

1 Передискретизация

Пусть сигнал $y(n)$ является передискретизованным сигналом $x(n)$, так что их частоты дискретизации f_y и f_x связаны соотношением

$$f_y = \frac{P}{M} f_x. \quad (1.1)$$

Процесс дискретизации условно можно разделить на 2 шага: интерполяция и прореживание (децимация).

Если $M = 1$, то передискретизация включает в себя только процесс интерполяции. Под интерполяцией понимается добавление к сигналу $P - 1$ нулевых отсчетов между каждыми двумя соседними отсчетами оригинального сигнала с последующим сглаживанием получившегося сигнала, т.е. пропускание его через цифровой фильтр нижних частот (ФНЧ), чтобы нулевые отсчеты "усреднились" под остальные. При этом коэффициент пропускания такого фильтра нормируется не на 1, а на P (т.е. в полосе пропускания его АЧХ равна P). Структурная схема данного процесса приведена на Рис. 1.

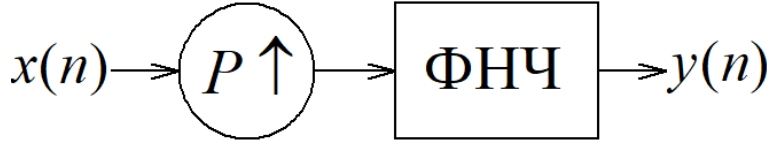


Рис. 1: Интерполяция

Если $P = 1$, то передискретизация включает в себя только прореживание сигнала, который заключается в том, что мы сначала пропускаем сигнал через цифровой фильтр нижних частот для устранения алиасинга, а затем выбираем каждый M -ый отсчет из отфильтрованного сигнала. Эти отсчеты и сформируют новый сигнал. Структурная схема изображена на Рис. 2.

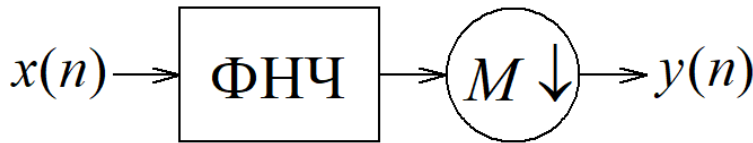


Рис. 2: Прореживание

Когда и P , и M не равны нулю, сначала выполняется интерполяция, а затем прореживание. При этом два последовательно соединенных ФНЧ, очевидно, можно объединить в один фильтр (см. Рис. 3). Частота среза такого фильтра берется меньшей из двух частот Найквиста сигналов $x(n)$ и $y(n)$, т.е. $f_c = \min\left(\frac{f_x}{2}, \frac{f_y}{2}\right)$.

Далее цифровой фильтр на структурных схемах будем представлять его передаточной функцией $H(z)$.

2 Полифазная фильтрация

Прямая реализация структурной схемы, изображенной на Рис. 3, является довольно сложной с вычислительной точки зрения, так как фильтр применяется к сигналу,

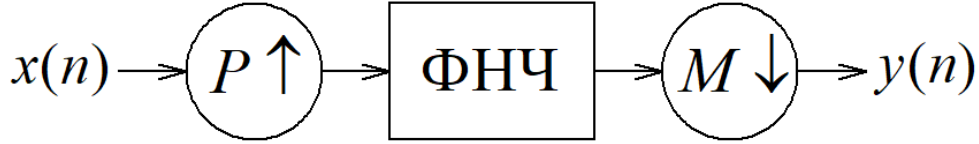


Рис. 3: Передискретизация

частота дискретизации которого равна $P \cdot f_x$. При этом сами дискретизации частоты f_x и f_y могут отличаться не так сильно, если числа P и M близки. Пусть, например, $f_x = 1010$ Гц, а $f_y = 1000$ Гц. Тогда $P = 100$, а $M = 101$. Получается, что для работы с относительно низкочастотными сигналами (порядка 1 кГц) нам придется использовать фильтр, работающий на частоте дискретизации целых 100 кГц! При этом реально использоваться будет лишь каждый 101-ый отсчет выходного сигнала фильтра, что уже говорит об избыточности расчетов. Оптимизировать вычисления помогают тождества Нобла (Noble's identities), которые представлены на Рис. 4 и Рис. 5 графически. Эти тождества декларируют равносильность двух попарных структурных схем для процессов интерполяции и прореживания и позволяют фактически поменять порядок действий в этой структурной схеме.

