы. Покажем это на примере.

Как показано выше, прямоугольный импульс, описываемый функцией

$$x(t) = \begin{cases} D & \text{при } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0 & \text{при } t < -\tau/2 \text{ и } t > \tau/2. \end{cases}$$

имеет спектральную характеристику

$$X(j\omega) = D\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}.$$

С другой стороны, если подвергнуть прямому преобразованию Фурье сигнал

$$y(t) = \frac{D\omega_0}{2\pi} \frac{\sin(\omega t_0/2)}{\omega t_0/2}.$$

получим

$$Y(j\omega) = \begin{cases} D & \text{при } -\omega_0/2 \leq \omega \leq \omega_0/2, \\ 0 & \text{при } \omega < -\omega_0/2 \text{ и } \omega > \omega_0/2. \end{cases}$$

3.4. Распределение энергии в спектре непериодического сигнала. Практическая ширина спектра

Величина

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

носит название *энергии сигнала*. Именно такая энергия выделяется в резисторе с сопротивлением 1 Ом, если к его зажимам приложено напряжение $x(t)$.

С помощью формулы Парсеваля энергию сигнала можно выразить через его спектральную характеристику:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega. \quad (3.15)$$

Соотношение (3.15) позволяет определить энергию сигнала путем интегрирования квадрата модуля спектральной характеристики по всему диапазону частот. Кроме того, это соотношение показывает, каким образом распределена энергия сигнала по различным частотным составляющим. Из него видно, что на бесконечно малый промежуток частот приходится энергия

$$d E_x = \frac{|X(j\omega)|^2}{\pi} d\omega.$$

Поэтому функцию

$$N(\omega) = \frac{1}{\pi} |X(j\omega)|^2$$

можно назвать спектральной характеристикой энергии сигнала $x(t)$. Она характеризует распределение энергии сигнала по его гармоническим составляющим.

В процессе решения практических задач анализа и синтеза сигналов с помощью преобразования Фурье приходится ограничивать интервал частот, в котором строится спектральная характеристика. Этот интервал частот $[0, \omega_{\text{пр}}]$, называемый *практической шириной спектра*, содержит существенные для данного исследования составляющие.

При определении практической ширины спектра сигнала по заданной интенсивности гармонических составляющих используют амплитудную спектральную характеристику. Значение $\omega_{\text{пр}}$ выбирают из условия, что при $\omega > \omega_{\text{пр}}$ амплитуды гармонических составляющих не превышают заданной величины.

С энергетической точки зрения практическая ширина спектра непериодического сигнала оценивается по области частот, в пределах которой сосредоточена подавляющая часть энергии сигнала. В соответствии с формулой (3.15) энергия сигнала, сосредоточенная в полосе частот от 0 до $\omega_{\text{пр}}$, будет

$$E_x^* = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{\text{пр}}} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

В зависимости от требований к доле полезно используемой энергии сигнала и выбирается практическая ширина спектра.

Пример. Дан прямоугольный импульс, описываемый функцией

$$x(t) = \begin{cases} D & \text{при } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0 & \text{при } t < -\tau/2 \text{ и } t > \tau/2. \end{cases} \quad (3.16)$$

Энергия сигнала равна

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} D^2 dt = D^2 \tau. \quad (3.17)$$

Пусть $D = 1, \tau = 1$. Спектральная характеристика прямоугольного импульса определяется выражением (3.10) и при данных параметрах равна

$$X(j\omega) = \frac{\sin(0,5\omega)}{0,5\omega}.$$

Спектральная характеристика энергии

$$N(\omega) = \frac{1}{\pi} \left| \frac{\sin(0,5\omega)}{0,5\omega} \right|^2$$

Спектральные характеристики показаны на рис. 3.8.

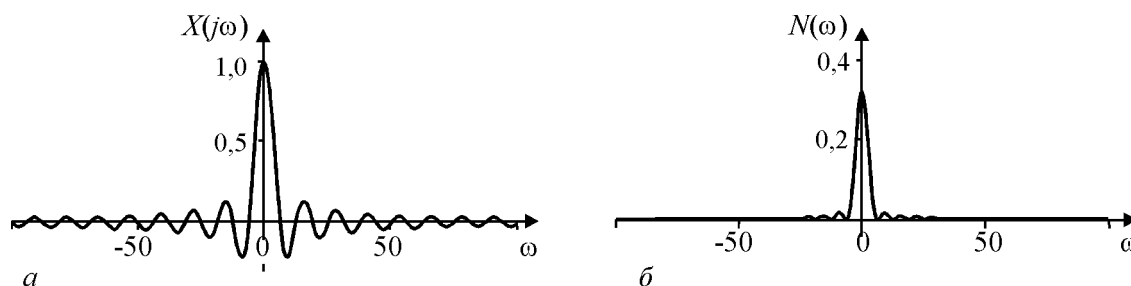


Рис. 3.8. Спектральные характеристики прямоугольного импульса: *a* – спектральная характеристика $X(j\omega)$; *б* – спектральная характеристика энергии

По формуле (3.17) $E_x = 1$. Интегрирование квадрата модуля спектральной характеристики в интервале частот $[0, 100]$ дает оценку $E_x^* = 0,994$.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Покажите, что для преобразования Фурье справедлив принцип суперпозиции.
2. Поясните физический смысл амплитудного и фазового спектров непериодического сигнала.
3. Поясните, что произойдет со спектром непериодического сигнала при изменении полярности последнего на противоположный.
4. Покажите, что спектральная характеристика сигнала, описываемого действительной функцией $x(t)$, обладает свойствами:

$$|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|, \quad \arg X(j\omega) = -\arg X(-j\omega).$$

5. Покажите, что спектральная характеристика сигнала, описываемого действительной четной функцией $x(t)$, обладает свойствами:

$$\operatorname{Re} X(j\omega) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos \omega t \cdot dt, \quad \operatorname{Im} X(j\omega) = 0.$$

6. Покажите, что спектральная характеристика сигнала, описываемого действительной четной функцией $x(t)$, обладает свойствами:

$$\operatorname{Re} X(j\omega) = 0, \operatorname{Im} X(j\omega) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \sin \omega t \cdot dt ,.$$

7. Как связаны между собой спектры одиночного импульса и периодической последовательности таких же импульсов?

8. Как изменятся амплитудный и фазовый спектры сигнала при его дифференцировании и интегрировании?

9. Запишите формулы для спектральных характеристик сигналов, графики которых показаны на рис. 3.9.

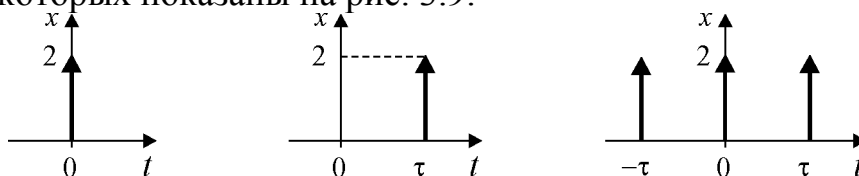


Рис. 3.9.

10. Найдите спектральные характеристики одиночных импульсов, графики которых показаны на рис. 3.10.

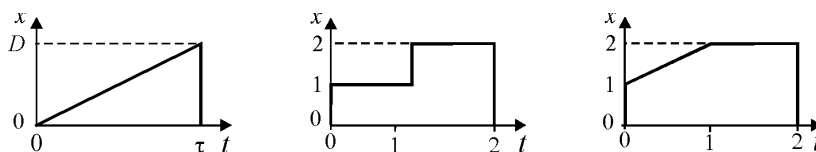


Рис. 3.10.

11. Найдите спектральную характеристику одиночного импульса (рис. 3.11) двумя способами:

1) непосредственно по функции $x(t)$;

2) при помощи свойства преобразования Фурье, связывающего спектральные характеристики функции $x(t)$ и ее производной $y(t) = dx(t)/dt$.

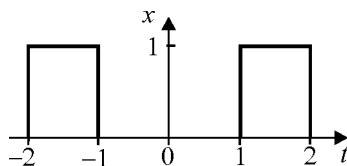


Рис. 3.11.

12. В чем состоит физический смысл равенства Парсеваля?

13. Что означает и для чего вводится понятие практической ширины спектра?

Глава 4

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО ФУНКЦИЯМ ЛАГЕРРА И УОЛША

Полиномы и функции Лагерра. – Разложение сигналов по функциям Лагерра – Выбор значения масштабного коэффициента. – Функции Радемахера. – Функции Уолша и способы их упорядочивания. – Свойства функций Уолша. – Разложение сигналов по функциям Уолша.

4.1. Полиномы и функции Лагерра

В настоящее время исследователи не ограничиваются применением только тригонометрической системы функций для разложения сигналов. Среди всего многообразия используемых систем ортогональных функций заметное место занимает система функций Лагерра. Это объясняется тем, что функции Лагерра обладают рядом достоинств.

Функции Лагерра получают с помощью ортогональных полиномов, расчетная формула которых имеет вид

$$L_n(\tau) = \frac{e^\tau d^n}{n! d \tau^n} (\tau^n e^{-\tau}), \quad \tau \geq 0.$$

Первые пять полиномов в соответствии с этой формулой описываются выражениями:

$$L_0(\tau) = 1;$$

$$L_1(\tau) = 1 - \tau;$$

$$L_2(\tau) = 1 - 2\tau + \tau^2/2;$$

$$L_3(\tau) = 1 - 3\tau + 3\tau^2/2 - \tau^3/6;$$

$$L_4(\tau) = 1 - 4\tau + 3\tau^2 - 2\tau^3/3 - \tau^4/24.$$

Полиномы Лагерра ортогональны на полуоси $0 < \tau < \infty$ с весом $\rho(\tau) = \exp(-\tau)$, то есть они удовлетворяют условию

$$\int e^{-\tau} L_n(\tau) L_m(\tau) d\tau = \begin{cases} r_n = (n!)^2 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases}$$

Поскольку полиномы Лагерра образуют систему расходящихся при $\tau \rightarrow \infty$ функций, для разложения сигналов используют функции Лагерра

$$l_n(\tau) = \sqrt{\rho(\tau)} L_n(\tau) = e^{-\tau/2} L_n(\tau), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

После замены $\tau = 2\alpha t$ и умножения на нормирующий коэффициент $\sqrt{2\alpha}$ первые пять функций Лагерра принимают вид:

$$l_0(t) = \sqrt{2\alpha} \cdot e^{-\alpha t} ;$$

$$l_1(t) = \sqrt{2\alpha} \cdot e^{-\alpha t} (1 - 2\alpha t);$$

$$l_2(t) = \sqrt{2\alpha} \cdot e^{-\alpha t} (1 - 4\alpha t + 2\alpha^2 t^2);$$

$$l_3(t) = \sqrt{2\alpha} \cdot e^{-\alpha t} (1 - 6\alpha t + 6\alpha^2 t^2 - 4\alpha^3 t^3/3);$$

$$l_4(t) = \sqrt{2\alpha} \cdot e^{-\alpha t} (1 - 8\alpha t + 12\alpha^2 t^2 - 16\alpha^3 t^3/3 + 2\alpha^4 t^4/3),$$

где α – масштабный коэффициент.

В общем виде функции описываются формулой

$$l_n(t) = \sqrt{2\alpha} \cdot e^{-\alpha t} \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{C_n^j}{j!} (2\alpha t)^j , \quad (4.1)$$

где C_n^j – число сочетаний из n по j .

Функции Лагерра образуют полную и ортогональную систему на одностороннем интервале $[0, \infty)$, то есть они удовлетворяют соотношению

$$\int_0^{\infty} l_n(t) l_m(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases}$$

Графики первых пяти функций Лагерра приведены на рис. 4.1. Из них видно, что номер функции Лагерра соответствует числу пересечений ею нулевого уровня.

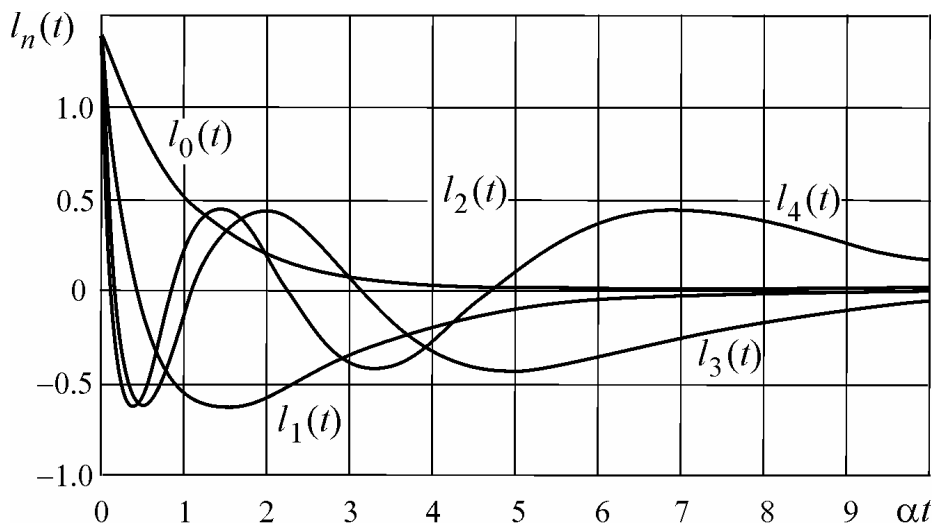


Рис. 4.1. Графики первых пяти функций Лагерра

Выражение (4.1) в области преобразования Лапласа будет иметь изображение

$$L_n(\alpha, s) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{s + \alpha} \left(\frac{s - \alpha}{s + \alpha} \right)^n. \quad (4.2)$$

Из формулы (4.2) следует, что n -я функция Лагерра определяется из функции с номером $n - 1$ путем умножения на элемент с передаточной функцией

$$L(\alpha, s) = \frac{s - \alpha}{s + \alpha}.$$

4.2. Разложение сигналов по функциям Лагерра

Сигнал $x(t)$, определенный на интервале $(0, \infty)$, можно представить в виде разложения по системе функций Лагерра:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i l_i(t).$$

Значения коэффициентов $\lambda_i, i = 0, 1, \dots$, вычисляются по формуле

$$\lambda_i = \int_0^{\infty} x(t) l_i(t) dt.$$

Совокупность коэффициентов $\lambda_i, i = 0, 1, \dots$, представляет спектр сигнала в базисе функций Лагерра.

Показано, что энергия сигнала, представленного в виде разложения по функциям Лагерра, определяется выражением

$$E_x = \int_0^{\infty} x^2(t) dt = \sum_{i=0}^{\infty} C_i^2.$$

Если для аппроксимации сигнала используется усеченный ряд

$$x^*(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i l_i(t).$$

то для оценки качества аппроксимации сигнала может быть использована величина

$$e_{xN} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{C_i^2}{E_x},$$

характеризующая часть энергии сигнала, приходящуюся на первые N членов разложения.

Важным пунктом спектрального анализа с использованием функций Лагерра является выбор значения масштабного коэффициента α . Его начальное значение рекомендуется выбирать так, чтобы длительно-

сти исследуемого сигнала и функции Лагерра с номером $i \approx N/2$ были примерно равны. В последующем значение коэффициента α уточняется.

Функции Лагерра получили широкое распространение в системах обработки сигналов различного назначения. Это в значительной степени объясняется простотой их генерирования. Оказывается, что функция Лагерра $l_i(t)$ по форме совпадает с импульсной характеристикой системы, состоящей из последовательно соединенных простых электрических цепей.

Пример. Звено затухания (полузапаздывания) описывается импульсной переходной функцией

$$w(t) = 0,5 \sqrt{\frac{T}{\pi t^3}} \cdot e^{-\frac{T}{t}}, \quad t \geq 0.$$

График функции показан на рис. 4.2 сплошной линией. Используем для аппроксимации данной функции первые четыре составляющие системы Лагерра. Получены следующие значения коэффициентов: $\lambda_0 = 0,271$; $\lambda_1 = -0,271$; $\lambda_2 = -0,0002547$; $\lambda_3 = -0,089$.

Таким образом, аппроксимирующая функция описывается формулой

$$w^*(t) = 0,271l_0(t) - 0,271l_1(t) - 0,0002547l_2(t) - 0,089l_3(t).$$

График аппроксимирующей функции изображен на рис. 4.2 пунктирной линией.

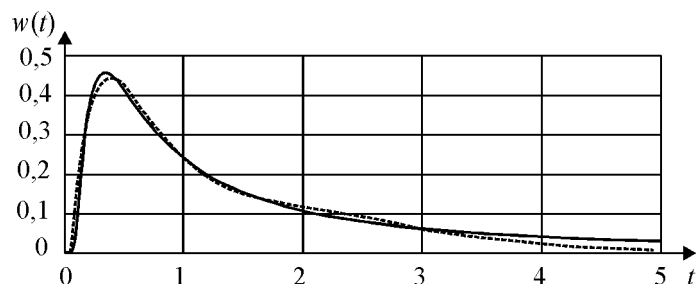


Рис. 4.2. Графики импульсной переходной функции (сплошная линия) и аппроксимирующей функции (пунктирная линия)

4.3. Функции Уолша и способы их упорядочивания

Функции Уолша и основанное на этих функциях преобразование обладает рядом свойств, благодаря которым их применение в системах обработки сигналов часто оказывается более предпочтительным по сравнению с другими. Эти функции получили широкое распространение при обработке речевых сигналов, при обработке изображений в биологии и медицине, в цифровой голографии и многих других областях.

Система функций Уолша впервые была описана математиком Уолшем (J. Walsh) в 1923 году. В настоящее время существует несколько модификаций этой системы, отличающихся способом нумерации образующих ее функций.

Функции Уолша определяются через функции Радемахера. Последние, в свою очередь, образуются из синусоидальных функций с помощью формулы

$$r_0(\theta) \equiv 1, \quad r_i(\theta) = \text{sign}(\sin 2^i \pi \theta), \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Здесь $\theta = t/T$, где T – период функций, и $0 \leq \theta < 1$. Символом sign обозначается сигнум-функция

$$\text{sign}x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Из (4.3) следует, что функции Радемахера являются дискретными и принимают только два значения: $+1$ и -1 . На рис. 4.3 представлены первые четыре функции Радемахера.

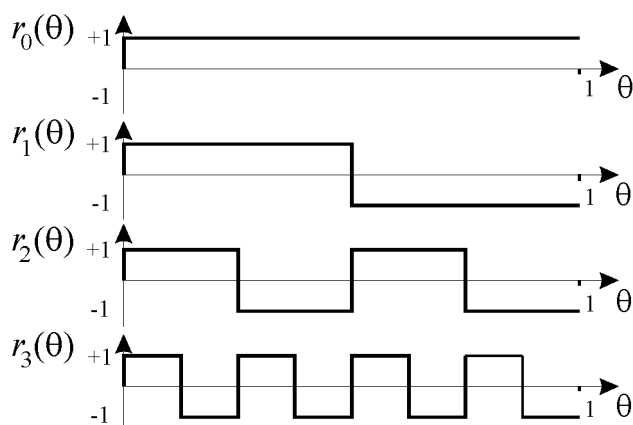


Рис. 4.3. Графики первых четырех функций Радемахера

Система функций Радемахера является ортогональной на интервале $[0, 1)$, но неполной, так как на том же интервале существуют другие функции, ортогональные им. Система функций Уолша является расширением системы функций Радемахера до полной системы.

Рассмотрим в качестве базовой систему функций Уолша, в которой функции упорядочены по числу пересечений ими нулевого уровня. Функции Уолша определяются с помощью функций Радемахера следующим образом:

$$\text{wal}_0(\theta) \equiv 1; \quad \text{wal}_i(\theta) = \prod_{j=1}^n [r_j(\theta)]^{i_j}, \quad (4.4)$$

где i_j^r – значение j -го разряда в записи номера функции i в коде Грея.

В табл. 4.1 показаны этапы образования системы Уолша, состоящей из $N = 2^3 = 8$ функций, в соответствии с формулой (4.4). Сначала записывается код номера i функции Уолша в двоичном коде. Затем этот номер представляется в коде Грея. Код Грея связан с обычным двоичным кодом следующим образом. Если в обычной двоичной системе счисления число

$$i = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1,$$

то в коде Грея это число записывается в виде

$$i = b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1,$$

где $b_1 = a_1 \oplus a_2, b_2 = a_2 \oplus a_3, \dots, b_{n-1} = a_{n-1} \oplus a_n, b_n = a_n$;

\oplus – знак суммирования по модулю 2 ($0 \oplus 0 = 0; 0 \oplus 1 = 1; 1 \oplus 0 = 1; 1 \oplus 1 = 0$).

Таблица 4.1

Образование функций Уолша с помощью функций Радемахера

Номер i функции Уолша	Представление числа i в двоичном коде	Представление числа i в коде Грея	Формула образования функции Уолша $wal_i(\theta)$
0	000	000	$wal_0(\theta) = 1$
1	001	001	$wal_1(\theta) = r_1(\theta)$
2	010	011	$wal_2(\theta) = r_1(\theta)r_2(\theta)$
3	011	010	$wal_3(\theta) = r_2(\theta)$
4	100	110	$wal_4(\theta) = r_2(\theta)r_3(\theta)$
5	101	111	$wal_5(\theta) = r_1(\theta)r_2(\theta)r_3(\theta)$
6	110	101	$wal_6(\theta) = r_1(\theta)r_3(\theta)$
7	111	100	$wal_7(\theta) = r_3(\theta)$

В последнем столбце табл. 4.1 приведены аналитические выражения для функций Уолша. Легко видеть, что четыре функции Уолша (с номерами 0, 1, 3 и 7) являются функциями Радемахера. Остальные образованы из функций Радемахера путем умножения их друг на друга. Графики функций Уолша, образованные согласно табл. 4.1, приведены на рис. 4.4.

Функции Уолша являются кусочно-постоянными. Интервал определения функций можно рассматривать состоящим из $N = 2^n$, $n = 1, 2, \dots$ равных частей. На каждом из них функции Уолша принимают значения +1 или -1. В точках разрыва функции непрерывны справа.

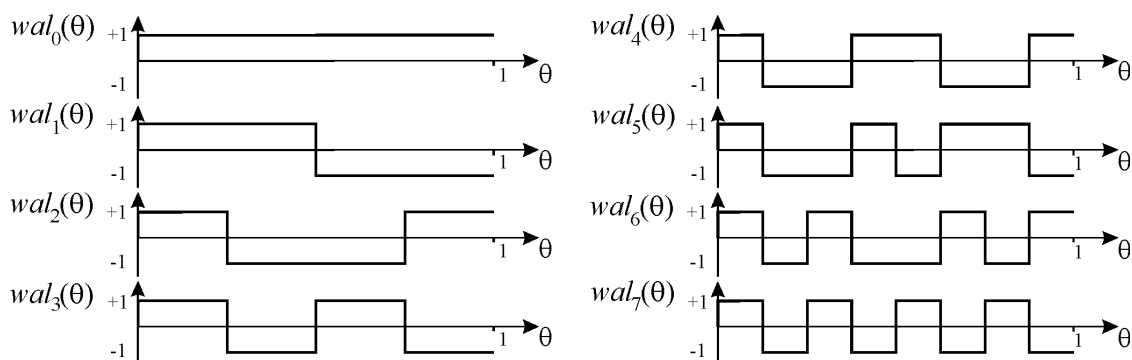


Рис. 4.4. Графики первых восьми функций Уолша

В рассмотренной системе Уолша функции упорядочены по числу пересечений ими нулевого уровня, то есть каждая последующая функция имеет на одно пересечение нулевого уровня больше, чем предыдущая. На практике получили распространение и другие способы упорядочения.

В системе Пэли описанные выше функции обозначаются $pal_i(\theta)$. Их порядок определяется записью числа i в коде Грея, который читается как запись числа в двоичном коде. Систему Адамара образуют те же функции, которые обозначаются $had_i(\theta)$. Нумерация функций в этой системе определяется также кодом Грея, который читается в обратном порядке как двоичный код. В табл. 4.2 показано соответствие между номерами первых восьми функций в системах, упорядоченных по Уолшу, Адамару и Пэли.

Таблица 4.2

Порядок функций в системах Уолша, Пэли и Адамара

Запись числа i в коде Грея	000	001	011	010	110	111	101	100
Номер i функции в системе Уолша	0	1	2	3	4	5	6	7
Номер i функции в системе Пэли	0	1	3	2	6	7	5	4
Номер i функции в системе Адамара	0	4	6	2	3	7	5	1

Приведем основные свойства системы Уолша.

1. Функции Уолша ортогональны и нормированы, так как

$$\int_0^1 wal_i(\theta) wal_j(\theta) d\theta = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

2. Среднее значение функций Уолша для всех $i \neq 0$ равно нулю:

$$\int_0^1 wal_i(\theta) d\theta = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

3. Произведение двух функций Уолша равно новой функции Уолша из этой же системы:

$$wal_i(\theta) \cdot wal_j(\theta) = wal_k(\theta),$$

где $k = i \oplus j$, \oplus – символ поразрядного суммирования по модулю два: $1 \oplus 1 = 0$, $1 \oplus 0 = 1$, $0 \oplus 1 = 1$, $0 \oplus 0 = 0$. Это свойство называется свойством *мультипликативности*.

4. Четным относительно середины интервала ($\theta = 0,5$) функциям соответствуют четные значения i и наоборот.

4.4. Разложение сигналов по функциям Уолша

Рассмотрим основные особенности спектрального представления сигналов в базисе Уолша, в частности, сигналов, заданных на интервале $[0, T)$. Для разложения таких сигналов удобно использовать функции Уолша, ортогональные на отрезке $[0, 1)$, которые после преобразования их аргумента записываются в виде $wal_i(t/T)$.

Ряд Уолша одномерного сигнала $x(t)$, $t \in [0, T)$, будет иметь вид

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i wal_i\left(\frac{t}{T}\right),$$

где

$$c_i = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) wal_i\left(\frac{t}{T}\right) dt. \quad (4.5)$$

Усеченные ряды Уолша

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i wal_i\left(\frac{t}{T}\right)$$

обладают равномерной, среднеквадратической сходимостью и сходимостью в среднем и могут быть использованы для аппроксимации сигналов, описываемых интегрируемыми функциями.

Функции Уолша на интервалах дискретности имеют значения ± 1 , что устраняет операцию умножения при вычислении их коэффициентов. Спектральный анализ по Уолшу связан с меньшими затратами машинного времени, особенно при использовании алгоритма быстрого преобразования Уолша (БПУ). В сравнении с анализом по гармоническим функциям затраты машинного времени снижаются в два раза и более.

Как отмечалось выше, на практике используются функции Уолша с различными способами упорядочения. С общей точки зрения для спектрального разложения сигналов они равноправны. Однако для некоторого конкретного сигнала спектр по функциям одной системы может сходиться быстрее, чем спектр по функциям других систем. Поэтому преимущество той или другой системы может проявляться при спектральном разложении конкретных сигналов с последующим использованием усеченных рядов.

Пример. Дан сигнал в виде треугольного импульса (рис. 4.5, а). Найдем значения первых восьми коэффициентов в разложении импульса по системе функций Уолша.

Заданный сигнал описывается выражением

$$x(t) = \frac{A}{T} \cdot t, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.6)$$

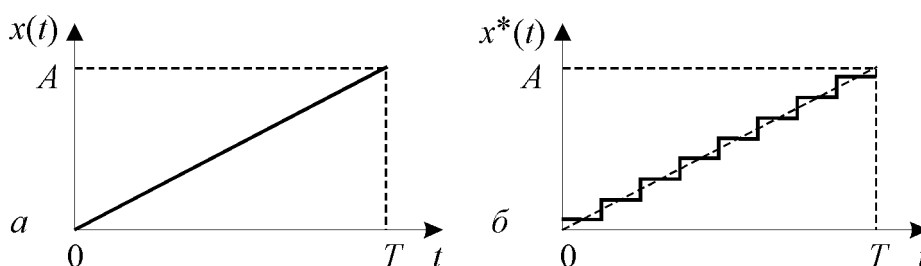


Рис. 4.5. Графики исходного (а) и аппроксимирующего (б) сигналов

Значения коэффициентов ряда Уолша рассчитываем по формуле (4.5):

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} t dt = \frac{A}{T^2} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^T = \frac{A}{2};$$

$$c_1 = \frac{1}{T} \left(\int_0^{T/2} \frac{A}{T} t dt - \int_{T/2}^T \frac{A}{T} t dt \right) = \frac{A}{T^2} \left(\frac{t^2}{2} \Big|_0^{T/2} - \frac{t^2}{2} \Big|_{T/2}^T \right) = -\frac{A}{4};$$

$$c_2 = 0; \quad c_3 = -\frac{A}{8}; \quad c_4 = c_5 = c_6 = 0; \quad c_7 = -\frac{A}{16}.$$

Аппроксимация рассматриваемого сигнала усеченным рядом Уолша

$$x^*(t) = c_0 wal_0\left(\frac{t}{T}\right) + c_1 wal_1\left(\frac{t}{T}\right) + c_3 wal_3\left(\frac{t}{T}\right) + c_7 wal_7\left(\frac{t}{T}\right) \quad (4.7)$$

показана на рис. 4.5, б.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Можно ли использовать функции Лагерра для разложения сигналов, заданных на ограниченном интервале?

2. Какую роль выполняет параметр α функций Лагерра? Как его выбрать?

3. Поясните, что произойдет, если убрать нормирующий множитель $\sqrt{2\alpha}$ в функциях Лагерра.

4. Укажите основные преимущества и область применения функций Уолша.

5. Даны функции Уолша $wal_1(\theta)$ и $wal_3(\theta)$. На примере этих функций покажите, что функции Уолша удовлетворяют условию ортогональности.

6. Изобразите спектральную диаграмму разложения в базисе Уолша треугольного импульса, рассмотренного в примере.

7. Перепишите формулу (4.7), используя функции $had_i(\theta)$ и $pal_i(\theta)$.

8. Укажите основные отличия ортогональных функций Лагерра и Уолша.

9. Найдите произведение двух функций Уолша

$$wal_k(\theta) = wal_i(\theta) \cdot wal_j(\theta),$$

если: а) $i = 2, j = 6$; б) $i = 10, j = 5$; в) $i = 7, j = 15$. Определите номер k полученной функции.

10. Определите функцию Уолша $wal_6(\theta)$ через функции Радемахера. Нарисуйте график этой функции.

11. Рассчитайте энергию сигналов, описываемых функциями (4.6) и (4.7). Сравните полученные результаты.

12. Дан сигнал в виде треугольного импульса (рис. 4.6). Найдите значения первых восьми коэффициентов в разложении импульса по системе функций Уолша.

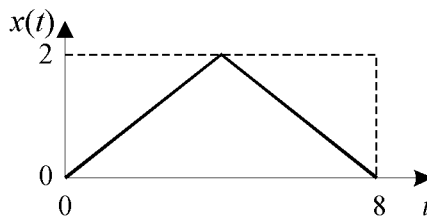


Рис. 4.6. График треугольного импульса

Глава 5

ЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СИСТЕМЫ

Свойства линейных стационарных систем: линейность, стационарность, физическая реализуемость. – Дифференциальное уравнение. – Передаточная функция. – Частотная передаточная функция и частотные характеристики. – Импульсная переходная функция. – Расчет реакции системы на детерминированные сигналы при помощи интеграла свертки. – Спектральный и операторный методы определения реакции системы на детерминированные сигналы. – Условия неискаженной передачи сигналов. – Интегрирование и дифференцирование детерминированных сигналов

5.1. Общие понятия

Обработка непрерывных сигналов заключается в преобразовании их свойств при помощи различных устройств и систем. Назовем простейшие виды преобразования сигналов: выпрямление, усиление, ограничение, фильтрация, модуляция, демодуляция и т.д.

Под *непрерывной системой* будем понимать техническое устройство, которая осуществляет преобразование непрерывного сигнала $x(t)$ в другой непрерывный сигнал $y(t)$ в соответствии с заданным оператором R (рис. 5.1).

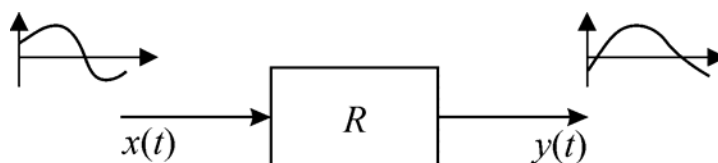


Рис. 5.1. Представление непрерывной системы

Система называется *динамической*, если текущее значение выходного сигнала зависит не только от текущих, но и более ранних значений внешних воздействий (входных сигналов).

Основная задача, которую приходится решать при анализе систем обработки сигналов, заключается в следующем. Дана система, с помощью которой преобразуется сигнал (рис. 5.1). На вход системы подается сигнал $x(t)$. Требуется найти выходной сигнал $y(t)$.

Преобразование входного сигнала $x(t)$ в выходной сигнал $y(t)$ описывается соотношением

$$R_y[y(t)] = R_x[x(t)],$$

где R_x и R_y – некоторые операторы, применяемые соответственно к функциям $x(t)$ и $y(t)$. Конкретный вид этих операторов зависит от характера преобразования сигнала, осуществляемого системой. Например, при выпрямлении будем иметь: $y(t) = |x(t)|$.

В зависимости от вида оператора R непрерывные системы могут быть:

- линейными или нелинейными;
- стационарными или нестационарными;
- физически реализуемыми (каузальными) или нереализуемыми (некаузальными).

Линейность. Непрерывная система называется линейной тогда и только тогда, если ее операторы обладают свойствами *аддитивности* и *однородности*:

$$R[x_1(t) + x_2(t)] = R[x_1(t)] + R[x_2(t)] \text{ для любых } x_1(t) \text{ и } x_2(t);$$

$$R[\alpha \cdot x(t)] = \alpha \cdot R[x(t)] \text{ для любых } \alpha \text{ и } x(t).$$

Эти свойства можно записать в виде одного условия:

$$R[\alpha \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t)] = \alpha \cdot R[x_1(t)] + \beta \cdot R[x_2(t)].$$

Непосредственно из формулы легко видеть, что линейными операторами являются операторы умножения на постоянное число и суммирования. К линейным операторам относятся операторы интегрирования и дифференцирования:

$$y(t) = \frac{d}{dt}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha \frac{dx_1(t)}{dt} + \beta \frac{dx_2(t)}{dt};$$

$$y(t) = \int [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] dt = \alpha \int x_1(t) dt + \beta \int x_2(t) dt$$

В то же время операторы логарифмирования или возведения в степень не обладают свойством линейности. Действительно:

$$\ln[x_1(t) + x_2(t)] \neq \ln[x_1(t)] + \ln[x_2(t)];$$

$$[x_1(t) + x_2(t)]^2 \neq x_1^2(t) + x_2^2(t).$$

Ни одна реальная система преобразования сигналов, строго говоря, не удовлетворяет условиям линейности.

Стационарность. Стационарная система обладает следующим свойством: если реакция на входной сигнал $x(t)$ равна $y(t) = R[x(t)]$, то для любого вещественного постоянного значения t_0 имеем $y(t - t_0) = R[x(t - t_0)]$. Это означает, что данное воздействие будет всегда

приводить к одной и той же реакции независимо от времени приложения воздействия.

Система называется стационарной (инвариантной во времени), если ее параметры не изменяются во времени.

Физическая реализуемость. Физически реализуемой называется система, у которой выходной сигнал в текущий момент времени не зависит от значений входного сигнала в последующие моменты времени.

5.2. Дифференциальное уравнение линейной стационарной системы

Линейная стационарная система описывается дифференциальным уравнением

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t), \quad (5.1)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – соответственно входной и выходной сигналы, $a_i, i=0, \dots, n$, $b_j, j=0, \dots, m$ – постоянные коэффициенты.

В реальных системах всегда выполняется условие $n \geq m$. Это неравенство называют условием физической реализуемости системы. Оно означает, что нельзя реализовать систему, у которой $n < m$. Порядок наивысшей входящей в это уравнение производной выходного сигнала называется *порядком* уравнения.

Уравнение (5.1) можно записывать в операторной форме:

$$(a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0) y(t) = (b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0) x(t), \quad (5.2)$$

где $p = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования.

Обозначим

$$A(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0, \quad B(p) = b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0.$$

Тогда дифференциальное уравнение запишется так:

$$A(p)y(t) = B(p)x(t),$$

Следует отметить, что точное отображение процессов, происходящих в реальных устройствах и системах преобразования сигналов, требует описания с помощью нелинейных дифференциальных уравнений. Однако во многих случаях инженеры и исследователи, пренебрегая некоторыми второстепенными факторами или накладывая определенные ограничения, сводят решение конкретных задач к исследованию линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Объясняется это, во-первых, завершенностью теории их интегрирования, позволяющей получить решение в элементарных функциях. Во-

вторых, во многих практически важных задачах точность, даваемая линейным приближением, является вполне достаточной.

Для составления дифференциального уравнения система расчленяется на простейшие составные части, и для каждой из них записываются уравнения элементов и связей между ними. В качестве примера можно привести основные законы электротехники (законы Ома и Фарадея):

$$i = \frac{u}{R}, \quad L \frac{di}{dt} = u, \quad i = C \frac{du}{dt}.$$

В этом случае уравнения связи будут представлены в виде законов Кирхгофа. С их помощью составляются уравнения сложной цепи по контурам и узловым точкам.

5.3. Передаточная функция линейной стационарной системы

Передаточная функция системы определяется по ее дифференциальному уравнению при помощи преобразования Лапласа. Применяв к уравнению (5.1) системы преобразование Лапласа, получим

$$A(s)Y(s) = B(s)X(s) + C_n(s), \quad (5.3)$$

где $A(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$, $B(s) = b_n s^m + \dots + b_1 s + b_0$, $C_n(s)$ – полином, учитывающий начальные условия, и изображения $X(s)$ и $Y(s)$ входного и выходного сигналов определяются соответственно выражениями:

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt;$$

$$Y(s) = L\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt.$$

Уравнение (5.3) можно привести к следующему виду:

$$Y(s) = W(s)X(s) + W_n(s), \quad (5.4)$$

где

$$W(s) = B(s)/A(s); \quad W_n(s) = C_n(s)/A(s).$$

Уравнение (5.4) связывает изображение выходного сигнала системы с изображением входного сигнала и начальным состоянием системы. Функция $W(s)$ характеризует динамические свойства системы. Она не зависит от входного сигнала и полностью определяется параметрами системы. Эту функцию называют *передаточной функцией*.

С другой стороны, при нулевых начальных условиях $W_n(s) = 0$, и из уравнения (5.4) будем иметь:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}.$$

Поэтому *передаточной функцией* $W(s)$ системы называется отношение изображения $Y(s)$ выходного сигнала к изображению $X(s)$ входного сигнала при условии, что все начальные условия равны нулю. Для систем, описываемых обыкновенным дифференциальным уравнением, передаточная функция является дробно-рациональной функцией относительно оператора преобразования Лапласа:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (5.5)$$

Сравнив полученное выражение с дифференциальным уравнением звена (5.2), легко заметить, что формально передаточную функцию звена можно определить как отношение оператора правой части к оператору левой части дифференциального уравнения. Очевидно, и наоборот, зная передаточную функцию системы (5.5), легко написать ее дифференциальное уравнение.

Передаточную функцию линейной стационарной системы можно представить в виде

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m (s - v_1)(s - v_2) \dots (s - v_m)}{a_n (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n)}. \quad (5.6)$$

Здесь числа v_1, v_2, \dots, v_m называют нулями передаточной функции. Они являются корнями уравнения

$$B(s) = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0 = 0$$

и могут принимать как вещественные, так и комплексные значения.

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называют полюсами передаточной функции (5.6). Они находятся как корни так называемого характеристического уравнения системы

$$A(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

и так же, как нули, могут принимать вещественные и комплексные значения. Если все числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ различны, то полюсы функции (5.6) называются *простыми*. Если же среди этих чисел встречаются одинаковые, то соответствующие полюсы называются *кратными*.

Передаточная функция существует только для линейных стационарных систем. В нестационарных системах один или несколько параметров зависят от времени, поэтому использовать преобразование Лапласа нельзя.

Передаточная функция описывает поведение системы в терминах вход-выход и не несет никакой информации о внутренних переменных системы и характере их изменения.

5.4. Частотная передаточная функция и частотные характеристики линейной стационарной системы

Рассмотрим линейную стационарную систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$(a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0)y(t) = (b_n p^n + \dots + b_1 p + b_0)x(t).$$

Применим к дифференциальному уравнению системы преобразование Фурье. Имея в виду, что

$$X(j\omega) = \mathfrak{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt,$$

$$Y(j\omega) = \mathfrak{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt,$$

и используя свойство линейности и формулы для изображений производных, получим

$$[a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 (j\omega) + a_0]Y(j\omega) = [b_n (j\omega)^m + \dots + b_1 (j\omega) + b_0]X(j\omega).$$

Частотная передаточная функция $W(j\omega)$ определяется как отношение преобразований Фурье выходного и входного сигналов:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{b_n (j\omega)^m + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}.$$

Функция $W(j\omega)$ характеризует динамические свойства самой системы и не зависит от характера приложенных к системе воздействий. Она легко может быть получена из передаточной функции (5.5) при чисто мнимых значениях переменной s , то есть при $s = j\omega$.

Зная частотную передаточную функцию линейной стационарной системы, можно найти реакцию системы на гармонический входной сигнал в установившемся режиме (рис. 5.2). Если на вход линейной стационарной системы поступает гармонический сигнал

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha_0),$$

то на ее выходе в установившемся режиме будем иметь гармонический сигнал, отличающийся амплитудой и частотой:

$$y(t) = B \sin(\omega_0 t + \beta_0).$$

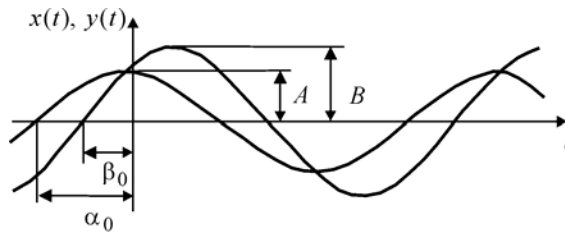


Рис. 5.2. Входной и выходной сигналы линейной системы

Амплитуда и фаза выходного сигнала определяются соответственно формулами:

$$B=|W(j\omega_0)| \cdot A ; \quad (5.7)$$

$$\beta_0 = \alpha_0 + \arg W(j\omega_0) . \quad (5.8)$$

Для наглядного представления частотных свойств системы используются так называемые частотные характеристики.

Вектор-годограф $W(j\omega)$, построенный на комплексной плоскости при изменении частоты от $\omega=0$ до $\omega=\infty$, называется *амплитудно-фазовой частотной характеристикой* системы.

Представим функцию $W(j\omega)$ в следующем виде

$$W(j\omega) = W(\omega) e^{j\varphi(\omega)} ,$$

где

$$W(\omega) = |W(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg W(j\omega) .$$

Функция $W(\omega)$, $\omega \in [0, \infty)$, называется *амплитудно-частотной характеристикой* системы и представляет собой отношение амплитуды установившегося гармонического сигнала к амплитуде выходного гармонического сигнала при частоте входного сигнала, равной ω .

Функция $\varphi(\omega)$, $\omega \in [0, \infty)$, называется *фазо-частотной характеристикой* системы. Она показывает, на сколько выходной сигнал $y(t)$ при данной частоте ω сдвинут по фазе относительно входного сигнала $x(t)$.

Широкое распространение частотных методов для исследования линейных систем объясняется, с одной стороны, их физической наглядностью, а с другой – удобством и сравнительной простотой формального аппарата.

5.5. Импульсная переходная функция линейной стационарной системы

Импульсная переходная функция (ИПФ) $w(t)$ представляет собой реакцию системы, имеющей нулевые начальные условия, на входное воздействие в виде дельта-функции $\delta(t)$.

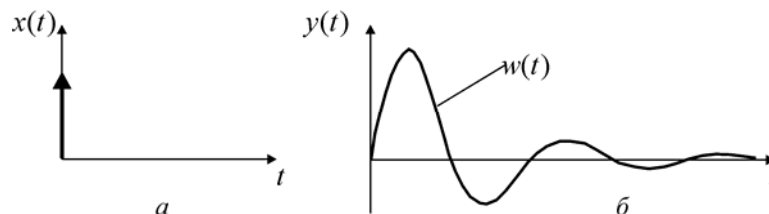


Рис. 5.3. Графическое представление дельта-функции и импульсной переходной функции

Найдем изображение ИПФ:

$$L\{w(t)\}=W(s)\cdot L\{\delta(t)\}=W(s)\cdot 1=W(s).$$

Отсюда следует, что импульсная переходная функция и передаточная функция системы связаны между собой формулами прямого и обратного преобразований Лапласа:

$$W(s)=L\{w(t)\}=\int_0^{\infty} w(t) e^{-st} dt;$$

$$w(t)=L^{-1}\{W(s)\}=\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} W(s) e^{st} ds.$$

ИПФ, как и передаточная функция, является исчерпывающей характеристикой системы при нулевых начальных условиях.

Очевидно, что у физически осуществимой системы всегда должен выполняться важнейший принцип: выходной сигнал не может возникнуть до момента появления входного сигнала. Поэтому $w(t)=0$ при $t<0$. Это условие называют *условием физической реализуемости* системы.

