Свойства Z преобразования

Прямое двухстороннее Z-преобразование задается формулой

$$X(z) = Z\left[x(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}.$$

Обратное Z-преобразование имеет вид

$$x(n) = Z^{-1}\left[X(z)\right] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz,$$

где C – обходимый против часовой стрелки контур в комплексной плоскости, охватывающий все полюса функции $X(z)$.

Основные свойства Z преобразования:

1) Линейность

$$Z[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] = \alpha X_1(z) + \beta X_2(z).$$

2) Смещение

$$Z[x(n-m)] = z^{-m}\left(X(z) + \sum_{r=-m}^{-1} x(r) z^{-r} \right),$$

$$Z[x(n+m)] = z^{m}\left(X(z) + \sum_{r=0}^{m-1} x(r) z^{-r} \right).$$

3) Изображение разностей

$$Z[\Delta x(n)] = (z-1)X(z) - z \cdot x(0),$$

$$Z[\nabla x(n)] = \frac{z-1}{z} X(z) - x(-1).$$

Здесь $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$ – прямая разность, а $\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$ – обратная разность.

4) Изображение суммы

$$Z\left[\sum_{m=0}^{n-1} x(m) \right] = \frac{1}{z-1} X(z).$$

5) Свертка

$$Z\left[\sum_{\nu=0}^{n} x_1(n-\nu) x_2(\nu) \right] = Z\left[\sum_{\nu=0}^{n} x_1(\nu) x_2(n-\nu) \right] = X_1(z) X_2(z).$$