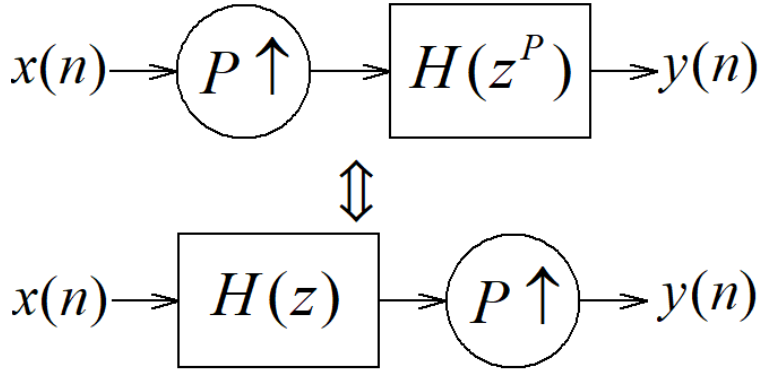


Рис. 4: Первое тождество Нобла

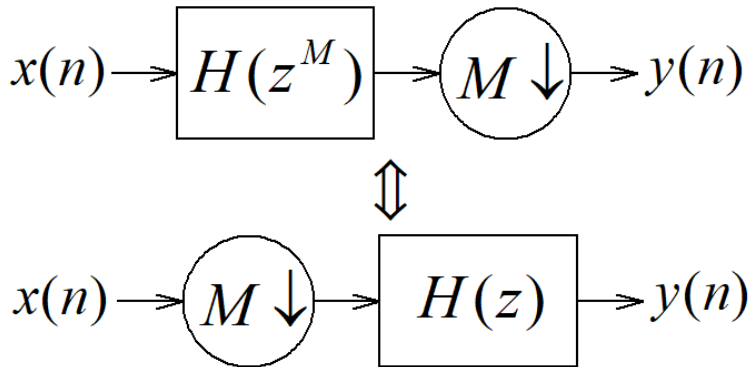


Рис. 5: Второе тождество Нобла

Тем не менее, чтобы поменять порядок действий в структурных схемах на Рис. 2, 3 в соответствии с тождествами на Рис. 4, 5 нужно представить передаточную функцию ФНЧ $H(z)$ в специальном виде. К счастью, для нерекурсивных фильтров это всегда

можно сделать. Напомним, что передаточную функцию нерекурсивного фильтра N -го порядка можно представить в виде

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}, \quad (2.1)$$

где $h(n)$, $n = 0, \dots, N-1$, — конечная импульсная характеристика нерекурсивного фильтра. Соотношение (2.1) очевидно можно представить в виде

$$H(z) = \sum_{k=0}^{P-1} H_k(z^P)z^{-k}, \quad (2.2)$$

где $H_k(z)$, $k = 0, \dots, P-1$, — передаточные функции рекурсивных фильтров порядка (под порядком здесь и далее будем понимать количество отсчетов импульсной характеристики) не выше, чем $N_k = \text{ceil}\left(\frac{N}{P}\right)$, где функция $\text{ceil}(\cdot)$ обозначает округление вверх до целого (т.е. дает наименьшее целое число, которое не меньше, чем ее аргумент).

2.1 Пример

Рассмотрим алгоритм полифазной фильтрации на примере линейной интерполяцию сигнала с увеличением частоты дискретизации сигнала в 4 раза. Линейная интерполяция соответствует сглаживающему фильтру с треугольной импульсной характеристикой. Для четных P в каузальном (причинном, физически реализуемом) виде она имеет вид

$$h(n) = P \cdot \left(1 - \left|1 - \frac{n+1}{P}\right|\right), \quad n = 0, \dots, 2P-2. \quad (2.3)$$