5.6. Устойчивость линейных стационарных систем

Система всегда подвергается действию внешних возмущающих сил, которые могут вывести систему из состояния равновесия. Если система устойчива, то она противостоит внешним воздействиям и, будучи выведена из состояния равновесия, снова к нему возвращается. Поэтому устойчивость является одним из основных условий работоспособности системы.

Пусть поведение линейной стационарной системы в динамическом режиме определяется дифференциальным уравнением (5.2). При произвольных входном воздействии и начальных условиях решение уравнения состоит из двух составляющих:

$$y(t)=y_{\text{п}}(t)+y_{\text{в}}(t),$$

где $y_{\text{п}}(t)$, $y_{\text{в}}(t)$ – соответственно переходная и вынужденная составляющие.

Линейная система называется *устойчивой*, если переходная составляющая с течением времени затухает, то есть

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{п}}(t)=0.$$

Если с течением времени переходная составляющая расходится и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{п}}(t)=\infty,$$

то система называется *неустойчивой*.

Переходная составляющая представляет собой решение однородного дифференциального уравнения

$$(a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0) y(t) = 0,$$

определяется формулой

$$y_{\text{п}}(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}, \quad (5.9)$$

где c_i – постоянные, p_i – корни характеристического уравнения

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0.$$

Таким образом, затухание переходной составляющей зависит от корней характеристического уравнения (полюсов системы). Полюсы системы могут быть вещественными, комплексно-сопряженными, мнимыми сопряженными и нулевыми. Несложный анализ выражения (5.9) позволяет сформулировать следующее необходимое и достаточное условие устойчивости.

Для того чтобы линейная система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все действительные полюсы были отрицательными, а все комплексные полюсы имели отрицательные вещественные части, то есть

$$\operatorname{Re} p_i < 0, \quad i=1, \dots, n. \quad (5.10)$$

Геометрически это означает, что полюсы устойчивой системы располагаются слева от мнимой оси на комплексной плоскости (рис. 5.4, а). Присутствие одного положительного вещественного полюса вызывает появление в (5.9) неограниченно возрастающей экспоненты. При наличии одной пары комплексно сопряженных полюсов с положительной вещественной частью (рис. 5.4, б), появляется гармоническое слагаемое с неограниченно возрастающей амплитудой. Таким образом, если хотя бы для одного полюса не выполняется условие (5.10), переходная составляющая $y_{\text{п}}(t)$ с течением времени возрастает, и система оказывается неустойчивой.

Если имеются полюсы на мнимой оси, а остальные полюсы удовлетворяют условию (5.10), система находится на границе устойчивости.

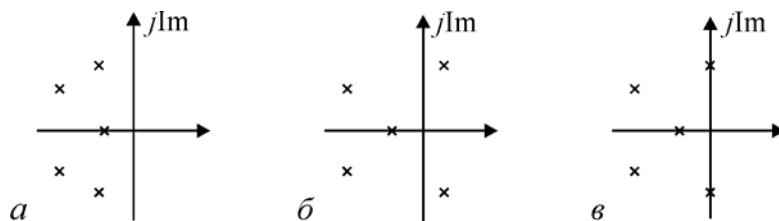


Рис. 5.4. Расположение полюсов линейной стационарной системы: а – устойчивой, б – неустойчивой, в – на границе устойчивости

5.7. Расчет реакции системы при помощи интеграла свертки

Этот метод основан на временном представлении сигнала и использовании временных характеристик системы. Он позволяет найти сигнал $y(t)$ на выходе линейной стационарной системы, если детерминированный сигнал на входе задан в виде функции $x(t)$ и известна импульсная переходная функция $w(t)$ системы.

Для уяснения сути метода поступим следующим образом. Входной сигнал $x(t)$ представим в виде последовательности бесконечно узких импульсов (рис. 5.5, а), имеющих высоту $x(\tau)$ и ширину $\Delta\tau$, так что площадь каждого импульса равна $x(\tau)\Delta\tau$.

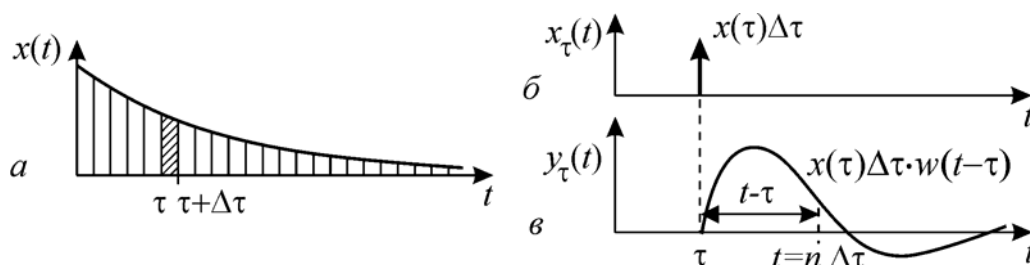


Рис. 5.5. К выводу интеграла свертки

Импульс с площадью $x(\tau)\Delta\tau$, действующий на систему в момент времени $\tau < t$ (рис. 5.5. б), приводит к появлению на выходе сигнала, который в момент времени t равен

$$y_{\tau}(t) = x(\tau)\Delta\tau \cdot w(t-\tau).$$

Для определения полного значения выходного сигнала в момент времени t нужно просуммировать действие всех импульсов в промежутке от $\tau=0$ до $\tau=t$. В результате суммирования получим

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} x(i\tau) \cdot \Delta\tau \cdot w(t-i\tau).$$

Приняв $\Delta\tau \rightarrow 0$ и заменив суммирование на интегрирование, получим

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot w(t-\tau) d\tau.$$

Можно показать, что справедлив и другой вариант формулы:

$$y(t) = \int_0^t x(t-\tau) \cdot w(\tau) d\tau.$$

Пример. На RC -цепь (рис. 5.6, а) при нулевых начальных условиях подается импульс тока $i(t) = A \exp(-\alpha t)$, $t \geq 0$. При помощи интеграла свертки найдем напряжение $u(t)$ на выходе цепи.

Передаточная функция RC -цепи равна

$$W(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1/C}{s + 1/RC}.$$

Этой передаточной функции соответствует импульсная переходная функция

$$w(t) = L^{-1}[W(s)] = \frac{1}{C} \cdot e^{-t/RC}, t \geq 0.$$

В соответствии с известной формулой будем иметь

$$u(t) = \int_0^t i(\tau) w(t-\tau) d\tau = \int_0^t A e^{-\alpha \tau} \frac{1}{C} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau.$$

Вынося за знак интеграла множитель $(A/C)e^{-t/RC}$, не зависящей от переменной интегрирования, и объединяя оставшиеся экспоненты, получим

$$u(t) = \frac{A}{C(\alpha - 1/RC)} (e^{-t/RC} - e^{-\alpha t}), t \geq 0.$$

Графики функции $u(t)$ имеет вид, показанный на рис. 5.6, б.

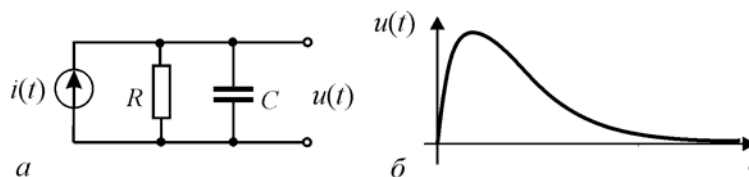


Рис. 5.6. Реакция RC -цепи на экспоненциальный импульс тока:
а – схема цепи; б – реакция цепи.

5.8. Спектральный метод определения реакции системы на детерминированные сигналы

Использование ряда Фурье

Данный метод основан на спектральном представлении сигналов и использовании математической модели системы в виде частотной передаточной функции $W(j\omega)$. Пусть сигнал, поступающий на вход системы, описывается периодической функцией $x(t)$. Представим его в виде тригонометрического ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n).$$

Сигнал на выходе системы будет описываться периодической функцией

$$y(t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^N B_n \cos(n\omega_1 t + \beta_n).$$

Здесь $B_0 = W(0) \cdot A_0$, а амплитуды и фазы гармонических составляющих рассчитываются согласно формулам (5.7) и (5.8):

$$B_n = |W(jn\omega_1)| \cdot A_n, \quad n=1, 2, \dots, N;$$

$$\beta_n = \alpha_n + \arg W(jn\omega_1), \quad n=1, 2, \dots, N.$$

Пример. На RC -цепь, частотная передаточная функция которой описывается выражением

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j0,01\omega},$$

поступает периодический сигнал в виде последовательности прямоугольных импульсов. Найти выходной сигнал $y(t)$ на выходе цепи.

Расчеты выполним в системе MathCAD с использованием вышеприведенных формул. Число учитываемых гармоник $N=50$. На рис. 5.7 показаны графики входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов на одном периоде.

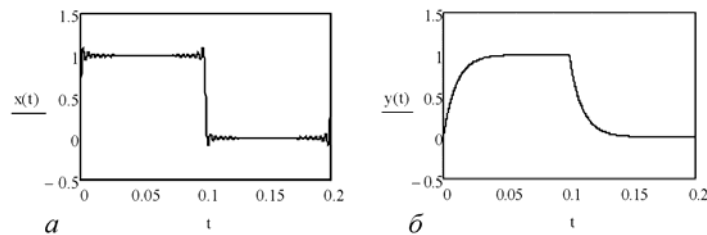


Рис. 5.7. Графики сигналов: a – входного $x(t)$, b – выходного $y(t)$

Использование преобразования Фурье

Пусть на вход линейной стационарной системы с частотной передаточной функцией $W(j\omega)$ подан произвольный сигнал $x(t)$, обладающий спектральной характеристикой $X(j\omega)$. Как известно, функции $x(t)$ и $X(j\omega)$ связаны формулами прямого и обратного преобразований Фурье:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Согласно спектральному методу анализа спектральная характеристика $Y(j\omega)$ сигнала $y(t)$ на выходе системы равна

$$Y(j\omega) = W(j\omega) X(j\omega).$$

Применив к функции $Y(j\omega)$ обратное преобразование Фурье, найдем выходной сигнал системы:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Таким образом, сигнал на выходе линейной стационарной системы можно получить суммированием составляющих спектра $X(j\omega)$ входного сигнала, взятых с весом $W(j\omega)$. Другими словами, частотная передаточная функция $W(j\omega)$ играет роль весовой функции, определяющей относительный вклад различных составляющих спектра $X(j\omega)$ в выходной сигнал $y(t)$.

Для сигналов, которые удовлетворяют условию $x(t) \equiv 0$ при $t < 0$, используется одностороннее преобразование:

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Недостатком интеграла Фурье является то, что он принадлежит к числу несобственных интегралов и может применяться для абсолютно интегрируемых функций времени, то есть для функций времени, удовлетворяющих неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

5.9. Операторный метод определения реакции системы на детерминированные сигналы

На практике для определения реакции системы на входной сигнал, приложенный в момент времени $t=0$, удобнее использовать операторный метод, в основе которого лежит преобразование Лапласа. При этом функция $x(t)$, описывающая входной сигнал, и функция $X(s)$, являющаяся ее изображением по Лапласу, связаны выражениями:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt;$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} X(s) e^{st} ds,$$

где $s = \sigma + j\omega$ – комплексная переменная.

Изображение выходного сигнала находится по формуле

$$Y(s) = W(s) X(s). \quad (5.11)$$

Выходной сигнал $y(t)$ определяется формулой обратного преобразования Лапласа:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} W(s) X(s) e^{st} ds \quad (5.12)$$

Интегрирование в выражении ведется снизу вверх вдоль всей прямой, параллельной мнимой оси, отстоящей от нее справа на величину c (рис. 5.8, *a*).

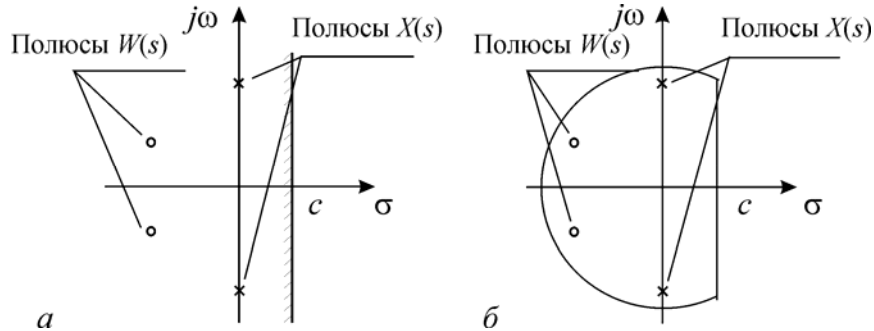


Рис. 5.8. Пути интегрирования на s -плоскости:
a – для интеграла (5.12), *б* – для интеграла (5.13).

Заметим, что интегрирование может вестись для любого $c > 0$, при этом все полюсы функции $W(s)X(s)$ должны лежать левее прямой интегрирования. В отличие от преобразования Фурье здесь изображение функции времени является функцией не частоты, а некоторой комплексной величины $s = c + j\omega$. Вещественная часть ее представляет собой так называемую абсциссу абсолютной сходимости, которая выбирается так, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\int_0^{\infty} |x(t)| e^{-ct} dt < \infty.$$

Для определения функции $y(t)$ от (5.12) можно перейти к контурному интегралу

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint W(s) X(s) e^{st} ds, \quad (5.13)$$

где контур интегрирования образуется дополнением прямой, лежащей в комплексной плоскости, дугой бесконечно большого радиуса, охватывающей все полюса подынтегральной функции $W(s)X(s)$. Контур интегрирования показан на рис. 5.8, *б*.

Для определения реакции $y(t)$ динамической системы на заданный входной сигнал $x(t)$ при условии, что она находится в покое, необходимо выполнить такие действия:

- 1) определить передаточную функцию $W(s)$ системы;
- 2) определить (обычно с помощью таблиц соответствий) изображение $X(s)$ входного сигнала;
- 3) по формуле (5.11) найти изображение выходного сигнала;
- 4) по формулам (5.12) или (5.13) определить оригинал $y(t)$, соответствующий изображению $Y(s)$.

Для вычисления интегралов (5.12) и (5.13) удобно пользоваться теоремой о вычетах, согласно которой значение интеграла равно сумме вычетов подынтегрального выражения в его особых точках:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Res} W(s) X(s) e^{st} \Big|_{s=s_i}$$

Пример. На RC -цепь (рис. 5.9, а) при нулевых начальных условиях подается импульс $u_1(t) = A \exp(-\alpha t)$, $t \geq 0$; $A = 10$ В; $\alpha = 8 \cdot 10^6$ с⁻¹. Постоянная времени цепи $RC = 0,8$ мкс. Найдём при помощи операторного метода сигнал $u_2(t)$ на выходе цепи.

Найдём передаточную функцию цепи

$$W(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

и изображение входного импульса

$$U_1(s) = L\{A \exp(-\alpha t)\} = \frac{A}{s + \alpha}.$$

Изображение выходного сигнала

$$U_2(s) = W(s) X(s) = \frac{A}{(RCs + 1)(s + \alpha)} = \frac{A/RC}{(s + 1/RC)(s + \alpha)}.$$

Полюсы функции $U_2(s)$ равны: $s_1 = -1/RC$; $s_2 = -\alpha$.

Найдём вычет в полюсе $s_1 = -1/RC$:

$$u_{21}(s) = \lim_{s \rightarrow -1/RC} \left[\frac{A/RC}{(s + 1/RC)(s + \alpha)} (s + 1/RC) e^{st} \right] = \frac{A}{\alpha RC - 1} e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Аналогично для полюса $s_2 = -\alpha$ получим

$$u_{22}(s) = \lim_{s \rightarrow -\alpha} \left[\frac{A/RC}{(s + 1/RC)(s + \alpha)} (s + \alpha) e^{st} \right] = -\frac{A}{\alpha RC - 1} e^{-\alpha t}.$$

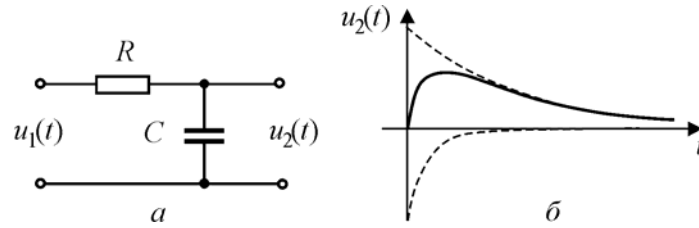


Рис. 5.9. Реакция RC – фильтра на экспоненциальный импульс:
 a – схема фильтра; $б$ – реакция фильтра.

Выходной сигнал находим как сумму вычетов:

$$u_2(t) = \frac{A}{\alpha RC - 1} \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{A}{1 - \alpha RC} \cdot e^{-\alpha t}.$$

Графики функции $u_2(t)$ и ее составляющих имеют вид, показанный на рис. 5.9, б.

5.10. Условия неискаженной передачи сигнала линейной стационарной системой

Считается, что сигнал $x(t)$ проходит через некоторую систему без искажения, если происходит только изменение масштаба и сдвиг во времени. При этом форма сигнала не изменяется. Если начало отсчета времени отнести к моменту возникновения входного сигнала $x(t)$, то неискаженный сигнал на выходе системы должен иметь вид

$$y(t) = k \cdot x(t - \tau),$$

где k – постоянный коэффициент.

Учитывая свойства линейности и временного сдвига, найдем спектральную характеристику выходного сигнала

$$Y(j\omega) = k \cdot e^{-j\omega\tau} X(j\omega).$$

Следовательно, неискажающая система должна иметь частотную передаточную функцию

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = k \cdot e^{-j\omega\tau}. \quad (5.14)$$

Из этого выражения видно, что система, удовлетворяющая условиям неискаженного преобразования сигнала, имеет не зависящую от частоты амплитудно-частотную характеристику

$$|W(j\omega)| = k \quad (5.15)$$

и фазо-частотную характеристику, линейно изменяющую с частотой:

$$\varphi(\omega) = -\omega\tau. \quad (5.16)$$

Частотные характеристики, построенные по выражениям (5.14), (5.15) и (5.16), показаны на рис. 5.10.

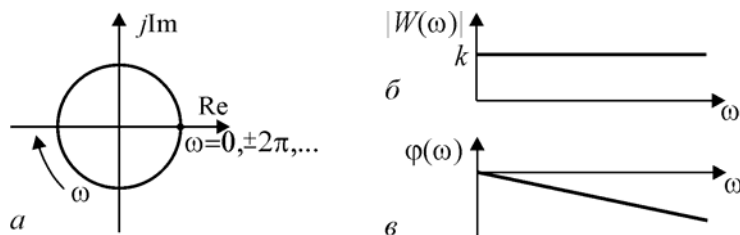


Рис. 5.10. Частотные характеристики системы, передающей сигнал без искажения: *a* – АФЧХ; *б* – АЧХ, *в* – ФЧХ

Задержка τ гармонического сигнала, создаваемая системой с частотной передаточной функцией (5.14), определяется наклоном фазо-частотной характеристики:

$$\tau = \left| \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \right|.$$

Заметим, что реализовать систему, полностью удовлетворяющую найденным условиям, нельзя. Частотные характеристики реальных систем могут приближаться к характеристикам неискажающей системы только в ограниченном диапазоне частот.

5.11. Интегрирование детерминированных сигналов

В электронике часто возникает необходимость в интегрировании сигналов. Сигнал на выходе идеального интегратора пропорционален интегралу от входного сигнала, то есть

$$y(t) = k \int_0^t x(\tau) d\tau, \quad k = \text{const}.$$

Этому уравнению на основании теоремы об интегрировании соответствует соотношение

$$Y(j\omega) = \frac{k}{j\omega} \cdot X(j\omega).$$

Отсюда получим частотную передаточную функцию идеального интегратора

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega}.$$

АЧХ и ФЧХ идеального интегратора показаны на рис. 5.11, *в* и *г* сплошными линиями. При $\omega > 0$ АЧХ идеального интегратора описывается гиперболой, а ФЧХ $\varphi(\omega) = -90^\circ$.

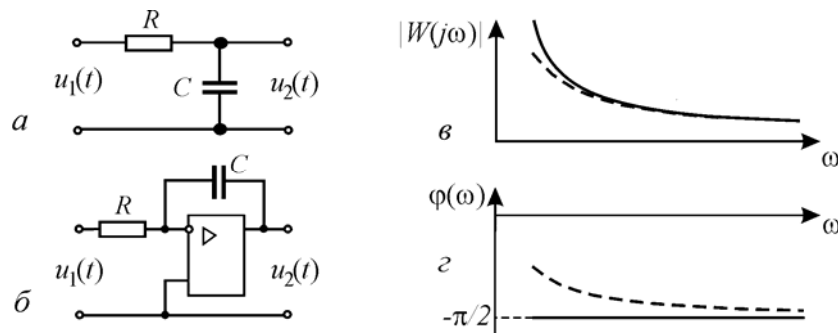


Рис. 5.11. Схемы и частотные характеристики интеграторов:
a – схема интегрирующей RC -цепи; *б* – схема активного интегратора;
в – АЧХ интеграторов; *г* – ФЧХ интеграторов

При определенных условиях, на которые укажем позднее, в качестве простейшего интегратора используется RC -цепь, схема которой показана на рис. 5.11, *a*.

Частотная передаточная функция цепи равна

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}, \quad (5.17)$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени цепи. При условии $\omega\tau \gg 1$ можно считать

$$W(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega\tau}.$$

Отсюда следует, что при условии $\omega\tau \gg 1$ (то есть в области высоких частот $\omega \gg 1/\tau$) данная RC -цепь производит приближенное интегрирование. АЧХ и ФЧХ RC -цепи, построенные по выражению (5.17), изображены на рис. 5.11, *в* и *г* пунктирными линиями. Сравнение частотных характеристик идеального интегратора и рассматриваемой RC -цепи позволяет сказать, что они хорошо совпадают в области высоких частот ($\omega \gg 1/\tau$). Следовательно, RC -цепь можно использовать для приближенного интегрирования сигналов, спектр которых содержит преимущественно высокочастотные составляющие. Зная ширину спектра сигнала, легко рассчитать постоянную времени τ интегрирования цепи и ее параметры.

Интервал частот, в котором можно выполнить интегрирование, существенно расширяется, если использовать активные RC -цепи. Схема простейшего интегратора, построенного на основе одного операционного усилителя, показана на рис. 5.11, *б*. Частотная передаточная функция интегратора равна

$$W(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{-k}{1 + j\omega RC(1+k)}, \quad (5.18)$$

где k – коэффициент усиления операционного усилителя.

Сравнение (5.18) с (5.17) показывает, что применение операционного усилителя приводит к увеличению постоянной времени в k раз. Поскольку операционный усилитель имеет коэффициент усиления k порядка десятков тысяч единиц, то диапазон частот, в котором интегрирование осуществляется с той же погрешностью, что и пассивной RC -цепью, существенно увеличивается. Частотные характеристики интегратора на операционном усилителе практически совпадают с характеристиками идеального интегратора.

5.12. Дифференцирование детерминированных сигналов

Сигнал на выходе идеального дифференциатора пропорционален производной от входного сигнала, то есть

$$y(t) = k \cdot \frac{dx(t)}{dt}, \quad k = \text{const}.$$

На основании теоремы о дифференцировании функции по времени этому уравнению в частотной области соответствует следующее уравнение

$$Y(j\omega) = k \cdot j\omega \cdot X(j\omega).$$

Отсюда следует, что частотная передаточная функция идеального дифференциатора равна

$$W(j\omega) = k \cdot j\omega.$$

АЧХ и ФЧХ идеального дифференциатора показаны на рис. 5.12, ν и z сплошной линией. При $\omega > 0$ АЧХ идеального дифференциатора линейно возрастает, а ФЧХ равна $+90^\circ$.

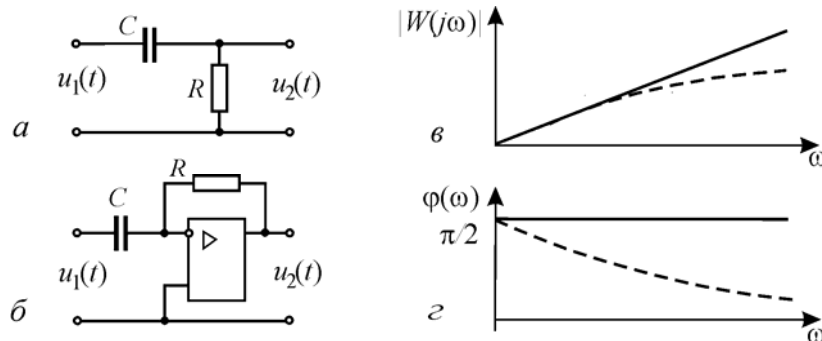


Рис. 5.12. Схемы и частотные характеристики дифференциаторов: a – схема дифференцирующей RC -цепи; b – схема активного дифференциатора; ν – АЧХ дифференциаторов; z – ФЧХ дифференциаторов

В качестве простейшего дифференциатора часто используется RC -цепь, схема которой показана на рис. 5.12, *а*.

Частотная передаточная функция цепи равна

$$W(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}, \quad (5.19)$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени цепи. При $\omega\tau \ll 1$ можно считать

$$W(j\omega) \approx j\omega\tau.$$

АЧХ и ФЧХ RC -цепи, построенные по выражению (5.19), изображены на рис. 5.12, *в* и *г* пунктирными линиями. В области низких частот $\omega\tau \ll 1$ данная RC -цепь производит приближенное дифференцирование.

Для дифференцирования используются активные RC -цепи. Схема простейшего дифференциатора, построенного на основе одного операционного усилителя, показана на рис. 5.12, *б*. Частотные характеристики дифференциатора на операционном усилителе при $k \gg 1$ практически совпадают с характеристиками идеального дифференциатора.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Даны непрерывные системы, описываемые уравнениями:

а) $\frac{dy(t)}{dt} + t^2 y(t) = (t+1)x(t)$; в) $3\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t)$;
 б) $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x^2(t)$; г) $\frac{dy(t)}{dt} + y^2(t) = x(t)$.

Классифицируйте их по признакам «линейность» и «стационарность».

2. Как определяется передаточная функция линейной стационарной системы по её дифференциальному уравнению?

3. Даны дифференциальные уравнения систем первого и второго порядка:

а) $a\frac{y(t)}{dt} + y(t) = b\frac{x(t)}{dt}$; б) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 25y(t) = x(t)$.

Запишите передаточные функции систем.

4. Даны системы, описываемые передаточными функциями:

а) $W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{0,5s}{0,01s+1}$; б) $W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{0,05s+1}{0,02s^2+0,1s+1}$.

Запишите дифференциальные уравнения систем.

4. Какой физический смысл имеет частотная передаточная функция?

5. Как связаны между собой АФЧХ, АЧХ и ФЧХ линейной стационарной системы?

6. Почему АФЧХ, АЧХ и ФЧХ системы целесообразно строить только для положительных значений частоты?

7. Дано дифференциальное уравнение системы первого порядка

$$a \frac{y(t)}{dt} + y(t) = b \frac{x(t)}{dt}.$$

Запишите передаточную функцию и формулы для АЧХ и ФЧХ.

8. RC -цепь описывается передаточной функцией

$$W(s) = \frac{1}{0,001s+1}.$$

Рассчитайте коэффициент передачи цепи на частоте $\omega = 1000$ рад/с.

9. На вход интегратора с коэффициентом передачи $k = 2 \text{ с}^{-1}$ подается гармоническое воздействие $x(t) = 5 \cdot \cos(100t)$. Определить параметры выходного сигнала в установившемся режиме.

10. Линейная стационарная система описывается дифференциальным уравнением:

$$\text{а) } 0,005 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t); \quad \text{б) } 0,005 \frac{dU_2}{dt} + U_2 = 0,005 \frac{dU_1}{dt}.$$

Рассчитайте амплитуду и фазу сигнала на выходе системы в установившемся режиме, если на вход системы подан сигнал $x(t) = \sin(200t)$.

11. Поясните математический и физический смысл импульсной переходной функции линейной системы.

12. Какова связь между импульсной переходной $w(t)$ и передаточной $W(s)$ функциями системы?

13. Какому условию удовлетворяет импульсная переходная функция физически реализуемой линейной системы?

14. Система описывается дифференциальным уравнением:

$$0,1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t).$$

Найдите импульсную переходную функцию цепи.

15. RC -цепь описывается передаточной функцией

$$W(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{RCs}{RCs+1}.$$

Найдите импульсную переходную функцию.

16. Поясните отличие между спектральным и операторным методами расчёта реакции системы на детерминированные воздействия.

17. На вход интегратора, описываемого уравнением $\dot{y}(t)=k \cdot x(t)$, подается ступенчатое воздействие $x(t)=2 \cdot 1(t)$. Запишите сигнал $y(t)$ на его выходе.

18. На вход идеального интегратора поступает сигнал в виде импульса

$$x(t) = D \cdot e^{-\alpha t} [1(t) - 1(t - \tau)].$$

Найдите выходной сигнал с помощью операторного метода.

19. На вход RC -цепи, описываемой передаточной функцией

$$W(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{0,01s + 1},$$

подается воздействие $U_1(t) = 2 \cdot 1(t)$. Найдите реакцию $U_2(t)$ цепи при нулевых начальных условиях.

20. На вход RC -цепи, описываемой уравнением

$$0,02 \frac{dU_2}{dt} + U_2 = 0,02 \frac{dU_1}{dt},$$

подается воздействие $U_1(t) = 5 \cdot \exp(-100t)$, $t \geq 0$. Найдите реакцию $U_2(t)$ цепи при нулевых начальных условиях.

Глава 6

АНАЛОГОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Задача фильтрации. – Понятие фильтра. – Базисные фильтры и их идеальные частотные характеристики. – Задача аппроксимации. – Типовые фильтры нижних частот. – Фильтры Баттерворта и их свойства. – Фильтры Чебышева первого рода и их свойства. – Денормирование и трансформация фильтров. – Примеры расчета фильтров

6.1. Задача фильтрации. Базисные фильтры и их идеальные частотные характеристики

Под фильтрацией понимают такое преобразование сигнала, при котором его определенные полезные особенности сохраняются, а нежелательные свойства подавляются. Осуществляется фильтрация при помощи фильтра, представляющего собой динамическую систему с определенными свойствами.

С помощью фильтрации решают многочисленные задачи, возникающие на практике, в том числе:

- 1) подавление шумов, маскирующих сигнал;
- 2) устранение искажения сигнала, вызванного несовершенством канала передачи или погрешностью измерения;
- 3) разделение двух или более различных сигналов, которые были преднамеренно смешены для того, чтобы в максимальной степени использовать канал;
- 4) разложение сигналов на частотные составляющие;
- 5) демодуляция сигналов;
- 6) преобразование дискретных сигналов в аналоговые;
- 7) ограничение полосы частот, занимаемой сигналами.

Фильтрацию можно представить как процесс изменения частотного спектра сигнала в некотором желаемом направлении. Этот процесс может привести к усилению или ослаблению частотных составляющих в некотором диапазоне частот, к подавлению или выделению какой-либо конкретной частотной составляющей и т.п.

Разработка практических методов фильтрации процессов зачастую базируется на следующем принципиальном допущении: *спектры полезного сигнала и сигнала помехи не перекрываются*. Например, в случае взаимного расположения спектров, показанного на рис. 6.1, а необходимо потребовать, чтобы фильтр пропускал все частотные составляю-

щие в диапазоне $[0, \omega_{гр}]$ и подавлял частотные составляющие в диапазоне $(\omega_{гр}, \infty)$.

Задача фильтрации существенно усложняется, если спектры полезного сигнала и сигнала помехи перекрываются (рис. 6.1, б). Здесь нельзя однозначно установить границу между полосой пропускания и полосой задерживания. Смещение границы влево приводит к большему искажению полезного сигнала за счет подавления его высокочастотных составляющих, а смещение вправо – к большему искажению за счет помех. В этом случае ставят и решают задачу поиска оптимального фильтра.

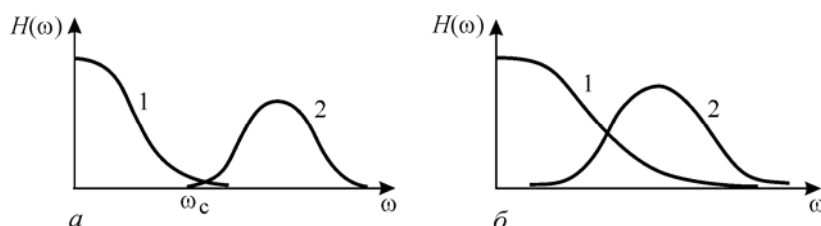


Рис. 6.1 Амплитудные спектры полезного сигнала (1) и помехи (2):
а – с незначительным перекрытием; б – со значительным перекрытием

Полоса частот, в которой сигналы пропускаются (усиливаются) фильтром, называется *полосой пропускания*. Полоса частот, где сигналы подавляются (ослабляются) фильтром, называется *полосой задерживания*. Частоты, лежащие на границе полос пропускания и задерживания, называются *граничными частотами*.

В зависимости от взаимного расположения полос пропускания и задерживания различают следующие типы фильтров:

- фильтры нижних частот (ФНЧ);
- фильтры верхних частот (ФВЧ);
- полосовые фильтры (ПФ);
- заграждающие (режекторные) фильтры (ЗФ).

Перечисленные выше типы фильтров широко применяются при обработке данных и сигналов. Поэтому их часто называют базисными фильтрами. В идеале базисные фильтры должны иметь амплитудно-частотные характеристики, представленные на рис. 6.2.

1. Идеальный фильтр низких частот должен пропускать все частотные составляющие в диапазоне $(0, \omega_{гр})$ и подавлять частотные составляющие в диапазоне $(\omega_{гр}, \infty)$ (рис. 6.2, а).

2. Идеальный фильтр высоких частот должен иметь обратные характеристики, то есть пропускать частотные составляющие в диапазоне $(\omega_{гр}, \infty)$ и поглощать их в диапазоне $(0, \omega_{гр})$ (рис. 6.2, б).

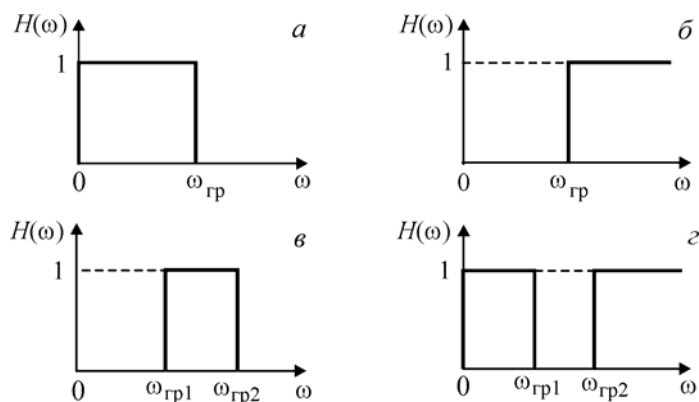


Рис.6.2. Идеальные АЧХ базисных фильтров

3. Полосовой фильтр должен пропускать составляющие с частотами, лежащими в диапазоне $(\omega_{гр1}, \omega_{гр2})$ и подавлять другие составляющие (рис. 6.2, в).

4. Заграждающий фильтр должен подавлять составляющие с частотами из диапазона $(\omega_{гр1}, \omega_{гр2})$ и пропускать другие составляющие без изменения (рис. 6.2, г).

Покажем, что реализовать фильтры с идеальными характеристиками нельзя. Рассмотрим идеальный ФНЧ, обобщенную частотную характеристику которого можно записать так:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_{гр}, \\ 0, & |\omega| > \omega_{гр}. \end{cases} \quad (6.1)$$

Частотные характеристики фильтра, построенные по выражению (6.1), показаны на рис. 6.3, а. Применив к (6.1) обратное преобразование Фурье, найдем импульсную переходную функцию идеального ФНЧ

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{гр}}^{\omega_{гр}} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi j t} \left(e^{j\omega_{гр} t} - e^{-j\omega_{гр} t} \right) = \frac{\omega_{гр}}{\pi} \frac{\sin \omega_{гр} t}{\omega_{гр} t}. \end{aligned}$$

Импульсная переходная функция $h(t)$ построена на рис. 6.3, б. Как видно, $h(t) \neq 0$ при $t < 0$ и тем самым нарушено условие физической реализуемости системы. Идеальный ФНЧ поэтому реализовать нельзя.

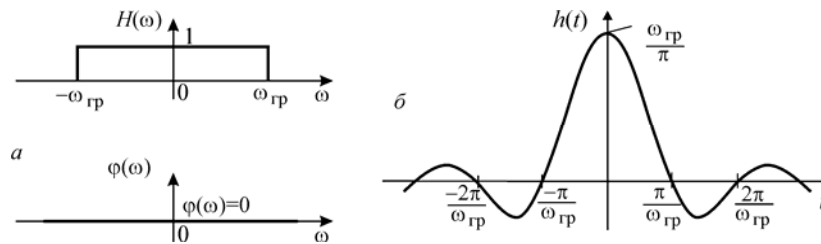


Рис. 6.3. Характеристики идеального ФНЧ:

a – амплитудно-частотная характеристика; *б* – импульсная переходная функция

6.2. Задача аппроксимации. Типовые ФНЧ

Задача проектирования фильтра по заданным требованиям к частотным характеристикам является достаточно сложной и многоэтапной. На первом этапе решается задача аппроксимации, которая заключается в определении передаточной функции $H(s)$ устойчивого и физически реализуемого фильтра, АЧХ которого наилучшим образом приближается к определенной идеальной характеристике.

Передаточная функция устойчивого и физически реализуемого фильтра должна удовлетворять следующим условиям:

- число нулей и полюсов передаточной функции должно быть конечным;
- число нулей не должно превышать число полюсов;
- полюсы должны располагаться в левой полуплоскости.

Получить идеальные характеристики у фильтров, удовлетворяющих приведенным выше условиям, на практике не удастся. Поэтому обычно при проектировании аналоговых фильтров задаются определенные требования к частотным характеристикам, которые определяют степень их отклонения от идеальных.

Во-первых, в полосе пропускания допускается отклонение значения коэффициента передачи фильтра от единицы на величину $\delta H_{\text{п}}$, а в полосе задерживания – от нуля на величину $\delta H_{\text{з}}$ (рис. 6.4). Величину $\delta H_{\text{п}}$ называют неравномерностью АЧХ в полосе пропускания, а величину $\delta H_{\text{з}}$ – максимальным отклонением АЧХ в полосе задерживания.

Во-вторых, ввиду того, что реализовать резкое изменение коэффициента передачи фильтра от нуля до единицы и, наоборот, в соответствии с характеристиками, показанными на рис. 6.2, не удастся, вводится так называемая переходная полоса между полосой пропускания и полосой задерживания. В пределах этой полосы коэффициент передачи фильтра изменяется произвольным образом от значений, заданных для

полосы пропускания, до значений, требуемых в полосе задерживания (рис. 6.4).

Таким образом, в качестве исходных данных при решении задачи аппроксимации задаются граничные частоты полос пропускания и задерживания, допуски на максимальное значение неравномерности АЧХ в полосе пропускания $\delta H_{\text{п}}$ и максимальное отклонение АЧХ от нуля в полосе задерживания $\delta H_{\text{з}}$.

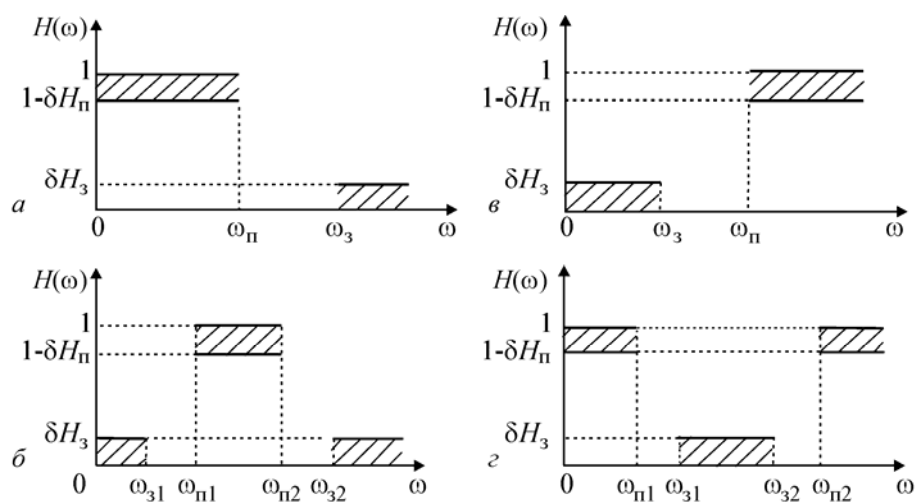


Рис. 6.4. Исходные требования к АЧХ базисных фильтров:
 a – ФНЧ, $б$ – ФВЧ, $в$ – ПФ, $г$ – ЗФ

Большинство методов решения задачи аппроксимации не позволяют учесть требования к АЧХ и ФЧХ. Методы построения фильтров с заданными требованиями как к АЧХ, так и к ФЧХ достаточно сложны, базируются, как правило, на использовании дополнительного корректора ФЧХ.

Широкое распространение получили четыре вида фильтров, которые соответствуют различным способам аппроксимации идеальной прямоугольной АЧХ:

1) фильтры Баттерворта, имеющие максимально плоскую АЧХ в полосе пропускания и монотонную характеристику в полосе задерживания (рис. 6.5, a);

2) фильтры Чебышева первого рода, имеющие заданную величину пульсаций АЧХ в полосе пропускания и монотонную характеристику в полосе задерживания (рис. 6.5, $б$);

3) фильтры Чебышева второго рода, имеющие максимально плоскую АЧХ в полосе пропускания и фиксированный уровень пульсаций в полосе задерживания (рис. 6.5, $в$);

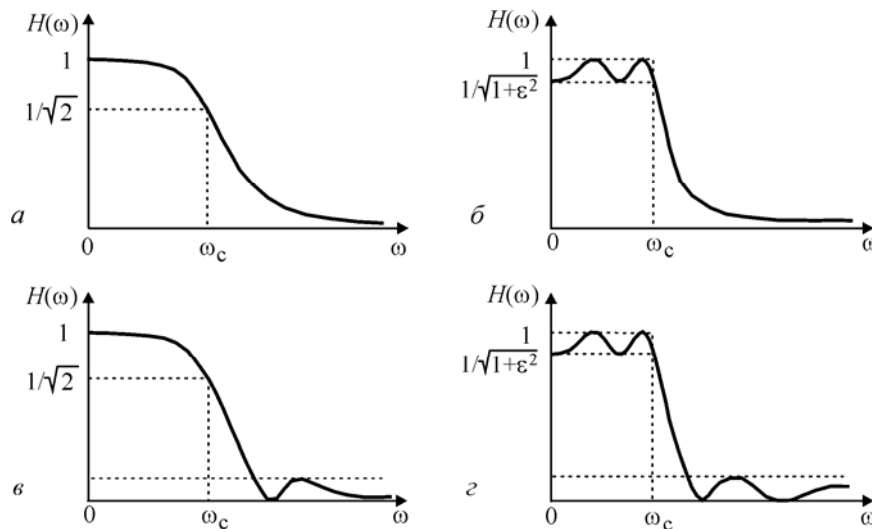


Рис. 6.5. Амплитудно-частотные характеристики типовых ФНЧ:
a – фильтр Баттерворта; *б* – фильтр Чебышева первого рода;
в – фильтр Чебышева второго рода; *г* – эллиптический фильтр

4) эллиптические фильтры, имеющие равноволновые пульсации АЧХ как в полосе пропускания, так и в полосе задерживания (рис. 6.5, *г*).

6.3. Фильтры Баттерворта

Частотные характеристики

Фильтры Баттерворта, как отмечалось выше, имеют максимально плоскую АЧХ в полосе пропускания и монотонную характеристику в полосе задерживания. АЧХ фильтра Баттерворта описывается выражением

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}},$$

где ω_c – граничная частота, n – порядок фильтра.

АЧХ фильтров Баттерворта различных порядков показаны на рис. 6.6.

По мере возрастания порядка n фильтра Баттерворта коэффициент передачи в полосе пропускания все в большей степени приближается к единице, переходная область все в большей степени сужается, а в полосе задерживания функция передачи все ближе и ближе подходит к нулю. При $n \rightarrow \infty$ АЧХ фильтра Баттерворта приближается к идеальной.

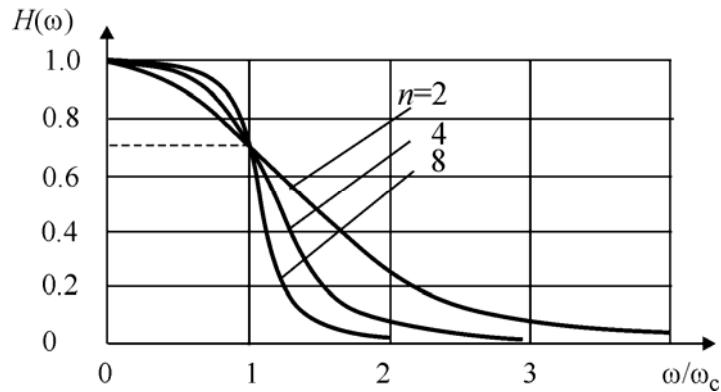


Рис 6.6. АЧХ фильтров Баттерворта различных порядков

Таким образом, порядок фильтра n и граничная частота ω_c являются теми параметрами, выбор которых позволяет удовлетворить заданный набор требований к АЧХ фильтра в полосе пропускания и полосе задерживания.

Приведем основные свойства частотных характеристик фильтров Баттерворта.

Свойство 1. При любом n справедливы соотношения:

$$H(0) = 1; \quad H(\omega_c) = 1/\sqrt{2}; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} H(\omega) = 0.$$

Свойство 2. Функция $|H(j\omega)|$ фильтров Баттерворта монотонно убывает при $\omega \geq 0$. Следовательно, АЧХ имеет максимальное значение при $\omega = 0$.

Свойство 3. Первые $(2n - 1)$ производные АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта n -го порядка равны нулю при $\omega = 0$.

Свойство 4. Крутизна АЧХ фильтра Баттерворта n -го порядка на высоких частотах составляет $20n$ дБ/дек.

Свойство 5. Фазо-частотная характеристика фильтра Баттерворта n -го порядка при изменении частоты ω от 0 до ∞ изменяется от 0 до $-\pi/2$ рад.

Расположение полюсов

Фильтр Баттерворта относится к полиномиальным фильтрам, которые характеризуются тем, что их передаточные функции не содержат нулей. Поэтому передаточная функция фильтра Баттерворта имеет вид

$$H(s) = \frac{b_0}{A(s)} = \frac{\omega_c^n}{A(s)},$$

где ω_c^n – число, а $A(s)$ – характеристический полином n -го порядка.

Стандартные полиномы фильтров Баттерворта различных порядков определяются следующими выражениями:

$$A(s) = s + \omega_c;$$

$$A(s) = s^2 + 1,4 \omega_c s + \omega_c^2;$$

$$A(s) = s^3 + 2,0 \omega_c s^2 + 2,0 \omega_c^2 s + \omega_c^3 = (s + \omega_c)(s^2 + \omega_c s + \omega_c^2);$$

$$A(s) = s^4 + 2,6 \omega_c s^3 + 3,4 \omega_c^2 s^2 + 2,6 \omega_c^3 s + \omega_c^4 = \\ = (s^2 + 0,765 \omega_c s + \omega_c^2)(s^2 + 1,848 \omega_c s + \omega_c^2);$$

$$A(s) = s^5 + 3,24 \omega_c s^4 + 5,24 \omega_c^2 s^3 + 5,24 \omega_c^3 s^2 + 3,24 \omega_c^4 s + \omega_c^5 = \\ = (s + \omega_c)(s^2 + 0,618 \omega_c s + \omega_c^2)(s^2 + 1,618 \omega_c s + \omega_c^2).$$

Отсюда легко сделать вывод, что фильтр Баттерворта нечетного порядка имеет один вещественный полюс, а остальные $(n-1)$ образуют комплексно-сопряженные пары. Фильтр Баттерворта четного порядка имеет только комплексно-сопряженные полюсы.

Полюсы фильтра Баттерворта определяются выражением

$$s_k = -\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\omega_c + j\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\omega_c, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.2)$$

Пример. Рассчитаем полюсы фильтра Баттерворта третьего порядка. По формуле (6.2) получим:

$$s_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\omega_c + j\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\omega_c = -0,5\omega_c + j0,866\omega_c;$$

$$s_2 = \cos(\pi)\omega_c + j\sin(\pi)\omega_c = -\omega_c;$$

$$s_3 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\omega_c + j\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\omega_c = -0,5\omega_c - j0,866\omega_c.$$

Расположение полюсов фильтров Баттерворта различных порядков показано на рис. 6.7.

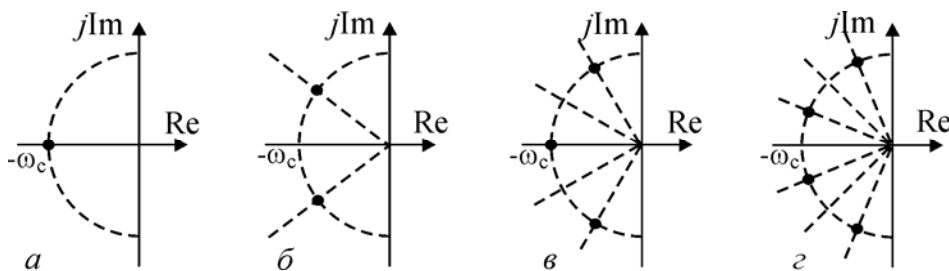


Рис. 6.7. Расположение полюсов фильтра Баттерворта:

$$a - n = 1; \quad б - n = 2; \quad в - n = 3; \quad г - n = 4$$

В практике проектирования фильтров широко используется понятие нормированного фильтра, который имеет частоту среза $\omega_c = 1$. Нормированный фильтр Баттерворта описывается передаточной функцией

$$H_n(s) = \frac{1}{A_n(s)},$$

где $A_n(s) = A(s)_{\omega_c=1}$. Полюсы нормированного фильтра Баттерворта располагаются на полуокружности с радиусом, равным единице.

Определение порядка фильтра Баттерворта

При проектировании фильтра Баттерворта, как уже отмечалось выше, задаются требования к амплитудно-частотной характеристике $H(\omega)$ (рис. 6.8, а). Часто для формулирования требований к свойствам фильтра используется не коэффициент усиления, а обратная величина, называемая коэффициентом затухания. На рис. 6.8, б показана логарифмическая характеристика затухания фильтра, где по оси ординат отложена величина

$$R(\omega) = 20 \cdot \lg \frac{1}{H(\omega)}.$$

$$\text{Здесь } R_{\text{макс}} = 20 \cdot \lg \frac{1}{1 - \delta H_{\text{п}}} ; R_{\text{мин}} = 20 \cdot \lg \frac{1}{\delta H_{\text{з}}}.$$

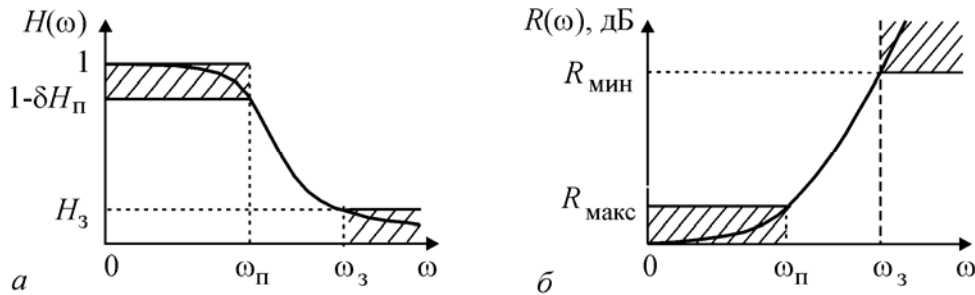


Рис.6.8. Требования к АЧХ (а) и к затуханию (б) ФНЧ

Для определения порядка фильтра Баттерворта, характеристика затухания которого удовлетворяет требованиям, используется формула:

$$n = \frac{\lg [(10^{0,1R_{\text{мин}}} - 1) / (10^{0,1R_{\text{макс}}} - 1)]}{2 \lg(\omega_{\text{з}} / \omega_{\text{п}})}. \quad (6.3)$$

6.4. Фильтры Чебышева первого рода

Частотные характеристики

Амплитудно-частотная характеристика фильтра Чебышева первого рода определяется выражением:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 V_n^2(\omega/\omega_c)}},$$

где V_n – полином Чебышева порядка n , который может быть образован с помощью рекуррентной формулы

$$V_{n+1}(x) - 2xV_n(x) + V_{n-1}(x) = 0.$$

Здесь первые два полинома принимаются равными: $V_0(x) = 1$; $V_1(x) = x$.

На рис. 6.9 показаны АЧХ фильтра Чебышева первого рода четвертого и пятого порядков.

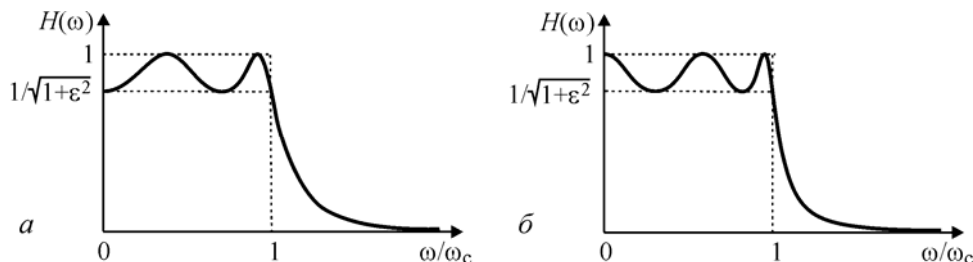


Рис. 6.9. АЧХ фильтров Чебышева первого типа ($\epsilon = 0,765$): $a - n=4$, $b - n=5$

АЧХ имеет пульсации в полосе пропускания и монотонную характеристику в полосе задержания. Размах пульсации АЧХ равен

$$\delta = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}.$$

Таким образом, ϵ представляет собой свободный параметр, который устанавливает величину неравномерности передачи в полосе пропускания.

Основные свойства фильтров Чебышева первого рода:

Свойство 1. АЧХ удовлетворяет условиям:

$$H(\omega_c) = 1 / \sqrt{1 + \epsilon^2}; \quad H(0) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 1 / \sqrt{1 + \epsilon^2}, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Свойство 2. Для $|\omega/\omega_c| \leq 1$ значения функции $H(\omega)$ колеблются между двумя пределами $1/\sqrt{1 + \epsilon^2}$ и 1. В общей сложности, на интервале $[0, \omega_c]$ имеется n критических точек, в которых функция $H(\omega)$ достигает максимального значения, равного 1, или минимального значения, равного $1/\sqrt{1 + \epsilon^2}$.

Свойство 3. При $\omega \geq \omega_c$ функция $H(\omega)$ монотонно убывает и стремится к нулю. Крутизна спада на высоких частотах составляет $20n$ дБ/дек.

Расположение полюсов

Как и в случае фильтра Баттерворта, передаточная функция фильтра Чебышева имеет одни только полюсы, числитель ее представляет со-

бой постоянную величину и, следовательно, не содержит нулей при конечных значениях частоты.

Фильтр Чебышева первого рода порядка n является оптимальным в том смысле, что не существует другого фильтра n -го порядка, имеющего только полюсы, который имел бы такие же или лучшие характеристики в полосе пропускания и в полосе задерживания.

Полюсы фильтра Чебышева располагаются на эллипсе. Параметры эллипса полностью определяются заданными значениями ε , n , ω_c . Малая ось эллипса располагается на вещественной оси, а большая ось этого эллипса проходит по мнимой оси.

Полюсы фильтра Чебышева первого типа вычисляются по формуле

$$s_k = \frac{1 - \gamma^2}{\gamma} \sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\omega_c + j\frac{1 + \gamma^2}{\gamma} \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\omega_c, \quad (6.4)$$

где $\gamma = \sqrt[n]{\frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon}}$; $k = 1, 2, \dots, n$.

Пример. Рассчитаем полюсы фильтра Чебышева первого типа третьего порядка с параметром $\varepsilon = 0,765$.

Значение параметра $\gamma = 1,435$. По формуле (6.4) будем иметь:

$$s_1 = -0,738 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\omega_c + j2,132 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\omega_c = -0,184\omega_c + j0,923\omega_c;$$

$$s_2 = -0,738 \cos(\pi)\omega_c + j2,132 \sin(\pi)\omega_c = -0,369\omega_c;$$

$$s_3 = -0,738 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\omega_c + j2,132 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\omega_c = -0,184\omega_c - j0,923\omega_c.$$

Определение порядка фильтра Чебышева

Для определения порядка фильтра Баттерворта, характеристика затухания которого удовлетворяет требованиям, используется формула:

$$n = \frac{\text{Arch}[\sqrt{(10^{0,1R_{\min}} - 1)/(10^{0,1R_{\max}} - 1)}]}{\text{Arch}(\omega_3 / \omega_{\Pi})}, \quad (6.5)$$

где $\text{Arch}x$ – обратный гиперболический косинус (*арча-косинус*), R_{\min} и R_{\max} – затухания в граничных точках ω_{Π} и ω_3 .

6.5. Денормирование и трансформация фильтров

Проектирование большинства стандартных типов фильтров начинается с определения передаточной функции ФНЧ с нормированной характеристикой. Под нормированным фильтром при этом подразумевается фильтр с частотой среза полосы пропускания $\omega_c = 1$. Далее передаточная функция нормированного фильтра преобразуется в передаточ-

ную функцию требуемого фильтра с помощью операций денормирования и трансформации.

Денормирование заключается в переходе от нормированных параметров к истинным. Под *трансформацией* понимают преобразование передаточной функции $H(s)$ нормированного ФНЧ в передаточную функцию фильтра требуемого вида (ФВЧ, ПФ и ЗФ) с заданными значениями граничных частот.

Преобразование ФНЧ – ФНЧ

Преобразование ФНЧ – ФНЧ осуществляется с помощью операции денормирования. Эту процедуру иначе называют масштабированием по частоте. Предположим, что нам необходимо получить ФНЧ с частотой среза ω_c рад/сек. Для этого следует в передаточной функции нормированного ФНЧ заменить оператор s на s/ω_c , то есть

$$H(s) = H_n(s/\omega_c).$$

Пример 1. Передаточная функция нормированного фильтра Баттерворта второго порядка равна:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}.$$

Найдем передаточную функцию денормированного фильтра, если $\omega_c = 5$ рад/с. Выполнив указанную выше подстановку, будем иметь

$$H(s) = H_n(s/5) = \frac{1}{(s/5)^2 + \sqrt{2} \cdot (s/5) + 1} = \frac{25}{s^2 + 5\sqrt{2} \cdot s + 25}.$$

Амплитудно-частотные характеристики нормированного и денормированного фильтров Баттерворта отличаются только масштабом по оси частот.

Преобразование ФНЧ – ФВЧ

Для того чтобы получить передаточную функцию ФВЧ с заданной частотой среза ω_c , необходимо в передаточной функции нормированного ФНЧ заменить оператор s на ω_c/s :

$$H(s) = H_n(\omega_c/s).$$

Пример 2. Дана передаточная функция нормированного фильтра Баттерворта второго порядка. Требуется определить передаточную функцию ФВЧ, имеющего частоту среза $\omega_c = 5$ рад/с.

Выполнив указанную выше подстановку, получим передаточную функцию ФВЧ:

$$H(s) = H_n(5/s) = \frac{1}{(s/5)^2 + \sqrt{2} \cdot (s/5) + 1} = \frac{s^2}{s^2 + 5\sqrt{2} \cdot s + 25}.$$

Амплитудно-частотные характеристики нормированного ФНЧ и ФВЧ с заданной частотой среза приведены на рис. 6.10.

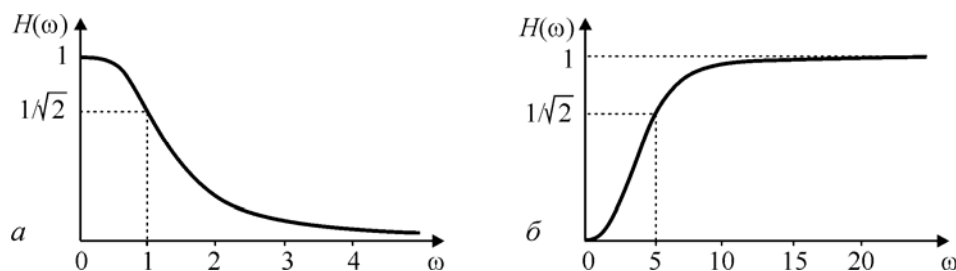


Рис.6.10. АЧХ фильтров Баттерворта:
a – нормированного ФНЧ; *б* – ФВЧ с заданной частотой среза $\omega_c = 5$ рад/с

Преобразование ФНЧ – ПФ

Передаточная функция ПФ с требуемыми граничными частотами $\omega_{п1}, \omega_{п2}$ находится из передаточной функции нормированного ФНЧ путем замены оператора s оператором $(s^2 + \omega_0^2) / Bs$, то есть

$$H(s) = H_n \left(\frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs} \right).$$

Здесь $B = \omega_{п2} - \omega_{п1}$ – ширина полосы пропускания;

$\omega_0 = \sqrt{\omega_{п1} \omega_{п2}}$ – средняя частота.

На рис. 6.11 показаны АЧХ нормированного ФНЧ Чебышева первого типа и полосового фильтра, полученного при помощи описанного выше преобразования.

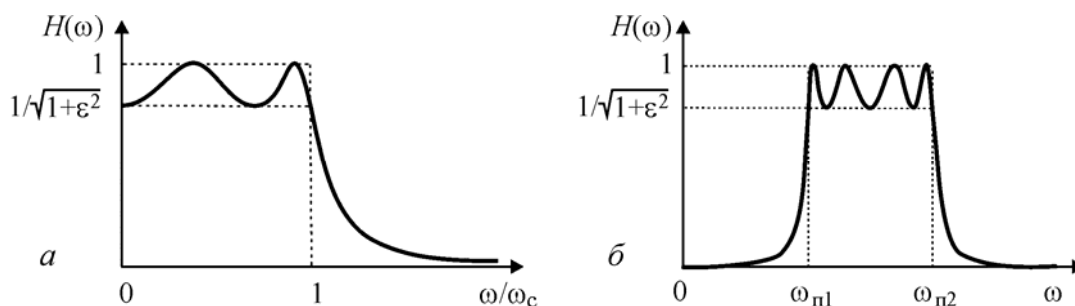


Рис. 6.11. АЧХ фильтров Чебышева первого типа:
a – нормированного ФНЧ; *б* – полосового фильтра с заданными параметрами

Преобразование ФНЧ – ЗФ

Передаточная функция заграждающего фильтра с требуемыми граничными частотами задерживания $\omega_{з1}, \omega_{з2}$ может быть получена из пе-

редаточной функции нормированного ФНЧ путем замены оператора s оператором $Bs/(s^2 + \omega_0^2)$, то есть

$$H(s) = H_n \left(Bs / (s^2 + \omega_0^2) \right).$$

Здесь $B = \omega_{32} - \omega_{31}$ – ширина полосы пропускания;

$\omega_0 = \sqrt{\omega_{31} \omega_{32}}$ – средняя частота.

На рис. 6.12 показаны АЧХ нормированного ФНЧ Чебышева первого типа и полосового фильтра, полученного при помощи описанного преобразования.

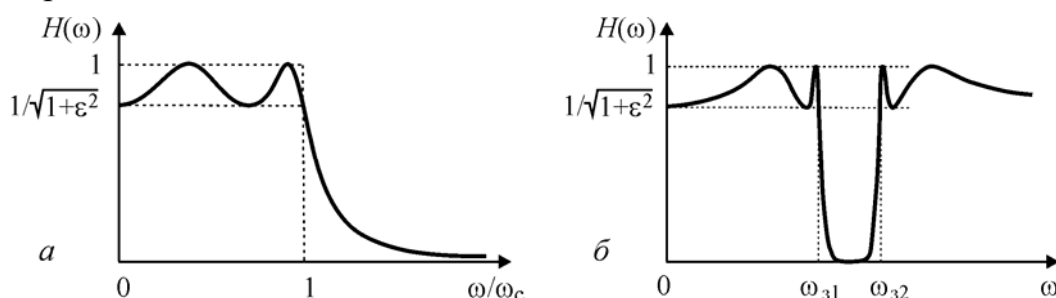


Рис.6.12. АЧХ фильтров Чебышева первого типа: a – нормированного; b – заграждающего фильтра

6.6. Примеры расчета фильтров

Расчет фильтра нижних частот Баттерворта

Исходные данные. Требуется найти передаточную функцию ФНЧ Баттерворта, АЧХ которого удовлетворяет следующим условиям:

$$0,8 \leq H(\omega) \leq 1 \text{ при } 0 \leq \omega \leq \omega_n = 1000 \text{ рад/с};$$

$$H(\omega) \leq 0,1 \text{ при } \omega \geq \omega_s = 2000 \text{ рад/с}.$$

Решение. Порядок фильтра может быть рассчитан по формуле (6.3). Имеется и другой вариант расчета. Для определения параметров n , ω_c фильтра Баттерворта составим систему неравенств:

$$\frac{1}{1 + (1000/\omega_c)^{2n}} \geq 0,8^2 ; \quad \frac{1}{1 + (2000/\omega_c)^{2n}} \leq 0,1^2 . \quad (6.6)$$

Заменяя здесь знаки неравенств на равенства, получим систему из двух нелинейных уравнений:

$$\frac{1}{1 + (1000/\omega_c)^{2n}} = 0,64 ; \quad \frac{1}{1 + (2000/\omega_c)^{2n}} = 0,01.$$

Решение системы может быть получено при помощи численных методов. Воспользуемся системой программирования MathCAD. Получим $n = 3,73$, $\omega_c = 1080$ рад/с. Очевидно, что порядок фильтра может быть только целым числом. Примем наименьшее его значение, гарантирующее выполне-

ние условий (6.6): $n = 4$. Из первого условия (6.6), заменив знак неравенства равенством и подставив $n = 4$, получим значение $\omega_c = 075$ рад/с, а из второго – $\omega_c = 1133$ рад/с. Следовательно, при значениях ω_c , лежащих в пределах от 1075 до 1133 рад/с, выполняются требования к АЧХ. Примем $\omega_c = 1100$ рад/с.

Передаточная функция нормированного фильтра Баттерворта при $n = 4$ имеет вид

$$H_n(s) = \frac{1}{(s^2 + 0,765s + 1)(s^2 + 1,848s + 1)} \quad (6.7)$$

Применив к (6.7) операцию денормирования, получим передаточную функцию фильтра:

$$H(s) = H_n\left(\frac{s}{1100}\right) = \frac{1100^4}{(s^2 + 841,5s + 1100^2)(s^2 + 2032,8s + 1100^2)} \quad (6.8)$$

АЧХ рассчитанного ФНЧ Баттерворта с передаточной функцией (6.8) показана на рис. 6.13.

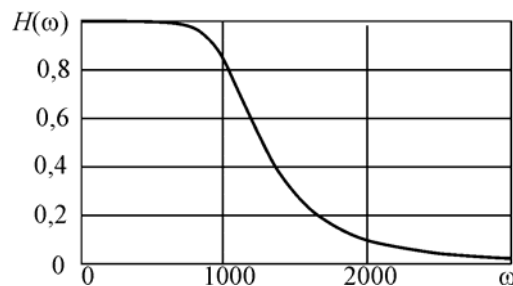


Рис.6.13. АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта

Значения АЧХ фильтра на границах интервалов пропускания и задерживания равны: $H(\omega_p) = 0,826$, $H(\omega_s) = 0,091$. Следовательно, АЧХ удовлетворяет заданным неравенствам.

Расчет фильтра верхних частот Баттерворта

Исходные данные. Требуется найти передаточную функцию ФВЧ Баттерворта, АЧХ которого удовлетворяет следующим условиям:

$$0 \leq H(\omega) \leq 0,1 \text{ при } 0 \leq \omega \leq \omega_s = 1000 \text{ рад/с};$$

$$0,8 \leq H(\omega) \leq 1 \text{ при } \omega \geq \omega_p = 2000 \text{ рад/с}.$$

Решение. Для определения параметров n , ω_c фильтра Баттерворта составим систему неравенств:

$$\frac{1}{1 + (\omega_c/1000)^{2n}} \leq 0,1^2 ; \quad \frac{1}{1 + (\omega_c/2000)^{2n}} \geq 0,8^2 \quad (6.9)$$

Заменив здесь знаки неравенств на равенства, получим систему из двух нелинейных уравнений:

$$\frac{1}{1 + (\omega_c/1000)^{2n}} = 0,01 ; \quad \frac{1}{1 + (\omega_c/2000)^{2n}} = 0,64.$$

Решив уравнения с помощью системы программирования MathCAD, получим $n = 3,73$, $\omega_c = 1852$ рад/с. Очевидно, что порядок фильтра может быть только целым числом. Примем $n = 4$. Легко убедиться, что при $n = 4$ условия (6.9) будут выполнены, если значение ω_c лежит в пределах от 1756 до 1861 рад/с. Примем $\omega_c = 1800$ рад/с.

Заменив в передаточной функции (6.7) нормированного фильтра Баттерворта s на $1800/s$, получим передаточную функцию фильтра

$$H(s) = H_n\left(\frac{1800}{s}\right) = \frac{s^4}{(s^2 + 1377s + 1800^2)(s^2 + 3326s + 1800^2)}. \quad (6.10)$$

АЧХ рассчитанного ФВЧ Баттерворта с передаточной функцией (6.10) изображена на рис. 6.14.

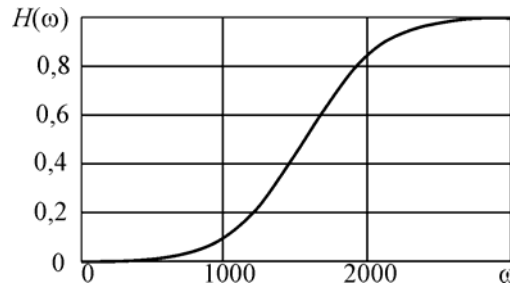


Рис.6.14. АЧХ фильтра верхних частот Баттерворта

Значения АЧХ фильтра на границах интервалов задерживания и пропускания равны: $H(\omega_3) = 0,095$; $H(\omega_n) = 0,836$. Следовательно, АЧХ удовлетворяет заданным неравенствам.

Расчет фильтра нижних частот Чебышева

Исходные данные. Требуется найти передаточную функцию фильтра Чебышева первого рода, АЧХ которого удовлетворяет следующим условиям:

$$0,8 \leq H(\omega) \leq 1 \text{ при } 0 \leq \omega \leq \omega_n = 1000 \text{ рад/с};$$

$$H(\omega) \leq 0,1 \text{ при } \omega \geq \omega_3 = 2000 \text{ рад/с}.$$

Решение. Находим:

неравномерность передачи в полосе пропускания

$$R_{\text{макс}} = 20 \lg(1/0,8) = 1,938 \text{ дБ};$$

и минимальное затухание в полосе задерживания

$$R_{\text{мин}} = 20 \lg(1/0,1) = 20 \text{ дБ}.$$

Рассчитаем порядок фильтра по формуле (6.5).

$$n = \frac{\text{Arch} \left[\sqrt{(10^{0,1R_{\text{мин}}} - 1)/(10^{0,1R_{\text{макс}}} - 1)} \right]}{\text{Arch}(\omega_3 / \omega_n)} = 2,488.$$

Очевидно, что порядок фильтра может быть только целым числом. Поэтому примем $n = 3$.

Нормированные полиномы знаменателя фильтров Чебышева приведены для неравномерности передач в полосе пропускания, равной 0,1; 0,5; 1,0; 2,0 и 3,0 дБ.. Выберем с запасом фильтр, у которого неравномерность равна 1 дБ (меньше 1,938 дБ). При этом $\varepsilon = 0,509$.

Передаточная функция фильтра Чебышева, нормированного относительно частоты ω_n при $n = 3$ и $\varepsilon = 0.509$ имеет вид

$$H_n(s) = \frac{0,491}{(s + 0,494)(s^2 + 0,494s + 0,994)} \quad (6.11)$$

Применив к (6.11) операцию денормирования, получим передаточную функцию фильтра:

$$H(s) = H_n\left(\frac{s}{1000}\right) = \frac{0,491 \cdot 1000^3}{(s + 494)(s^2 + 494s + 1000^2)} \quad (6.12)$$

АЧХ рассчитанного ФНЧ Чебышева с передаточной функцией (6.12) показана на рис. 6.15. Значения АЧХ фильтра на границах интервалов пропускания и задерживания равны: $H(\omega_n) = 0,891$, $H(\omega_s) = 0,075$.

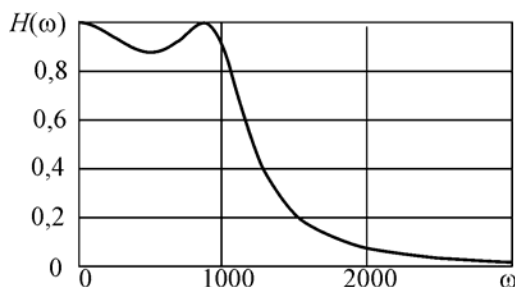


Рис.6.15. АЧХ фильтра нижних частот Чебышева

Контрольные вопросы и упражнения

1. Приведите пример практической задачи, требующей для своего решения применения частотных фильтров.
2. Дайте понятия полосы пропускания, полосы задерживания, граничных частот.
3. С какой целью в АЧХ фильтра вводится переходная полоса между полосой пропускания и полосой задерживания?
4. В каком виде задаются исходные данные при проектировании ФНЧ и ФВЧ, ПФ и ЗФ?
5. Покажите расположение полюсов ФНЧ Баттерворта для нескольких значений n .

6. Какой параметр устанавливает величину неравномерности передачи фильтра Чебышева первого рода в полосе пропускания? Как он влияет на АЧХ и расположение полюсов?

7. Найдите значение ε , при котором величина неравномерности передачи в полосе пропускания у фильтра Чебышева равна 0,1.

8. Поясните основные отличия АЧХ фильтров Баттерворта и Чебышева первого рода.

9. Поясните отличия в расположении полюсов фильтров Баттерворта и Чебышева первого рода.

10. Что понимают под денормированием фильтра? Когда и как применяется эта операция?

11. Как осуществляется трансформация ФНЧ в фильтры других типов?

12. Дана передаточная функция

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2} \cdot s + 1}$$

нормированного ФНЧ Баттерворта. Найдите передаточную функцию ФВЧ с частотой среза $\omega_c = 250$ рад/с.

13. Дана передаточная функция

$$H(s) = \frac{2,863}{s + 2,863}$$

нормированного ФНЧ Чебышева. Найдите передаточную функцию ФВЧ с частотой среза $\omega_c = 200$ рад/с.

14. Дана передаточная функция

$$H(s) = \frac{1}{s + 1}$$

нормированного ФНЧ Баттерворта. Найдите передаточную функцию полосового фильтра с граничными частотами $\omega_1 = 100$ рад/с и $\omega_2 = 200$ рад/с.

15. Дана передаточная функция

$$H(s) = \frac{2,863}{s + 2,863}$$

нормированного ФНЧ Чебышева. Найдите передаточную функцию заграждающего фильтра с граничными частотами $\omega_1 = 100$ рад/с и $\omega_2 = 200$ рад/с.

Глава 7

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ

Типовые дискретные последовательности. – Описание и преобразование дискретных последовательностей. – Z-преобразование и его свойства. – Обратное Z-преобразование. – Преобразование Фурье дискретного сигнала. – Дискретное преобразование Фурье (ДПФ). – Свойства дискретного преобразования Фурье.

7.1. Типовые дискретные последовательности

Единичный импульс

Единичный импульс (рис. 7.1, а) определяется выражением

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

В дискретных системах этот импульс играет такую же роль, что и дельта-функция $\delta(t)$ в анализе аналоговых сигналов. Но между ними имеется важное отличие: единичный импульс $\delta(n)$ является физически реализуемым, а дельта-функция $\delta(t)$ есть математическая абстракция.

На рис. 7.1, б изображен единичный импульс, задержанный на n_0 интервалов дискретности. Описывающее его выражение выглядит так:

$$\delta(n-n_0) = \begin{cases} 1, & n=n_0, \\ 0, & n \neq n_0. \end{cases}$$

Единичная ступенчатая последовательность

Единичная ступенчатая последовательность $1(n)$ (рис. 7.1, в) есть аналог единичной ступенчатой функции $1(t)$ и описывается формулой

$$1(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Экспоненциальная последовательность

Экспоненциальная последовательность образуется в результате дискретизации экспоненты $x(t) = A \cdot \exp(\pm \alpha \cdot t) \cdot 1(t)$. Произведя замену $t = Tn$ и обозначив $a = \alpha T$, получим решетчатую функцию

$$x(n) = A \cdot \exp(\pm a n) \cdot 1(n) = \begin{cases} A \cdot \exp(\pm a n), & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

На рис. 7.1, з показан график убывающей экспоненциальной последовательности.

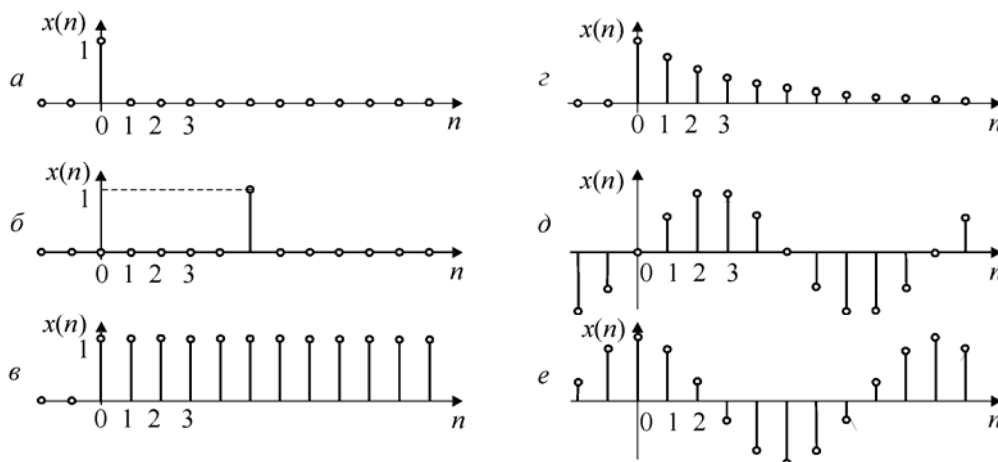


Рис. 7.1. Графики типовых дискретных последовательностей:

$$a - x(n) = \delta(n); \quad б - x(n) = \delta(n - n_0); \quad в - x(n) = 1(n);$$

$$з - x(n) = A \cdot \exp(-an) \cdot 1(n); \quad д - x(n) = A \cdot \sin(\pi n/5); \quad е - x(n) = A \cdot \cos(\pi n/5).$$

Синусоидальная последовательность

Синусоидальная дискретная последовательность получается вследствие дискретизации синусоидального сигнала, описываемого функцией

$$x(t) = A \cdot \sin \frac{2\pi}{T_0} t,$$

где T_0 – период. После замены $t = Tn$ будем иметь

$$x(n) = A \cdot \sin \frac{2\pi}{T_0} Tn = A \cdot \sin \frac{2\pi}{N} n.$$

Здесь $N = T_0/T$ – число интервалов дискретности на периоде. Синусоидальная последовательность показана на рис. 7.1, д.

Легко заметить, что синусоидальная последовательность является периодической только в том случае, когда N – целое число.

Косинусоидальная последовательность

Аналогично может быть получена косинусоидальная дискретная последовательность

$$x(n) = A \cdot \cos \frac{2\pi}{T_0} Tn = A \cdot \cos \frac{2\pi}{N} n.$$

Графическое представление этой последовательности дано на рис. 7.1, е.

7.2. Описание и преобразование дискретных последовательностей

Для описания произвольных последовательностей могут быть использованы различные способы:

- в виде последовательности отсчетов $\{x(0), x(1), x(2), \dots, x(n), \dots\}$;
- суммы взвешенных и задержанных единичных импульсов

$$x(n) = \sum_{v=0}^{\infty} x(v) \delta(n-v);$$

- решетчатой функции $x(n) = F(n)$.

Пример 1. Последовательность, образованную дискретизацией экспоненты $x(t) = \exp(-0,5t) \cdot 1(t)$ с периодом $T = 0,2$ с, можно задать:

- в виде последовательности отсчетов $x_n = \{x(0), x(1), x(2), \dots\}$, где $x(0) = \exp(0) = 1$, $x(1) = \exp(-0,1) = 0,9048$, $x(2) = \exp(-0,2) = 0,8187$ и т.д.;

- с помощью единичных импульсов в виде

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{v=0}^{\infty} \exp(-0,1v) \cdot \delta(n-v) = \\ &= \delta(n) + 0,9048\delta(n-1) + 0,8187\delta(n-2) + \dots; \end{aligned}$$

- в виде решетчатой функции $x(n) = \exp(-0,1n) \cdot 1(n)$.

Собственно цифровая обработка сигналов заключается в преобразовании некоторой дискретной (цифровой) последовательности $x(n)$ в другую последовательность $y(n)$ с помощью определенного алгоритма. Рассмотрим некоторые базовые преобразования дискретных последовательностей.

Масштабирование

При масштабировании дискретная последовательность $y(n)$ образуется путем умножения каждого элемента дискретной последовательности $x(n)$ на постоянный множитель λ :

$$y(n) = \lambda \cdot x(n).$$

Смещение

При этом дискретная последовательность $y(n)$ получается смещением каждого элемента дискретной последовательности $x(n)$ на фиксированное значение n_0 независимой переменной:

$$y(n) = x(n \mp n_0).$$

Здесь знаку « $-$ » соответствует задержка последовательности на n_0 интервалов дискретности, а знаку « $+$ » – опережение.

Разности дискретной последовательности

Теория непрерывных функций использует понятие дифференцирования, и в результате получают производные различных порядков. В теории дискретных последовательностей аналогичную роль играют понятия *разностей*.

Аналогом первой производной непрерывной функции является либо *первая прямая разность*

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n),$$

либо *первая обратная разность*

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1).$$

Прямая разность определяется в дискретный момент времени $\bar{t} = n$ по будущему значению дискретной последовательности $\bar{t} = n+1$. Это можно сделать в тех случаях, когда будущее значение известно, либо, если это будущее значение можно вычислить. Обратная разность определяется для момента времени $\bar{t} = n$ по прошлому значению дискретной последовательности в момент времени $\bar{t} = n-1$.

Аналогом второй производной непрерывной функции для дискретной последовательности служат вторые разности:

прямая вторая разность

$$\Delta^2 x(n) = \Delta x(n+1) - \Delta x(n);$$

обратная вторая разность

$$\nabla^2 x(n) = \nabla x(n) - \nabla x(n-1).$$

Очевидно, сказанное выше относительно возможности вычисления прямой и обратной разностей сохраняют свою силу и здесь.

Прямая и обратная разности m -го порядка определяются формулами:

$$\Delta^m x(n) = \Delta^{m-1} x(n+1) - \Delta^{m-1} x(n);$$

$$\nabla^m x(n) = \nabla^{m-1} x(n) - \nabla^{m-1} x(n-1).$$

Из способа образования разностей различных порядков видно, что разности дискретных последовательностей, являясь аналогами производной непрерывной функции, характеризуют локальные свойства дискретной последовательности вблизи некоторой точки. Разности, вместе с тем, обладают некоторыми отличительными особенностями.

- Если дискретная последовательность определена только для положительных значений аргумента, то есть $x(n) = 0$ при $n < 0$, то в точке $n = 0$ m -я обратная разность $\nabla^m x(0) = x(0)$ для любого целого положительного m .

- Разность любого порядка может быть выражена через значения исходной дискретной последовательности. Например, прямая и обратная разности второго порядка могут быть определены формулами:

$$\Delta^2 x(n) = \Delta x(n+1) - \Delta x(n) = x(n+2) - 2 \cdot x(n+1) + x(n);$$

$$\nabla^2 x(n) = \nabla x(n) - \nabla x(n-1) = x(n) - 2 \cdot x(n-1) + x(n-2).$$

Сумма дискретной последовательности

В теории непрерывных функций используется интегрирование. Аналогами интеграла непрерывной функции в пределах от 0 до t для дискретной последовательности является *сумма*

$$\sigma(n) = \sum_{m=0}^{n-1} x(m).$$

Интервал между соседними значениями дискретной последовательности равен единице. Поэтому сумма равна площади под ступенчатой огибающей дискретной последовательности.

Аналогия между производными и интегралом функций непрерывного аргумента и конечными разностями и суммой дискретных последовательностей является чисто формальной. Достаточно отметить, что разности и сумма дискретных последовательностей существуют всегда, в то время как для дифференцируемости и интегрируемости функций непрерывного аргумента требуется соблюдение определенных условий.

7.3. Представление дискретной последовательности в виде дискретной функции времени

Математическое представление дискретной последовательности в виде решетчатой функции не всегда оказывается удобным. В частности к решетчатой функции нельзя применить интегральные преобразования Лапласа и Фурье, получившие широкое распространение при анализе непрерывных сигналов. Для того чтобы применить указанные преобразования, введем функцию непрерывного времени, однозначно связанную с решетчатой функцией.

Рассмотрим преобразование непрерывного сигнала с помощью идеального дискретизатора (рис. 7.2, а). На выходе идеального дискретизатора образуется последовательность мгновенных импульсов (дельта-функций Дирака), которые появляются в дискретные моменты времени nT , $n=0, 1, 2, \dots$, и имеют площадь, равную значению $x(nT)$ непрерывного сигнала в дискретные моменты времени. Математически эта последовательность импульсов определяется выражением

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT).$$

Идеальную дискретизацию можно представить как модуляцию непрерывного сигнала $x(t)$, когда «несущей» является непрерывная последовательность единичных мгновенных импульсов

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

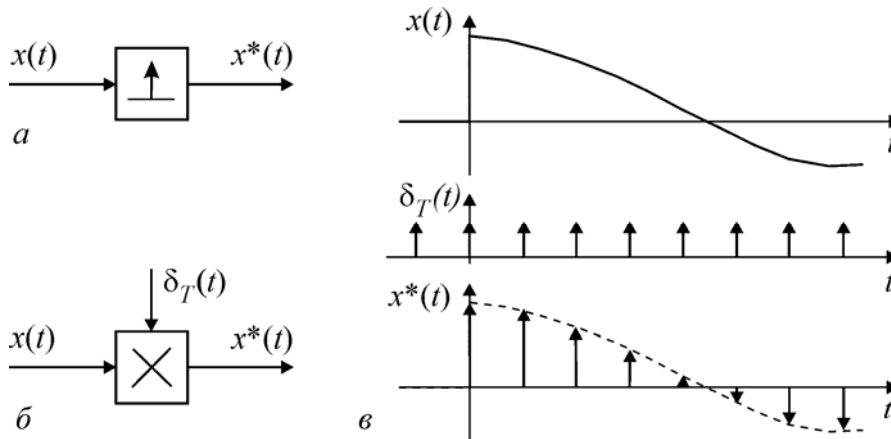


Рис. 7.2. Представление дискретной последовательности в виде дискретной функции времени

В этом случае функция $x^*(t)$ образуется в результате умножения (рис. 7.2, б) входного сигнала $x(t)$ на последовательность $\delta_T(t)$:

$$x^*(t) = x(t) \cdot \delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT).$$

Дискретная функция времени $x^*(t)$ содержит ту же самую информацию о значениях непрерывного сигнала в дискретные моменты времени, что и дискретная последовательность. И в то же время она может быть подвергнута преобразованиям Лапласа и Фурье.

7.4. Дискретное преобразование Лапласа. Z - преобразование

Рассмотрим применение преобразования Лапласа для анализа дискретных функций времени

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT).$$

Применение преобразования Лапласа к дельта-функции $\delta(t)$ дает

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1.$$

Согласно теореме смещения изображение по Лапласу дельта-функции, сдвинутой на nT , равно

$$L\{\delta(t-nT)\} = e^{-nTs}.$$

Найдем изображение дискретной функции времени $x^*(t)$:

$$X^*(s) = L\{x^*(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nTs}. \quad (7.1)$$

Это выражение определяет математическую операцию, называемую дискретным преобразованием Лапласа (D-преобразованием). Видно, что в дискретное преобразование Лапласа переменная s входит в виде функции e^{-Ts} . Следовательно, это преобразование не является рациональной функцией от s . Поэтому проводить анализ дискретных функций времени в плоскости s трудно.

Дискретное преобразование Лапласа является рациональной функцией от e^{Ts} . Используя подстановку

$$z = e^{Ts} = e^{T(\sigma + j\omega)} \quad (s = \frac{1}{T} \ln z),$$

выражение (7.1) можно переписать в виде

$$X(z) = X^*\left(\frac{1}{T} \ln z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}. \quad (7.2)$$

Функция $X(z)$ представляет уже рациональную функцию относительно переменной z . Она определяет собой прямое z -преобразование, являющееся вариантом преобразования Лапласа применительно к дискретным функциям времени. Обозначается прямое z -преобразование

$$X(z) = Z\{x(n)\}$$

и называется z -изображением дискретной функции.

D -преобразование и z -преобразование эквивалентны. Однако при использовании z -преобразования анализ дискретных функций во многом подобен анализу непрерывных функций. Кроме того, преимуществом z -преобразования является легкость обратного преобразования.

Комплексная функция $X(z)$ определена лишь для тех значений переменной $z = re^{j\varphi}$, при которых ряд сходится. Условием сходимости ряда (7.2) является

$$|X(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)z^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|r^{-n} < \infty.$$

Множество значений z , для которых ряд (7.2) сходится, называют *областью сходимости*. Область сходимости определяется радиусом сходимости R . Величина R зависит от положения особых точек (полюсов) функции $X(z)$. В табл. 7.1 приведены z -изображения дискретных функций.