Выпишем импульсную характеристику (2.3) в виде массива ее ненулевых значений для $P = 4$:

$$h = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right). \quad (2.4)$$

Передаточная функция имеет вид

$$H(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} + z^{-3} + \frac{3}{4}z^{-4} + \frac{1}{2}z^{-5} + \frac{1}{4}z^{-6}, \quad (2.5)$$

Порядок $N = 7$. Тогда разбиение (2.2) даст нам 4 фильтров порядка не больше 2, передаточные функции которых имеют вид

$$\begin{aligned} H_0(z) &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}z^{-1}, \\ H_1(z) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}, \\ H_2(z) &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}z^{-1}, \\ H_3(z) &= 1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Напомним, что здесь мы понимали под порядком фильтра количество отсчетов импульсной характеристики. Если понимать под порядком фильтра количество полюсов с учетом их кратности для представления фильтра с минимальной задержкой, то это порядок будет на 1 больше. В нашем примере 3-ий фильтр получился повторителем,

что соответствует нулевому порядку, если считать по полюсам и первому порядку, если считать по количеству отсчетов импульсной характеристики.

Теперь используя разбиение (2.2) и первое тождество Нобла, поменяем порядок действий в структурной схеме на Рис. 1. Тогда получим схему, изображенную на Рис. 6. Напомним, что z^{-1} — это оператор задержки сигнала на 1 отсчет (такт цифрового сигнала), а z^{-k} — это оператор задержки сигнала на k отсчетов. Легко убедиться, что структурная схема на Рис. 7 функционально эквивалентна "аппаратной" схеме на Рис. 7.

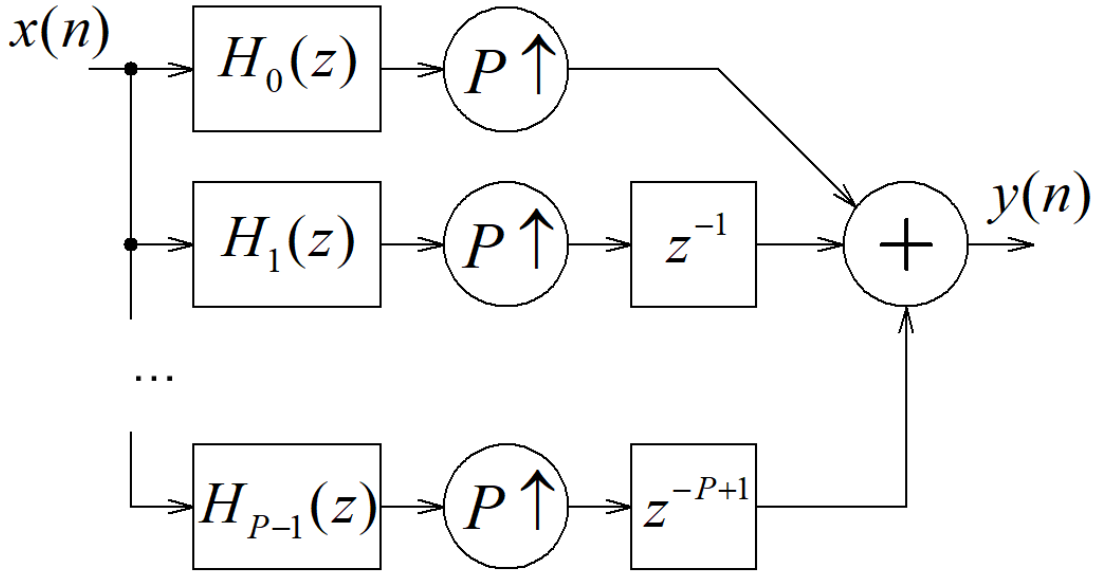


Рис. 6: Полифазная интерполяция

Мультиплексор на Рис. 7 переключается последовательно с частотой равной $P \cdot f_x = f_y$ (как если бы на его адресные входы был подключен счетчик, тактируемый частотой $P \cdot f_x = f_y$, и работающий с коэффициентом счета P), т.е. он последовательно (по очереди) передает каждый из своих входов на выход. Функционально мультиплексор здесь понимается в том смысле, что на его входы приходят не отдельные биты (как на цифровых микросхемах), а числа (некоторой фиксированной разрядности или в виде числа с плавающей точкой). При этом подразумевается, что значения на выходе фильтров (или на входах мультиплексора) запоминаются на весь цикл работы мультиплексора, т.е. обновляются только после того, как мультиплексор "перешел" к следующему после данного входа. При этом все фильтры работают на частоте f_x , т.е. на низкой частоте, а на высокой частоте $P \cdot f_x$ работает только сам мультиплексор, что выгодно отличает эту реализацию от Рис. 1.