Таблица 7.1

Изображения дискретных функций

	$x(t), t \geq 0$	$x(n), n \geq 0$	$X(z)$
1	$\delta(t)$	$\delta(n) = \begin{cases} 1, n=0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$	1
2	$1(t)$	$1(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$
3	$e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha T n} = d^n$	$\frac{1}{1-e^{-\alpha T} z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
4	t	$T n$	$\frac{T z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
5	$t e^{-\alpha t}$	$n T e^{-\alpha T n}$	$\frac{T e^{-\alpha T} z^{-1}}{(1-e^{-\alpha T} z^{-1})^2}$
6	$\sin bt$	$\sin b T n$	$\frac{(\sin b T) z^{-1}}{1-2(\cos b T) z^{-1} + z^{-2}}$
7	$\cos bt$	$\cos b T n$	$\frac{1-(\cos b T) z^{-1}}{1-2(\cos b T) z^{-1} + z^{-2}}$
8	$e^{-\alpha t} \sin bt$	$e^{-\alpha T n} \sin b T n$	$\frac{e^{-\alpha T} (\sin b T) z^{-1}}{1-2e^{-\alpha T} (\cos b T) z^{-1} + e^{-2\alpha T} z^{-2}}$
9	$e^{-\alpha t} \cos bt$	$e^{-\alpha T n} \cos b T n$	$\frac{1-e^{-\alpha T} (\cos b T) z^{-1}}{1-2e^{-\alpha T} (\cos b T) z^{-1} + e^{-2\alpha T} z^{-2}}$

Пример 1. Дана функция $x(n) = A \cdot \delta(n)$. Формула (7.2) в этом случае содержит единственное слагаемое:

$$X(z) = A.$$

Пример 2. Дана ступенчатая функция $x(n) = A \cdot 1(n)$. В соответствии с формулой (7.2) изображение этой функции имеет вид

$$X(z) = A + A z^{-1} + A z^{-2} + \dots$$

Сумма бесконечной геометрической прогрессии записывается в явной форме:

$$X(z) = A \frac{1}{1-z^{-1}} = A \frac{z}{z-1}, \quad |z^{-1}| < 1 \quad (\text{или } |z| > 1).$$

Пример 3. Дана экспоненциальная функция $x(n) = e^{-an} \cdot 1(n)$ (a – действительное число). Согласно определению z -преобразования запишем

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-an} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-a} z^{-1})^n.$$

Используя формулу суммы членов геометрической прогрессии с показателем, меньшим единицы, получим

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-a} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-a}}.$$

Ряд сходится, то есть функция $X(z)$ является аналитической при $|e^{-a} z^{-1}| < 1$ (или $|z| > e^{-a}$).

7.5. Свойства прямого Z -преобразования

Между дискретной функцией $x(n)$ и ее изображением $X(z)$ существует однозначное соответствие. Для решения практических задач необходимо знать связь между изменениями дискретной функции и соответствующими изменениями изображения.

1. Линейность. Если дискретные функции $x_1(n)$ и $x_2(n)$ имеют соответственно изображения $X_1(z)$ и $X_2(z)$, то справедливо следующее равенство:

$$Z\{\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)\} = \alpha X_1(z) + \beta X_2(z),$$

где α, β – постоянные коэффициенты. Это свойство следует непосредственно из определения Z -преобразования.

2. Изображения смещенной дискретной функции. Пусть дискретная функция $x(n)$ имеет изображение $X(z)$. Рассмотрим дискретную функцию $x(n-m)$, описывающую дискретную последовательность, задержанную на m интервалов. По формуле прямого Z -преобразования, если обозначить $r = n - m$, получим

$$\begin{aligned} Z\{x(n-m)\} &= \sum_{r=-m}^{\infty} x(r) z^{-(n+r)} = \\ &= z^{-m} \left[\sum_{r=0}^{\infty} x(r) z^{-r} + \sum_{r=-m}^{-1} x(r) z^{-r} \right] = z^{-m} \left[X(z) + \sum_{r=-m}^{-1} x(r) z^{-r} \right]. \end{aligned}$$

Если для исходной дискретной функции $x(n)$ выполняется условие $x(n) = 0$ при $n < 0$, формула упрощается и принимает вид

$$Z\{x(n-m)\} = z^{-m} X(z).$$

Рассмотрим дискретную функцию $x(n+m)$, которая описывает дискретную последовательность, упреждающую исходную на m интервалов. Применяв прямое Z -преобразование, найдем

$$Z\{x(n+m)\} = z^m \left[X(z) + \sum_{r=0}^{m-1} x(r)z^{-r} \right].$$

Формула принимает вид

$$Z\{x(n+m)\} = z^m X(z),$$

если для исходной дискретной функции $x(n)$ выполняется условие $x(n)=0$ при $n=0, 1, \dots, m-1$.

3. Изображения разностей дискретной функции. Для первой обратной разности на основании теорем линейности и запаздывания найдем

$$\begin{aligned} Z\{\nabla x(n)\} &= Z\{x(n) - x(n-1)\} = \\ &= X(z) - z^{-1}[X(z) + x(-1)z] = \frac{z-1}{z} X(z) - x(-1). \end{aligned}$$

Если для отрицательных значений n дискретная функция равна нулю, то формула упрощается:

$$Z\{\nabla x(n)\} = \frac{z-1}{z} X(z).$$

Для первой прямой разности на основании теорем линейности и запаздывания получим

$$\begin{aligned} Z\{\Delta x(n)\} &= Z\{x(n+1) - x(n)\} = \\ &= z[X(z) - x(0)] - X(z) = (z-1)X(z) - zx(0). \end{aligned}$$

Если $x(0)=0$, то изображение первой прямой разности равно

$$Z\{\Delta x(n)\} = (z-1) X(z).$$

Аналогичным образом можно получить формулы для изображений m -й обратной и прямой разностей.

4. Изображения суммы дискретной функции. Сумма дискретной последовательности определяется формулой

$$\sigma(n) = \sum_{m=0}^{n-1} x(m).$$

Составим первую прямую разность суммы

$$\Delta\sigma(n) = \sigma(n+1) - \sigma(n) = x(n)$$

и, полагая $\sigma(0)=0$, возьмем z -преобразование от правой и левой частей.

В результате получим

$$Z\{\sigma(n)\} = \frac{1}{z-1} X(z).$$

5. Свертка дискретных функций. Если дискретные функции $x_1(n)$ и $x_2(n)$ имеют соответственно изображения $X_1(z)$ и $X_2(z)$, то можно показать, что

$$X_1(z)X_2(z) = Z\left\{\sum_{v=0}^n x_1(v) x_2(n-v)\right\} = Z\left\{\sum_{v=0}^n x_1(n-v) x_2(v)\right\}.$$

Эта формула аналогична соответствующему выражению для свертки двух непрерывных функций.

7.6. Обратное Z-преобразование

Обратное Z-преобразование позволяет определить дискретную последовательность $x(n)$ по её z-изображению $X(z)$ и сокращённо записывается в виде

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}.$$

Теория обратного Z-преобразования базируется на так называемой формуле обращения

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz. \quad (7.3)$$

Интеграл в правой части формулы обращения берется по окружности радиуса ρ с центром в начале координат плоскости z (рис. 7.5). Радиус окружности находится из выражения

$$\rho > \max_v |z_v|,$$

в котором z_v ($v=1, \dots, N$) – особые точки функции $X(z)$.

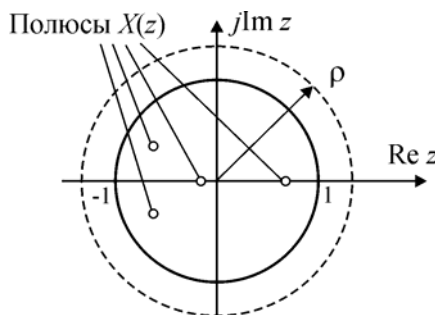


Рис. 7.3. Особые точки функции $X(z)$ и контур интегрирования

Решение контурного интеграла (7.3) в общем случае является непростой задачей. В технических приложениях обычно изображение представляет собой дробно-рациональную функцию z и для вычисления обратного z-преобразования можно применить относительно простые способы.

Использование теоремы Коши о вычетах

Согласно этой теореме контурный интеграл равен сумме вычетов подынтегральной функции в полюсах $z_v, v=1, 2, \dots, N$, расположенных в области, охватываемой окружностью радиуса ρ :

$$x(n) = \sum_{v=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_v} [X(z) z^{n-1}].$$

Для простого полюса z_v вычет вычисляется по формуле

$$\operatorname{Res}_{z=z_v} [X(z) z^{n-1}] = \lim_{z \rightarrow z_v} [(z - z_v) X(z) z^{n-1}],$$

а для полюса порядка m – по формуле

$$\operatorname{Res}_{z=z_v} [X(z) z^{n-1}] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_v} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_v) X(z) z^{n-1}].$$

Метод разложения на простые дроби

Если изображение представляет собой простейшую табличную форму (см. табл. 7.1), то определение оригинала не представляет трудностей. Сложную дробно-рациональную функцию можно представить в виде суммы дробей первой степени, каждая из которых является табличной формой. Рассмотрим случай, когда изображение $X(z)$ представляет собой отношение двух полиномов:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)},$$

причем будем полагать, что степень полинома $B(z)$ не выше, чем степень полинома $A(z)$, а корни уравнения $A(z)=0$ простые.

Представим изображение $X(z)$ в виде суммы

$$X(z) = \frac{zB_0(z)}{A(z)} = \sum_{v=1}^N c_v \frac{z}{z - z_v}, \quad (7.4)$$

где z_v ($v=1, 2, \dots, N$) – корни уравнения $A(z)=0$, $c_v = B_0(z_v)/A'(z_v)$ ($v=1, 2, \dots, N$). Элементарному слагаемому $z/(z - z_v)$, как видно из табл. 1, соответствует оригинал $z_v^n = e^{-a_v T n}$, где $a_v = (1/T) \ln(1/z_v)$.

Поэтому дискретную последовательность, соответствующую (7.4), запишем в следующем виде:

$$x(n) = \sum_{v=1}^N c_v \cdot z_v^n.$$

Пример. Дано z -изображение

$$X(z) = \frac{zB_0(z)}{A(z)} = \frac{z}{z^2 - 1,5z + 0,5}.$$

Корни уравнения $A(z)=0$ равны: $z_1=1$, $z_2=0,5$. Тогда знаменатель представим в виде $A(z)=(z-1)(z-0,5)$ и запишем $X(z)$ в виде суммы простых дробей:

$$X(z) = \frac{c_1 z}{z-1} + \frac{c_2 z}{z-0,5}.$$

Рассчитаем значения коэффициентов:

$$c_1 = 1/(2z-1,5)_{z=z_1} = 2,$$

$$c_2 = 1/(2z-1,5)_{z=z_2} = -2.$$

Тогда

$$X(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{2z}{z-0,5}.$$

Обратившись к табл. 7.1, находим дискретную последовательность

$$x(n) = 2 \cdot 1(n) - 2 \cdot 0,5^n.$$

Рассчитав по полученному выражению значения $x(n)$ для различных n , запишем дискретную последовательность в следующем виде:

$$x(n) = \delta(n-1) + 1,5\delta(n-2) + 1,75\delta(n-3) + 1,875\delta(n-4) + \dots$$

Метод разложения в ряд Лорана

Согласно данному методу изображение $X(z)$ разлагается в ряд по степени z^{-1} с помощью последовательного деления. При выполнении деления полиномы следует располагать по убывающим степеням z так, что

$$X(z) = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_{M-1} z^{N-M+1} + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_{N-1} z + a_N}, \quad N \geq M.$$

Разложение получается в виде

$$X(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + \dots,$$

где $c_0 = b_0$; $c_1 = b_1 - a_1 b_0$ и т. д.

Коэффициенты c_0, c_1, c_2, \dots равны значениям дискретной последовательности $x(n)$: $x(0) = c_0$, $x(1) = c_1$, $x(2) = c_2$ и т. д. Следовательно,

$$x(n) = c_0 \delta(n) + c_1 \delta(n-1) + c_2 \delta(n-2) + \dots$$

Достоинством метода является возможность вычисления оригинала $x(n)$ без нахождения полюсов изображения $X(z)$.

Пример. Дано z -изображение

$$X(z) = \frac{zB_0(z)}{A(z)} = \frac{z}{z^2 - 1,5z + 0,5}.$$

Выполнив деление, будем иметь

$$X(z) = z^{-1} + 1,5z^{-2} + 1,75z^{-3} + 1,875z^{-4} + \dots$$

Полученному z -изображению соответствует дискретная последовательность

$$x(n) = \delta(n-1) + 1,5\delta(n-2) + 1,75\delta(n-3) + 1,875\delta(n-4) + \dots$$

Таким образом, результаты решения задачи обратного преобразования, найденные методами разложения на простые дроби и разложения в ряд Лорана, совпали.

7.7. Преобразование Фурье дискретного сигнала

Пусть дана дискретная последовательность $x(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Бесмысленно говорить о преобразовании Фурье от этой дискретной последовательности. Однако, как показано выше, дискретную последовательность $x(n)$ можно связать с временной функцией

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot \delta(t - nT).$$

Эта функция имеет преобразование Фурье

$$X^*(j\omega) = \mathfrak{F}\{x^*(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega T n}. \quad (7.5)$$

В то же время дискретная последовательность $x(n)$ имеет z -преобразование

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}. \quad (7.6)$$

Если сравнить (7.5) и (7.6), можно увидеть, что преобразование Фурье представляет собой частный случай z -преобразования, то есть преобразование Фурье можно получить как z -преобразование, вычисленное на единичной окружности z -плоскости:

$$X^*(e^{j\omega T}) = X(z)|_{z=e^{j\omega T}}.$$

Из выражения (7.5) видно, что спектральная характеристика является периодической функцией по частоте и период $\omega_d = 2\pi/T$. Спектр вещественного сигнала $x^*(t)$ полностью описывается в основной полосе частот $[0, \omega_d/2]$. Составляющие спектра, расположенные в этой полосе частот, называют *основным спектром*.

Соотношение, устанавливающее связь между спектрами аналогового и дискретного сигналов, имеет вид

$$X^*(e^{j\omega t}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a[j(\omega + m\omega_d)], \quad (7.7)$$

где $\omega_d = 2\pi/T$.

Другими словами, спектр дискретного сигнала, с точностью до постоянного множителя $1/T$, равен сумме спектров исходного аналогового сигнала, смещенных друг относительно друга на все возможные значения частоты, кратные частоте дискретизации, то есть на значения $m\omega_d$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Пример. Рассмотрим импульс, описываемый экспоненциальной функцией $x(t) = A \cdot \exp(-\alpha t)$, $t \geq 0$. Пусть импульс подвергнут дискретизации с интервалом T . Полученная при этом дискретная последовательность определяется дискретной функцией

$$x(n) = A \cdot \exp(-\alpha T n), \quad n \geq 0.$$

По формуле (7.5) найдем спектральную характеристику

$$X^*(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} A \cdot e^{-\alpha T n} e^{-j\omega T n}.$$

Применив формулу для суммы геометрической прогрессии, будем иметь

$$X^*(j\omega) = \frac{A}{1 - e^{-\alpha T} e^{-j\omega T}} = \frac{A \cdot e^{-j\omega T}}{e^{-j\omega T} - e^{-\alpha T}}.$$

На рис. 7.4 представлены спектральные характеристики, построенные по полученному выражению. Амплитудная и фазовая спектральные характеристики на интервале частот от 0 до $2\pi/T$ выделены сплошной линией.

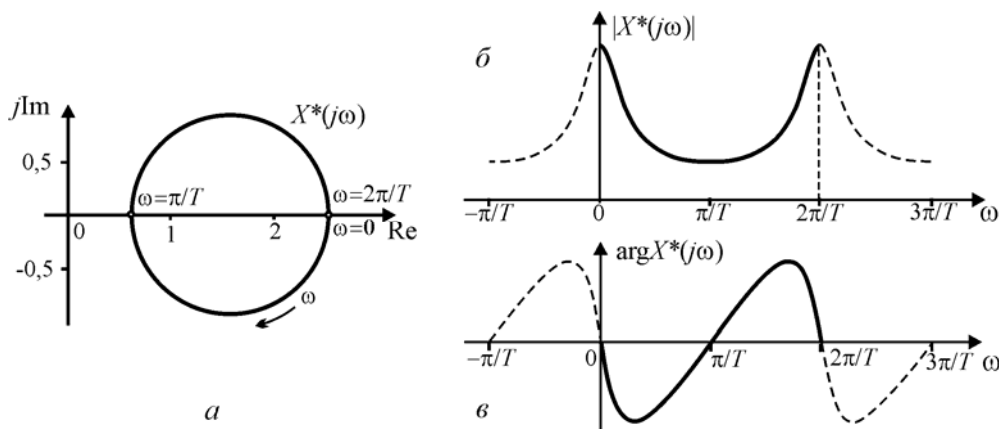


Рис. 7.4. Спектральные характеристики экспоненциальной дискретной последовательности: *a* – годограф, *б* – амплитудная, *в* – фазовая

7.8. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

На практике приходится иметь дело с сигналами, заданными на ограниченном интервале времени, например $t \in [0, T_H]$. Такой сигнал может быть представлен последовательностью из N отсчетов, взятых на временном отрезке $[0, T_H]$ через интервал дискретизации $T = T_H/N$. В результате получим дискретную последовательность $x(n)$, заданную на конечном интервале дискретного аргумента $[0, N - 1]$.

В этом случае дискретная функция $x^*(t)$ и ее спектральная характеристика $X^*(j\omega)$ описываются выражениями:

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{N-1} x(n) \cdot \delta(t - nT), \quad (7.8)$$

$$X^*(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\omega T n}. \quad (7.9)$$

Напомним, что спектральная характеристика $X^*(j\omega)$ является функцией непрерывной и периодической по частоте с периодом $\omega_d = 2\pi/T$. Для практических расчетов спектральную характеристику $X^*(j\omega)$ целесообразно представить в виде последовательности $X^*(jk\Omega)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, где Ω – выбранное расстояние между отсчетами в частотной области. Учитывая отмеченную выше периодичность функции $X^*(j\omega)$ по частоте, принимаем

$$\Omega = 2\pi/NT.$$

Подставив в (7.9) $\omega = k\Omega$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, и введя обозначение $X(k) = X^*(jk\Omega)$, получим

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (7.10)$$

Формула (7.10) определяет прямое ДПФ. Существует обратное ДПФ, которое переводит последовательность $X(k)$ в последовательность $x(n)$, из которой она была вычислена. Оно задается выражением

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

которое отличается от формулы прямого ДПФ только масштабным множителем и знаком экспоненты.

Обе последовательности $X(k)$ и $x(n)$ периодичны с периодом N . Прямое ДПФ в общем случае дает периодическую последовательность

комплексных чисел с периодом N . Обратное преобразование подобно прямому ДПФ может давать отсчеты $x(n)$ для n вне интервала $[0, N - 1]$, но эти отсчеты есть просто повторение значений $x(n)$ для n , взятых внутри этого интервала.

Введя обозначение для поворачивающего множителя

$$W_N = e^{-j\Omega T} = e^{-j2\pi/N},$$

можно записать прямое ДПФ и обратное ДПФ в следующем виде

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (7.11)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (7.12)$$

Пример 1. Дана дискретная последовательность

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & 1 \leq n \leq 7. \end{cases}$$

По формуле (7.10) получим

$$X(k) = 1, \quad k = 0, 1, \dots, 7.$$

Пример 2. Рассмотрим дискретную последовательность $x(n) = [1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0]$. В соответствии с формулой (7.10) ее спектральная характеристика:

$$\begin{aligned} X(0) &= 4; & X(4) &= 0; \\ X(1) &= 1 - j(1 + \sqrt{2}); & X(5) &= 1 + j(\sqrt{2} - 1); \\ X(2) &= 0; & X(6) &= 0; \\ X(3) &= 1 - j(\sqrt{2} - 1); & X(7) &= 1 + j(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Пример 3. Дана экспоненциальная функция $x(n) = e^{-an} \cdot 1(n)$ (a – действительное число). В соответствии с формулой (7.9) запишем

$$X^*(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-an} e^{-j\omega T n} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-a} e^{-j\omega T})^n.$$

Используя формулу суммы членов ограниченной геометрической прогрессии с показателем, меньшим единицы, найдем

$$X^*(j\omega) = \frac{1 - (e^{-a} e^{-j\omega T})^N}{1 - e^{-a} e^{-j\omega T}}. \quad (7.13)$$

После замены $\omega T = 2\pi k/N$ получим формулу для спектральной характеристики в виде дискретной последовательности

$$X(k) = \frac{1 - (e^{-a} e^{-j2\pi k/N})^N}{1 - e^{-a} e^{-j2\pi k/N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (7.14)$$

На рис. 7.5 пунктирными линиями изображены спектральные характеристики ограниченной экспоненциальной дискретной последовательности, рассчитанные по формуле (7.13). Здесь же показаны дискретные значения спектральных характеристик, полученные по формуле (7.14)

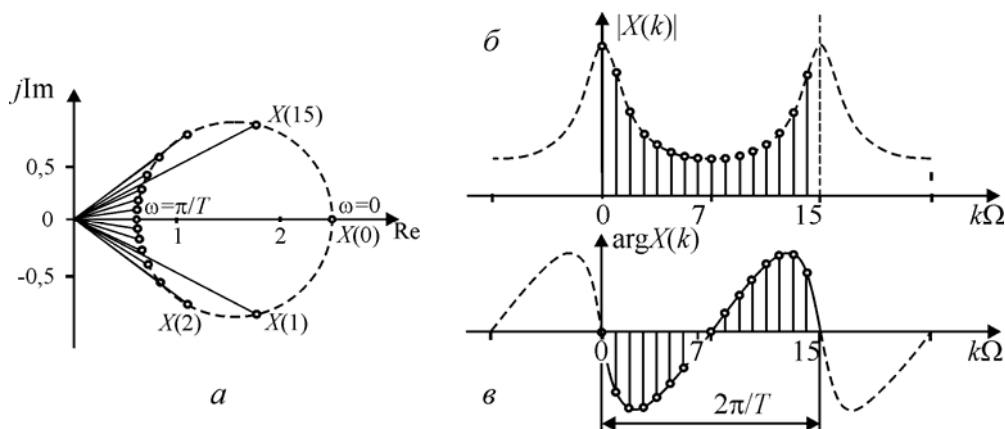


Рис. 7.5. Спектральные характеристики ограниченной экспоненциальной дискретной последовательности: *a* – годограф, *б* – амплитудная, *в* – фазовая

7.9. Свойства дискретного преобразования Фурье

Между дискретной функцией $x(n)$ и ее дискретной спектральной характеристикой $X(k)$ существует однозначное соответствие. Для решения практических задач необходимо знать связь между изменениями дискретной функции и соответствующими изменениями спектральной характеристики.

1. Линейность. Если дискретные последовательности $x_1(n)$ и $x_2(n)$ имеют соответственно дискретные спектральные характеристики $X_1(k) = \mathfrak{F}_d\{x_1(n)\}$ и $X_2(k) = \mathfrak{F}_d\{x_2(n)\}$, то справедливо следующее равенство:

$$\mathfrak{F}_d\{\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)\} = \alpha X_1(k) + \beta X_2(k),$$

где α, β – постоянные коэффициенты. Это свойство следует непосредственно из определения ДПФ.

2. Спектральная характеристика смещенной дискретной функции. Если $X(k) = \mathfrak{F}_d\{x(n)\}$, то

$$\mathfrak{F}_d\{x(n-m)\} = e^{-j\frac{2\pi}{N}km} X(k) = W_N^{km} X(k).$$

3. Свойство симметрии. Если дискретная последовательность $x(n)$ является действительной, то дискретная спектральная характеристика $X(k)$ удовлетворяет следующим условиям симметрии:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} X(k) &= \operatorname{Re} X(N-k); \\ \operatorname{Im} X(k) &= -\operatorname{Im} X(N-k); \\ |X(k)| &= |X(N-k)|; \\ \arg X(k) &= -\arg X(N-k).\end{aligned}$$

Спектральная характеристика симметричной последовательности $x(n) = x(N-n)$ является действительной.

4. Круговая свертка. Пусть $X_1(k) = \mathfrak{F}_d\{x_1(n)\}$ и $X_2(k) = \mathfrak{F}_d\{x_2(n)\}$. Тогда если $Y(k) = X_1(k) \cdot X_2(k)$, то

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(n-m), \quad n=0, 1, \dots, N-1.$$

5. Спектральная характеристика произведения дискретных функций. Пусть $X_1(k) = \mathfrak{F}_d\{x_1(n)\}$ и $X_2(k) = \mathfrak{F}_d\{x_2(n)\}$. Тогда если $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$, то

$$Y(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1(l)X_2(k-l), \quad k=0, 1, \dots, N-1.$$

6. Теорема Парсеваля

Равенство Парсеваля, определяющее энергию дискретной последовательности во временной и частотной областях, имеет вид

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2.$$

7.10. Восстановление сигнала по его отсчетам

В результате преобразования дискретных последовательностей в системе цифровой обработки получаем дискретную последовательность. Возникает естественный вопрос, как по известной дискретной последовательности получить непрерывный сигнал.

Ряд Котельникова

Теорема, доказанная В.А. Котельниковым в 1933 году, определяет условия точного восстановления мгновенных значений сигнала по его отсчетам, взятым через равные промежутки времени.

Теорема. Любую функцию $x(t)$, содержащую только гармонические составляющие с частотами от 0 до ω_B , можно представить в виде ряда

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin \omega_B(t-nT)}{\omega_B(t-nT)}. \quad (7.15)$$

где $T = \pi/\omega_B$, и, наоборот, любая функция, представленная рядом (7.15), содержит только гармонические составляющие с частотами от 0 до ω_B .

Формулу (7.15) можно рассматривать как разложение сигнала $x(t)$ по функциям

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin \omega_B(t-nT)}{\omega_B(t-nT)}, \quad (7.16)$$

причем в качестве коэффициентов ряда выступают значения сигнала $x(t)$ в дискретные моменты времени $t_n = nT$, $n \in (-\infty, \infty)$. Функция $\varphi_n(t)$, называемая отсчетной функцией, отображает собой колебания с максимальным значением при $t_n = nT$ (на рис. 7.6, а представлен график отсчетной функции для $n=3$). В другие дискретные моменты времени функция равна нулю. Легко проверить, что отсчетные функции ортогональны на интервале времени, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \begin{cases} \pi/\omega_B & \text{при } n=m, \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases}$$

В каждой точке $t = nT$ только один член ряда, стоящего в правой части выражения (7.15), отличен от нуля и этот член равен $x(nT)$. Следовательно, в точках $t = nT$ справедливость формулы (7.15) очевидна. В промежутках между указанными точками точное значение функции $x(t)$ обеспечивается суммированием бесконечного числа функций вида (7.16).

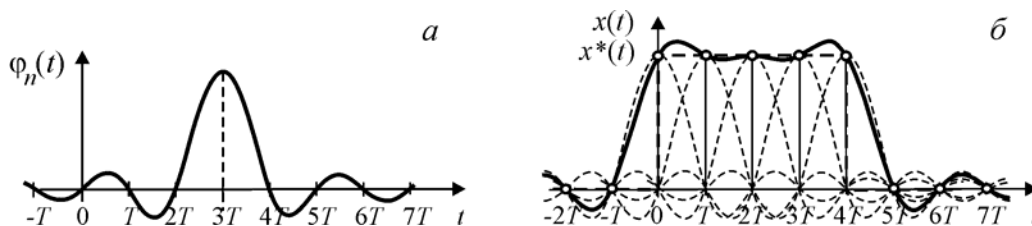


Рис. 7.6. Представление сигнала в виде ряда Котельникова:
а – отсчетная функция; б – составляющие ряда

Таким образом, функция $x(t)$ с ограниченным спектром, с одной стороны, может быть полностью задана множеством ее мгновенных значений, взятых через равные промежутки времени T . С другой стороны, если имеются числовые значения функции $x(nT)$ для всех n , то она может быть полностью восстановлена по формуле (7.15).

Желая использовать теорему Котельникова для восстановления непрерывного сигнала по его отсчетам, необходимо учитывать следую-

щее. Сигналы с ограниченным спектром, для которых справедлива теорема, бесконечны во времени. Реальные же сигналы ограничены по времени интервалом $[0, T_c]$ и обладают, следовательно, неограниченным по времени спектром. Поэтому точно восстановить сигнал не удастся. Для приближенного восстановления можно выделить интервал частот $[0, \omega_b]$, в котором заключена основная часть энергии сигнала, а на долю составляющих спектра с частотой $\omega > \omega_b$ приходится малая часть энергии сигнала.

Сигнал, ограниченный по времени, приближенно описывается рядом (7.15), состоящим из конечного числа членов:

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^N x(nT) \frac{\sin \omega_b (t - nT)}{\omega_b (t - nT)}. \quad (7.17)$$

На рис. 7.6, б показана аппроксимация рядом (7.15) прямоугольного импульса, представленного пятью дискретными отсчетами.

При суммировании членов ряда (7.17) сигнал $x(t)$ воспроизводится точно только в точках отсчета $t_n = nT$. В промежутках между отсчетами возникает ошибка аппроксимации, величина которой зависит от отбрасываемой части спектра сигнала. Чтобы уменьшить ошибку, интервал дискретизации T рекомендуют принимать в 2–5 раз меньше величины, определяемой по формуле (7.16). Ряд Котельникова для восстановления сигналов практически не используется. Он имеет скорее теоретическое значение, позволяя получить полезные выводы. Для восстановления же сигналов по дискретным отсчетам на практике чаще используются другие методы, например методы линейной и квадратичной интерполяции.

Метод линейной интерполяции

При линейной интерполяции соседние дискретные точки восстанавливаемой функции соединяют прямолинейными отрезками. Предположим, что при восстановлении сигнала необходимо воспроизвести с заданной точностью все гармонические составляющие до некоторой верхней частоты ω_b . Пусть выбран интервал дискретизации $T = \pi/5\omega_b$, что в пять раз меньше устанавливаемого теоремой Котельникова.

Как видно из рис. 7.7, наибольшая погрешность восстановления будет получена в районе экстремальной точки и при симметричном расположении отсчетов. Тогда наибольшая приведенная погрешность восстановления синусоидальной составляющей с частотой ω_b может быть найдена как разность между амплитудой A и одним из указанных отсчетов:

$$\varepsilon = \frac{\Delta E}{A} = \frac{1}{A} \left[A - A \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_b T}{2} \right) \right] = 1 - \cos \frac{\omega_b T}{2}. \quad (7.18)$$

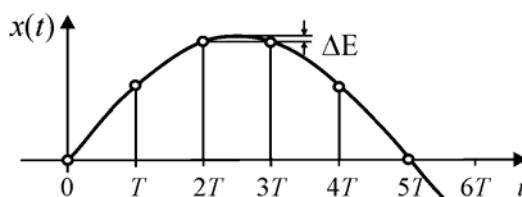


Рис. 7.7. Ошибка восстановления методом линейной интерполяции

Обозначим через N число отсчетов на одном периоде синусоиды с частотой ω_b . Тогда $\omega_b = 2\pi/NT$. Подставив в (7.18), получим

$$\varepsilon = 1 - \cos(\pi/N).$$

Данное соотношение позволяет определить число отсчетов N , необходимых для обеспечения заданной погрешности ε :

$$N = \frac{\pi}{\arccos(1-\varepsilon)}.$$

Например, при заданной допустимой погрешности восстановления $\varepsilon = 0,01$ требуется 22 отсчета на один период синусоиды.

На практике обычно отдают предпочтение методу линейной интерполяции, поскольку она реализуется очень просто технически и позволяет восстанавливать сигнал в режиме реального времени. Восстановление же при помощи ряда Котельникова возможно только после получения всех точек восстанавливаемого сигнала.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сигнал описывается функцией $x(t) = 10e^{-4t} \cdot 1(t)$. Запишите дискретную последовательность $x(n)$, если период дискретизации $T = 0,05$ с.

2. Дан прямоугольный импульс

$$x(t) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t < 0,4 \text{ мс;} \\ 0, & t < 0, t \geq 0,4 \text{ мс.} \end{cases}$$

Запишите дискретную последовательность, если $T = 0,1$ мс.

3. Поясните принципиальное отличие между прямой и обратной разностями дискретной последовательности.

4. Даны дискретные последовательности

$$\text{а) } x(n) = 2n + 5; \quad \text{б) } x(n) = 10e^{-0,2n}, n \geq 0.$$

Найдите прямую $\Delta x(n)$ и обратную $\nabla x(n)$ первые разности.

5. Дана дискретная последовательность $x(n)=5 \cdot n^2$. Найдите вторую разность $\Delta^2 x(n)$.

6. Дайте понятие суммы дискретной последовательности и поясните ее геометрический смысл.

7. Дана дискретная последовательность $x(n)=2n+5$. Найдите сумму дискретной последовательности для $n=4$.

8. Поясните смысл прямого и обратного Z -преобразований.

9. Дискретная последовательность $x(n)$ смещена на 3 интервала «назад». Запишите Z -изображение смещенной дискретной последовательности.

10. Дана дискретная последовательность $x(n)=A \cdot 1(n)-A \cdot 1(n-3)$. Постройте график и запишите Z -изображение дискретной последовательности.

11. Найдите z -изображение дискретных последовательностей, описываемых дискретными функциями:

а) $x(n)=5 \cdot \delta(n)+2 \cdot \delta(n-2)$; в) $x(n)=5 \cdot \delta(n-4)+1(n)$;

б) $x(n)=1(n-5)-1(n+2)$; г) $x(n)=5 \cdot (0,4)^n, n \geq 0$.

12. Запишите Z -изображения дискретных последовательностей, описываемых функциями:

а) $x(n)=5 \cdot (0,6)^n \cdot 1(n)$; б) $x(n)=5 \cdot (-0,6)^n \cdot 1(n)$.

13. Запишите Z -изображение разностного уравнения

$$y(n)-0,2y(n-1)=0,5x(n-1).$$

14. Запишите формулу свертки дискретных последовательностей. Запишите соответствующее уравнение в области изображений.

15. Найдите дискретные последовательности, Z -изображения которых определяются выражениями:

а) $X(z)=1+2z^{-1}$; в) $X(z)=\frac{2}{1-0,5z^{-1}}$;

б) $X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$; г) $X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$.

16. Поясните порядок решения задачи обратного Z -изображения методом разложения на простые дроби.

17. Поясните порядок решения задачи обратного Z -изображения методом разложения в ряд Лорана.

18. При помощи метода разложения на простые дроби найдите обратное Z -преобразование:

а) $X(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}$; б) $X(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$.

19. Дана дискретная последовательность

$$x(n) = \delta(n) + 0,5 \cdot \delta(n-1) + 0,25 \cdot \delta(n-2).$$

Запишите аналитическое выражение для спектральной характеристики $X(e^{j\omega T})$.

20. Сигнал описывается функцией $x(t) = 10e^{-4t} \cdot 1(t)$. Запишите дискретную последовательность $x(n)$, если период дискретизации $T = 0.05$ с. Получите спектральную характеристику $X(e^{j\omega T})$ дискретной последовательности $x(n)$.

21. Дана дискретная последовательность

$$x(n) = \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

Дополните последовательность нулевыми отсчетами для $n=0$ и $n=3$. Найдите спектральную характеристику $X(k)$, $k=0, 1, 2, 3$.

22. Дана дискретная последовательность $x(n) = [0, 1, 1, 0]$. Найдите спектральную характеристику $X(k)$, $k=0, 1, 2, 3$.

23. Дана дискретная последовательность $x(n) = [0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0]$. Найдите спектральную характеристику $X(k)$, $k=0, 1, \dots, 7$.

24. Дан сигнал, описываемый функцией $x(t) = e^{-4t} \cdot 1(t)$. Определите интервал дискретности, при котором линейная интерполяция значений сигнала в середине промежутков между дискретными точками не превышает 1 % начального значения.

Глава 8

ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Понятие дискретной системы. – Методы описания линейных дискретных систем: разностное уравнение, передаточная функция, импульсная характеристика, частотная передаточная функция и частотные характеристики. – Структурные схемы. – Устойчивость. – Расчет реакции на входное воздействие. – Дискретные интеграторы и дифференциаторы.

8.1. Понятие дискретной системы

Под *дискретной системой* будем понимать техническое устройство или программу, которая осуществляет преобразование дискретной последовательности $x(n)$ в другую дискретную последовательность $y(n)$ в соответствии с заданным алгоритмом (рис. 8.1).

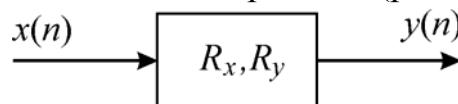


Рис. 8.1. Представление дискретной системы

Алгоритм преобразования входной последовательности $x(n)$ в выходную последовательность $y(n)$ описывается соотношением

$$R_y[y(n)] = R_x[x(n)],$$

где R_x, R_y – операторы.

По виду оператора R дискретные системы делят:

- на линейные или нелинейные;
- стационарные или нестационарные;
- физически реализуемые (каузальные) или нереализуемые (некаузальные).

Линейность. Дискретная система называется линейной тогда и только тогда, если ее оператор R обладает следующими свойствами *аддитивности* и *однородности*:

- 1) $R[x_1(n) + x_2(n)] = R[x_1(n)] + R[x_2(n)]$ для любых $x_1(n)$ и $x_2(n)$;
- 2) $R[\alpha \cdot x(n)] = \alpha \cdot R[x(n)]$ для любых α и $x(n)$.

Эти свойства можно записать в виде одного условия:

$$R[\alpha \cdot x_1(n) + \beta \cdot x_2(n)] = \alpha \cdot R[x_1(n)] + \beta \cdot R[x_2(n)]. \quad (8.1)$$

Согласно (8.1) реакция линейной системы на сложное воздействие равна сумме реакций на отдельные воздействия, взятых с теми же коэффициентами α и β .

Стационарность. Дискретная система называется *стационарной* (инвариантной во времени), если ее параметры не изменяются во времени. При этом данное воздействие, поданное на вход системы, будет всегда приводить к одной и той же реакции независимо от времени приложения воздействия. Например, если при входном воздействии $x(n)$ на выходе имеем $y(n)$, то при входном воздействии $x(n-m)$ получим $y(n-m)$.

Физическая реализуемость. Физически реализуемой называется система, у которой текущий отсчет $y(n)$ не зависит от значений воздействия в последующие моменты. Например, система, описываемая оператором

$$y(n)=0,2 \cdot x(n-1),$$

будет физически реализуемой, так как для определения $y(n)$ используется значение входной последовательности $x(n)$ в предшествующий момент времени. Система, оператор преобразования которой описывается выражением

$$y(n)=0,2 \cdot x(n+1),$$

является физически нереализуемой. В такой системе для расчета выходной последовательности $y(n)$ требуются будущие значения входной последовательности $x(n)$.

8.2. Описание дискретной системы разностным уравнением

Наиболее простой формой представления оператора R , связывающего входную $x(n)$ и выходную $y(n)$ последовательности, является разностное уравнение. Под *разностным уравнением* понимают соотношение, которое определяет связь между последовательностями $x(n)$, $y(n)$ и их разностями различных порядков. Разностное уравнение называют линейным, если указанное соотношение включает операции сложения и умножения на постоянный множитель.

Пример. Рассмотрим дискретную систему, описываемую линейным разностным уравнением первого порядка

$$\nabla y(n)+y(n)=x(n).$$

Сделав замену первой обратной разности $\nabla y(n)=y(n)-y(n-1)$, получим другую форму записи разностного уравнения:

$$y(n)=0,5y(n-1)+0,5x(n).$$

Пусть на вход системы действует последовательность $x(n)=1(n)$. Рассчитаем выходную последовательность $y(n)$ при начальном условии $y(-1)=0$. Последовательное вычисление дает: $y(0)=0,5$, $y(1)=0,75$, $y(2)=0,875$, $y(3)=0,9375$, $y(4)=0,96375$ и т.д.

В общем случае линейное разностное уравнение, записанное в обратных разностях, имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla^N y(n) + \alpha_1 \nabla^{N-1} y(n) + \dots + \alpha_{N-1} \nabla y(n) + \alpha_N y(n) = \\ = \beta_0 \nabla^M x(n) + \beta_1 \nabla^{M-1} x(n) + \dots + \beta_{M-1} \nabla x(n) + \beta_M x(n). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Заменив в (8.2) разности соответствующими выражениями через последовательности $x(n)$ и $y(n)$, получим следующую форму записи линейного разностного уравнения:

$$\begin{aligned} y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_{N-1} y(n-N+1) + a_N y(n-N) = \\ = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_{M-1} x(n-M+1) + b_M x(n-M). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Это уравнение можно записать в операторной форме. Для этого введем оператор сдвига назад q^{-i} , определяемый формулой

$$x(n-i) = q^{-i} x(n).$$

Тогда уравнение (8.3) запишется так:

$$A(q^{-1})y(n) = B(q^{-1})x(n),$$

где $A(q^{-1})$ и $B(q^{-1})$ называют соответственно операторами выходной и входной последовательностей. Они определяются непосредственно из уравнения (8.3) и представляют собой полиномы:

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{N-1} q^{-N+1} + a_N q^{-N}; \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{M-1} q^{-M+1} + b_M q^{-M}. \end{aligned}$$

В некоторых случаях уравнение (8.3) удобно записать иначе:

$$\begin{aligned} y(n+N) + a_1 y(n+N-1) + \dots + a_{N-1} y(n+1) + a_N y(n) = \\ = b_0 x(n+N) + \dots + b_{M-1} x(n+N-M+1) + b_M x(n+N-M). \end{aligned} \quad (8.4)$$

При помощи оператора сдвига вперед q^i , который задается формулой

$$x(n+i) = q^i x(n),$$

уравнение (8.4) записывают в операторной форме

$$A(q)y(n) = B(q)x(n),$$

где $A(q)$ и $B(q)$ – операторы в виде полиномов:

$$\begin{aligned} A(q) &= q^N + a_1 q^{N-1} + \dots + a_{N-1} q + a_N; \\ B(q) &= b_0 q^N + \dots + b_{M-1} q^{N-M+1} + b_M q^{N-M}. \end{aligned}$$

Методы решения разностных уравнений во многом аналогичны методам решения дифференциальных уравнений. Аналитические методы позволяют получить решение в общем виде, пригодном для анализа ра-

боты дискретной системы. Численные методы решения дают результат в форме последовательности. Разностное уравнение записывается в виде, удобном для непосредственного расчета:

$$y(n) = -\sum_{v=1}^N a_v y(n-v) + \sum_{\mu=0}^M b_\mu x(n-\mu). \quad (8.5)$$

Зная входную последовательность $x(n)$ при $n \geq 0$ и начальные значения $x(n)$, $y(n)$ для $n = -1, -2, \dots, -N$, формулу (8.5) можно использовать непосредственно для расчета значений последовательности $y(n)$.

8.3. Передаточная функция дискретной системы

Наряду с разностным уравнением для описания динамических свойств дискретной системы используется передаточная функция. *Передаточной функцией* $H(z)$ дискретной системы называется отношение изображения $Y(z)$ выходной последовательности $y(n)$ к изображению $X(z)$ входной последовательности $x(n)$ при нулевых начальных условиях:

$$H(z) = \frac{Z\{y(n)\}}{Z\{x(n)\}} = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

Передаточную функцию можно получить, применив z -преобразование к разностному уравнению. При этом учитывают свойства z -преобразования.

Пример. Рассмотрим дискретную систему первого порядка, описываемую разностным уравнением

$$y(n) = (1-\alpha)y(n-1) + \alpha x(n), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Подвергнув каждое слагаемое z -преобразованию при нулевых начальных условиях ($y(-1)=0$), получим

$$Y(z) = (1-\alpha)z^{-1}Y(z) + \alpha X(z).$$

Отсюда согласно определению найдем

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\alpha}{1 - (1-\alpha)z^{-1}} = \frac{\alpha z}{z - (1-\alpha)}.$$

Рассмотрим разностное уравнение общего вида

$$\begin{aligned} y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_{N-1} y(n-N+1) + a_N y(n-N) = \\ = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_{M-1} x(n-M+1) + b_M x(n-M). \end{aligned}$$

Подвергнув каждое слагаемое z -преобразованию при нулевых начальных условиях, получим уравнение системы в области изображений

$$\begin{aligned} (1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}) Y(z) = \\ = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-M+1} + b_M z^{-M}) X(z). \end{aligned}$$

Согласно определению передаточной функции отсюда найдем

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-M+1} + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}}. \quad (8.6)$$

Из сказанного выше следуют простые правила определения передаточной функции по разностному уравнению (и наоборот):

- коэффициенты разностного уравнения b_j при $x(n-j)$ являются коэффициентами при z^{-k} полинома числителя передаточной функции;
- коэффициенты разностного уравнения a_i при $y(n-i)$ являются коэффициентами при z^{-k} полинома знаменателя передаточной функции.

Наряду с записью передаточной функции в виде (8.6) используется и другая форма записи, получаемая путем умножения числителя и знаменателя на z^N :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{N-M} (b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_{M-1} z + b_M)}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_{N-1} z + a_N}. \quad (8.7)$$

Корни v_1, v_2, \dots, v_N уравнения

$$z^{N-M} (b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_{M-1} z + b_M) = 0$$

называют нулями передаточной функции. Легко видеть, что $(N-M)$ нулей располагаются в начале координат, а остальные могут быть как вещественными, так и комплексными.

Корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ уравнения

$$z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_{N-1} z + a_N = 0$$

называют полюсами передаточной функции. Полюсы могут принимать вещественные и комплексные значения. Если все числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ различны, то полюсы функции называются простыми. Если же среди этих чисел встречаются одинаковые, то соответствующие полюсы называются кратными.

Передаточную функцию (8.7) темы можно представить в виде

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 z^{N-M} (z-v_1)(z-v_2)\dots(z-v_M)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\dots(z-\lambda_N)}.$$

8.4. Импульсная характеристика дискретной системы.

Уравнение свертки

Важнейшей характеристикой линейной дискретной системы является импульсная характеристика. Импульсная характеристика $h(n)$

представляет собой реакцию системы на воздействие в виде единичного импульса $\delta(n)$ при нулевых начальных условиях.

Так как $X(z)=Z\{\delta(n)\}=1$, то из уравнения системы

$$Y(z)=H(z) X(z) \quad (8.8)$$

следует, что импульсная характеристика представляет собой обратное z -преобразование передаточной функции, то есть

$$h(n)=Z^{-1}\{H(z)\}. \quad (8.9)$$

Отсюда

$$H(z)=Z\{h(n)\}=\sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}.$$

Пример. Дискретная система первого порядка, рассмотренная в примере предыдущего параграфа, описывается передаточной функцией

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\alpha}{1-(1-\alpha)z^{-1}}=\frac{\alpha z}{z-(1-\alpha)}.$$

Для того чтобы найти импульсную характеристику системы, необходимо согласно (8.9) подвергнуть передаточную функцию обратному z -преобразованию:

$$h(n)=Z^{-1}\left\{\frac{\alpha z}{z-(1-\alpha)}\right\}=\alpha \cdot (1-\alpha)^n.$$

Импульсная характеристика представлена на рис. 8.2.

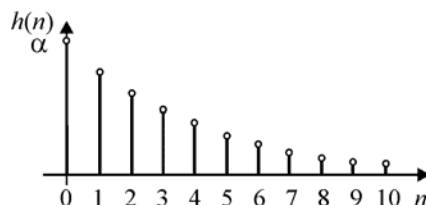


Рис. 8.2. Импульсная характеристика дискретной системы

Уравнению (8.8) в области изображений соответствует уравнение системы в области времени в виде свертки

$$y(n)=\sum_{v=0}^n h(v) x(n-v). \quad (8.10)$$

Таким образом, импульсная характеристика дискретной системы может быть использована для расчета реакции системы на произвольное внешнее воздействие при нулевых начальных условиях.

Произведя в формуле дискретной свертки (8.10) замену переменных $n-v=t$, $v=n-t$, получим

$$y(n)=\sum_{v=0}^n h(n-v) x(v).$$

Таким образом, свертка обладает свойством коммутативности. Согласно этому свойству выходную последовательность $y(n)$, являющуюся реакцией системы с импульсной характеристикой $h(n)$ на последовательность $x(n)$, можно рассматривать как реакцию системы с импульсной характеристикой $x(n)$ на последовательность $h(n)$.

8.5. Частотная передаточная функция дискретной системы

Частотная передаточная функция дискретной системы может быть получена формальной заменой $z=e^{j\omega T}$ ($s=j\omega$), полученной отбрасыванием вещественной части переменной s преобразования Лапласа:

$$H(e^{j\omega T})=H(z)|_{z=e^{j\omega T}}.$$

В результате указанной замены в (8.6) получим

$$H(e^{j\omega T})=\frac{b_0+b_1e^{-j\omega T}+\dots+b_{M-1}e^{-j\omega T(M-1)}+b_Me^{-j\omega TM}}{1+a_1e^{-j\omega T}+\dots+a_{N-1}e^{-j\omega T(N-1)}+a_Ne^{-j\omega TN}}.$$

Частотная передаточная функция характеризует преобразующие свойства дискретной системы при гармоническом входном воздействии $x(n)$. Покажем это. Пусть на вход системы подается комплексная гармоническая последовательность

$$x(n)=a \cdot e^{j\omega Tn}.$$

Тогда, поскольку система линейна, последовательность на выходе может быть только вида

$$y(n)=b \cdot e^{j(\omega Tn+\varphi)}=b \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega Tn}.$$

Подставив $x(n)$ и $y(n)$ в разностное уравнение (8.3), получим

$$\begin{aligned} b \cdot e^{j\varphi} (e^{j\omega Tn} + a_1 e^{j\omega T(n-1)} + \dots + a_{N-1} e^{j\omega T(n-N+1)} + a_N e^{j\omega T(n-N)}) = \\ = a \cdot (b_0 e^{j\omega Tn} + b_1 e^{j\omega T(n-1)} + \dots + b_{M-1} e^{j\omega T(n-M+1)} + b_M e^{j\omega T(n-M)}). \end{aligned}$$

Перепишем полученное выражение в следующем виде:

$$\begin{aligned} b \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega Tn} (1 + a_1 e^{-j\omega T} + \dots + a_{N-1} e^{-j\omega T(N-1)} + a_N e^{-j\omega TN}) = \\ = a \cdot e^{j\omega Tn} \cdot (b_0 + b_1 e^{-j\omega T} + \dots + b_{M-1} e^{-j\omega T(M-1)} + b_M e^{-j\omega TM}). \end{aligned}$$

Отсюда найдем

$$H(e^{j\omega T})=\frac{b_0+b_1e^{-j\omega T}+\dots+b_{M-1}e^{-j\omega T(M-1)}+b_Me^{-j\omega TM}}{1+a_1e^{-j\omega T}+\dots+a_{N-1}e^{-j\omega T(N-1)}+a_Ne^{-j\omega TN}}=\frac{b}{a} \cdot e^{j\varphi}$$

Таким образом, в общем случае частотная передаточная функция для каждого значения ω представляет собой комплексный коэффициент передачи дискретной системы. Функция $H(e^{j\omega T})$ является периодической по частоте с периодом, равным частоте дискретизации

$\omega_d = 2\pi/T = 2\pi f_d$, так как $e^{j\omega T} = e^{j(\omega + k\omega_d)T}$ для произвольного целого числа k . Следовательно, дискретная система ведет себя одинаковым образом для всех частот, отличающихся от основной на значение, кратное ω_d .

Частотная передаточная функция $H(e^{j\omega T})$ дает полное описание линейной стационарной дискретной системы. По этой функции могут быть определены любые другие характеристики.

8.6. Амплитудная и фазовая частотные характеристики

Представим частотную передаточную функцию линейной дискретной системы в виде

$$H(e^{j\omega T}) = H(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

где $H(\omega) = |H(e^{j\omega T})|$, $\varphi(\omega) = \arg H(e^{j\omega T})$.

Функцию $H(\omega) = |H(e^{j\omega T})|$ называют амплитудной частотной функцией, ее график – амплитудной частотной характеристикой (АЧХ). Аргумент $\varphi(\omega) = \arg H(e^{j\omega T})$ называют фазовой частотной функцией, его график – фазовой частотной характеристикой (ФЧХ). В силу периодичности функции $H(e^{j\omega T})$ АЧХ и ФЧХ дискретной системы полностью при $\omega \in [-\pi/T, \pi/T]$. Для дискретных систем, передаточные функции которых имеют только вещественные коэффициенты, АЧХ $H(\omega)$ представляет собой четную функцию частоты, а ФЧХ $\varphi(\omega)$ – нечетную функцию частоты. Следовательно, АЧХ и ФЧХ дискретной системы достаточно строить на частотном интервале $[0, \pi/T]$.

Чтобы упростить сопоставление частотных характеристик различных дискретных систем частоту ω нормируют. Как правило, используют два способа нормирования.

1. При первом способе применяют нормированную частоту $\tilde{\omega} = \omega T$. Период повторения для всех частотных характеристик в этом случае равен $\tilde{\omega}_d = 2\pi$ и строятся они обычно на интервале $[0, \pi]$ нормированной частоты.

2. При втором способе вводят нормированную частоту $r = \omega T / 2\pi$. Период повторения для всех частотных характеристик в этом случае равен $r_d = 1$. Характеристики строят для $r \in [0; 0,5]$.

Пример. Рассмотрим дискретную систему первого порядка, описываемую передаточной функцией

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)z^{-1}} = \frac{\alpha z}{z - (1 - \alpha)}.$$

После замены $z=e^{j\omega T}$ получим частотную передаточную функцию:

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)e^{-j\omega T}} = \frac{\alpha e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - (1-\alpha)}$$

Если ввести нормированную частоту $\tilde{\omega}=\omega T$, частотная передаточная функция примет вид

$$H(e^{j\tilde{\omega}}) = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)e^{-j\tilde{\omega}}} = \frac{\alpha e^{j\tilde{\omega}}}{e^{j\tilde{\omega}} - (1-\alpha)}$$

АЧХ и ФЧХ рассматриваемой системы определяются выражениями:

$$H(\tilde{\omega}) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+(1-\alpha)^2 - 2(1-\alpha)\cos\tilde{\omega}}};$$

$$\varphi(\tilde{\omega}) = -\arctg \frac{(1-\alpha)\sin\tilde{\omega}}{1-(1-\alpha)\cos\tilde{\omega}}.$$

Частотные характеристики, рассчитанные по полученным выражениям, показаны на рис. 8.3. Сплошной линией здесь выделены частотные характеристики на основном интервале частот $\tilde{\omega} \in [0; \pi]$.

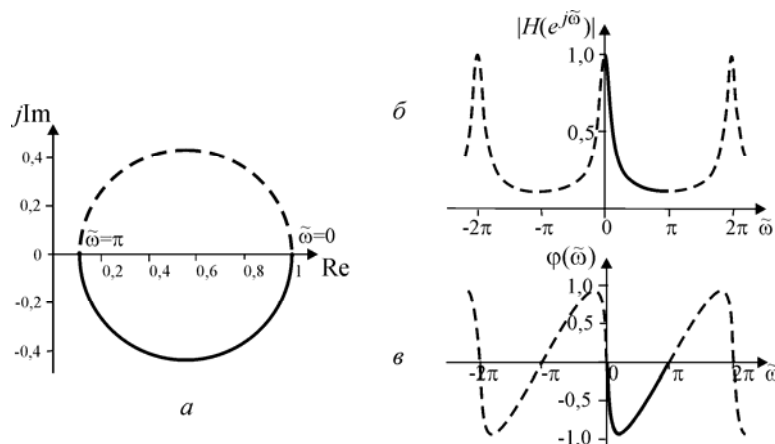


Рис. 8.3. Частотные характеристики дискретной системы:
a – АФЧХ, *б* – АЧХ, *в* – ФЧХ

8.7. Структурные схемы дискретной системы

Элементы структурных схем

Структурная схема – это графическая форма математической модели дискретной системы, заданной разностным уравнением. Как видно из разностного уравнения, в линейной стационарной системе с дискретными последовательностями выполняются следующие преобразования:

- сложение (вычитание) отсчетов;
- умножение отсчетов на постоянный коэффициент;
- задержка (запоминание) отсчетов.

Для каждого из указанных преобразований определено соответствующее графическое обозначение (рис. 8.4).

На рис. 8.4, а и б показаны соответственно условные обозначения операций сложения и вычитания дискретных последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$:

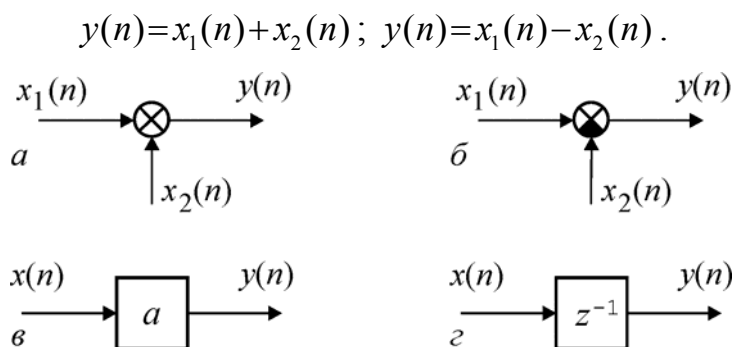


Рис. 8.4. Элементы структурных схем

Операция умножения на постоянный коэффициент обозначается в виде, показанном на рис. 8.4, в. Задержка отсчетов дискретных последовательностей на один интервал дискретизации обозначается так, как изображено на рис. 8.4, г.

Используя описанные условные обозначения, можно изобразить структурную схему любой линейной стационарной системы, причем не единственным способом. Рассмотрим некоторые наиболее часто используемые варианты построения структурных схем дискретной системы. Эти варианты структурных схем еще называют формами реализации дискретных систем, поскольку согласно структурной схеме обычно выполняется расчет выходной дискретной последовательности.

Прямая форма

Прямая форма структурной схемы составляется непосредственно по разностному уравнению дискретной системы, записанному в виде

$$y(n) = -\sum_{v=1}^N a_v y(n-v) + \sum_{\mu=0}^M b_{\mu} x(n-\mu),$$

или по передаточной функции

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{\mu=0}^M b_{\mu} z^{-\mu}}{1 + \sum_{v=1}^N a_v z^{-v}}. \quad (8.11)$$

Структурная схема изображена на рис. 8.5. В структурной схеме для образования цепей, соответствующих преобразованию входной

$x(n)$ и выходной $y(n)$ последовательностей используются отдельные элементы задержки (см. верхнюю и нижнюю части схемы). Затем эти цепи объединяются.

Недостаток прямой формы заключается в том, что реализация дискретной системы по этой схеме требует $(M+N)$ элементов задержки. В конечном счете это ведет к увеличению времени вычисления значений $y(n)$.

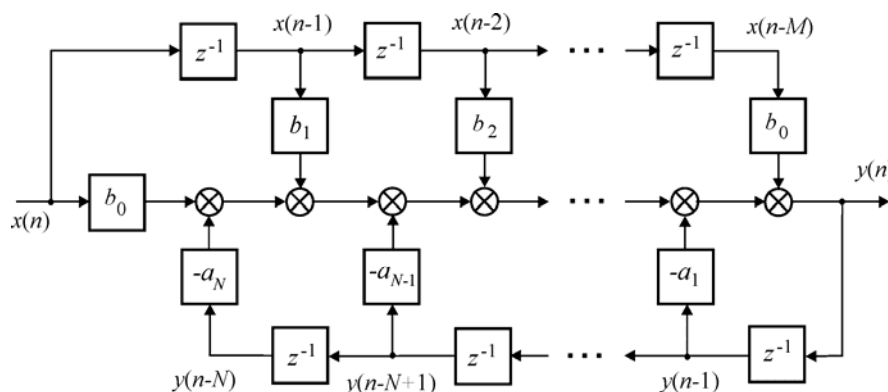


Рис. 8.5. Прямая форма структурной схемы

Первая каноническая форма

Канонической называют структурную схему дискретной системы, содержащую минимальное число элементов задержки. Построим первый вариант такой структурной схемы. Передаточную функцию (8.11) дискретной системы можно представить в виде

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z), \quad (8.12)$$

где

$$H_1(z) = \frac{G(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{v=1}^N a_v z^{-v}}; \quad H_2(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = \sum_{\mu=0}^M b_\mu z^{-\mu}.$$

Дискретная система согласно формуле (8.12) состоит из двух последовательно соединенных частей с передаточными функциями $H_1(z)$ и $H_2(z)$. Первая часть имеет только полюсы, а вторая – только нули.

Передаточным функциям $H_1(z)$ и $H_2(z)$ соответствуют разностные уравнения

$$g(n) = x(n) - \sum_{v=1}^N a_v g(n-v);$$

$$y(n) = \sum_{\mu=0}^M b_\mu g(n-\mu).$$

Структурные схемы соединений дискретных систем

Различают следующие соединения дискретных систем.

Последовательное соединение. При последовательном (каскадном) соединении (рис. 8.8, а) выходной сигнал предшествующей системы является входным для последующей. Эквивалентная передаточная функция общей системы равна произведению передаточных функций:

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z).$$

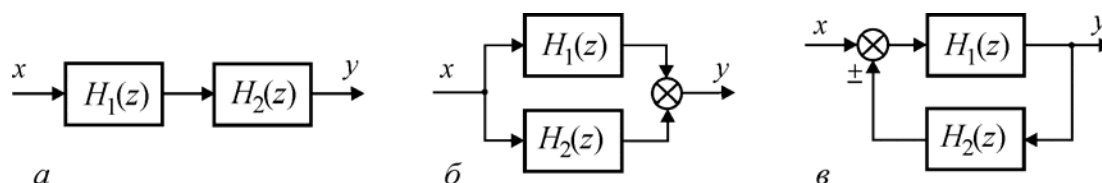


Рис. 8.8. Структурные схемы соединений дискретных систем

Параллельное соединение. При параллельном соединении (рис. 8.8, б) входная последовательность подается на входы всех параллельно соединенных систем одновременно, а выходные последовательности систем суммируются. Эквивалентная передаточная функция общей системы равна сумме передаточных функций систем:

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z).$$

Соединение с обратной связью. В случае соединения систем по принципу обратной связи (рис. 8.8, в) эквивалентная передаточная функция определяется выражением

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 \mp H_1(z) \cdot H_2(z)}.$$

8.8. Устойчивость дискретных систем

Дискретная система, как и всякая система с обратной связью, может при определенных условиях стать неустойчивой.

Пусть на вход дискретной системы, описываемой разностным уравнением N -го порядка

$$\begin{aligned} y(n+N) + a_1 y(n+N-1) + \dots + a_{N-1} y(n+1) + a_N y(n) = \\ = b_0 x(n+N) + \dots + b_{M-1} x(n+N-M+1) + b_M x(n+N-M). \end{aligned} \quad (8.13)$$

подано произвольное входное воздействие $x(n)$. Процессы в системе зависят от этого входного воздействия и начальных условий $y(0)$, $y(1)$, ..., $y(N-1)$. Последовательность $y(n)$ на выходе системы может быть записана в виде

$$y(n) = y_b(n) + y_c(n),$$

где $y_b(n)$, $y_c(n)$ – составляющие, соответственно определяющие вынужденное и свободное движения системы.

Дискретная система асимптотически устойчива, если её собственное движение с течением времени затухает и стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_c(n) = 0. \quad (8.14)$$

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_c(n) = \infty,$$

то дискретная система называется неустойчивой. Если, наконец,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_c(n) = \text{const}$$

или не существует, то говорят, что дискретная система находится на границе устойчивости.

Собственное движение $y_c(n)$ дискретной системы является общим решением однородного разностного уравнения

$$y(n+N) + a_1 y(n+N-1) + \dots + a_{N-1} y(n+1) + a_N y(n) = 0,$$

полученного из (8.13). Это решение зависит от начальных условий $y(0), y(1), \dots, y(N-1)$ и корней z_1, z_2, \dots, z_N характеристического уравнения

$$z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_{N-1} z + a_N = 0.$$

Если среди корней характеристического уравнения отсутствуют кратные, свободное движение дискретной системы описывается формулой

$$y_c(n) = \sum_{v=1}^N c_v z_v^n.$$

Отсюда следует, что условие (8.14) будет выполнено тогда и только тогда, когда корни характеристического уравнения по модулю строго меньше единицы, т. е.

$$|z_v| < 1, \quad v=1, 2, \dots, N.$$

Основное условие устойчивости. Для того чтобы линейная дискретная система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения (полюсы системы) были по модулю меньше единицы.

Геометрически это означает, что корни характеристического уравнения (полюсы) устойчивой дискретной системы располагаются внутри единичного круга на z -плоскости. На рис. 8.9, а показано расположение полюсов устойчивой дискретной системы четвертого порядка. Если хотя бы один полюс системы находится за пределами единичной окружности (рис. 8.9, б), то дискретная система неустойчива. При наличии

полюса на единичной окружности (рис. 8.9, в) система находится на границе устойчивости.

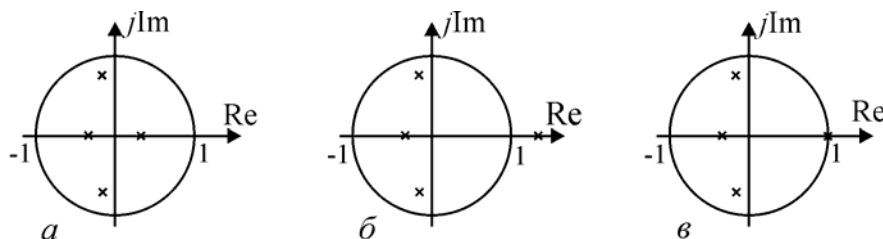


Рис. 8.9. Расположение полюсов дискретной системы:
a – устойчивой, *б* – неустойчивой, *в* – на границе устойчивости

Положение нулей передаточной функции не влияет на устойчивость дискретной системы.

8.9. Дискретное интегрирование

Интегрирование непрерывного сигнала описывается уравнением

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

Для приближенной реализации интегрирования в дискретной форме имеется ряд алгоритмов. Ограничим класс рассматриваемых алгоритмов дискретного интегрирования алгоритмами, которые можно описать разностным уравнением

$$y(n) = y(n-1) + \delta y[x(n), x(n-1), T], \quad (8.15)$$

где $y(n)$ – выходная последовательность, представляющая собой оценку интеграла, $\delta y[x(n), x(n-1), T]$ – величина приращения на очередном интервале дискретизации, зависящая от применяемого способа интегрирования.

Интегрирование по методу прямоугольников. Величина приращения в уравнении (8.15) находится как площадь прямоугольника (рис. 8.10, *a*). В этом случае разностное уравнение дискретного интегратора принимает вид

$$y(n) = y(n-1) + T \cdot x(n-1).$$

Подвергнув уравнение z -преобразованию, получим передаточную функцию дискретного интегратора

$$H_{\Pi}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}}.$$

Интегрирование по методу трапеций. Приращение интеграла в уравнении (8.15) численно равно площади трапеции, показанной на рис. 8.10, *б*).

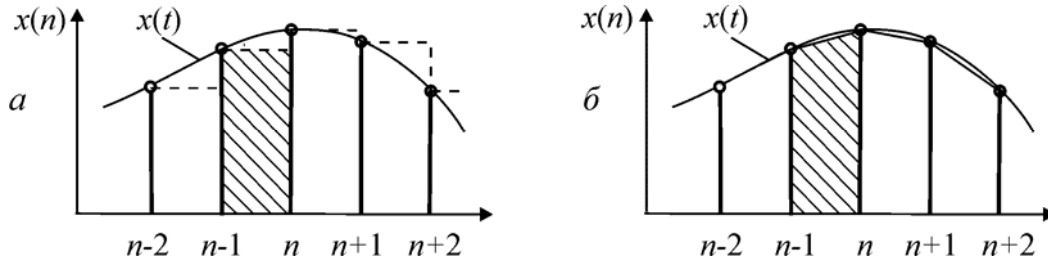


Рис.8.10. Геометрическое представление интегрирования:
a – по методу прямоугольников, *б* – по методу трапеций

Дискретный интегратор, реализующий интегрирование по методу трапеций, описывается разностным уравнением

$$y(n) = y(n-1) + \frac{T}{2} \cdot [x(n-1) + x(n)].$$

Подвергнув это уравнение z -преобразованию, найдем передаточную функцию дискретного интегратора

$$H_{\tau}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}.$$

8.10. Дискретное дифференцирование

Идеальное дифференцирование непрерывного сигнала определяется выражением

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Как известно, операторы дифференцирования s и сдвига z связаны соотношением

$$s = \frac{1}{T} \ln z. \tag{8.16}$$

Функция (8.16) может быть разложена в ряд тремя способами. Первые слагаемые этих разложений можно было бы рассматривать как варианты описания алгоритмов дифференцирования. Однако одно из этих разложений приводит к неустойчивому алгоритму дифференцирования, а другое – к алгоритму дифференцирования, который не может быть реализован в системах, работающих в реальном времени. Третий способ разложения приводит к двум следующим алгоритмам.

Дифференцирование по методу простой разности. Запишем функцию (8.16) в виде ряда:

$$s = \frac{1}{T} \left[(1-z^{-1}) - \frac{1}{2}(1-z^{-1})^2 + \frac{1}{3}(1-z^{-1})^3 - \dots \right]. \tag{8.17}$$

Удержав в (8.17) первое слагаемое, получим передаточную функцию цифрового дифференциатора

$$H_{\text{дн}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{T}(1 - z^{-1}).$$

Отсюда найдем разностное уравнение

$$y(n) = \frac{1}{T}[x(n) - x(n-1)].$$

Дифференцирующий нерекурсивный фильтр. Если в (8.17) учесть два первых члена ряда, то после преобразований получим

$$H_{\text{дн}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2T}(3 - 4z^{-1} + z^{-2}). \quad (8.18)$$

Передаточной функции (8.18) соответствует разностное уравнение

$$y(n) = \frac{1}{2T}[3 \cdot x(n) - 4 \cdot x(n-1) + x(n-2)].$$

Контрольные вопросы и упражнения

1. Даны дискретные системы, описываемые уравнениями:
 - а) $y(n) = 2 \cdot |x(n-1)|$; в) $y(n) = 2 \cdot x(n) - 5 \cdot x(n-1)$;
 - б) $y(n) + 0,2 \cdot y(n-1) = 5n \cdot x(n-1)$; г) $y(n) - 0,4y^2(n-1) = 10 \cdot x(n)$.

Классифицируйте их по признакам «линейность» и «стационарность».

2. Дайте понятие передаточной функции дискретной системы.
3. Дискретная система описывается разностным уравнением

$$y(n) + 0,7 \cdot y(n-1) + 0,01 \cdot y(n-2) = 0,5 \cdot x(n).$$

Найдите ее передаточную функцию.

4. Дана передаточная функция дискретной системы

$$H(z) = Y(z)/X(z) = (1 + 0,5 \cdot z^{-1}) / (1 - 0,8 \cdot z^{-1}).$$

Запишите разностное уравнение дискретной системы.

5. Дана передаточная функция дискретной системы

$$H(z) = Y(z)/X(z) = 5 / (1 - 0,1 \cdot z^{-1}).$$

Запишите аналитическое выражение для построения АФЧХ системы.

6. Дискретная система описывается разностным уравнением

$$y(n) = 0,9y(n-1) + 0,2x(n).$$

Определите коэффициент передачи систем на частоте $\omega = 5$ рад/с, если период дискретизации $T = 0,1$ с.

7. Дайте понятие импульсной характеристики линейной дискретной системы. Как связаны импульсная характеристика системы с ее передаточной функцией?

8. Дана передаточная функция дискретной системы

$$H(z)=Y(z)/X(z)=5\cdot z^{-1}/(1-0,5\cdot z^{-1}).$$

Найдите импульсную характеристику дискретной системы.

9. Цифровой интегратор, реализующий интегрирование по методу трапеций, описывается разностным уравнением

$$y(n)=y(n-1)+\frac{T}{2}\cdot x(n)+\frac{T}{2}\cdot x(n-1).$$

Постройте структурную схему интегратора. Запишите формулы для АЧХ и ФЧХ.

10. Цифровой дифференциатор описывается уравнением

$$y(n)=\frac{1}{T}[x(n)-x(n-1)].$$

Постройте структурную схему дифференциатора. Запишите формулы для АЧХ и ФЧХ.

11. Дана передаточная функция дискретной системы

$$H(z)=Y(z)/X(z)=(1+z^{-1})/(1-0,5\cdot z^{-1}).$$

Постройте структурную схему дискретной системы.

12. Дискретная система имеет полюсы $\lambda_1=0,1+j0,2$; $\lambda_2=0,1-j0,2$ и нули $\nu_1=-1$; $\nu_2=1$. Запишите передаточную функцию и разностное уравнение системы. Постройте структурную схему.

13. Дана передаточная функция дискретной системы

$$H(z)=Y(z)/X(z)=1/(1-0,8\cdot z^{-1}-0,1\cdot z^{-2}).$$

Исследуйте данную систему на устойчивость.

14. Дана дискретная система, описываемая разностным уравнением

$$y(n)+0,5\cdot y(n-1)-0,02\cdot y(n-2)=x(n)+2\cdot x(n-1).$$

Найдите нули и полюсы системы. Постройте нуль-полюсную диаграмму. Устойчива ли система?

15. Опишите прямой метод решения разностного уравнения. Поясните его на примере разностного уравнения

$$y(n)+0,5\cdot y(n-1)-0,02\cdot y(n-2)=0,2\cdot n.$$

Глава 9

ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Функциональная схема цифрового фильтра – Достоинства и недостатки цифровых фильтров – Классификация цифровых фильтров – Реализация цифровых фильтров

9.1. Функциональная схема цифрового фильтра

Теоретические основы цифровой фильтрации известны давно. Сдерживающим фактором их применения для решения практических задач было отсутствие необходимых технических средств. Появление вычислительной техники сняло это препятствие.

Под *цифровым фильтром* обычно понимают техническое устройство или программу, работа которых имеет целью преобразование дискретной последовательности $x(n)$ в другую дискретную последовательность $y(n)$. Алгоритм преобразования задается в виде разностного уравнения (передаточной функции). Цифровой фильтр можно применить для фильтрации сигналов как в реальном времени, так и предварительно записанных.

Рассмотрим упрощенную структурную схему цифрового фильтра, реализованного в виде специализированного устройства (рис. 9.1).

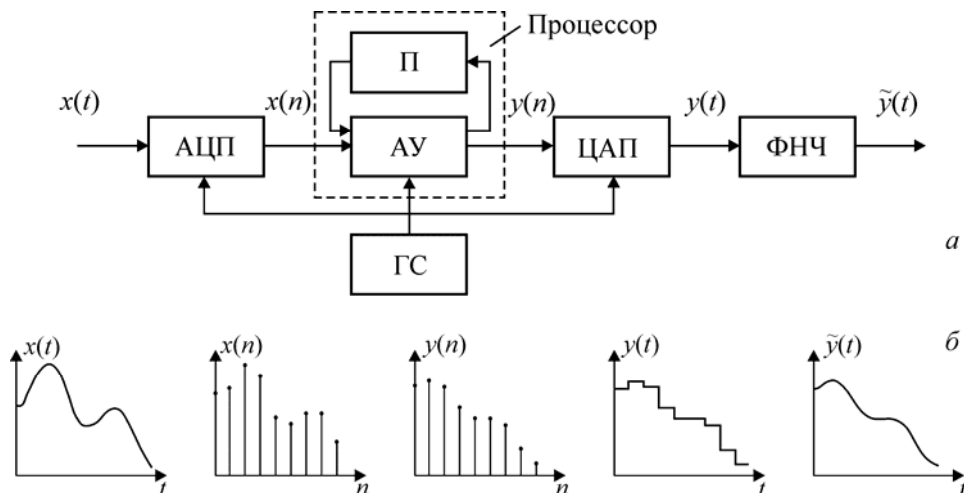


Рис.9.1. Функциональная схема цифрового фильтра и временные диаграммы процессов

Цифровой фильтр включает следующие элементы:

- аналого-цифровой преобразователь (АЦП);
- процессор, состоящий из арифметического устройства (АУ) и памяти (П);
- цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП);
- сглаживающий фильтр нижних частот (СФ);
- генератор синхронизации (ГС).

Аналого-цифровой преобразователь

Непрерывный сигнал $x(t)$ поступает на вход аналого-цифрового преобразователя (АЦП), который фиксирует значения $x(n)$ сигнала в дискретные моменты времени $t=nT, n=0, 1, \dots$ и преобразует их в цифровой код. Практически все АЦП используют двоичную систему представления с определенным числом разрядов. Наиболее часто используются 8-, 10-, 12-, 16-, 20- и 24-х разрядные АЦП. Увеличение числа разрядов повышает точность и позволяет расширить динамический диапазон преобразуемых сигналов. Однако увеличение количества разрядов снижает возможную скорость дискретизации и увеличивает стоимость аппаратуры. Потерянная из-за недостатка разрядов АЦП информация невозможна.

Если пренебречь явлениями гистерезиса и запаздывания, АЦП можно представить в виде последовательного соединения импульсного элемента, осуществляющего квантование по времени, и многоступенчатого симметричного релейного элемента со статической характеристикой $\Phi[x(n)]$, осуществляющего квантование по уровню (рис. 9.2). Элементы цифровой последовательности $x_{ц}(n)$ могут принимать лишь ряд дискретных значений $h_0, h_1, h_2, \dots, h_l, \dots, h_{N-1}$, число которых зависит от количества используемых разрядов.

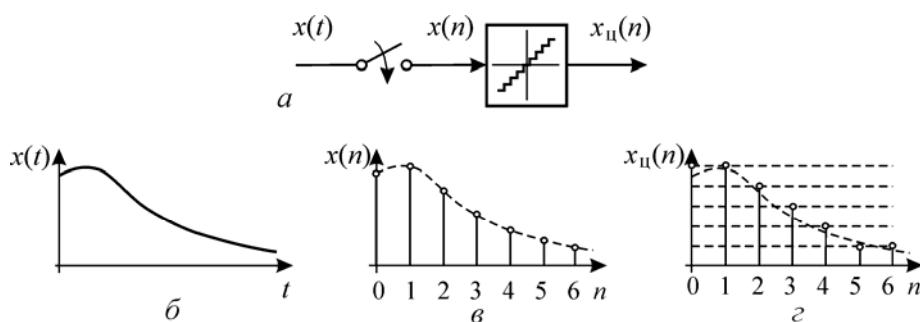


Рис.9.2. Образование дискретной и цифровой последовательностей:

- a – схема замещения АЦП; b – аналоговый сигнал;
 $в$ – дискретная последовательность; $г$ – цифровая последовательность

Известны способы квантования по уровню с использованием *усечения* или *округления* значения дискретного отсчета сигнала. Если осуществляется усечение, то дискретный отсчет, находящийся между уровнями h_{l-1} и h_l , заменяется нижним значением h_{l-1} . Усечение приводит к погрешности, максимальное значение которой равно весу младшего из удерживаемых разрядов. При этом ошибка всегда имеет один и тот же знак (усеченное значение не может быть больше исходного).

При округлении дискретному отсчету, находящемуся между уровнями h_{l-1} и h_l , присваивается ближайшее значение. Ошибка для этого способа квантования может быть как положительной, так и отрицательной, а ее модуль не превосходит веса старшего из отброшенных разрядов.

Таким образом, квантование по уровню принципиально является источником нелинейности. Однако у АЦП, имеющих не менее 10 двоичных разрядов, эффекты квантования по уровню практически незаметны. В этом случае в качестве выходной величины АЦП можно с достаточной точностью принять дискретную последовательность $x(n)$. Это допущение позволяет использовать для анализа и синтеза ЦФ хорошо развитый аппарат теории линейных дискретных систем, который был рассмотрен нами в главе 8.

Процессор

В процессоре осуществляется преобразование последовательности $x(n)$ в соответствии с определенным алгоритмом. Арифметические операции осуществляются над отсчетами последовательности $x(n)$, записанными в виде цифрового кода. При этом ранее полученные отсчеты и промежуточные результаты могут сохраняться в памяти процессора для использования в последующих вычислениях. Результатом работы процессора является последовательность $y(n)$, представленная в виде цифрового кода.

Цифро-аналоговый преобразователь

Цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) обеспечивают преобразование текущего значения $y(n)$, представленного в цифровом виде, в постоянное напряжение, удерживаемое в течение соответствующего интервала дискретности. На выходе ЦАП формируется непрерывный сигнал $y(t)$ в виде ступенчатой функции (рис. 9.1). Основные характеристики (разрядность, частота дискретизации, число каналов и т.п.) ЦАП аналогичны характеристикам АЦП.

Сглаживающий фильтр

С помощью фильтра устраняются высокочастотные колебания, и выходной сигнал $\tilde{y}(t)$ цифрового фильтра приобретает сглаженный вид.

Генератор синхронизации

Генератор синхронизации обеспечивает синхронную работу АЦП, процессора и ЦАП.

9.2. Достоинства и недостатки цифровых фильтров

В настоящее время цифровые фильтры применяются повсюду. По сравнению с аналоговыми фильтрами они предпочтительны во множестве областей, так как обладают рядом достоинств.

1. Однажды разработанное аппаратное и программное обеспечение можно использовать в других задачах цифровой фильтрации практически без изменений или с незначительной модификацией. Например, при переходе из области низких частот в область высоких, и наоборот, достаточно менять частоту дискретизации.

2. Цифровые фильтры могут использоваться при очень низких частотах, которые характерны во многих областях, в частности в биомедицинских приложениях. Использование аналоговых фильтров в этих случаях требует громоздких компонентов.

3. Цифровые фильтры могут иметь характеристики, которые невозможно получить у аналоговых фильтров, например линейную фазо-частотную характеристику.

4. Точность, достигаемая при использовании аналоговых фильтров, ограничена точностью применяемых аналоговых компонентов. Точность цифровых фильтров ограничена только количеством разрядов.

5. Цифровые фильтры не имеют дрейфа, характерного для аналоговых фильтров.

6. При разработке ЦФ не возникает проблема согласования нагрузок, присущая аналоговым фильтрам.

7. Частотные характеристики цифровых фильтров зависят от частоты (периода) дискретизации. Изменяя эту частоту, можно легко перестраивать фильтр.

8. Просто решаются вопросы сохранения исходных, промежуточных и выходных данных, если в этом есть необходимость.

И все же, по сравнению с аналоговыми, цифровые фильтры имеют и некоторые недостатки.

1. Конечное число разрядов приводит к неизбежной процедуре округления. Ошибка округления может накапливаться, и при использова-

нии рекурсивных фильтров высоких порядков может вызвать неустойчивость фильтра.

2. Квантование по уровню, которое учитывается введением в структурную схему многоступенчатого симметричного релейного элемента (см. рис. 9.2, а), может привести к возникновению автоколебаний. И это надо учитывать.

3. Существуют определенные ограничения при работе в реальном масштабе времени, состоящие в том, что все вычисления должны быть завершены в течение интервала дискретизации.

Впрочем, эти недостатки успешно преодолеваются. В большинстве современных систем обработки информации учитываются достоинства как аналоговых, так и цифровых методов, и для реализации желаемых функций комбинируются аналоговые и цифровые методы.

9.3. Классификация цифровых фильтров

Каузальные и некаузальные цифровые фильтры

С точки зрения физической реализуемости ЦФ делятся на каузальные и некаузальные.

Каузальным (от лат. слова *causal* – причинный) или физически реализуемым называется фильтр, у которого реакция в данный момент времени не зависит от значений входного воздействия в последующие моменты. Импульсная характеристика каузального фильтра удовлетворяет условию $h(n)=0$ при $n<0$, которое означает, что реакция фильтра не может предшествовать приложенному воздействию. Каузальный фильтр может быть реализован физически в реальном масштабе времени.

Например, фильтр, описываемый разностным уравнением

$$y(n)=0,8y(n-1)+0,2x(n),$$

удовлетворяет приведенному выше определению и, следовательно, является каузальным. Его импульсная характеристика

$$h(n)=Z^{-1}\left\{\frac{0,2z}{z-0,8}\right\}=0,2\cdot(0,8)^n, \quad n\geq 0.$$

Некаузальный фильтр – это фильтр, у которого реакция в данный момент времени зависит от значений входного воздействия в последующие моменты. Например, фильтр, осуществляющий сглаживание скользящим усреднением по трем значениям, описывается разностным уравнением

$$y(n)=\frac{1}{3}[x(n-1)+x(n)+x(n+1)].$$

Такой фильтр нельзя физически реализовать в режиме реального времени, так как при вычислении очередного значения $y(n)$ необходимо знать будущее значение $x(n+1)$ входного воздействия. Импульсная характеристика этого фильтра определяется выражением

$$h(n) = \frac{1}{3}[\delta(n-1) + \delta(n) + \delta(n+1)].$$

Некаузальные фильтры можно использовать на практике в тех случаях, когда фильтрация происходит не в реальном времени, а выполняется над хранящимися в памяти последовательностями конечной длины.

Линейные рекурсивные и нерекурсивные цифровые фильтры

В зависимости от вида разностного уравнения, описывающего работу цифрового фильтра, последние делятся на рекурсивные и нерекурсивные.

Для линейных рекурсивных фильтров связь между входной последовательностью $x(n)$ и реакцией фильтра $y(n)$ записывается в виде разностного уравнения

$$y(n) = -\sum_{v=1}^N a_v y(n-v) + \sum_{\mu=0}^M b_{\mu} x(n-\mu), \quad (9.1)$$

где a_v ($v=1, \dots, N$), b_{μ} ($\mu=0, 1, \dots, M$) – постоянные коэффициенты.

Согласно уравнению текущий отсчет $y(n)$ реакции фильтра определяется текущим значением входной последовательности $x(n)$ и предшествующими значениями входной и выходной последовательностей.

Линейные нерекурсивные фильтры описываются разностным уравнением следующего вида:

$$y(n) = \sum_{v=1-N}^{N-1} b_v x(n-v), \quad (9.2)$$

где b_v – постоянные коэффициенты. Из этого уравнения видно, что нерекурсивные цифровые фильтры производят взвешенное суммирование элементов входной последовательности $x(n)$. Фильтр, описываемый уравнением (а), является некаузальным, так как при определении текущего значения $y(n)$ предполагается использование будущих значений входной величины $x(n+1), \dots, x(n+N-1)$. Каузальный нерекурсивный фильтр описывается уравнением

$$y(n) = \sum_{v=0}^{N-1} b_v x(n-v).$$

Цифровые фильтры с конечной и бесконечной импульсными характеристиками

Фильтром с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтром) называют фильтр, у которого импульсная характеристика представляет собой конечную дискретную последовательность: $h(0), h(1), \dots, h(N-1)$.

Фильтром с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтром) называют фильтр, у которого импульсная характеристика может принимать отличные от нуля значения на бесконечном множестве значений $n=0, 1, \dots$.

Нерекурсивный фильтр всегда является КИХ-фильтром, а рекурсивный фильтр может быть как БИХ-фильтром, так и КИХ-фильтром.

Пример. Для рекурсивного фильтра с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}} = \frac{z - z^{-4}}{z - 1}$$

путем непосредственного деления можно получить следующие значения импульсной характеристики: $h(0)=h(1)=h(2)=h(3)=h(4)=1$, $h(n)=0$ при $n > 4$.

Очевидно, это КИХ-фильтр.

9.4. Реализация цифровых фильтров

Необходимо отметить, что алгоритмы фильтрации, описываемые разностными уравнениями (9.1) и (9.2), реализуются в цифровом фильтре приближенно, так как арифметические операции производятся с ограниченной точностью, определяемой числом используемых разрядов. Чем больше разрядов, тем меньше отличие между дискретной $x(n)$ и цифровой $x_{\text{ц}}(n)$ последовательностями (см. рис. 9.2). При достаточно большом числе разрядов можно пренебречь эффектом квантования по уровню. Это позволяет использовать для анализа и синтеза цифровых фильтров аппарат теории линейных дискретных систем, который был рассмотрен в главе 8.

Как следует из разностных уравнений (9.1) и (9.2), вычисление выходной последовательности $y(n)$ цифрового фильтра включает только умножение, сложение-вычитание и задержку. Следовательно, для реализации фильтра требуются следующие основные компоненты:

- постоянная память для хранения коэффициентов фильтра;
- оперативная память для хранения текущих и предыдущих отсчетов входной и выходной последовательностей;
- аппаратные или программные умножители;
- сумматоры.

Реализация алгоритмов цифровой фильтрации (выполнение арифметических операций), описываемых разностными уравнениями (9.1) и (9.2), осуществляется в соответствии со структурными схемами, которые были рассмотрены в параграфе 8.5. При этом, как правило, используются канонические формы, требующие минимального количества элементов задержки, и каскадные формы, которые будут описаны дальше.

Разработка цифрового фильтра включает пять этапов:

- формулирование требований к фильтру;
- определение передаточной функции фильтра;
- выбор структуры фильтра;
- анализ эффектов квантования на свойства фильтра и выбор числа разрядов;
- реализация фильтра в программном или аппаратном варианте.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте понятие цифрового фильтра.
2. Поясните отличия способов квантования по уровню, основанных на использовании процедур *усечения* и *округления* значения дискретного отсчета сигнала.
3. Постройте характеристики многоступенчатого релейного элемента при квантовании по уровню с *усечением* и *округлением* значений дискретного отсчета.
4. Укажите основные преимущества и основные недостатки цифровых фильтров. Поясните, в каких случаях они проявляются.
5. Чем отличается деление цифровых фильтров по признакам «нерекурсивный и рекурсивный» и «конечная и бесконечная импульсные характеристики»?
6. Даны цифровые фильтры, описываемые уравнениями:
а) $y(n)=0,5 \cdot [x(n+1)-x(n-1)]$; в) $y(n)=0,4y(n-1)+x(n)$;
б) $y(n)+0,2 \cdot y(n-1)=5 \cdot x(n-1)$; г) $y(n)=2 \cdot x(n)-5 \cdot x(n-1)$.