Аналогично, используя второе тождество Нобла можно поменять порядок действий в схеме на Рис. 2, приведя ее к виду на Рис. 8. Схема на Рис. 8 в свою очередь также может быть представлена в виде, показанной на Рис. 9.

В схеме на Рис. 9 фильтры работают на частоте дискретизации $f_y = \frac{f_x}{M}$, а демультиплексор — на частоте f_x .

Осталось рассмотреть, как теперь упростить схему на Рис. 3, соответствующей случаю, когда и $P \neq 1$, и $M \neq 1$. В этом случае, если $f_x < f_y$ ($P > M$), то применяется

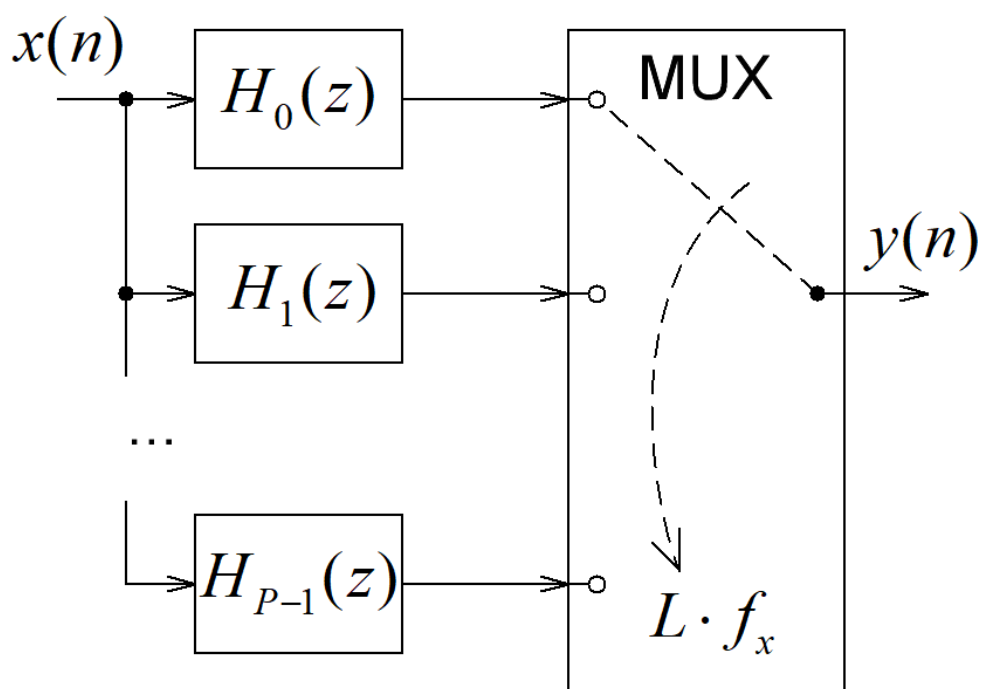


Рис. 7: "Аппаратная" схема полифазной интерполяции

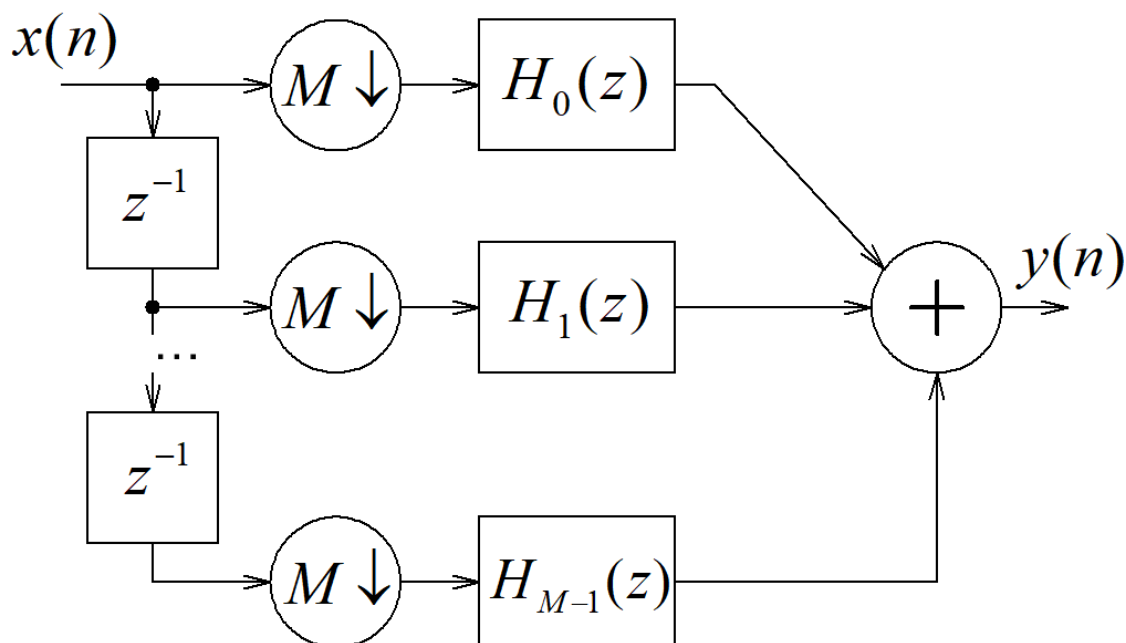