Классифицируйте их по признакам «нерекурсивный и рекурсивный» и «конечная и бесконечная импульсные характеристики».

Глава 10

РЕКУРСИВНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Рекурсивные цифровые фильтры первого порядка. – Рекурсивные цифровые фильтры второго порядка. – Реализация рекурсивных цифровых фильтров – Расчет рекурсивных цифровых фильтров по аналоговому прототипу. – Примеры расчета

10.1. Рекурсивные цифровые фильтры первого порядка

Разностное уравнение рекурсивного цифрового фильтра первого порядка имеет вид:

$$y(n) = -ay(n-1) + b_0x(n) + b_1x(n-1).$$

Применив z -преобразование к левой и правой частям уравнения, найдем передаточную функцию

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1}}{1 + az^{-1}}.$$

Единственный полюс фильтра равен $\lambda_1 = -a$. Чтобы обеспечить устойчивость фильтра, необходимо выбрать $|a| < 1$. Единственный нуль фильтра равен $v_1 = -b_1/b_0$.

Выполнив в передаточной функции подстановку $z = e^{j\tilde{\omega}}$, где $\tilde{\omega} = \omega T$ – нормированная частота, получим частотную передаточную функцию

$$H(e^{j\tilde{\omega}}) = \frac{b_0 + b_1e^{-j\tilde{\omega}}}{1 + ae^{-j\tilde{\omega}}}.$$

Отсюда при $\tilde{\omega} = 0$ и $\tilde{\omega} = \pi$ соответственно будем иметь граничные значения АЧХ:

$$H(1) = \frac{b_0 + b_1}{1 + a}; \quad H(-1) = \frac{b_0 - b_1}{1 - a}. \quad (10.1)$$

Фильтр нижних частот

Зададим граничные условия для АЧХ фильтра: $H(1) = 1$ и $H(-1) = \delta$, где δ – малое положительное число. Из выражений (10.1) получим соотношения для коэффициентов цифрового ФНЧ первого порядка, при которых обеспечиваются заданные значения АЧХ в граничных точках:

$$b_0 = \frac{1 + \delta + a(1 - \delta)}{2}, \quad b_1 = \frac{1 - \delta + a(1 + \delta)}{2}.$$

Пример. Пусть $a = -0,8$ и $\delta = 0,05$. В этом случае $b_0 = 0,145$ и $b_1 = 0,055$.

Нуль-полюсная диаграмма и частотные характеристики цифрового ФНЧ первого порядка с такими параметрами показаны на рис. 10.1.

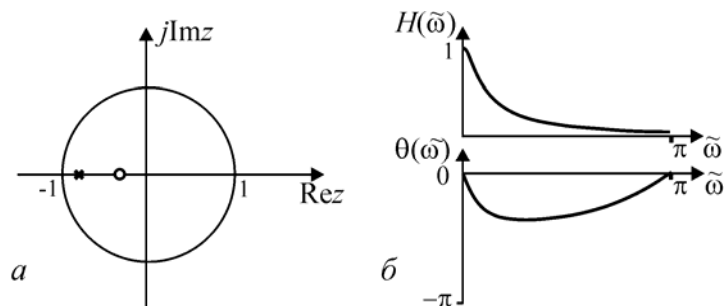


Рис.10.1. Характеристики цифрового ФНЧ первого порядка:
 a – нуль-полюсная диаграмма; b – АЧХ и ФЧХ

Фильтр верхних частот

Зададим граничные значения для АЧХ фильтра: $H(1) = \delta$ и $H(-1) = 1$. В этом случае формулы для коэффициентов передаточной функции цифрового ФВЧ первого порядка, обеспечивающие заданные значения АЧХ в граничных точках, имеют вид:

$$b_0 = \frac{1 + \delta - a(1 - \delta)}{2}, \quad b_1 = \frac{-1 + \delta + a(1 + \delta)}{2}.$$

Пример. Пусть $a = 0,8$ и $\delta = 0,05$. В этом случае $b_0 = 0,145$ и $b_1 = -0,055$.

Нуль-полюсная диаграмма и частотные характеристики цифрового ФВЧ первого порядка с рассчитанными параметрами изображены на рис. 10.2.

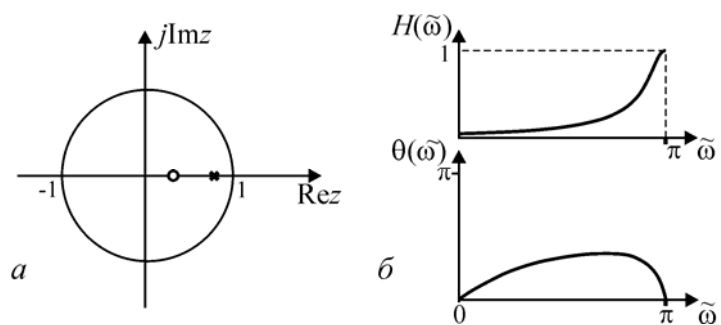


Рис.10.2. Характеристики цифрового ФВЧ первого порядка:
 a – нуль-полюсная диаграмма; b – АЧХ и ФЧХ

Необходимо отметить, что цифровые фильтры первого порядка из-за низкой избирательности находят ограниченное применение на практике. Как правило, они входят в виде составной части в цифровые фильтры, построенные по каскадной схеме.

10.2. Рекурсивные цифровые фильтры второго порядка

Рекурсивный цифровой фильтр второго порядка описывается разностным уравнением

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2).$$

Передаточная функция фильтра имеет вид

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

Фильтр имеет два нуля и два полюса. Условия устойчивости фильтра записываются в виде системы неравенств для коэффициентов характеристического полинома $A(z) = z^2 + a_1 z + a_2$:

$$1 + a_1 + a_2 > 0;$$

$$1 - a_1 + a_2 > 0;$$

$$1 - a_2 > 0.$$

Значения коэффициентов a_0, a_1 , удовлетворяющие данным неравенствам, лежат внутри треугольника (рис. 10.3), называемым областью устойчивости фильтра.

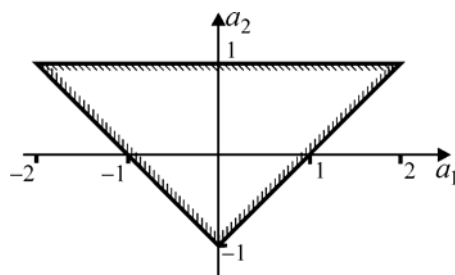


Рис.10.3. Область устойчивости рекурсивных ЦФ второго порядка

После подстановки $z = e^{j\tilde{\omega}}$, где $\tilde{\omega} = \omega T$ – нормированная частота, получим частотную передаточную функцию

$$H(e^{j\tilde{\omega}}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\tilde{\omega}} + b_2 e^{-j2\tilde{\omega}}}{1 + a_1 e^{-j\tilde{\omega}} + a_2 e^{-j2\tilde{\omega}}}.$$

Граничные значения АЧХ, соответствующие значениям частоты $\tilde{\omega} = 0$ и $\tilde{\omega} = \pi$ определяются соответственно выражениями:

$$H(1) = \frac{b_0 + b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2}; \quad H(-1) = \frac{b_0 - b_1 + b_2}{1 - a_1 + a_2}. \quad (10.2)$$

Фильтр нижних частот

Рассмотрим частный случай, когда граничные значения АЧХ фильтра равны: $H(1) = 1$ и $H(-1) = 0$. Тогда из формул (10.2) получим со-

отношение, которому должны удовлетворять коэффициенты передаточной функции:

$$b_1 = b_0 + b_2 = (1 + a_1 + a_2) / 2.$$

Пример. Зададим значения коэффициентов полинома знаменателя из области устойчивости на рис. 10.3: $a_1 = -0,9$; $a_2 = 0,3$. При этом полюсы цифрового фильтра будут равны $\lambda_1 = 0,45 + j0,312$; $\lambda_2 = 0,45 - j0,312$.

По полученной выше формуле рассчитаем значение коэффициента $b_1 = 0,2$. Значения коэффициентов b_0 и b_2 должны удовлетворять условию $b_0 + b_2 = 0,2$. Примем $b_0 = b_2 = 0,1$. При этих значениях коэффициентов фильтр имеет нули $v_1 = v_2 = -1$.

Нуль-полюсная диаграмма и частотные характеристики цифрового ФНЧ второго порядка с данными параметрами показаны на рис. 10.4.

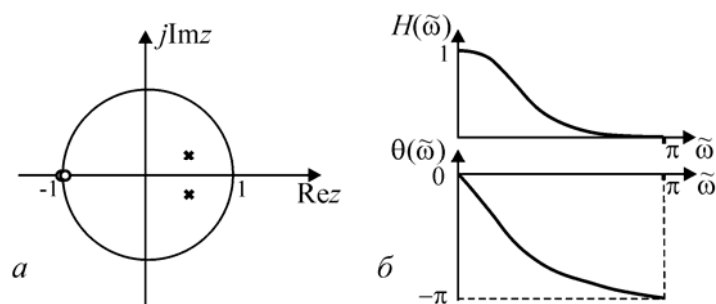


Рис.10.4. Характеристики цифрового ФНЧ второго порядка: a – нуль-полюсная диаграмма; b – АЧХ и ФЧХ

Фильтр верхних частот

Граничные значения для АЧХ фильтра примем равными: $H(1) = 0$ и $H(-1) = 1$. При этом соотношение для коэффициентов передаточной функции, полученное из формул (10.2), имеет вид

$$-b_1 = b_0 + b_2 = (1 - a_1 + a_0) / 2.$$

Пример. Значения коэффициентов полинома знаменателя выберем из области устойчивости на рис. 10.3: $a_1 = 0,9$; $a_2 = 0,3$. Тогда полюсы цифрового фильтра будут равны $\lambda_1 = -0,45 + j0,312$; $\lambda_2 = -0,45 - j0,312$.

По полученной выше формуле рассчитаем значение коэффициента $b_1 = -0,2$. Значения коэффициентов b_0 и b_2 должны удовлетворять условию $b_0 + b_2 = -0,2$. Примем $b_0 = b_2 = -0,1$. При этих значениях коэффициентов фильтр имеет нули $v_1 = v_2 = 1$.

Нуль-полюсная диаграмма и частотные характеристики цифрового ФВЧ второго порядка с данными параметрами показаны на рис. 10.5.

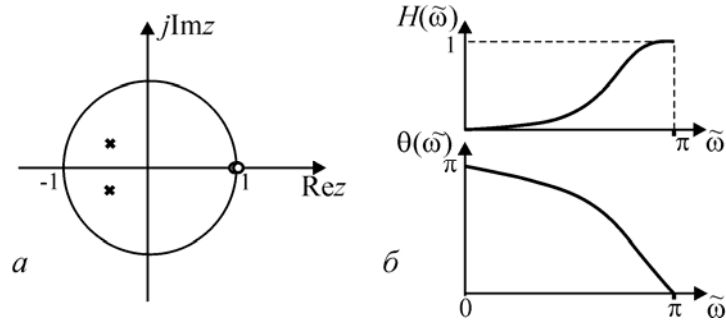


Рис.10.5. Характеристики цифрового ФВЧ второго порядка:
a – нуль-полюсная диаграмма; *б* – АЧХ и ФЧХ

Полосовой фильтр. Граничные значения для АЧХ фильтра примем равными: $H(1)=0$ и $H(-1)=0$. В этом случае из формул (10.2) получим:

$$b_1=0; \quad b_2=-b_0 > 0.$$

Нуль-полюсная диаграмма и частотные характеристики полосового фильтра второго порядка изображены на рис. 10.6. Параметры фильтра: $a_0=0,8$; $a_1=-0,1$; $b_0=0,1$; $b_1=0$; $b_2=-0,1$.

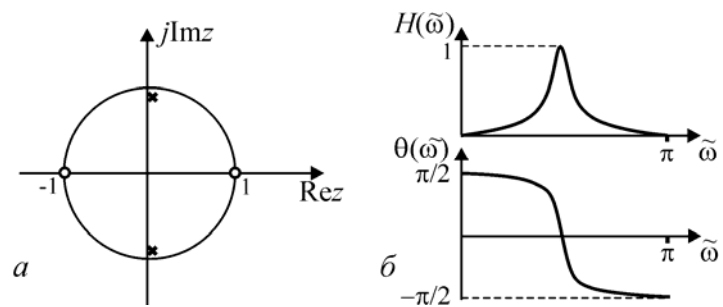


Рис.10.6. Характеристики цифрового полосового фильтра второго порядка:
a – нуль-полюсная диаграмма; *б* – АЧХ и ФЧХ

Заграждающий фильтр. Граничные значения для АЧХ фильтра примем равными: $H(1)=1$ и $H(-1)=1$. Из формул (10.2) при этих условиях будем иметь:

$$b_1=a_1; \quad b_2+b_0=1+a_0.$$

Нуль-полюсная диаграмма и частотные характеристики заграждающего фильтра второго порядка представлены на рис. 10.7. Параметры фильтра: $a_0=0,1$; $a_1=-0,8$; $b_0=0,55$; $b_1=-0,8$; $b_2=-0,55$.

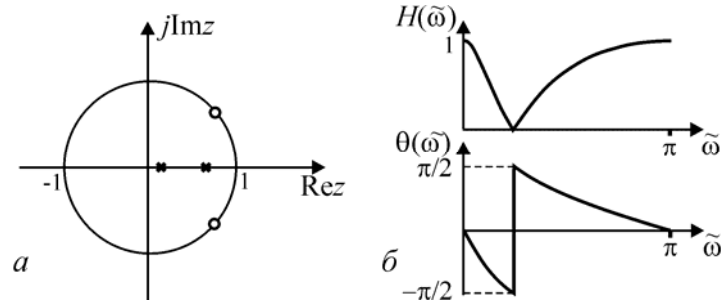


Рис.10.7. Характеристики цифрового заграждающего фильтра второго порядка: *a* – нуль-поллюсная диаграмма; *б* – АЧХ и ФЧХ

10.3. Реализация рекурсивных цифровых фильтров

Алгоритм работы рекурсивного цифрового фильтра в общем случае описывается разностным уравнением

$$y(n) = -\sum_{v=1}^N a_{N-v} y(n-v) + \sum_{\mu=0}^N b_{N-\mu} x(n-\mu). \quad (10.3)$$

Реализация цифрового фильтра непосредственно по разностному уравнению при больших значениях N связана со значительными затруднениями. Погрешности задания коэффициентов, вызванные их неизбежным округлением, при больших значениях N могут привести к нежелательным отклонениям АЧХ и даже вызвать неустойчивость фильтра. Дело в том, что частотно-избирательные фильтры могут иметь полюсы, расположенные близко от единичной окружности, и неточное задание коэффициентов разностного уравнения приводит к дрейфу этих полюсов за пределы единичной окружности.

Поэтому для реализации рекурсивных цифровых фильтров, как правило, применяют структуры, основанные на использовании элементарных звеньев первого и второго порядков. При этом любой фильтр реализуется путем каскадного или параллельного соединения элементарных звеньев.

Каскадная (последовательная) реализация

Разностному уравнению (10.3) соответствуют передаточная функция

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{\mu=0}^N b_{N-\mu} z^{\mu}}{1 + \sum_{v=1}^N a_{N-v} z^{-v}}.$$

Запишем передаточную функцию фильтра в следующем виде

$$H(z) = \begin{cases} H_1(z) \sum_{k=1}^{(N-1)/2} H_{2k}(z) & \text{при нечетном } N; \\ \sum_{k=1}^{N/2} H_{2k}(z) & \text{при четном } N; \end{cases} \quad (10.4)$$

где множители $H_1(z)$ и $H_{2k}(z)$ соответствуют звеньям первого и второго порядков с передаточными функциями

$$H_1(z) = \frac{b_1 + b_0 z^{-1}}{1 + a z^{-1}}; \quad H_{2k}(z) = \frac{b_{2k} + b_{1k} z^{-1} + b_{0k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{0k} z^{-2}}.$$

Структурные схемы таких звеньев, построенные по первой канонической форме, показаны на рис. 10.8.

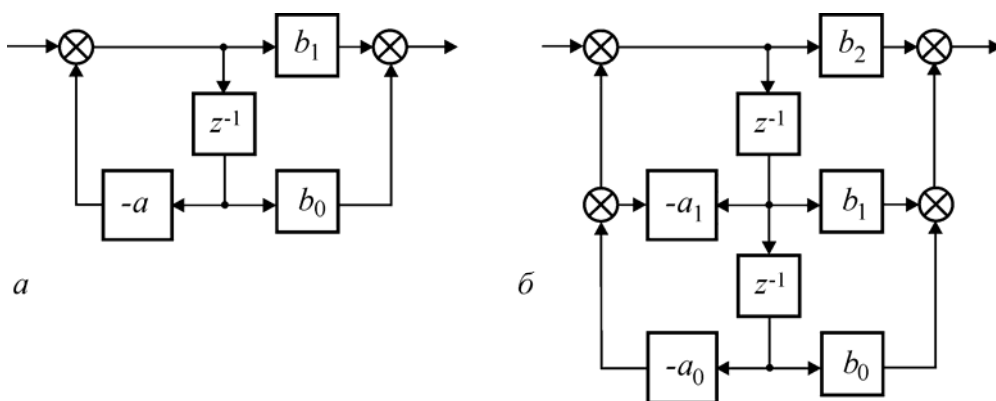


Рис. 10.8. Структурные схемы элементарных звеньев:
а – первого порядка, б – второго порядка

На рис.10.9 показана схема каскадной реализации рекурсивного цифрового фильтра из элементарных звеньев первого и второго порядков.

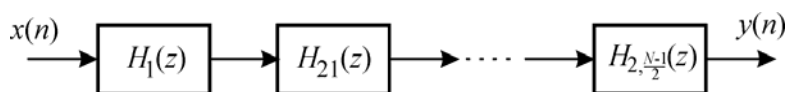


Рис. 10.9. Каскадная реализация ЦФ из элементарных звеньев

Параллельная реализация

Передаточную функцию цифрового фильтра при нечетном N можно разложить на простые дроби:

$$H(z) = C + H_1(z) + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} H_{2k}(z),$$

где C – постоянная, $H_1(z)$ и $H_{2k}(z)$ – передаточные функции элементарных звеньев первого и второго порядков:

$$H_1(z) = \frac{b}{1+az^{-1}}; \quad H_{2k}(z) = \frac{b_{1k} + b_{0k}z^{-1}}{1+a_{1k}z^{-1} + a_{0k}z^{-2}}.$$

Структурная схема фильтра имеет вид, показанный на рис. 10.10

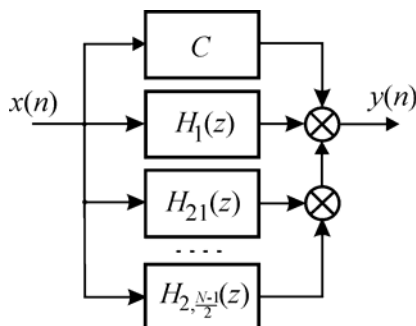


Рис. 10.10. Параллельная реализация ЦФ из элементарных звеньев

Построенные при помощи каскадной и параллельной форм фильтры оказались на практике сравнительно экономичными по требуемой точности коэффициентов, а следовательно, по аппаратуре и средствам программирования. Кроме того, подобные фильтры легко рассчитывать, так как при известной конфигурации полюсов и нулей передаточной функции фильтра определяются достаточно быстро значения коэффициентов элементарных звеньев первого и второго порядков. Благодаря этому к расчету фильтров, ориентированных на каскадную и параллельную реализацию, легко приспособиваются классические методы расчета аналоговых фильтров.

10.4. Расчет рекурсивных цифровых фильтров по аналоговому прототипу

Рекурсивные цифровые фильтры имеют прототипы среди аналоговых фильтров. Поэтому широко распространение получили методы дискретизации аналоговых фильтров, удовлетворяющих заданным требованиям.

Пусть передаточная функция аналогового фильтра равна

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b_m (s - v_1) \dots (s - v_m)}{a_n (s - \lambda_1) \dots (s - \lambda_n)}. \quad (10.5)$$

Для дискретизации аналогового фильтра с передаточной функцией (10.5) применяются следующие методы.

Метод замены операторов

В основу метода положена замена операторов дифференцирования операторами конечных разностей. Достоинство метода состоит в том, что с помощью простых подстановок можно от передаточной функции $H(s)$ аналогового фильтра непосредственно перейти к передаточной функции $H(z)$ цифрового фильтра. Однако, как правило, характеристики аналогового фильтра не сохраняются. Поэтому для дискретизации аналоговых фильтров обычно применяют другие методы.

Метод инвариантного преобразования импульсной характеристики.

В этом методе производится дискретизация импульсной переходной функции аналогового фильтра. Полученная дискретная последовательность принимается в качестве импульсной характеристики цифрового фильтра.

Для того чтобы частотные характеристики аналогового фильтра и рассчитываемого методом инвариантного преобразования цифрового фильтра соответствовали друг другу, полоса пропускания аналогового фильтра должна находиться в пределах диапазона $-\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T$.

Метод билинейного преобразования

Передаточная функция цифрового фильтра может быть получена путем преобразования передаточной функции аналогового фильтра. Для этих целей, как правило, используется метод билинейного преобразования, имеющий некоторые преимущества перед другими методами. Основу метода составляет конформное отображение s -плоскости в z -плоскость при помощи соотношения

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (10.6)$$

Каждой точке комплексной плоскости $s = \delta + j\omega$ выражение (10.6) ставит в соответствие определенную точку на плоскости $z = \exp[(\delta + j\omega)T]$. Чтобы показать характер связи, подставим в (10.6) $z = \exp(j\omega T)$ и сделаем некоторые преобразования:

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - \exp(-j\omega T)}{1 + \exp(-j\omega T)} = \frac{2}{T} \cdot \frac{\exp(j\omega T/2) - \exp(-j\omega T/2)}{\exp(j\omega T/2) + \exp(-j\omega T/2)} = \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{j \sin(\omega T/2)}{\cos(\omega T/2)} = j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = j\Omega. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Несложный анализ показывает, что выражение (10.7) отображает:

открытую левую s -полуплоскость в область, расположенную внутри единичного круга ($|z| < 1$);

мнимую ось s -плоскости в единичную окружность ($|z| = 1$);

открытую правую полуплоскость s в область, расположенную вне единичного круга ($|z| > 1$).

На рис. 10.11 показаны точки на плоскости s и соответствующие им точки на плоскости z .

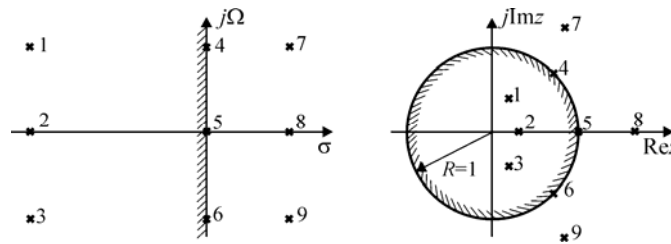


Рис. 10.11. Отображение точек плоскости s на плоскость z .

Согласно (10.4), связь между «аналоговой» частотой Ω и «цифровой» частотой ω определяется выражением

$$\Omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \quad (10.8)$$

Формулу (10.8) можно записать в следующем виде

$$\omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\Omega T}{2}.$$

График соотношения (10.8) показан на рис. 10.12.

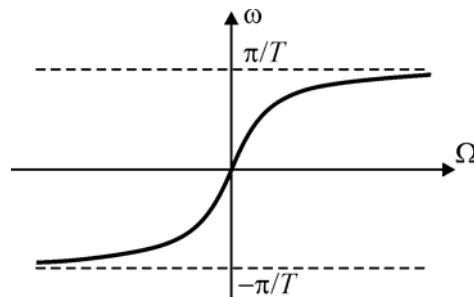


Рис. 10.12. Зависимость между «аналоговой» Ω и «цифровой» ω частотами

Подстановкой (10.6) в передаточную функцию $H_a(s)$ аналогового фильтра получают передаточную функцию $H(z)$ цифрового фильтра

$$H(z) = H_a \left(\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right). \quad (10.9)$$

При этом частотная характеристика $H_a(j\Omega)$ аналогового фильтра преобразуется в частотную характеристику $H(e^{j\omega T})$ цифрового фильтра

с изменениями масштабов по оси частот, которые определяются формулой (10.8). Связь между частотой Ω аналогового фильтра и частотой ω цифрового фильтра описывается хотя и нелинейной, но монотонной функцией. Поэтому относительное положение частоты при преобразовании (10.8) сохраняется, то есть если $\omega_2 > \omega_1$, то $\Omega_2 > \Omega_1$.

Поэтому, если в полосе частот от Ω_1 до Ω_2 АЧХ фильтра-прототипа удовлетворяет условиям

$$H_1 \geq |H_a(j\Omega)| \geq H_2,$$

то в полосе частот от ω_1 до ω_2 АЧХ цифрового фильтра удовлетворяет аналогичному требованию

$$H_1 \geq |H(e^{j\omega T})| \geq H_2.$$

Однако при переходе от частоты Ω к частоте ω длительности полос пропускания и задерживания частотных интервалов деформируются. Но все максимумы и минимумы АЧХ аналогового фильтра сохраняются и в АЧХ цифрового фильтра. При этом сохраняются основные свойства фильтров (тип, неравномерность АЧХ для соответствующих диапазонов частот и др.). На рис. 10.13 показано преобразование АЧХ аналогового ФНЧ Чебышева третьего порядка, используемого в качестве фильтра-прототипа, в АЧХ цифрового ФНЧ.

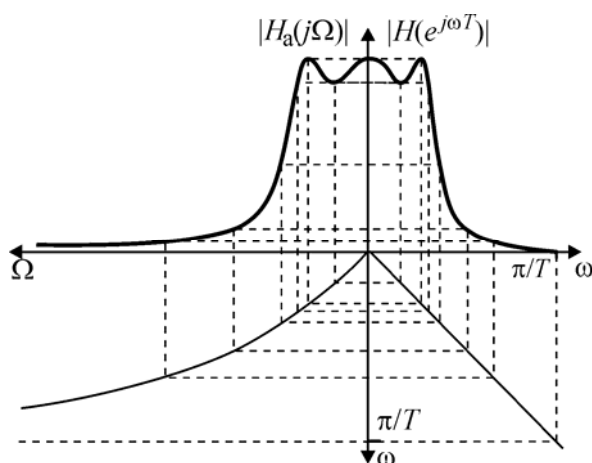


Рис. 10.13. Связь между АЧХ аналогового и цифрового ФНЧ при билинейном преобразовании

Деформация шкалы частот при билинейном преобразовании проявляется в искажениях импульсной и фазовой частотной характеристик фильтра. Указанные характеристики аналогового и цифрового фильтров не будут совпадать.

Достоинством билинейного преобразования является то, что все полюсы аналогового фильтра, расположенные в левой половине

s -плоскости, отображаются во внутреннюю область единичного круга. Поэтому цифровой фильтр будет устойчивым, если устойчив аналоговый прототип.

Метод билинейного преобразования успешно применяется для синтеза фильтров нижних и верхних частот, полосовых и режекторных фильтров.

Расчет цифровых ФНЧ и ФВЧ по заданным требованиям к АЧХ

Рассмотрим порядок расчета рекурсивных цифровых фильтров Баттерворта. В качестве исходных данных для расчета фильтров используются значения граничных частот и интервалов отклонения АЧХ от идеальной в полосах пропускания и задерживания (рис. 10.14).

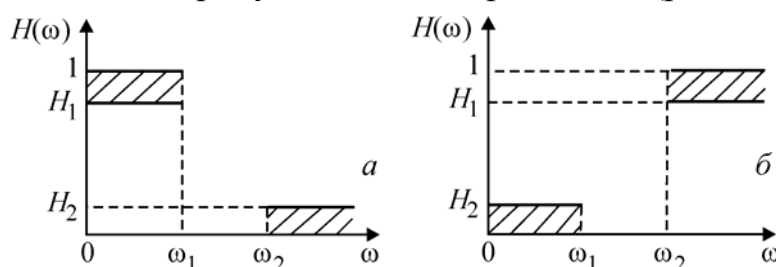


Рис. 10.14. Требования к АЧХ цифровых фильтров:
а – ФНЧ; б – ФВЧ

Последовательность расчета такова.

1. Рассчитаем граничные частоты аналогового прототипа:

$$\Omega_{\text{п}} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_{\text{п}} T}{2}; \quad \Omega_{\text{з}} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_{\text{з}} T}{2}$$

2. Для определения порядка n и частоты среза $\Omega_{\text{с}}$ аналогового прототипа составим систему уравнений, используя формулу для квадрата АЧХ и условия, что АЧХ фильтра проходит через точки $(\Omega_{\text{п}}, 1 - \delta H_{\text{п}})$ и $(\Omega_{\text{з}}, \delta H_{\text{з}})$. Для ФНЧ и ФВЧ системы уравнений записываются с учетом правил трансформации фильтров:

ФНЧ	$\frac{1}{1 + (\Omega_{\text{п}} / \Omega_{\text{с}})^{2n}} = (1 - \delta H_{\text{п}})^2;$ $\frac{1}{1 + (\Omega_{\text{з}} / \Omega_{\text{с}})^{2n}} = H_{\text{з}}^2.$	ФВЧ	$\frac{1}{1 + (\Omega_{\text{с}} / \Omega_{\text{з}})^{2n}} = \delta H_{\text{з}}^2;$ $\frac{1}{1 + (\Omega_{\text{с}} / \Omega_{\text{п}})^{2n}} = (1 - \delta H_{\text{п}})^2.$
-----	--	-----	---

Решив систему уравнений, получим значения n^* и $\Omega_{\text{с}}^*$, при которых АЧХ фильтра проходит через заданные граничные точки $(\Omega_{\text{п}}, 1 - \delta H_{\text{п}})$ и

(Ω_3, H_3) . Так как в общем случае полученное значение n^* является дробным, порядок фильтра принимаем равным ближайшему целому числу $n > n^*$.

3. Находим передаточную функцию $H_a(s)$ аналогового прототипа. Для этого нормированную передаточную функцию $H_H(s)$ Баттерворта подвергаем процедуре денормирования и трансформации.

ФНЧ		ФВЧ
$H_a(s) = H_H(s) _{s=s/\Omega_c}$;		$H_a(s) = H_H(s) _{s=\Omega_c/s}$;

4. Рассчитаем передаточную функцию цифрового фильтра применением билинейного преобразования:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

5. Получим частотную передаточную функцию

$$H(e^{j\omega T}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}$$

строим АЧХ и проверяем выполнение требований заданных требований.

10.5. Примеры расчета цифровых фильтров по аналоговому прототипу

В главе 6 приведены примеры расчетов аналоговых фильтров. Рассчитаем цифровые фильтры с теми исходными данными.

Расчет цифрового ФНЧ Баттерворта

Исходные данные. Найти передаточную функцию цифрового ФНЧ Баттерворта, АЧХ которого удовлетворяет следующим условиям:

$$0,8 \leq H(e^{j\omega T}) \leq 1 \text{ при } 0 \leq \omega \leq \omega_n = 1000 \text{ рад/с};$$

$$H(e^{j\omega T}) \leq 0,1 \text{ при } \omega \geq \omega_3 = 2000 \text{ рад/с}.$$

Период дискретизации $T = 0,5$ мс.

Решение. Рассчитываем граничные частоты аналогового фильтра-прототипа:

$$\Omega_n = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_n T}{2} = 1021 \text{ рад/с}; \quad \Omega_3 = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_3 T}{2} = 2152 \text{ рад/с}.$$

Для определения параметров n, Ω_c аналогового фильтра-прототипа Баттерворта составим систему уравнений:

$$\frac{1}{1+(1021/\Omega_c)^{2n}} = 0,8^2; \quad \frac{1}{1+(2152/\Omega_c)^{2n}} = 0,1^2.$$

Решив систему, получим $n^*=3,4$ и $\Omega_c^*=1111$ рад/с. Примем $n=4$. Тогда из первого уравнения найдем $\Omega_c=1097$ рад/с, а из второго – $\Omega_c=1230$ рад/с. Следовательно, при значениях частоты среза аналогового фильтра Ω_c , лежащих в пределах от 1097 до 1230 рад/с, выполняются требования к АЧХ. Примем $\Omega_c=1200$ рад/с.

Передачная функция нормированного фильтра Баттерворта при $n=4$ имеет вид

$$H_n(s) = \frac{1}{(s^2 + 0,765s + 1)(s^2 + 1,848s + 1)}. \quad (10.10)$$

Дальнейшие расчеты выполним по отдельным каскадам. Для первого и второго каскадов после денормирования получим передачные функции аналоговых фильтров-прототипов:

$$H_1(s) = \frac{1200^2}{s^2 + 918s + 1200^2}; \quad H_2(s) = \frac{1200^2}{s^2 + 2217,6s + 1200^2}.$$

Применив билинейное преобразование, будем иметь:

$$H_1(z) = \frac{0,0711 \cdot (1+z^{-1})^2}{1 - 1,3618z^{-1} + 0,6462z^{-2}}; \quad H_2(z) = \frac{0,05687 \cdot (1+z^{-1})^2}{1 - 1,089z^{-1} + 0,3165z^{-2}}.$$

АЧХ рассчитанного ФНЧ Баттерворта показана на рис. 10.15.

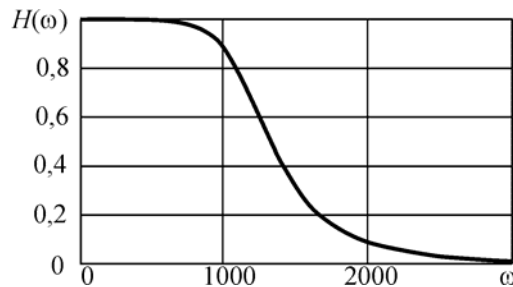


Рис.10.15. АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта

Значения АЧХ фильтра на границах интервалов пропускания и задерживания равны: $H(\omega_{\text{п}})=0,886$; $H(\omega_{\text{з}})=0,0906$. Таким образом, АЧХ удовлетворяет заданным неравенствам.

Расчет цифрового ФВЧ Баттерворта

Исходные данные. Найти передачную функцию цифрового ФВЧ Баттерворта, АЧХ которого удовлетворяет следующим условиям:

$$0 \leq H(e^{j\omega T}) \leq 0,1 \text{ при } 0 \leq \omega \leq \omega_{\text{з}} = 1000 \text{ рад/с};$$

$$0,8 \leq H(e^{j\omega T}) \leq 1 \text{ при } \omega \geq \omega_{\text{п}} = 2000 \text{ рад/с}.$$

Период дискретизации $T = 0,5$ мс.

Решение. Рассчитываем граничные частоты аналогового фильтра-прототипа:

$$\Omega_3 = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_3 T}{2} = 1021 \text{ рад/с}; \quad \Omega_n = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_n T}{2} = 2152 \text{ рад/с}.$$

Составим систему уравнений для определения параметров n , Ω_c аналогового фильтра-прототипа Баттерворта:

$$\frac{1}{1+(\Omega_c/1021)^{2n}} = 0,1^2; \quad \frac{1}{1+(\Omega_c/2152)^{2n}} = 0,8^2.$$

Решив систему, получим $n^* = 3,4$ и $\Omega_c^* = 2008$ рад/с. Примем $n = 4$. Тогда из первого уравнения найдем $\Omega_c = 1814$ рад/с, а из второго – $\Omega_c = 2034$ рад/с. Следовательно, требования к АЧХ будут выполняться при значениях частоты среза аналогового фильтра Ω_c , лежащих в пределах от 1814 до 2034 рад/с. Примем $\Omega_c = 1900$ рад/с.

Разделив передаточную функцию (10.10) нормированного фильтра Баттерворта на две части и заменив s на $1900/s$, получим передаточные функции двух каскадов аналогового фильтра-прототипа:

$$H_1(s) = \frac{s^2}{s^2 + 1453,5s + 1900^2}; \quad H_2(s) = \frac{s^2}{s^2 + 3511,5s + 1900^2}.$$

Применив билинейное преобразование, будем иметь:

$$H_1(z) = \frac{0,6293 \cdot (1-z^{-1})^2}{1 - 0,9747z^{-1} + 0,5426z^{-2}}; \quad H_2(z) = \frac{0,4754 \cdot (1-z^{-1})^2}{1 - 0,7363z^{-1} + 0,1654z^{-2}}.$$

На рис. 10.16. изображена АЧХ рассчитанного ФВЧ Баттерворта.

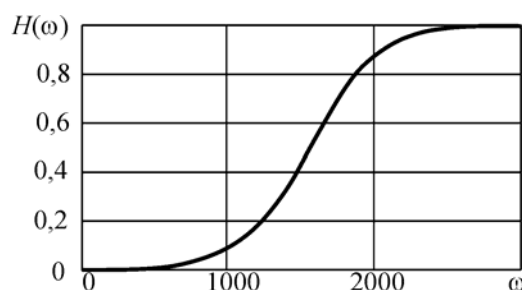


Рис.10.16. АЧХ фильтра верхних частот Баттерворта

Значения АЧХ фильтра на границах интервалов задерживания и пропускания равны: $H(\omega_3) = 0,08322$; $H(\omega_n) = 0,8685$. Следовательно, АЧХ удовлетворяет требованиям.

Расчет фильтра нижних частот Чебышева

Исходные данные. Найти передаточную функцию цифрового фильтра Чебышева первого рода, АЧХ которого удовлетворяет следующим условиям:

$$0,8 \leq H(\omega) \leq 1 \text{ при } 0 \leq \omega \leq \omega_n = 1000 \text{ рад/с};$$

$$H(\omega) \leq 0,1 \text{ при } \omega \geq \omega_3 = 2000 \text{ рад/с}.$$

Период дискретизации $T = 0,5$ мс.

Решение. Находим граничные частоты аналогового фильтра-прототипа:

$$\Omega_{\Pi} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_{\Pi} T}{2} = 1021 \text{ рад/с}; \quad \Omega_3 = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_3 T}{2} = 2152 \text{ рад/с.}$$

Определяем неравномерность передачи в полосе пропускания

$$R_{\text{макс}} = 20 \lg(1/0,8) = 1,938 \text{ дБ}$$

и минимальное затухание в полосе задерживания

$$R_{\text{мин}} = 20 \lg(1/0,1) = 20 \text{ дБ.}$$

Рассчитаем порядок фильтра по формуле (6.5).

$$n = \frac{\operatorname{Arch} [\sqrt{(10^{0,1R_{\text{мин}}} - 1)/(10^{0,1R_{\text{макс}}} - 1)}]}{\operatorname{Arch}(\Omega_3 / \Omega_{\Pi})} = 2,38.$$

Очевидно, что порядок фильтра может быть только целым числом. Поэтому примем $n = 3$.

Нормированные полиномы знаменателя фильтров Чебышева приведены для неравномерности передач в полосе пропускания, равной 0,1; 0,5; 1,0; 2,0 и 3,0 дБ.. Выберем с запасом фильтр, у которого неравномерность равна 1 дБ (меньше 1,938 дБ). При этом $\varepsilon = 0,509$.

Передаточную функцию нормированного фильтра Чебышева при $n = 3$ и $\varepsilon = 0,509$ запишем в виде произведения:

$$H_{\Pi}(s) = \frac{0,494}{s + 0,494} \cdot \frac{0,994}{s^2 + 0,494s + 0,994} \quad (6.12)$$

Применив денормирование относительно частоты $\omega_{\Pi} = 1000$ рад/с, получим передаточные функции двух каскадов аналогового фильтра-прототипа:

$$H_1(s) = \frac{494}{s + 494}; \quad H_2(s) = \frac{994000}{s^2 + 494s + 1000^2}.$$

Применив билинейное преобразование, будем иметь:

$$H_1(z) = \frac{0,6293 \cdot (1 - z^{-1})^2}{1 - 0,9747z^{-1} + 0,5426z^{-2}}; \quad H_2(z) = \frac{0,4754 \cdot (1 - z^{-1})^2}{1 - 0,7363z^{-1} + 0,1654z^{-2}}.$$

АЧХ рассчитанного ФНЧ Чебышева с передаточной функцией показана на рис. 10.17. Значения АЧХ фильтра на границах интервалов пропускания и задерживания равны: $H(\omega_{\Pi}) = 0,854$, $H(\omega_3) = 0,056$.

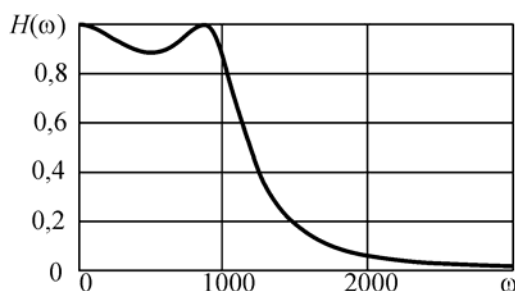


Рис.10.17. АЧХ фильтра нижних частот Чебышева

10.6. Прямые методы расчета рекурсивных цифровых фильтров

Существуют прямые методы расчета, в которых аналоговые прототипы не используются. Расчет производится по заданным требованиям к АЧХ (квадрату АЧХ) или импульсной характеристике.

Показано, что квадрат АЧХ рекурсивного ЦФ всегда можно представить в виде отношения двух тригонометрических функций:

$$|H(e^{j\tilde{\omega}})|^2 = \frac{\sum_{\mu=0}^M c_{\mu} \cos(\mu\tilde{\omega})}{\sum_{\nu=0}^N d_{\nu} \cos(\nu\tilde{\omega})}.$$

Расчет фильтра проводится в два этапа. Сначала по заданным требованиям к квадрату АЧХ рассчитываются численные значения коэффициентов c_{μ} ($\mu=0,1,\dots,M$) и d_{ν} ($\nu=0,1,\dots,N$). Далее функция квадрата АЧХ раскладывается на множители:

$$|H(e^{j\tilde{\omega}})|^2 = H(e^{j\tilde{\omega}}) \cdot H(e^{-j\tilde{\omega}}).$$

Зная функцию $H(e^{j\tilde{\omega}})$, можно найти и другие характеристики ЦФ.

Известны методы расчета рекурсивных ЦФ с заданными импульсными характеристиками. В основе метода известное соотношение

$$H(z) = \frac{\sum_{\mu=0}^M b_{\mu} z^{-\mu}}{1 + \sum_{\nu=1}^N a_{\nu} z^{-\nu}} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}.$$

Коэффициенты передаточной функции фильтра определяются из условия минимума квадратичного критерия

$$J = \sum_{n=0}^{R-1} [h_{\text{ж}}(n) - h(n)]^2 w(n),$$

где $h_{\text{ж}}(n)$ – желаемая импульсная характеристика, R – число отсчетов желаемой импульсной характеристики, $w(n)$ – весовая функция.

В общем случае расчет фильтра сводится к решению задачи нелинейного программирования.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Чем отличается деление цифровых фильтров по признакам «не-рекурсивный и рекурсивный» и «конечная и бесконечная импульсные характеристики»?

2. Какие методы используются для преобразования передаточной функции аналогового фильтра-прототипа в передаточную функцию цифрового фильтра?

3. Объясните причину периодичности частотных характеристик цифрового фильтра.

4. Опишите метод билинейного преобразования. Поясните основной недостаток метода.

5. Чем обусловлены ограничения на нижний и верхний пределы изменения периода дискретизации T цифрового фильтра?

6. Поясните суть и преимущества каскадной реализации рекурсивных цифровых фильтров.

7. Получена передаточная функция аналогового прототипа

$$H(s) = \frac{100}{s + 100}.$$

Найдите передаточную функцию ЦФ, если $T = 0,01$ с.

8. Получена передаточная функция аналогового прототипа

$$H(s) = \frac{s}{s + 50}.$$

Найдите передаточную функцию цифрового фильтра, если $T = 0,02$ с.

9. Получена передаточная функция аналогового прототипа

$$H(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2},$$

где $\omega_c = 2\pi \cdot 10^3$ рад/с. Найдите передаточную функцию ЦФ, если частота дискретизации равна 10 кГц.

10. Дана передаточная функция цифрового фильтра

$$H(z) = \frac{0,8(z-1)}{z-0,6}.$$

Найдите значения АЧХ при $\omega = 50$ рад/с и $\omega = 100$ рад/с, если $T = 0,01$ с. Определите тип фильтра (ФНЧ, ФВЧ).

11. Дана передаточная функция цифрового фильтра

$$H(z) = 0,8(z-1)/(z-0,6).$$

Постройте АЧХ при $T = 0,01$ с и $T = 0,02$ с.

Глава 11

НЕРЕКУРСИВНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Нерекурсивные цифровые фильтры первого и второго порядка. – Особенности нерекурсивных цифровых фильтров. – Нерекурсивные цифровые фильтры с линейной ФЧХ. – Расчет нерекурсивных цифровых фильтров при помощи методов взвешивания и разложения АЧХ в ряд Фурье. – Реализация рекурсивных цифровых фильтров

11.1. Нерекурсивные цифровые фильтры первого порядка

Разностное уравнение нерекурсивного цифрового фильтра первого порядка имеет вид

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1),$$

где b_0 и b_1 – постоянные коэффициенты. Структурная схема фильтра, построенная по разностному уравнению, показана на рис. 11.1, а.

Применив к разностному уравнению прямое Z -преобразование, получим передаточную функцию

$$H(z) = Y(z) / X(z) = b_0 + b_1 z^{-1}.$$

Запишем передаточную функцию в следующем виде:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 z + b_1}{z}.$$

Отсюда следует, что нерекурсивный цифровой фильтр первого порядка имеет один нуль $\nu_1 = -b_1/b_0$ и один полюс $\lambda_1 = 0$.

Импульсная характеристика содержит два отсчета: $h(0) = b_0$ и $h(1) = b_1$. На рис. 11.1, б представлена импульсная характеристика фильтра при $b_0 = 1$ и $b_1 = 1$.

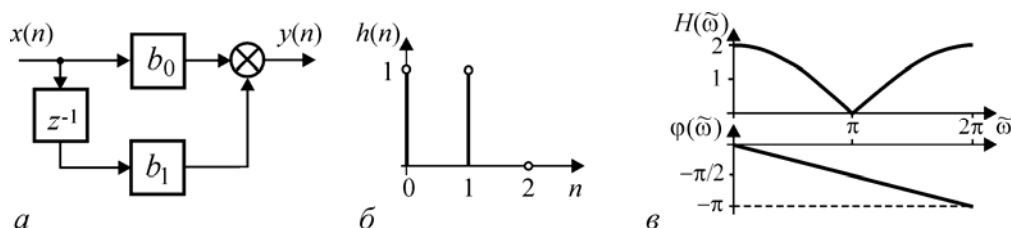


Рис. 11.1. Характеристики нерекурсивного ЦФ первого порядка: а – структурная схема; б – импульсная характеристика; в – АЧХ и ФЧХ

После замены в передаточной функции $z=e^{j\tilde{\omega}}$ получим частотную передаточную функцию

$$H(e^{j\tilde{\omega}})=b_0+b_1e^{-j\tilde{\omega}}=b_0+b_1\cos\tilde{\omega}-jb_1\sin\tilde{\omega},$$

где нормированная частота $\tilde{\omega}=\omega T$ имеет период повторения $\tilde{\omega}_д=2\pi$.

Отсюда для АЧХ и ФЧХ получим:

$$H(\tilde{\omega})=|H(e^{j\tilde{\omega}})|=\sqrt{b_0^2+2b_0b_1\cos\tilde{\omega}+b_1^2};$$

$$\varphi(\tilde{\omega})=-\operatorname{arctg}\frac{b_1\sin\tilde{\omega}}{b_0+b_1\cos\tilde{\omega}}.$$

На рис. 11.2, в изображены АЧХ и ФЧХ фильтра при $b_0=1$ и $b_1=1$.

11.2. Нерекурсивные цифровые фильтры 2-го порядка

Разностное уравнение и передаточная функция нерекурсивного цифрового фильтра второго порядка соответственно имеют вид:

$$y(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2);$$

$$H(z)=b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}.$$

Структурная схема фильтра, построенная по разностному уравнению, изображена на рис. 11.2, а.

Найдем нули и полюсы передаточной функции. Для этого, умножив числитель и знаменатель на z^2 , запишем передаточную функцию в следующем виде:

$$H(z)=\frac{b_0z^2+b_1z+b_2}{z^2}.$$

Легко видеть, что функция $H(z)$ имеет два нулевых полюса $\lambda_1=\lambda_2=0$ и два нуля

$$v_{1,2}=\frac{-b_1\pm\sqrt{b_1^2-4b_0b_2}}{2b_0},$$

которые могут быть действительными или комплексно-сопряженными.

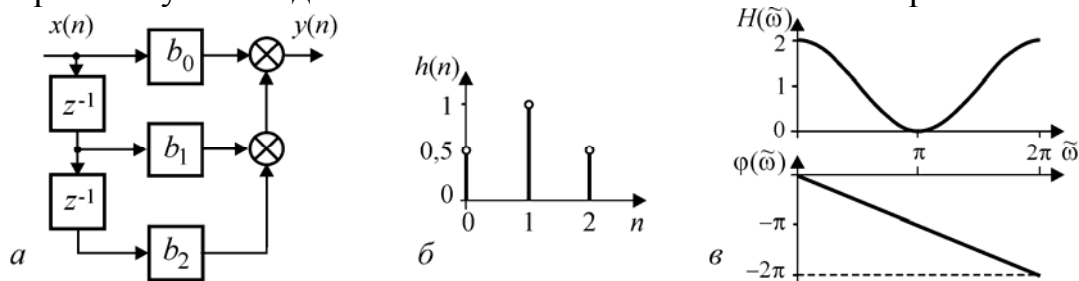


Рис. 11.2. Характеристики нерекурсивного ЦФ второго порядка: а – структурная схема; б – импульсная характеристика; в – АЧХ и ФЧХ

Импульсная характеристика содержит три отсчета: $h(0)=b_0$, $h(1)=b_1$ и $h(2)=b_2$. На рис. 11.2, б представлена импульсная характеристика фильтра при $b_0=0,5$, $b_1=1$ и $b_2=0,5$.

После замены $z=e^{j\tilde{\omega}}$ в передаточной функции получим частотную передаточную функцию

$$H(e^{j\tilde{\omega}})=b_0+b_1e^{-j\tilde{\omega}}+b_2e^{-j2\tilde{\omega}}.$$

Рассмотрим частный случай $b_0=b_2$. Тогда

$$H(e^{j\tilde{\omega}})=e^{-j\tilde{\omega}}(b_0e^{j\tilde{\omega}}+b_1+b_0e^{-j\tilde{\omega}})=e^{-j\tilde{\omega}}(2b_0\cos\tilde{\omega}+b_1).$$

АЧХ и ФЧХ при этом определяются формулами:

$$H(\tilde{\omega})=2b_0\cos\tilde{\omega}+b_1; \quad \varphi(\tilde{\omega})=-\tilde{\omega}.$$

На рис. 11.2, в изображены АЧХ и ФЧХ фильтра при $b_0=0,5$, $b_1=1$ и $b_2=0,5$. Обратим внимание на то, что ФЧХ фильтра при $b_0=b_2$ является линейной.

11.3. Особенности нерекурсивных цифровых фильтров

Нерекурсивные ЦФ ($N-1$)-го порядка описываются разностным уравнением

$$y(n)=\sum_{v=0}^{N-1}b_vx(n-v), \quad (11.1)$$

где b_v – постоянные коэффициенты.

Передаточная функция нерекурсивного ЦФ, полученная в результате применения Z -преобразования к уравнению (11.1), имеет вид

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{v=0}^{N-1}b_vz^{-v}.$$

С другой стороны, передаточная функция нерекурсивного ЦФ может быть определена как прямое Z -преобразование конечной импульсной характеристики $h(n)$, то есть

$$H(z)=Z\{h(n)\}=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}. \quad (11.2)$$

Отсюда следует, что *коэффициенты передаточной функции (разностного уравнения) и отсчёты импульсной характеристики нерекурсивного ЦФ совпадают.*

Если в разностном уравнении (11.1) произвести замену $b_v=h(v)$, $v=0, 1, \dots, N-1$, то получим

$$y(n) = \sum_{v=0}^{N-1} h(v)x(n-v), \quad (11.3)$$

Это есть не что иное, как свертка функций $x(n)$ и $h(n)$. Следовательно, в случае нерекурсивных цифровых фильтров *разностное уравнение и уравнение свертки совпадают*.

Нерекурсивные ЦФ обладают рядом положительных качеств, основное из которых состоит в том, что *благодаря отсутствию обратных связей они всегда устойчивы*. Покажем это. Умножив числитель и знаменатель передаточной функции нерекурсивного ЦФ на z^{N-1} , получим

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{v=0}^{N-1} b_v z^{N-1-v}}{z^{N-1}}.$$

Отсюда следует, что фильтр имеет $N-1$ полюсов, которые все находятся в точке $z=0$. Что касается нулей фильтра, то они могут располагаться произвольным образом.

Другой особенностью нерекурсивного фильтра является его конечная импульсная характеристика. Поэтому *переходные процессы в фильтре затухают за конечный промежуток времени*.

Характерное свойство нерекурсивного фильтра состоит в том, что *при соответствующем выборе параметров они могут иметь строго линейную фазо-частотную характеристику (ФЧХ)*. Это особенно важно в тех случаях, когда требуется обеспечить неискаженное преобразование сигналов, например при передаче данных и анализе электрокардиограмм.

Нерекурсивные цифровые фильтры используются и в тех случаях, когда предъявляемые требования не могут быть реализованы при помощи фильтров Баттерворта и Чебышева, например для выполнения дифференцирования и интегрирования сигналов.

В отличие от рекурсивных фильтров нерекурсивные фильтры не могут аппроксимировать амплитудно-частотные характеристики с крутыми переходами. Тем не менее нерекурсивные фильтры очень популярны из-за легкости проектирования, линейной ФЧХ и гарантированной устойчивости.

Основной недостаток нерекурсивных фильтров состоит в том, что для аппроксимации фильтров, частотные характеристики которых имеют острые срезы, требуется импульсная характеристика с большим числом отсчетов N . Поэтому реализация фильтра требует значительного объема вычислений.

11.4. Нерекурсивные цифровые фильтры с линейной ФЧХ

Произведя в (11.2) замену $z=e^{j\tilde{\omega}}$, получим частотную передаточную функцию нерекурсивного ЦФ

$$H(e^{j\tilde{\omega}})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\tilde{\omega}n}. \quad (11.4)$$

Фазо-частотная характеристика фильтра определяется выражением

$$\theta(\omega)=\arg[H(e^{j\tilde{\omega}})]=-\arctg\frac{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin(n\tilde{\omega})}{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos(n\tilde{\omega})}. \quad (11.5)$$

Найдем условия, при которых фазо-частотная характеристика является линейной, то есть

$$\theta(\tilde{\omega})=-\tau\tilde{\omega}, \quad (11.6)$$

где τ – коэффициент наклона ФЧХ, подлежащий определению.

Приравняв (11.5) и (11.6), запишем исходное соотношение

$$\arctg\frac{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin(n\tilde{\omega})}{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos(n\tilde{\omega})}=\tau\tilde{\omega}$$

После очевидных преобразований выражение принимает вид

$$\sum_{n=0}^{N-1}h(n)[\cos(n\tilde{\omega})\sin(\tau\tilde{\omega})-\sin(n\tilde{\omega})\cos(\tau\tilde{\omega})]=0.$$

Отсюда получим

$$\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin(\tau\tilde{\omega}-n\tilde{\omega})=0.$$

Можно показать, что решением этого уравнения являются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \tau &= (N-1)/2; \\ h(n) &= h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{aligned}$$

Таким образом, нерекурсивный фильтр, обладающий линейной ФЧХ, имеет импульсную характеристику, симметричную относительно средней точки, и коэффициент наклона ФЧХ $\tau=(N-1)/2$.

При этом можно выделить два вида фильтров.

Фильтр вида 1 (N – нечетное число и $h(n)=h(N-1-n)$).

Импульсная характеристика фильтра при $N=11$ имеет вид, показанный на рис. 11.3, *а*.

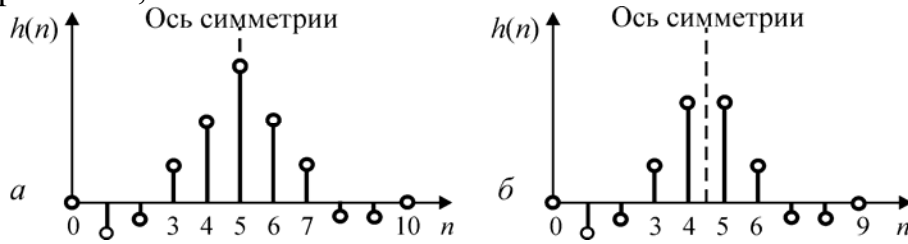


Рис. 11.3. Импульсные характеристики нерекурсивных ЦФ:
а – вид 1, $N=11$; *б* – вид 2, $N=10$.

Частотную передаточную функцию получим из выражения (11.4). Вынесем за знак суммы $\exp(-j\tilde{\omega}k)$, где $k=(N-1)/2$. Используя формулу Эйлера и учтя условие симметрии $h(n)$, будем иметь:

$$H_1(e^{j\tilde{\omega}}) = e^{-j\tilde{\omega}k} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\tilde{\omega}(n-k)} = e^{-j\tilde{\omega}k} \sum_{i=0}^k c_i \cos(i\tilde{\omega}),$$

где $c_0=h(k)$, $c_i=2 \cdot h(k-i)$, $i=1, 2, \dots, k$.

Отсюда для АЧХ имеем

$$H_1(\tilde{\omega}) = |H_1(e^{j\tilde{\omega}})| = \left| \sum_{i=0}^k c_i \cos(i\tilde{\omega}) \right|.$$

Значения АЧХ $H_1(0)$ и $H_1(\pi)$, в зависимости от выбранных значений коэффициентов c_i , могут быть равными нулю или произвольными положительными. Поэтому данный вид нерекурсивного ЦФ позволяет получить ФНЧ, ФВЧ, ПФ и ЗФ.

Фильтр вида 2 (N – четное число и $h(n)=h(N-1-n)$).

Импульсная характеристика фильтра при $N=10$ показана на рис. 11.3, *б*. Частотную передаточную функцию (11.4) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} H_2(e^{j\tilde{\omega}}) &= e^{-j(k+0,5)\tilde{\omega}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\tilde{\omega}(n-k-0,5)} = \\ &= e^{-j(k+0,5)\tilde{\omega}} \sum_{i=0}^k c_i \cos[(i+0,5)\tilde{\omega}], \end{aligned}$$

где $k=(N-2)/2$, $c_i=2 \cdot h(k-i)$, $i=0, 1, \dots, k$.

Отсюда найдем формулу АЧХ

$$H_2(\tilde{\omega}) = |H_2(e^{j\tilde{\omega}})| = \left| \sum_{i=0}^k c_i \cos[(i+0,5)\tilde{\omega}] \right|.$$

Легко видеть, что значения $H_2(0)$ могут быть произвольными, в том числе и равными нулю, а значение $H_2(\pi)=0$ при любом выборе коэффициентов c_v . Поэтому данный вид нерекурсивного ЦФ позволяет реализовать ФНЧ и ПФ.

Во многих практических задачах ФЧХ нерекурсивного ЦФ может иметь вид

$$\theta(\omega)=\theta_0-\tau\tilde{\omega},$$

где θ_0 – постоянная величина. Применяв процедуру, описанную выше, получим фильтра другого типа. В частности, при $\theta_0=\pi/2$ найдем решение в следующей форме:

$$\begin{aligned} \tau &= (N-1)/2; \\ h(n) &= -h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{aligned}$$

В этом случае импульсная характеристика является антисимметричной относительно средней точки. При этом можно выделить два вида фильтров.

Фильтр вида 3 (N – нечетное число и $h(n)=-h(N-1-n)$).

Импульсная характеристика фильтра при $N=11$ показана на рис. 11.4, *a*. Частотную передаточную функцию (11.4) преобразуем следующим образом:

$$H_3(e^{j\tilde{\omega}}) = e^{-jk\tilde{\omega}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j(n-k)\tilde{\omega}} = e^{-j(k\tilde{\omega}-\pi/2)} \sum_{i=1}^k c_i \sin(i\tilde{\omega}),$$

где $k=(N-1)/2$, $c_0=0$, $c_i=2 \cdot h(k-i)$, $i=1, 2, \dots, k$.

Отсюда найдем формулу АЧХ

$$H_3(\tilde{\omega}) = |H_3(e^{j\tilde{\omega}})| = \left| \sum_{i=1}^k c_i \sin(i\tilde{\omega}) \right|.$$

Из этой формулы следует, что при любом выборе коэффициентов c_i значения $H_3(0)=0$ и $H_3(\pi)=0$. Таким образом, рассматриваемый вид нерекурсивного ЦФ можно использовать только в качестве ПФ.

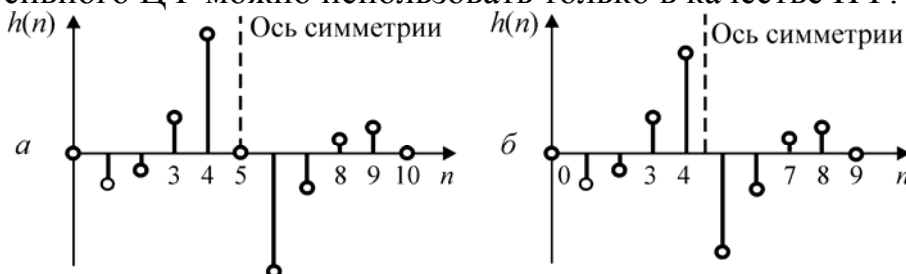


Рис. 11.4. Импульсные характеристики нерекурсивных ЦФ: *a* – вид 3, $N=11$; *b* – вид 4, $N=10$.

Фильтр вида 4 (N – четное число и $h(n)=-h(N-1-n)$).

Импульсная характеристика фильтра при $N=10$ показана на рис. 11.4, б. Частотную передаточную функцию (11.4) преобразуем так:

$$\begin{aligned} H_4(e^{j\tilde{\omega}}) &= e^{-j(k+0,5)\tilde{\omega}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j(n-k-0,5)\tilde{\omega}} = \\ &= e^{-j[(k+0,5)\tilde{\omega}-\pi/2]} \sum_{i=1}^k c_i \sin[(i+0,5)\tilde{\omega}], \end{aligned}$$

где $k=(N-2)/2$, $c_i=2 \cdot h(k-i)$, $i=0, 1, \dots, k$.

Отсюда найдем формулу АЧХ

$$H_4(\tilde{\omega}) = |H_4(e^{j\tilde{\omega}})| = \left| \sum_{i=1}^k c_i \sin[(i+0,5)\tilde{\omega}] \right|.$$

Легко видеть, что значение $H_4(0)=0$ при любом выборе коэффициентов c_i , а значения $H_4(\pi)$ могут быть произвольными, в том числе и равными нулю. Поэтому данный вид нерекурсивного ЦФ позволяет реализовать ФВЧ и ПФ.

Для расчета нерекурсивных фильтров с линейной ФЧХ применяют методы:

- взвешивания с помощью оконных функций;
- разложения АЧХ в ряд Фурье;
- частотной выборки;
- оптимизации с помощью функций Чебышева.

В каждом конкретном случае выбор метода расчета определяется большим числом факторов. Поэтому трудно дать однозначные рекомендации в пользу того или другого метода. Далее рассмотрим, как более просто реализуемые, два первых метода.

11.5. Расчет нерекурсивных цифровых фильтров при помощи метода взвешивания

Наиболее простой подход при расчете нерекурсивного ЦФ сводится к получению импульсной характеристики конечной длины путем усечения импульсной характеристики бесконечной длины.

Пусть требования к частотной характеристике нерекурсивного цифрового ФНЧ с линейной ФЧХ заданы в виде функции

$$H_{\text{ж}}(e^{j\omega T}) = \begin{cases} e^{-j\omega T(N-1)/2} & \text{при } |\omega| \leq \omega_c < \omega_d = \pi/T, \\ 0 & \text{при } \omega_c < |\omega| \leq \pi/T. \end{cases} \quad (11.7)$$

Согласно (11.7) желаемые АЧХ и ФЧХ фильтра определены формулами:

$$H(\omega) = |H_{\text{ж}}(e^{j\omega T})| = \begin{cases} 1 & \text{при } |\omega| \leq \omega_c < \omega_d = \pi/T, \\ 0 & \text{при } \omega_c < |\omega| \leq \pi/T, \end{cases}$$

$$\theta(\omega) = \arg H_{\text{ж}}(e^{j\omega T}) = -\omega T(N-1)/2.$$

Импульсную характеристику $h_{\text{ж}}(n)$ можно получить, вычислив коэффициенты ряда Фурье функции (11.7), являющейся, как известно, периодической и имеющей период $\omega_d = 2\pi/T$, то есть

$$h_{\text{ж}}(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega T(n-(N-1)/2)} d\omega. \quad (11.8)$$

После преобразований (11.8) будем иметь

$$h_{\text{ж}}(n) = \frac{\sin [\omega_c(n-(N-1)/2) T]}{\pi(n-(N-1)/2)}, \quad n=0,1,\dots \quad (11.9)$$

Очевидно, $h_{\text{ж}}(n)$ имеет бесконечную длину. Одним из возможных способов получения нерекурсивного цифрового фильтра состоит в усечении бесконечного ряда (11.9) путем отбрасывания отсчетов, соответствующих $n \geq N$, то есть в качестве импульсной характеристики фильтра принимается функция

$$h(n) = h_{\text{ж}}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (11.10)$$

Фильтр, полученный путем простого усечения числа отсчетов импульсной характеристики, на практике не применяется из-за явления Гиббса. Амплитудная частотная характеристика такого фильтра имеет выбросы и пульсации большого уровня до и после точки разрыва аппроксимируемой частотной характеристики. С увеличением числа отсчетов уменьшается ширина выброса, изрезанность АЧХ увеличивается, но амплитуда колебаний АЧХ не изменяется и составляет примерно 9% от размаха АЧХ в точке разрыва. Уровень боковых лепестков в полосе затухания остается высоким.

Широко распространенный способ устранения вредного влияния явления Гиббса заключается во взвешивании функции $h_{\text{ж}}(n)$ при помощи оконной функции $w(n)$. Импульсную характеристику нерекурсивного цифрового ФНЧ находят в виде

$$h(n) = w(n) \cdot h_{\text{ж}}(n).$$

Оконная функция является симметричной функцией, медленно спадающей к краям. Центральный отсчет оконной функции нормируется к единице. Так как все оконные функции являются симметричными относительно $n = (N-1)/2$, то ФЧХ фильтра оказывается линейной.

К наиболее часто используемым оконным функциям относятся следующие.

Прямоугольное (равномерное) окно. Прямоугольное окно соответствует простому усечению ряда Фурье. Оно описывается функцией

$$w(n)=\begin{cases} 1 & , 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & , n < 0 \text{ и } n \geq N. \end{cases}$$

Треугольное окно. Формула треугольного окна (окна Бартлетта) имеет вид

$$w(n)=\begin{cases} \frac{2n}{N-1} & , 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 2-\frac{2n}{N-1} & , \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1, \end{cases}$$

Окно Хэнна (Hanning). Оконная функция Хэнна описывается формулой

$$w(n)=0,5-0,5\cos\left(\frac{2\pi}{N-1}n\right), 0 \leq n \leq N-1.$$

Окно Хемминга (Hamming). Оконная функция Хемминга описывается выражением

$$w(n)=0,54-0,46\cos\left(\frac{2\pi}{N-1}n\right), 0 \leq n \leq N-1.$$

Окно Блэкмана (Blackman). Оконная функция Блэкмана содержит две косинусные составляющие:

$$w(n)=0,42-0,5\cos\left(\frac{2\pi}{N-1}n\right)+0,08\cos\left(\frac{4\pi}{N-1}n\right), 0 \leq n \leq N-1.$$

Характеристики оконных функций приведены в приложении 1.

Пример. Требуется рассчитать рекурсивный ФНЧ с частотой $\omega_c=130$ рад/с. Пусть период дискретизации $T=0,01$ с и порядок фильтра $N=21$.

Отсчеты желаемой импульсной характеристики рассчитаем по формуле (11.9). После применения простого усечения найдем отсчеты импульсной характеристики $h_1(n)$:

$$\begin{aligned} h_1(0)=h_1(20) &= -0,01708; & h_1(6)=h_1(14) &= -0,07927; \\ h_1(1)=h_1(19) &= -0,03469; & h_1(7)=h_1(13) &= -0,04695; \\ h_1(2)=h_1(18) &= -0,00693; & h_1(8)=h_1(12) &= 0,1075; \\ h_1(3)=h_1(17) &= 0,03886; & h_1(9)=h_1(11) &= 0,29668; \\ h_1(4)=h_1(16) &= 0,04211; & h_1(10) &= 0,38197. \\ h_1(5)=h_1(15) &= -0,01779; \end{aligned}$$

Импульсная характеристика $h_1(n)$ показана на рис. 11.5, а.

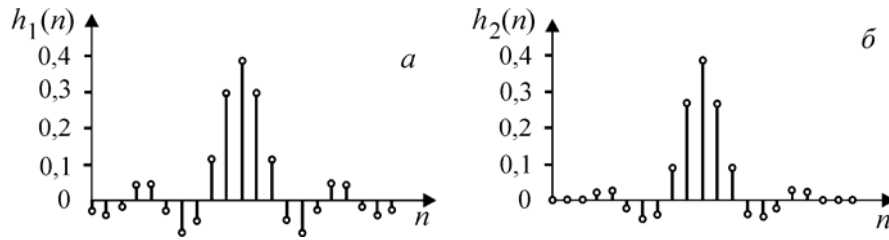


Рис. 11.5. Импульсные характеристики нерекурсивных ЦФ:
a – после усечения; *б* – после взвешивания треугольной оконной функцией

Применив к импульсной характеристике $h_1(n)$ взвешивание с помощью треугольной оконной функции, получим отсчеты импульсной характеристики $h_2(n)$:

$$\begin{aligned}
 h_2(0) &= h_2(20) = 0; & h_2(6) &= h_2(14) = -0,04756; \\
 h_2(1) &= h_2(19) = -0,00347; & h_2(7) &= h_2(13) = -0,03287; \\
 h_2(2) &= h_2(18) = -0,00139; & h_2(8) &= h_2(12) = 0,086; \\
 h_2(3) &= h_2(17) = 0,01166; & h_2(9) &= h_2(11) = 0,26701; \\
 h_2(4) &= h_2(16) = 0,01684; & h_2(10) &= 0,38197; \\
 h_2(5) &= h_2(15) = -0,00889;
 \end{aligned}$$

Импульсная характеристика $h_2(n)$ приведена на рис. 11.5, *б*.

АЧХ нерекурсивных фильтров с импульсными характеристиками $h_1(n)$ и $h_2(n)$ изображены на рис. 11.6.

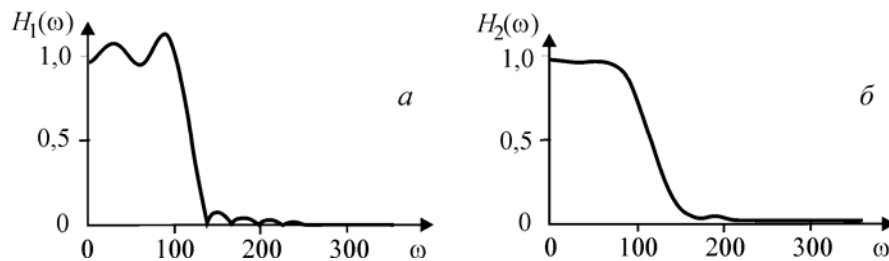


Рис. 11.6. АЧХ нерекурсивных ЦФ:
a – после усечения; *б* – после взвешивания треугольной оконной функцией

Таким образом, применение метода оконных функций позволяет уменьшить или даже устранить пульсации АЧХ. Однако при этом наклон АЧХ в переходной зоне будут более пологими, чем у исходной АЧХ.

Алгоритм синтеза нерекурсивного ЦФ по методу взвешивания включает следующие этапы.

1. Задаемся желаемой АЧХ фильтра (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ).
2. Производим дискретизацию желаемой АЧХ фильтра на N частей на интервале частоты ω от $-\pi/T$ до π/T .

3. К полученным значениям желаемой АЧХ применяем обратное дискретное преобразование Фурье и получаем отсчеты импульсной характеристики $h_{\text{ж}}(n)$.

4. Для выполнения условия физической реализуемости фильтра сдвигаем отсчеты импульсной характеристики вправо на величину $(N-1)/2$.

5. При помощи одной из оконных функций находим импульсную характеристику

$$h(n) = w(n) \cdot h_{\text{ж}}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

6. Значения отсчетов импульсной характеристики $h(n)$ принимаем за коэффициенты разностного уравнения $c_v = h(v)$, где $v=0, 1, \dots, N-1$.

7. Записываем передаточную функцию

$$H(z) = \sum_{v=0}^{N-1} c_v z^{-v}$$

8. Строим АЧХ фильтра $H(\omega) = |H(e^{j\omega T})|$ и выполняем проверку требований.

При синтезе фильтра рекомендуется сначала подобрать окно, обеспечивающее желаемый уровень пульсации, а затем подобрать порядок фильтра N , при котором достигается требуемая переходная полоса. При этом часто желаемая ширина переходной полосы достигается при большом N , что затрудняет реализацию фильтра.

11.6. Расчет нерекурсивных цифровых фильтров методом разложения АЧХ в ряд Фурье

Периодическая частотная функция может быть разложена по системе ортогональных функций:

$$H(\omega) = \sum_{i=0}^N c_i \varphi_i(\omega), \quad (11.11)$$

где коэффициенты c_n рассчитываются по формуле

$$c_i = \int_{\omega_1}^{\omega_2} H(\omega) \varphi_i(\omega) d\omega.$$

Это известное представление функции может быть использовано для расчета коэффициентов нерекурсивных ЦФ с линейной ФЧХ, у которых АЧХ определяется выражением вида (11.11), где $\varphi_i(\omega) = \cos(iT\omega)$ или $\varphi_i(\omega) = \sin(iT\omega)$.

Пусть для нерекурсивного цифрового ФНЧ желаемая АЧХ задана в виде функций, показанной на рис. 11.7.

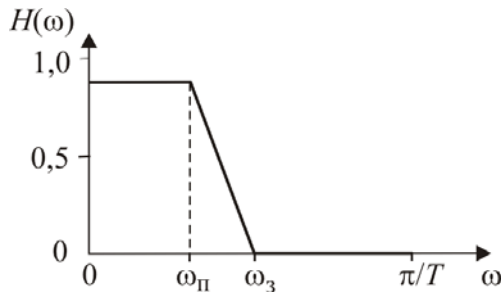


Рис. 11.7. Желаемая АЧХ
нерекурсивного цифрового ФНЧ

Желаемая АЧХ описывается
кусочно-линейной функцией

$$H_{\text{ж}}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_{\pi}; \\ \frac{\omega - \omega_3}{\omega_{\pi} - \omega_3} & \text{при } \omega_{\pi} \leq \omega \leq \omega_3; \\ 0 & \text{при } \omega_3 \leq \omega \leq \pi/T. \end{cases}$$

С учетом, что функция $H_{\text{ж}}(\omega)$ на интервале $[-\pi/T; \pi/T]$ является четной, коэффициенты АЧХ рассчитываются по формуле

$$c_i = \int_0^{\omega_3} H_{\text{ж}}(\omega) \varphi_i(\omega) d\omega, \quad (11.12)$$

где $\varphi_i(\omega)$ определяется в соответствии с рассмотренными выше видами фильтров. После этого находятся непосредственно коэффициенты фильтра $b_v = h(v)$, $v=0, 1, \dots, N-1$.

Пример. Требуется рассчитать нерекурсивный ЦФ с линейной ФЧХ первого типа со следующими параметрами: $\omega_{\pi} = 100$ рад/с, $\omega_3 = 120$ рад/с, $T = 0,01$ с и $N = 21$.

Желаемая АЧХ описывается функцией

$$H_{\text{ж}}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \omega \leq 100 \text{ рад/с;} \\ \frac{\omega - 120}{20} & \text{при } \omega_{\pi} \leq \omega \leq \omega_3; \\ 0 & \text{при } 120 \leq \omega \leq \pi/T = 628 \text{ рад/с.} \end{cases}$$

Желаемая АЧХ показана на рис. 11.8, б пунктирной линией.

Для АЧХ фильтра первого типа имеем

$$H(\omega) = \sum_{i=0}^k c_i \cos(i\omega T),$$

где $k = (N-1)/2$, $c_0 = h(k)$, $c_i = 2 \cdot h(k-i)$, $i=1, 2, \dots, k$.

По формуле

$$c_i = \int_0^{120} H_{\text{ж}}(\omega) \cos(i\omega T) d\omega$$

рассчитаем коэффициенты разложения c_i . а затем и значения отсчетов импульсной характеристики (коэффициентов фильтра):

$$\begin{aligned}
h(0)=h(20) &= -0,02678; & h(6)=h(14) &= -0,07372; \\
h(1)=h(19) &= -0,01408; & h(7)=h(13) &= -0,01649; \\
h(2)=h(18) &= 0,02086; & h(8)=h(12) &= 0,12782; \\
h(3)=h(17) &= 0,04135; & h(9)=h(11) &= 0,28321; \\
h(4)=h(16) &= 0,01555; & h(10) &= 0,35014. \\
h(5)=h(15) &= -0,04306;
\end{aligned}$$

Импульсная характеристика и АЧХ фильтра приведены на рис. 11.8.

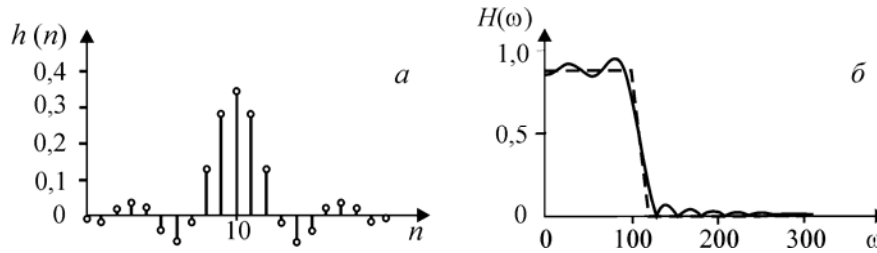


Рис.11.8. Характеристики нерекурсивного ЦФ:
a – импульсная характеристика; *б* – АЧХ

11.7. Реализация нерекурсивных цифровых фильтров

Прямая форма реализации нерекурсивных ЦФ

Текущее значение $y(n)$ выходной последовательности нерекурсивного цифрового фильтра согласно уравнению (11.1) представляет собой взвешенную сумму текущего значения $x(n)$ и $N-1$ предыдущих значений входной последовательности.

Алгоритм функционирования нерекурсивных ЦФ представляется в виде структурной схемы, показанной на рис. 11.9.

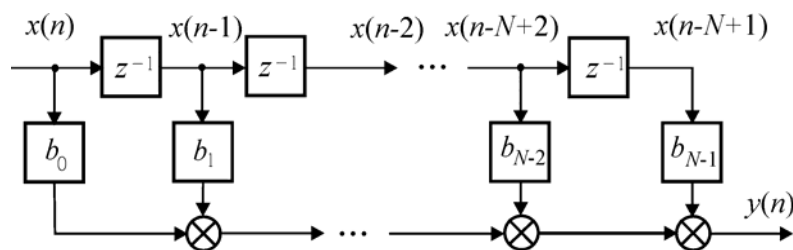


Рис. 11.9. Структурная схема нерекурсивного цифрового фильтра

Реализация нерекурсивного цифрового фильтра в соответствии со структурной схемой на рис. 11.9 требует:

- $N-1$ ячейки памяти для хранения последовательности $x(n)$;
- N ячеек памяти для хранения N коэффициентов;
- N операций умножения;
- $N-1$ операции сложения.

Каскадная форма реализации нерекурсивных ЦФ

При каскадной форме реализации предполагается, что передаточная функция записана в виде произведения сомножителей:

$$H(z) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}), & \text{если } N \text{ — нечетное;} \\ (b_0 + b_1z^{-1}) \prod_{k=1}^{(N-2)/2} (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}), & \text{если } N \text{ — четное.} \end{cases}$$

На рис 11.10 показана структурная схема нерекурсивного ЦФ по каскадной форме реализации для четного N . Здесь каждый сомножитель второго порядка имеет прямую каноническую форму реализации.

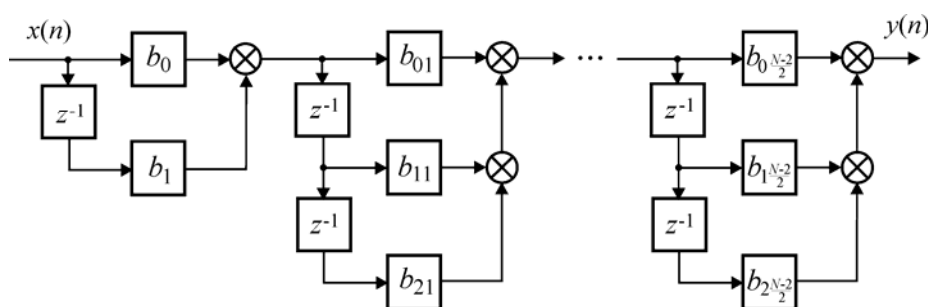


Рис. 11.10. Каскадная схема нерекурсивного цифрового фильтра

При построении структурных схем нерекурсивных ЦФ с линейной ФЧХ целесообразно учесть симметрию коэффициентов разностного уравнения (передаточной функции).

При нечетном N с учетом симметрии передаточную функцию запишем в следующем виде:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h(n)[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}] + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}}.$$

Прямая форма структурной схемы фильтра, построенная по этой передаточной функции, изображена на рис. 11.11.

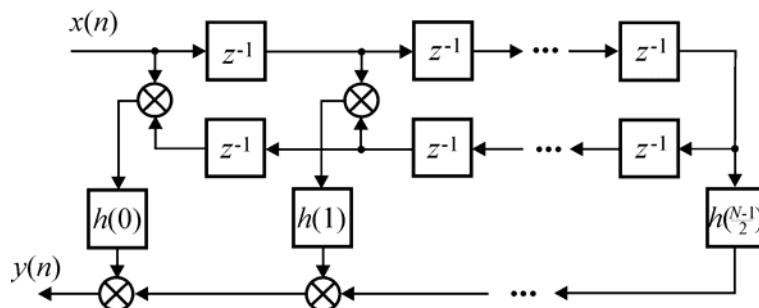


Рис. 11.11. Структурная схема нерекурсивного ЦФ с линейной ФЧХ для нечетного N

При четном N , если учесть условия симметрии, передаточную функцию фильтра можно записать так:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} h(n)[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}].$$

Структурная схема фильтра по этой передаточной функции показана на рис. 11.12.

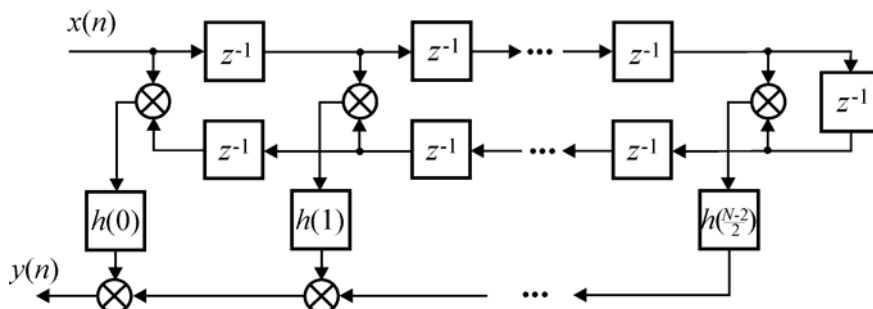


Рис. 11.12. Структурная схема нерекурсивного ЦФ с линейной ФЧХ для четного N

Контрольные вопросы и упражнения

1. Запишите разностное уравнение, передаточную функцию и частотную передаточную функцию нерекурсивного ЦФ для $N=3$.
2. Почему нерекурсивные цифровые фильтры всегда устойчивы?
3. Чем отличаются нерекурсивные ЦФ с линейной ФЧХ, имеющие симметричные и антисимметричные импульсные характеристики?
4. Цифровой фильтр описывается передаточной функцией

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 0,5 + z^{-1} + z^{-2} + 0,5z^{-3}.$$

Запишите разностное уравнение цифрового фильтра. Постройте график импульсной характеристики цифрового фильтра. Найдите аналитические выражения АЧХ и ФЧХ. цифрового фильтра.

5. Цифровой фильтр описывается разностным уравнением

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2).$$

Докажите, что фильтр имеет линейную ФЧХ.

6. Поясните необходимость и способ использования оконных функций при проектировании нерекурсивных цифровых фильтров.
7. Поясните характерные особенности оконных функций.

Глава 12

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Основные понятия спектрального анализа. – Корреляционная функция. – Спектральная плотность мощности. – Коррелограммный метод оценивания спектральной плотности мощности – Периодограммный метод оценивания спектральной плотности мощности – Вычисление ДПФ и алгоритмы БПФ. – Быстрое преобразование Фурье – Алгоритмы БПФ с прореживанием по времени. – Алгоритмы БПФ с прореживанием по частоте –

12.1. Основные понятия спектрального анализа

Математическую основу спектрального анализа составляет преобразование Фурье, связывающее временное и частотное представления сигналов. Уже в середине XIX века на основе гармонического анализа были разработаны практические методы изучения многих физических явлений. Вычисление коэффициентов ряда Фурье с помощью прямых расчетов или графических методов оказалось трудоемким. Механические гармонические анализаторы, разработанные для анализа и синтеза сигналов на основе рядов Фурье, позволили решить ряд важных практических задач. В первой половине XX века были предложены методы спектрального анализа, которые в настоящее время относят к классическим. Важную роль в спектральном анализе играют методы статистики, так как анализируемые сигналы, как правило, являются случайными.

Спектральный метод позволяет выделить из сложного сигнала более простые составляющие и определить, каковы их интенсивности. В качестве меры интенсивности сигнала и его простейших составляющих принято использовать *мощность*. Основное преимущество использования мощности в качестве меры интенсивности заключается в том, что для мощности сложного колебания, а не для амплитуды, справедливо свойство аддитивности: *мощность любого сложного сигнала равна сумме мощностей его отдельных составляющих*. Основной целью спектрального анализа являются оценивание спектральной плотности мощности (СПМ) дискретизированного случайного процесса и обнаружение в нем периодических составляющих.

Появление современных компьютеров и цифровых алгоритмов расширило роль спектрального оценивания и превратило его в средство решения многих практических задач. Наиболее распространенный ме-

тод построения спектров предполагает использование какого-либо из алгоритмов быстрого преобразования Фурье.

Одним из важных параметров, характеризующих метод спектрального оценивания, является его разрешающая способность, под которой понимается способность разрешать спектральные отклики двух синусоидальных сигналов, близких по частоте и амплитуде. Считается, что спектральные пики разрешены, если провал между ними составляет величину не менее 3 дБ.

Корреляционная функция

Для стационарного случайного процесса, обладающего свойством эргодичности, корреляционная функция определяется выражением

$$R_x(\tau) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} [x_p(t) - m_x][x_p(t + \tau) - m_x] dt, \quad (12.1)$$

где m_x – математическое ожидание. Корреляционная функция $R_x(\tau)$, таким образом, характеризует зависимость случайного процесса в момент времени $t + \tau$ от предшествующего значения в момент времени t .

Спектральная плотность мощности

Непосредственное применение классического гармонического анализа для исследования случайных процессов невозможно. Для случайного процесса спектральная характеристика $X(j\omega)$, полученная в результате преобразования Фурье конкретной реализации $x(t)$, содержит гармонические составляющие со случайными амплитудами и фазами. С помощью преобразования Фурье можно исследовать распределение мощности случайного процесса по гармоническим составляющим.

Имеются два формальных эквивалентных метода определения спектральной плотности мощности (СПМ).

Косвенный метод. Спектральная плотность $S_x(\omega)$ мощности случайного процесса $X(t)$ находится как преобразование Фурье корреляционной функции:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (12.2)$$

Спектральная плотность представляет собой действительную, неотрицательную и четную функцию частоты ω . Формулу (12.2) можно записать в следующем виде:

$$S_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (12.3)$$

Прямой метод. Спектральная плотность мощности случайного процесса может быть получена в результате непосредственного преобразования Фурье случайного процесса. Преобразование Фурье реализации случайного процесса $x_p(t)$ имеет вид

$$X_p(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Спектральная плотность мощности определяется по формуле

$$S_x(\omega) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T_p} M [|X_p(j\omega)|^2]. \quad (12.4)$$

12.2. Коррелограммный метод оценивания спектральной плотности мощности

Оценки спектральной плотности мощности, для определения которых сначала по исходным данным формируются оценки корреляционных функций, получили название *коррелограммных*.

Оценка корреляционной функции находится по заданной реализации $x_p(t)$ случайного процесса. Если определены N отсчетов $x_p(n)$, $n=0, 1, \dots, N-1$, сигнала, то оценку корреляционной функции можно вычислить по формуле

$$R_{x+}^*(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} [x(n) - m_x^*][x(n+m) - m_x^*], \quad m=0, 1, \dots, M-1. \quad (12.5)$$

Оценка $R_{x+}^*(m)$ корреляционной функции представляет собой дискретную последовательность, определенную на конечном интервале $[0, M-1]$. Показано, что чем больше значение m , тем больше ошибка определения корреляционной функции. Поэтому формулу (12.5) рекомендуют использовать при $M < N/10$. Дополнив $R_{x+}^*(m)$ симметричными отсчетами для отрицательных значений $m = -M+1, \dots, -1$, получим оценку $R_x^*(m)$ корреляционной функции.