Рис. 8: Полифазная децимация

алгоритм полифазной интерполяции, т.е. левые два блока в схеме на Рис. 3 заменяются на схему на Рис. 7. В противном случае применяется алгоритм полифазной децимации, т.е. правые два блока на Рис. 3 заменяются на схему из Рис. 9. Это позволяет максимально упростить вычислительную сложность алгоритма передискретизации. Отметим также, что фильтры на Рис. 7 и 9 подключены параллельно. Это делает схему полифазной фильтрации даже еще более производительной при реализации, допускающей

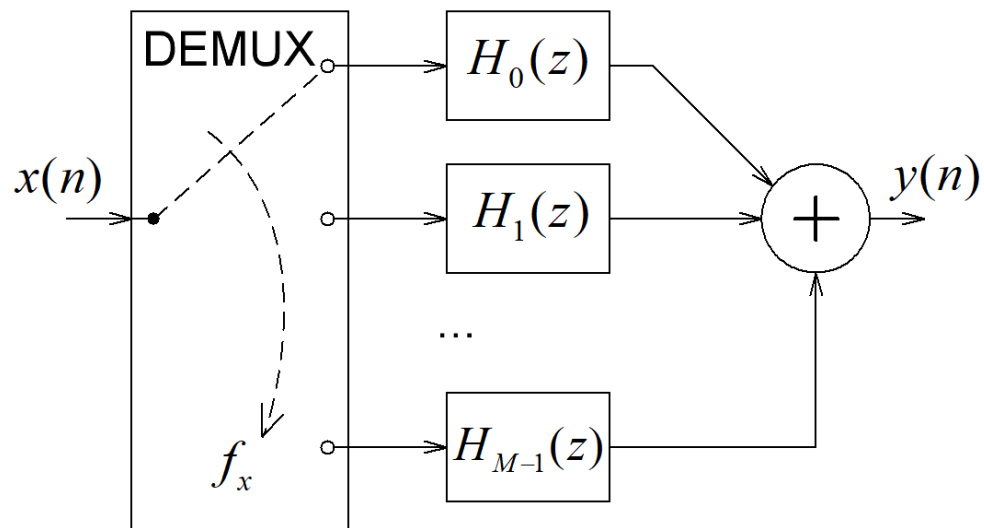


Рис. 9: "Аппаратная" схема полифазной децимации

параллельные вычисления (например, на ПЛИС).