Применив к оценке $R_x^*(m)$ дискретное преобразование Фурье (ДПФ), получим оценку спектральной плотности

$$S_x^*(\omega) = \sum_{m=1-M}^{M-1} R_x^*(m) e^{-j\omega T m}. \quad (12.6)$$

С учетом того, что оценка $R_x^*(m)$ является четной функцией, формулу (12.6) можно записать в следующем виде:

$$S_x^*(\omega) = 2 \sum_{m=0}^{M-1} R_{x+}^*(m) \cos(\omega T m). \quad (12.7)$$

При использовании формулы (12.7) отпадает необходимость дополнения $R_{x+}^*(m)$ отсчетами для отрицательных m .

Теоретически спектральная плотность мощности $S_x(\omega)$, определяемая в частотной области, является неслучайной характеристикой. Однако, поскольку ее оценивание всегда производится по ограниченным реализациям случайного процесса, значения спектра могут быть найдены только приближенно. Поэтому сама оценка спектральной плотности мощности имеет случайный характер и никогда не совпадает во всех точках с теоретической спектральной плотностью.

Применение коррелограммного метода оценивания оправдано только для стационарных случайных процессов и при использовании алгоритмов быстрого преобразования Фурье для расчетов по формулам (12.6), (12.7).

Коррелограммный метод применялся и до появления современных вычислительных машин и персональных компьютеров. Последние позволили внедрить в практику спектрального анализа более трудоемкие в вычислительном смысле, но и более эффективные методы.

Использование оконных функций

Для оценки (12.6), в которой вместо бесконечной корреляционной последовательности используется конечное число значений, характерно просачивание энергии, вызванное явлением Гиббса (эффект прямоугольного окна). Избавиться от просачивания энергии можно путем предварительного преобразования оценки корреляционной функции при помощи оконной функции $w(m)$, отличающейся от прямоугольной.

Тогда в качестве оценки спектральной плотности будем иметь:

$$S_x^*(\omega) = \sum_{m=1-M}^{M-1} R_x^*(m) w(m) e^{-j \omega T m}. \quad (12.8)$$

или

$$S_x^*(\omega) = 2 \sum_{m=0}^{M-1} R_x^*(m) w(m) \cos(\omega T m). \quad (12.9)$$

Некоторые оконные функции, которые используются для улучшения оценок спектральной плотности, рассмотрены в главе 11. Обработка с помощью оконной функции позволяет ослабить влияние боковых лепестков, вызванных явлением Гиббса. Но при этом ухудшается спектральное разрешение.

Эффект просачивания энергии также можно уменьшить сглаживанием самой оценки спектральной плотности, полученной по формуле (12.6), при помощи дополнительного фильтра.

12.3. Периодограммный метод оценивания спектральной плотности мощности

В этом методе преобразование Фурье применяется непосредственно к последовательности, полученной в результате дискретизации конечной реализации случайного процесса.

Оценка спектральной плотности производится по известной реализации $x_p(t)$ случайного процесса путем формирования из нее дискретной последовательности $x(n)$, $n=0,1, \dots, N-1$ и обработки этой последовательности в соответствии с приведенными выше формулами.

Преобразование Фурье действительной последовательности конечной длины $x(n)$, $n=0,1, \dots, N-1$, равно

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega T n}. \quad (12.10)$$

В качестве оценки спектральной плотности используют функцию

$$P_x(\omega) = \frac{1}{N} |X(e^{j\omega T})|^2. \quad (12.11)$$

Оценка спектральной плотности, полученная с помощью прямого преобразования Фурье согласно формулам (12.10) и (12.11), получила название *периодограммы*.

При использовании дискретного преобразования Фурье формулы (12.10) и (12.11) принимают следующий вид:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\Omega T k n}, \quad k=0,1,\dots,N-1,$$

$$P_x(k) = \frac{1}{N} |X(k)|^2, \quad k=0,1,\dots,N-1.$$

В общем случае периодограмма не является состоятельной оценкой и существует возможность ее флуктуации около истинного значения спектра. Для получения состоятельной оценки спектра используются фильтры и методы усреднения периодограмм.

Используя фильтр нижних частот с частотной характеристикой $H(k)$, получают модифицированную периодограмму

$$\tilde{P}_x(k) = H(k)P_x(k).$$

В частности, фильтрация может быть выполнена с помощью алгоритма скользящего усреднения.

При использовании метода усреднения периодограмм из исходной последовательности данных формируется псевдоансамбль дискретных последовательностей (сегментов) и соответствующий псевдоансамбль периодограмм. Получили известность алгоритмы Бартлетта и Уэлча.

В алгоритме Бартлетта исходная дискретная последовательность из N отсчетов разбивается на V неперекрывающихся сегментов. Основное отличие алгоритма Уэлча состоит в том, что используется перекрывающееся сегментирование исходной последовательности отсчетов.

Рассмотрим последовательность действий при использовании алгоритма Уэлча. На **первом этапе** из анализируемой дискретной последовательности $x(n)$, $n=0, 1, \dots, N-1$, формируется несколько сегментов. При этом выбирается коэффициент D перекрытия соседних сегментов и определяется число V сегментов. Как правило, коэффициент перекрытия $D=0,5$ или $D=0,75$.

Число V сегментов определяется по формуле

$$V = E_{\text{ц}}[(N - D \cdot L) / (L - D \cdot L)],$$

где N – общее количество отсчетов анализируемого процесса, L – количество отсчетов в формируемых сегментах, $E_{\text{ц}}$ означает «целая часть числа, заключенного в квадратные скобки».

После этого из заданной дискретной последовательности формируются V дискретных последовательностей $x_r(l)$, $r=1, \dots, V$, $l=0, 1, \dots, L-1$. Варианты перекрытия сегментов, соответствующие данным значениям коэффициента $V=3$, показаны на рис. 12.1.

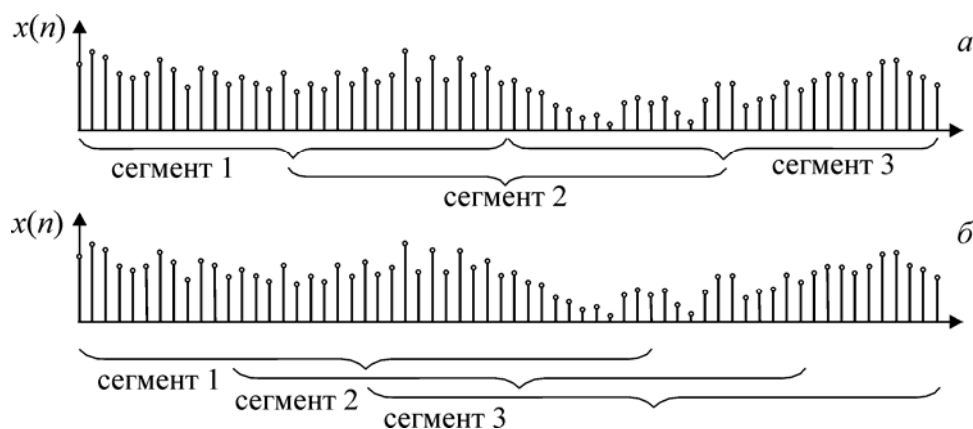


Рис. 12.1. Варианты перекрытия сегментов:

а – с коэффициентом перекрытия $D=0,5$;

б – с коэффициентом перекрытия $D=0,75$

На **втором этапе** выбирается оконная функция $w(l)$, осуществляется преобразование дискретных последовательностей $x_r(l) \cdot w(l)$, $r=1, \dots, V$, $l=0, 1, \dots, L-1$ по Фурье:

$$X_r(k) = \sum_{l=0}^{L-1} x_r(l) \cdot p(l) \cdot e^{-j \Omega T k l}, \quad k=0, 1, \dots, N-1, \quad r=1, \dots, V$$

и производится расчет функций:

$$P_{xr}(k) = \frac{1}{N} |X_r(k)|^2 .$$

На **третьем этапе** выполняется усреднение результатов, полученных для нескольких сегментов, с целью уменьшения дисперсии оценки. Усредненная оценка рассчитывается по формуле

$$S_x^*(k) = \frac{1}{V} \sum_{r=1}^V P_{xr}(k) .$$

При использовании любого метода оценивания СПМ конечной дискретной последовательности приходится принимать ряд компромиссных решений, которые позволили бы получить статистически устойчивые оценки с максимально возможным разрешением. К таким компромиссным решениям относятся выбор оконных функций и параметров усреднения во временной и в частотной областях. Оценки СПМ, получаемые в результате обработки одного и того же отрезка сигнала разными методами, как правило, отличаются друг от друга. Их можно объяснить различием допущений, принятых относительно данных, различными способами усреднения и т.п. Поэтому практика спектрального анализа требует определенного искусства.

Спектральный анализ всегда был трудоемким делом и требовал большого объема вычислений. Только с появлением алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) спектральный анализ стал широко использоваться для решения практических задач.

12.4. Вычисление ДПФ и алгоритмы БПФ

Прямое и обратное дискретные преобразования Фурье могут вычисляться непосредственно по формулам:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{nk} , \quad k=0, 1, \dots, N-1; \quad (12.12)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-nk} , \quad n=0, 1, \dots, N-1. \quad (12.13)$$

Анализ выражений показывает, что основными операциями при выполнении прямого и обратного дискретных преобразований Фурье являются операции комплексного умножения и суммирования. Схема алгоритма вычисления спектральной характеристики $X(k)$ по формуле (12.12) показана на рис. 12.2. Схема вычисления обратного ДПФ аналогична.

Формулу (12.6) можно записать в матричной форме

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \times \mathbf{x} , \quad (12.14)$$

где \mathbf{x} и \mathbf{X} – векторы из отсчетов последовательности $x(n)$ и спектральной характеристики $X(k)$, \mathbf{A} – матрица с элементами $a_{n,k} = W^{nk}$.

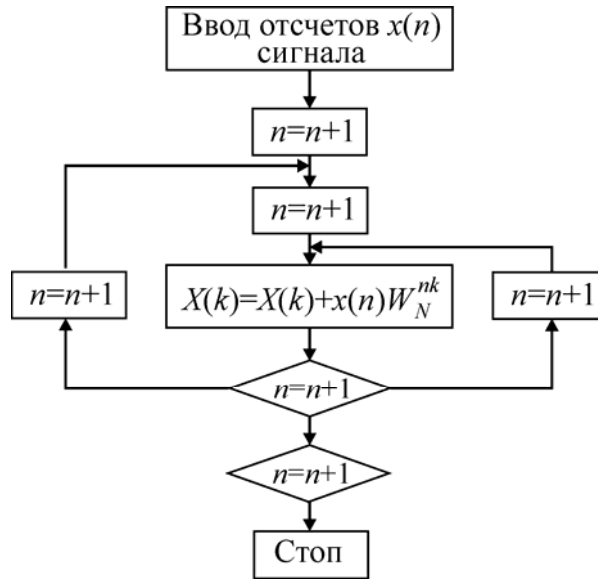


Рис. 12.2. Схема алгоритма вычисления ДПФ

Например, при $N=8$ векторы и матрицы в (12.14) будут иметь следующий вид:

$$\mathbf{X} = [X(1) X(2) X(3) X(4) X(5) X(6) X(7)]^T;$$

$$\mathbf{x} = [x(1) x(2) x(3) x(4) x(5) x(6) x(7)]^T;$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы рассчитать при $N=8$ спектральную характеристику $X(k)$, необходимо произвести $8 \times 8 = 64$ умножения и $7 \times 8 = 56$ сложений.

В общем случае расчет спектральной характеристики по формуле (12.6) требует N^2 комплексных умножений и $N(N-1)$ комплексных сложений. При больших N количество арифметических операций настолько велико, что определение спектральной характеристики в режиме реального времени затруднено. Поэтому были предприняты усилия

по поиску алгоритмов, которые при вычислении спектральной характеристики требовали бы меньшего количества арифметических операций. Такие алгоритмы объединены под общим названием «быстрое преобразование Фурье» (БПФ).

Первый алгоритм БПФ, предложенный Кули и Тьюки, основан на том, что среди элементов матрицы (комплексных экспонент W^{nk}) есть много повторяющихся значений в силу периодичности экспоненты. Алгоритм БПФ группирует слагаемые с одинаковыми множителями, значительно сокращая число умножений. В результате быстрое действие БПФ может в зависимости от N в сотни раз превосходить быстрое действие стандартного алгоритма.

Существует различные алгоритмы БПФ. Они отличаются тем, на какие множители может быть разложено число N . Наиболее простые алгоритмы получаются, если N является степенью числа 2. Далее рассмотрим два алгоритма, удовлетворяющие этому условию.

12.5. Алгоритм БПФ с прореживанием по времени

Основная идея алгоритмов БПФ состоит в том, что преобразуемые последовательности разбиваются на более короткие.

Базовая операция алгоритма

Для уяснения этой идеи рассмотрим N -точечную последовательность $x(n)$. Её спектральная характеристика вычисляется по формуле

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}.$$

Произведем прореживание последовательности $x(n)$, разбив её на две $(N/2)$ -точечные последовательности $x_1(n)$ и $x_2(n)$, состоящие из $x(n)$ с четными и нечетными номерами:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= x(2n), & n &= 0, 1, \dots, (N/2)-1, \\ x_2(n) &= x(2n+1), & n &= 0, 1, \dots, (N/2)-1. \end{aligned}$$

Тогда спектральная характеристика последовательности $x(n)$ может быть записана в следующем виде:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n) W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n+1) W_N^{(2n+1)k}.$$

Учитывая, что $W_N^2 = \exp(-j2\pi/N) = \exp(-j2\pi/(N/2)) = W_{N/2}$, получим

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_1(n) W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_2(n) W_{N/2}^{nk}.$$

Легко заметить, что здесь первая сумма слагаемых в правой части есть спектральная характеристика последовательности $x_1(n)$, а вторая сумма – спектральная характеристика последовательности $x_2(n)$. Поэтому получим

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k), \quad k = 0, 1, \dots, (N/2) - 1. \quad (12.15)$$

Поскольку $X(k)$ определено для $k \in [0, N-1]$, а $X_1(k)$ и $X_2(k)$ определены для $k \in [0, (N/2) - 1]$, необходимо доопределить формулу (12.15) для $k \geq N/2$. С учетом, что $X_1(k)$ и $X_2(k)$ функции периодические с периодом $N/2$ и $W_N^{-N/2} = -1$, можно записать

$$X(k) = X_1(k) - W_N^k X_2(k), \quad k = (N/2), \dots, N-1.$$

Таким образом, имеем

$$X(k) = \begin{cases} X_1(k) + W_N^k X_2(k), & k = 0, 1, \dots, (N/2) - 1, \\ X_1(k) - W_N^k X_2(k), & k = (N/2), \dots, N-1. \end{cases} \quad (12.16)$$

Формулы (12.16) определяют алгоритм базовой операции БПФ, позволяющей вычислить спектральную характеристику $X(k)$ N -точечной последовательности с помощью спектральных характеристик $X_1(k)$ и $X_2(k)$ $(N/2)$ -точечных последовательностей. Этот алгоритм можно изобразить в виде графа, получившего название «бабочка» (рис. 12.3, а).

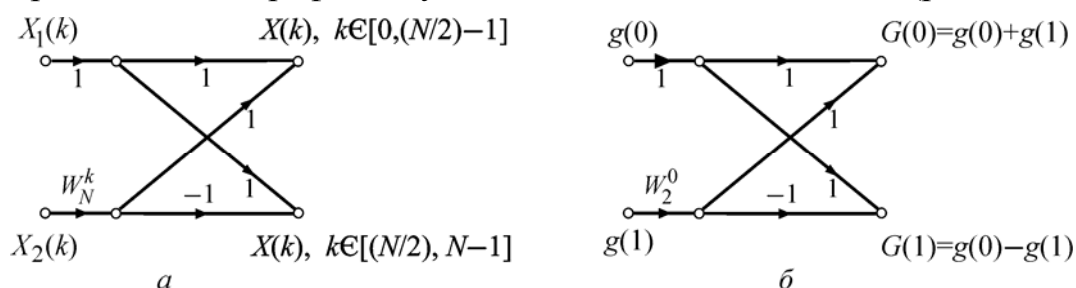


Рис. 12.3. Направленный граф алгоритма базовой операции:
 а – для N -точечной последовательности; б – для двухточечной последовательности

Алгоритм БПФ с основанием 2

Алгоритм разработан для дискретной последовательности $x(n)$, длина которой равна $N = 2^m$, где m – целое положительное число. Если исходная последовательность $x(n)$ этому условию не удовлетворяет, то она дополняется необходимым количеством отсчетов с нулевыми значениями. Последовательное деление на более короткие последовательности, состоящие на каждом этапе из нечетных и четных номеров, приводит к образованию $N/2$ двухточечных последовательностей.

Пример. Рассмотрим особенности алгоритма на примере вычисления спектральной характеристики последовательности при $N=8$. Поэтапное деление исходной последовательности дает четыре двухточечные последовательности: $\{x(0), x(4)\}$; $\{x(2), x(6)\}$; $\{x(1), x(5)\}$; $\{x(3), x(7)\}$.

Направленный граф вычисления спектральной характеристики с использованием базовой операции приведен на рис. 12.4, где этапы вычисления отделены пунктирными линиями. Чтобы показать эффективность рассматриваемого алгоритма, сравним, например, вычисление отсчета $X(3)$ спектральной характеристики непосредственно по формуле (12.12) и по алгоритму БПФ согласно направленному графу на рис.12.4. По формуле (12.12) имеем

$$X(3) = W_8^0 x(0) + W_8^3 x(1) + W_8^6 x(2) + W_8^9 x(3) + W_8^{12} x(4) + W_8^{15} x(5) + W_8^{18} x(6) + W_8^{21} x(7).$$

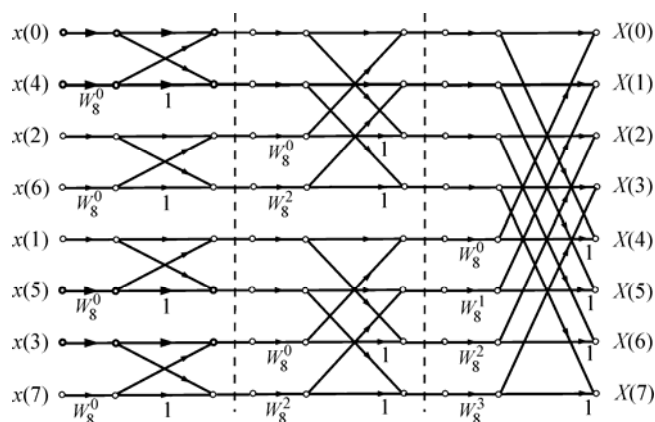


Рис. 12.4. Направленный граф алгоритма БПФ

Для наглядности расчета по алгоритму БПФ выделим на графе траекторию расчета значения $X(3)$ (рис. 12.5). Согласно этой траектории

$$X(3) = x(0) - x(4) - W_8^2 [x(2) - x(6)] + W_8^3 \{x(1) - x(5) - W_8^2 [x(3) - x(7)]\}. \quad (12.17)$$

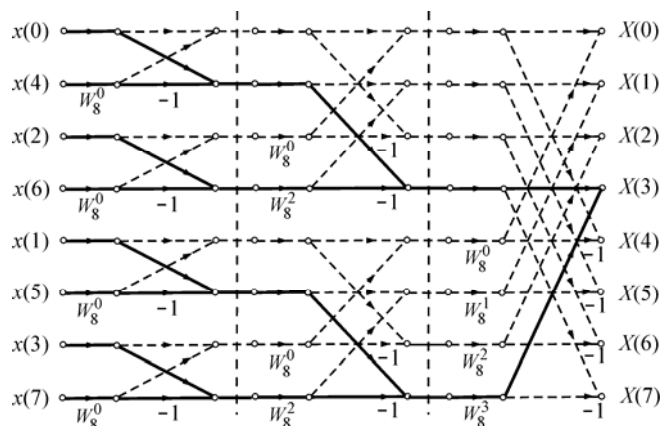


Рис. 12.5. Направленный граф алгоритма БПФ с выделенной траекторией вычисления отсчета $X(3)$

Приведенный пример позволяет сделать заключение, что экономии в количестве используемых арифметических операций достигается организацией порядка вычисления. При этом требуется хранить промежуточные результаты расчетов для их последующего использования.

Таким образом, в данном алгоритме БПФ выделяются две части.

1. Перестановка элементов входной последовательности. Целью перестановки является образование $N/2$ двухточечных последовательностей. Для перестановки элементов входной последовательности используется представление номера элемента последовательности в двоичном коде и его чтение в обратном порядке.

Например, для рассмотренного выше примера при $N=8$ во второй строке табл. 12.1 записаны номера элементов входной последовательности в двоичном коде. В третьей строке записаны инверсные двоичные коды, а в четвертой – соответствующие им элементы входной последовательности, которые образуют $N/2$ пар.

Таблица 12.1

Сортировка последовательности путем обращения кода

$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(6)$	$x(7)$
000	001	010	011	100	101	110	111
000	100	010	110	001	101	011	111
$x(0)$	$x(4)$	$x(2)$	$x(6)$	$x(1)$	$x(5)$	$x(3)$	$x(7)$

2. Вычисление отсчетов спектральной характеристики. Вычисления выполняются с использованием базовой операции поэтапно. На первом этапе вычисляются $N/2$ двухточечных спектральных характеристик, которые запоминаются. На втором этапе после объединения двухточечных спектральных характеристик в четверки получается $N/4$ четырехточечных спектральных характеристик. Вычисления продолжают до тех пор, пока не получится конечная N -точечная спектральная характеристика $X(k)$.

Рассмотренный алгоритм БПФ содержит $(N/2)\log_2 N$ операций комплексного умножения и $N\log_2 N$ операций комплексного сложения. Напомним, что расчет по формуле прямого ДПФ требует N^2 комплексных умножений и $N(N-1)$ комплексных сложений. В табл. 12.2 проиллюстрирована экономия при использовании ДПФ и БПФ.

Таблица 12.2

Число арифметических операций при использовании ДПФ и БПФ

N	ДПФ		БПФ	
	Число сложений	Число умножений	Число умножений	Число сложений
8	64	56	12	24
16	256	240	32	64
32	1024	992	80	160
64	4096	4032	192	384
128	16 384	16 256	448	896
256	65 536	65 280	1024	2048
512	262 144	261 632	2304	4608
1024	1 048 576	1 047 552	5120	10 240

12.6. Алгоритмы БПФ с прореживанием по частоте

Базовая операция алгоритма

В этом варианте алгоритма БПФ преобразуемая последовательность $x(n)$ разбивается на две последовательности, содержащие по $N/2$ отсчетов каждая, следующим образом: первая последовательность $x_1(n)$ состоит из первых $N/2$ отсчетов $x(n)$, а вторая $x_2(n)$ – из остальных $N/2$ отсчетов $x(n)$, то есть

$$\begin{aligned} x_1(n) &= x(n), & n &= 0, 1, \dots, (N/2)-1, \\ x_2(n) &= x(n+N/2), & n &= 0, 1, \dots, (N/2)-1. \end{aligned}$$

При таком разбиении для спектральной характеристики последовательности $x(n)$ получим

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_1(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_2(n) W_N^{(n+N/2)k}, \quad k=0, 1, \dots, N-1.$$

С учетом, что $W^{kN/2} = e^{-j\pi k}$, будем иметь

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} [x_1(n) + e^{-j\pi k} x_2(n)] W_N^{nk}, \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (12.18)$$

Здесь $e^{-j\pi k} = 1$ для четных k и $e^{-j\pi k} = -1$ для нечетных k . С учетом этого из (12.18) для четных и нечетных отсчетов спектральной характеристики будем иметь:

$$\begin{aligned} X(2k) &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} [x_1(n) + x_2(n)] \cdot W_{N/2}^{kn}, \quad k=0, 1, \dots, (N/2)-1; \\ X(2k+1) &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \{ [x_1(n) - x_2(n)] \cdot W_N^n \} \cdot W_{N/2}^{kn}, \quad k=0, 1, \dots, (N/2)-1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что четные отсчеты спектральной характеристики можно получить, применив ДПФ к $(N/2)$ -точечной последовательности

$$y_1(n) = x_1(n) + x_2(n), \quad n = 0, 1, \dots, (N/2) - 1.$$

Для того чтобы получить нечетные отсчеты спектральной характеристики, необходимо применить ДПФ к $(N/2)$ -точечной последовательности

$$y_2(n) = [x_1(n) - x_2(n)] \cdot W_N^n, \quad n = 0, 1, \dots, (N/2) - 1.$$

Таким образом, вычисление N -точечного ДПФ сводится к вычислению двух $(N/2)$ -точечных последовательностей. Эта процедура, являющаяся базовой для алгоритма с прореживанием по частоте, может быть представлена в виде направленного графа (рис. 12.6).

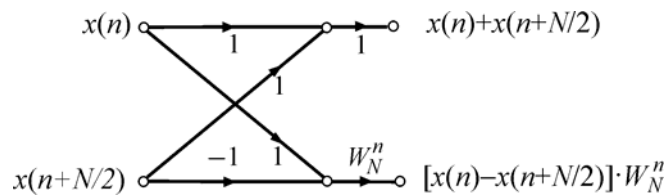


Рис. 12.6. Направленный граф алгоритма базовой операции

Алгоритм БПФ с основанием 2

Алгоритм разработан для дискретной последовательности $x(n)$, длина которой равна $N = 2^m$, где m – целое положительное число. Последовательное деление на более короткие последовательности приводит к образованию $N/2$ двухточечных последовательностей.

Пример. Рассмотрим применение алгоритма для вычисления спектральной характеристики последовательности с $N = 8$. Направленный граф алгоритма с использованием базовой операции показан на рис. 12.7.

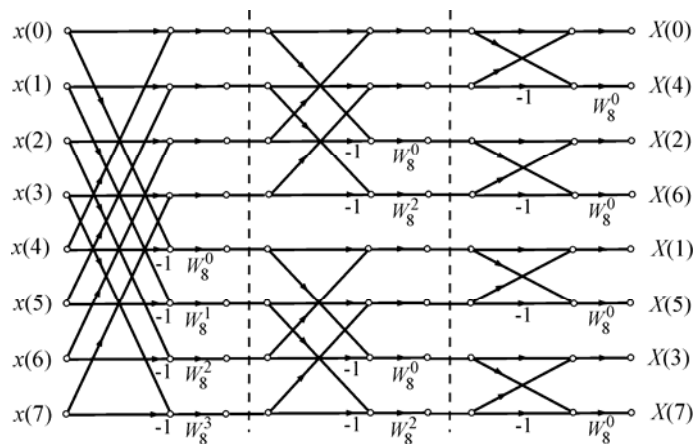


Рис. 12.7. Направленный граф алгоритма БПФ

Вычисление спектральной характеристики выполняется в три этапа. На первом этапе исходная 8-точечная последовательность разбивается на две 4-точечные последовательности; из них в соответствии с базовой операцией формируются две новые 4-точечные последовательности. На втором этапе каждая из полученных 4-точечных последовательностей разбивается на две двухточечные. В результате образуются четыре двухточечные последовательности. Наконец, на третьем этапе после применения базовой операции к двухточечным последовательностям получают отсчеты спектральной характеристики в двоично-инверсном порядке.

На рис. 12.8 изображен направленный граф с выделенной траекторией для расчета значения $X(3)$. Нетрудно убедиться, что результат вычисления совпадает с (12.17).

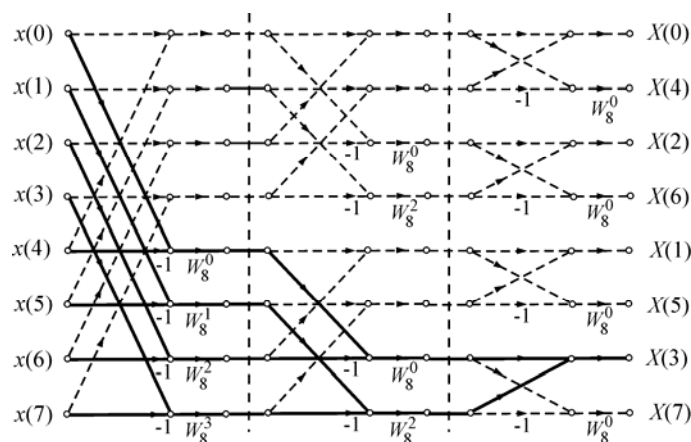


Рис. 12.8. Направленный граф алгоритма БПФ с выделенной траекторией вычисления отсчета $X(3)$

Расчет спектральной характеристики при помощи алгоритма БПФ с прореживанием по частоте состоит из двух частей:

- 1) вычисление отсчетов спектральной характеристики с использованием направленного графа и базовой операции;
- 2) перестановка отсчетов спектральной характеристики.

Сравнение алгоритмов с прореживанием по времени и с прореживанием по частоте (см. рис. 12.4 и 12.7) позволяет заметить два отличия. Во-первых, при прореживании по времени порядок следования отсчетов входной последовательности двоично-инверсный, а выходной – прямой. При прореживании по частоте наоборот: входная последовательность имеет прямой порядок следования, выходная – двоично-инверсный. Второе отличие состоит в порядке выполнения комплексных умножений и сложений в базовых операциях.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте физическое понятие спектральной плотности мощности.
2. Чем объясняется просачивание энергии при использовании прямоугольного окна?
3. Для чего в коррелограммном методе оценивания спектральной плотности мощности используются оконные функции?
4. Какие способы используются для получения состоятельных оценок спектральной плотности мощности в периодограммном методе?
5. В чем заключается основная идея быстрого преобразования Фурье? При каком условии может использоваться этот алгоритм?
6. В каком порядке выполняется операции умножения и сложения в базовых операциях алгоритмов БПФ с прореживанием по времени и по частоте?
7. Дана дискретная последовательность $\{0, 1, 1, 0\}$. Постройте направленный граф расчета спектральной характеристики по алгоритму БПФ с прореживанием по времени. Найдите спектральную характеристику $X(k)$, $k=0, 1, 2, 3$.
8. Повторите упражнение 7 для алгоритма с прореживанием по частоте.
9. Дана дискретная последовательность $\{0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0\}$. С помощью алгоритма БПФ найдите спектральную характеристику $X(k)$, $k=0, 1, \dots, 7$. Постройте графики амплитудного и фазового спектров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Извлечение, передача и обработка информации составляет существо многих задач, решаемых информационными системами различного назначения. Основным средством для извлечения информации и ее физическим носителем являются сигналы. В учебном пособии рассмотрены базовые методы, применяемые в системах обработки сигналов различного назначения.

Желающему продолжить освоение методов и алгоритмов обработки сигналов можно порекомендовать углубленное изучение тех разделов, которые нашли отражение в учебном пособии, так и изучить новые.

1. Наряду с дискретным преобразованием Фурье для спектрального анализа сигналов используется дискретное преобразование Уолша, основанное на дискретных аналогах функций Уолша. Быстрые преобразования Уолша с прореживанием по времени и по частоте перспективны в задачах спектрального сжатия.

2. В учебном пособии рассмотрены периодограммный и коррелограммный методы спектрального оценивания, ставшие классическими. К альтернативным методам спектрального оценивания относятся методы, основанные на использовании параметрических моделей, таких как модели авторегрессии и авторегрессии-скользящего среднего. Они обладают высокой разрешающей способностью, достигаемой с их помощью при обработке последовательностей данных, содержащих очень малое число отсчетов.

3. Следует упомянуть о вейвлет-преобразовании, которое в отличие от традиционно применяемого преобразования Фурье, обеспечивает двумерное представление одномерного сигнала. При этом появляется возможность анализировать свойства сигнала одновременно в области частот и в области времени (или пространственной переменной). С помощью вейвлет-преобразования выполняется обработка сигналов, которые имеют нестационарность по времени или неоднородность в пространстве.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

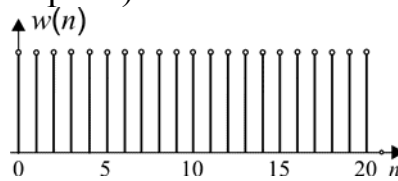
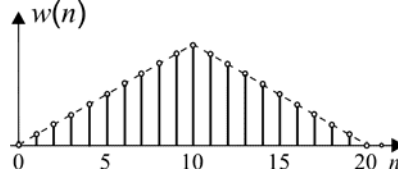
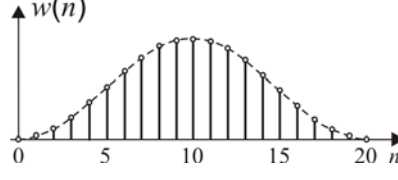
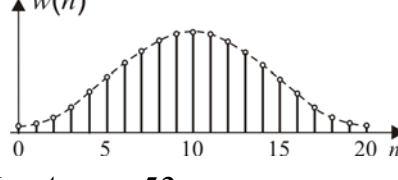
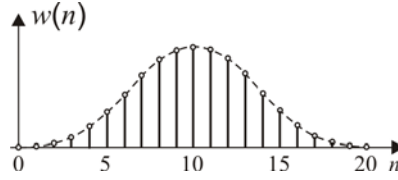
Передаточные функции нормированных ФНЧ

$$W_H(s) = \frac{b_0}{A(s)}, \quad A(s) = \prod_{i=1}^{n/2} (s^2 + \alpha_{1i}s + \alpha_{2i}), \text{ если } n - \text{ четное};$$

$$A(s) = (s - \alpha_0) \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (s^2 + \alpha_{1i}s + \alpha_{2i}), \text{ если } n - \text{ нечетное}.$$

n	b_0	$A(s)$
Фильтр Баттерворта		
1	1	$s+1$
2	1	$s^2 + \sqrt{2} \cdot s + 1$
3	1	$(s+1)(s^2 + s + 1) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$
4	1	$(s^2 + 0.765s + 1)(s^2 + 1.848s + 1)$
Фильтр Чебышева с неравномерностью 0.1 дБ ($\varepsilon=0,153$) (Чеб 1)		
1	6.552	$s+6.552$
2	3.276	$s^2 + 2.372s + 3.314$
3	1.638	$(s+0.969)(s^2 + 0.969s + 1.69)$
4	0.819	$(s^2 + 1.275s + 0.623)(s^2 + 0.528s + 1.33)$
Фильтр Чебышева с неравномерностью 0.5 дБ ($\varepsilon=0,349$) (Чеб 2)		
1	2.863	$s+2.863$
2	1.431	$s^2 + 1.426s + 1.516$
3	0.715	$(s+0.626)(s^2 + 0.626s + 1.142)$
4	0.358	$(s^2 + 0.847s + 0.356)(s^2 + 0.351s + 1.064)$
Фильтр Чебышева с неравномерностью 1 дБ ($\varepsilon=0.509$) (Чеб 3)		
1	1.965	$s+1,965$
2	0.983	$s^2 + 1.098s + 1.103$
3	0.491	$(s+0,494)(s^2 + 0,494s + 0,994)$
4	0.245	$(s^2 + 0.674s + 0.279)(s^2 + 0.279s + 0,987)$

Приложение 2. Характеристики оконных функций

<p style="text-align: center;">Прямоугольное (равномерное) окно</p> $w(n)=1, \quad 0 \leq n \leq N-1$	
$A_{\text{пл}} = -13; \quad \Delta\omega = 4\pi/N; \quad A_{\text{мин}} = -21$	
<p style="text-align: center;">Треугольное окно (окно Бартлетта)</p> $w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1, \end{cases}$	
$A_{\text{пл}} = -25; \quad \Delta\omega = 8\pi/N; \quad A_{\text{мин}} = -25$	
<p style="text-align: center;">Косинус-квадрат (окно Хэнна)</p> $w(n) = 0,5 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}n\right) \right],$ $0 \leq n \leq N-1;$	
$A_{\text{пл}} = -31; \quad \Delta\omega = 8\pi/N; \quad A_{\text{мин}} = -44$	
<p style="text-align: center;">Приподнятый косинус (окно Хэмминга)</p> $w(n) = 0,54 - 0,46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}n\right),$ $0 \leq n \leq N-1;$	
$A_{\text{пл}} = -41; \quad \Delta\omega = 8\pi/N; \quad A_{\text{мин}} = -53$	
<p style="text-align: center;">Окно Блэкмана</p> $w(n) = 0,42 - 0,5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N-1}n\right) +$ $+ 0,08 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{N-1}n\right);$ $0 \leq n \leq N-1$	
$A_{\text{пл}} = -57; \quad \Delta\omega = 12\pi/N; \quad A_{\text{мин}} = -74$	

$A_{\text{пл}}$ – амплитуда пика бокового лепестка, дБ

$\Delta\omega$ – ширина переходной полосы главного лепестка;

$A_{\text{мин}}$ – минимальное затухание в полосе задерживания, дБ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2003. – 462 с.
2. Вадутов О.С. Математические основы обработки сигналов. Практикум: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2007. – 100 с.
3. Васильев В.П., Муро Э.Л., Смольский С.М. Основы теории и расчета цифровых фильтров: учебное пособие; под ред. С.М. Смольского. – М.: Издательский дом «Академия», 2007. – 272 с.
4. Введение в цифровую фильтрацию / под ред. Р. Богнера и А. Константиноидиса; пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 320 с.
5. Гадзиковский В.И. Теоретические основы цифровой обработки сигналов. – М.: Радио и связь, 2004. – 344 с.
6. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие. – М.: Радио и связь, 1990. – 256 с.
7. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: справочник. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.
8. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учебное пособие для вузов. – 5-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2006. – 719 с.
9. Давыдов А.В. Сигналы и системы. Лекции и практикум на ПК // <http://prodav.narod.ru/signals/index.html>
10. Давыдов А.В. Цифровая обработка сигналов. Лекции и практикум на ПК // <http://prodav.narod.ru/dsp/index.html>
11. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
12. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Политехника, 2002. – 592 с.
13. Марпл.–мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
14. Мошиц Г., Хорн П. Проектирование активных фильтров / пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 320 с.
15. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов / пер. с англ. – М.: Техносфера, 2007. – 856 с.
16. Основы цифровой обработки сигналов: курс лекций / Авт.: А.И. Солонина, Д.А. Улахович, С.М. Арбузов, Е.Б. Соловьева, И.И. Гук. – СПб.: БХВ–Петербург, 2003. – 608 с.
17. Радиотехнические цепи и сигналы: учебное пособие для вузов/ Д.В. Васильев, М.Р. Витоль, Ю.Н. Горшенков и др.; под ред. К.А. Самойло. – М.: Радио и связь, 1982. – 528 с.
18. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие. – СПб.: Питер, 2002. – 608 с.
19. Цифровая обработка сигналов // <http://dsp-book.narod.ru/>

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Глава 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СИГНАЛОВ	5
1.1. Основные понятия: информация, сообщение, сигнал	5
1.2. Математическая модель аналогового сигнала	7
1.3. Классификация сигналов	8
1.4. Энергетические характеристики сигналов	12
1.5. Представление детерминированного сигнала с помощью простейших функций	12
1.6. Представление детерминированного сигнала с помощью ортогональных функций	13
1.7. Дискретизация аналоговых сигналов. Дискретные и цифровые последовательности	18
1.8. Обработка сигналов	22
Контрольные вопросы и упражнения	
Глава 2. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ	23
2.1. Базисная система сигналов	23
2.2. Тригонометрический ряд Фурье	25
2.3. Комплексный (экспоненциальный) ряд Фурье	27
2.4. Историческая справка	29
2.5. Спектры простейших периодических сигналов	30
2.6. Условия сходимости ряда Фурье. Явление Гиббса	34
2.7. Распределение мощности в спектре периодического сигнала	37
2.8. Практическая ширина спектра	38
Контрольные вопросы и упражнения	39
Глава 3. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ	41
3.1. Преобразование Фурье	41
3.2. Спектральные характеристики простейших непериодических сигналов	44
3.3. Основные свойства преобразования Фурье	47
3.4. Распределение энергии в спектре непериодического сигнала. Практическая ширина спектра	51
Контрольные вопросы и упражнения	53
Глава 4. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО ФУНКЦИЯМ ЛАГЕРРА И УОЛША	55
4.1. Полиномы и функции Лагерра	55
4.2. Разложение сигналов по функциям Лагерра	57
4.3. Функции Уолша и способы их упорядочивания	58
4.4. Разложение сигналов по функциям Уолша	62
Контрольные вопросы и упражнения	64

Глава 5. ЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СИСТЕМЫ	65
5.1. Общие понятия	65
5.2. Дифференциальное уравнение линейной стационарной системы	67
5.3. Передаточная функция линейной стационарной системы	68
5.4. Частотная передаточная функция и частотные характеристики линейной стационарной системы	70
5.5. Импульсная переходная функция линейной стационарной системы	71
5.6. Устойчивость линейных стационарных систем	72
5.7. Расчет реакции системы при помощи интеграла свертки	74
5.8. Спектральный метод определения реакции системы на детерминированные сигналы	75
5.9. Операторный метод определения реакции системы на детерминированные сигналы	77
5.10. Условия неискаженной передачи сигнала линейной стационарной системой	80
5.11. Интегрирование детерминированных сигналов	81
5.12. Дифференцирование детерминированных сигналов	83
Контрольные вопросы и упражнения	84
Глава 6. АНАЛОГОВЫЕ ФИЛЬТРЫ	87
6.1. Задача фильтрации. Базисные фильтры и их идеальные частотные характеристики	87
6.2. Задача аппроксимации. Типовые ФНЧ	90
6.3. Фильтры Баттерворта	92
6.4. Фильтры Чебышева первого рода	95
6.5. Денормирование и трансформация фильтров	97
6.6. Примеры расчета фильтров	100
Контрольные вопросы и упражнения	103
Глава 7. ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ	105
7.1. Типовые дискретные последовательности	105
7.2. Описание и преобразование дискретных последовательностей	107
7.3. Представление дискретной последовательности в виде дискретной функции времени	109
7.4. Дискретное преобразование Лапласа. Z - преобразование	110
7.5. Свойства прямого Z-преобразования	113
7.6. Обратное Z-преобразование	115
7.7. Преобразование Фурье дискретного сигнала	118
7.8. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)	120
7.9. Свойства дискретного преобразования Фурье	122
7.10. Восстановление сигнала по его отсчетам	123
Контрольные вопросы и упражнения	126
Глава 8. ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ	129
8.1. Понятие дискретной системы	129
8.2. Описание дискретной системы разностным уравнением	130
8.3. Передаточная функция дискретной системы	132
8.4. Импульсная характеристика дискретной системы. Уравнение свертки	133
8.5. Частотная передаточная функция дискретной системы	135
8.6. Амплитудная и фазовая частотные характеристики	136
8.7. Структурные схемы дискретной системы	137
8.8. Устойчивость дискретных систем	141
8.9. Дискретное интегрирование	143
8.10. Дискретное дифференцирование	144
Контрольные вопросы и упражнения	145

Глава 9. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ	147
9.1. Функциональная схема цифрового фильтра	147
9.2. Достоинства и недостатки цифровых фильтров	150
9.3. Классификация цифровых фильтров	151
9.4. Реализация цифровых фильтров	153
Контрольные вопросы и упражнения	154
Глава 10. РЕКУРСИВНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ	155
10.1. Рекурсивные цифровые фильтры первого порядка	155
10.2. Рекурсивные цифровые фильтры второго порядка	157
10.3. Реализация рекурсивных цифровых фильтров	160
10.4. Расчет рекурсивных цифровых фильтров по аналоговому прототипу	162
10.5. Примеры расчета цифровых фильтров по аналоговому прототипу	167
10.6. Прямые методы расчета рекурсивных цифровых фильтров	171
Контрольные вопросы и упражнения	172
Глава 11. НЕРЕКУРСИВНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ	173
11.1. Нерекурсивные цифровые фильтры первого порядка	173
11.2. Нерекурсивные цифровые фильтры 2-го порядка	174
11.3. Особенности нерекурсивных цифровых фильтров	175
11.4. Нерекурсивные цифровые фильтры с линейной ФЧХ	177
11.5. Расчет нерекурсивных цифровых фильтров при помощи метода взвешивания	180
11.6. Расчет нерекурсивных цифровых фильтров методом разложения АЧХ в ряд Фурье	184
11.7. Реализация нерекурсивных цифровых фильтров	186
Контрольные вопросы и упражнения	188
Глава 12. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ	189
12.1. Основные понятия спектрального анализа	189
12.2. Коррелограммный метод оценивания спектральной плотности мощности	191
12.3. Периодограммный метод оценивания спектральной плотности мощности	193
12.4. Вычисление ДПФ и алгоритмы БПФ	195
12.5. Алгоритм БПФ с прореживанием по времени	197
12.6. Алгоритмы БПФ с прореживанием по частоте	201
Контрольные вопросы и упражнения	204
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	205
ПРИЛОЖЕНИЯ	
Приложение 1. Передаточные функции нормированных ФНЧ	206
Приложение 2. Характеристики оконных функций	207
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	209

Учебное издание

ВАДУТОВ Олег Самигулович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *доктор технических наук,
профессор Г.С. Евтушенко*


Компьютерная верстка *О.С. Вадутов*

Подписано к печати 20.10.2011. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 11,86. Уч.-изд.л. 10,74.
Заказ 1524-11. Тираж 40 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru