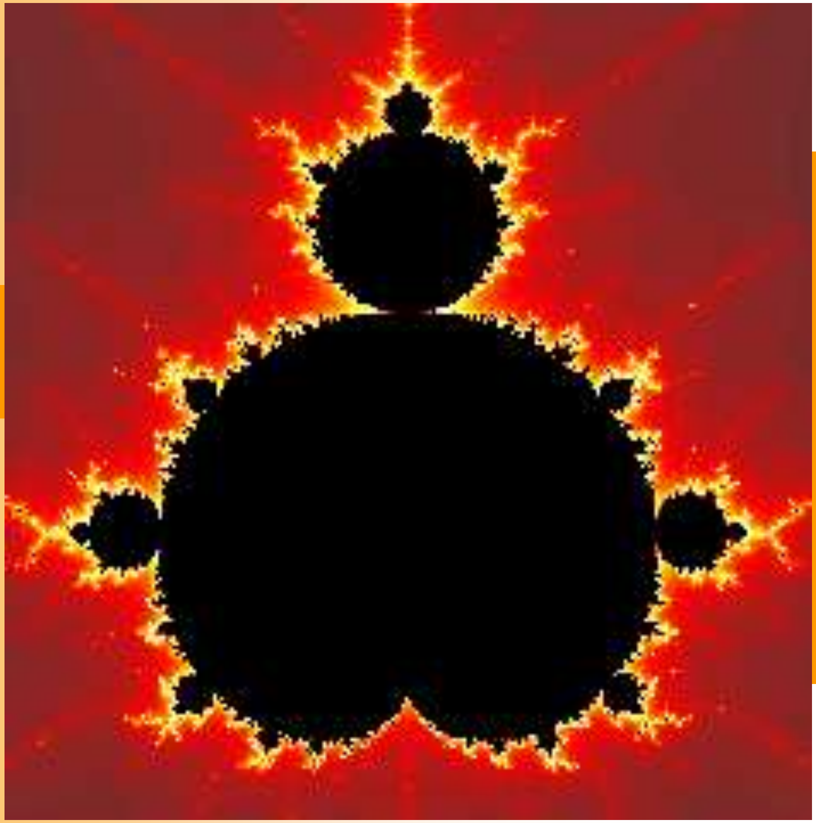


Фракталы

Определение

- **Fractus (лат.)** - *состоящий из фрагментов*
- **Фрактал** (лат. fractus — дробленый) — это бесконечно самоподобная геометрическая фигура, каждый фрагмент которой повторяется при уменьшении масштаба.
- **Фрактал** — самоподобное множество нецелой размерности. Самоподобное множество — множество, представимое в виде объединения одинаковых непересекающихся подмножеств подобных исходному множеству.
- Определение фрактал было введено Бенуа Мандельбротом в книге **«Фрактальная геометрия природы»**

Классификация

- Геометрический
- Алгебраические
- Стохастические

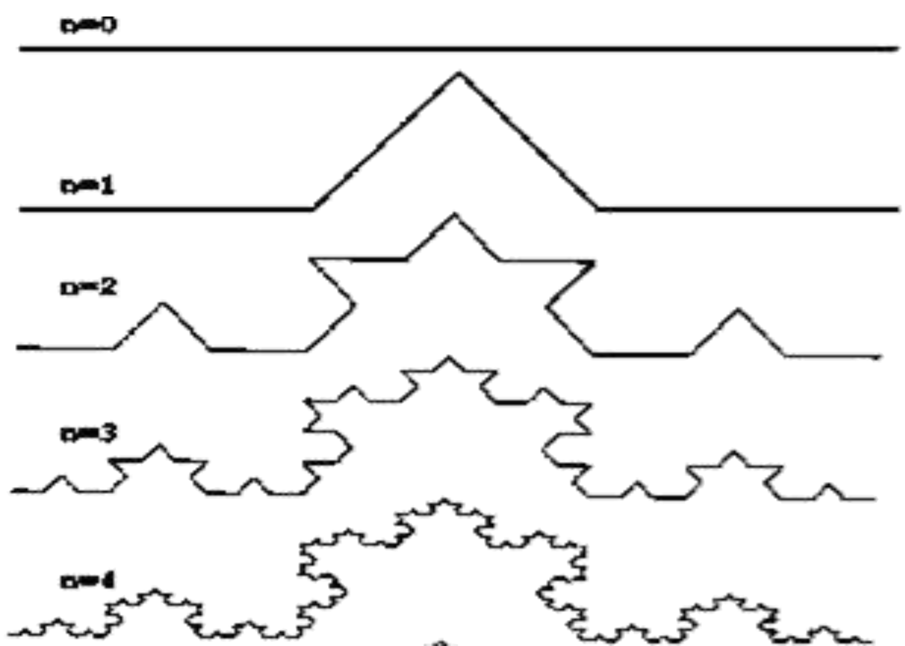
- Детерминированные (алгебраические и геометрические)
- Недетерминированные (стохастические)

Геометрические фракталы

- В двухмерном случае геометрические фракталы получают с помощью некоторой ломаной (или поверхности в трехмерном случае), называемой *генератором*. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих ломаную, заменяется на ломаную-генератор, в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры, получается геометрический фрактал.

Кривая Коха

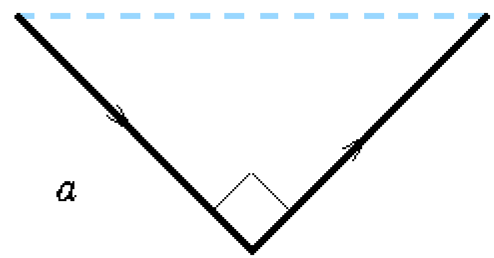
- Процесс построения: берём единичный отрезок, разделяем на три равные части и заменяем средний интервал равносторонним треугольником без этого сегмента. В результате образуется ломаная, состоящая из четырех звеньев длины 1/3. На следующем шаге повторяем операцию для каждого из четырёх получившихся звеньев и т. д…

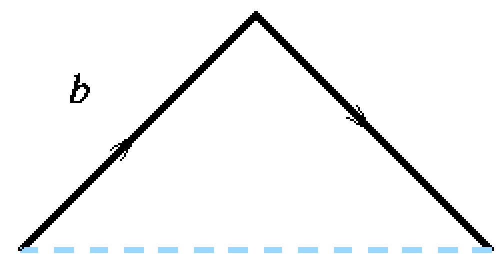


“Дракон" Хартера-Хейтуэя

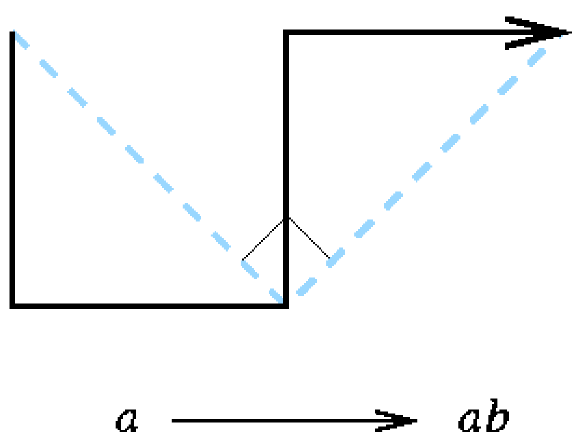
- *V*={*a*,*b*}
- *w*=*a*
- *p1*: *a*->*ab*
- *p2*: *b*->*ab*

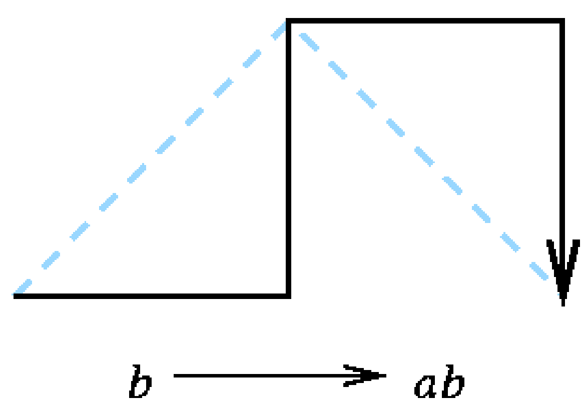
- Каждое поколение кривой удваивается на каждом этапе: *a*, *ab*, *abab*, *abababab*
- *a* и *b* можно поставить в соответствие фигуры:



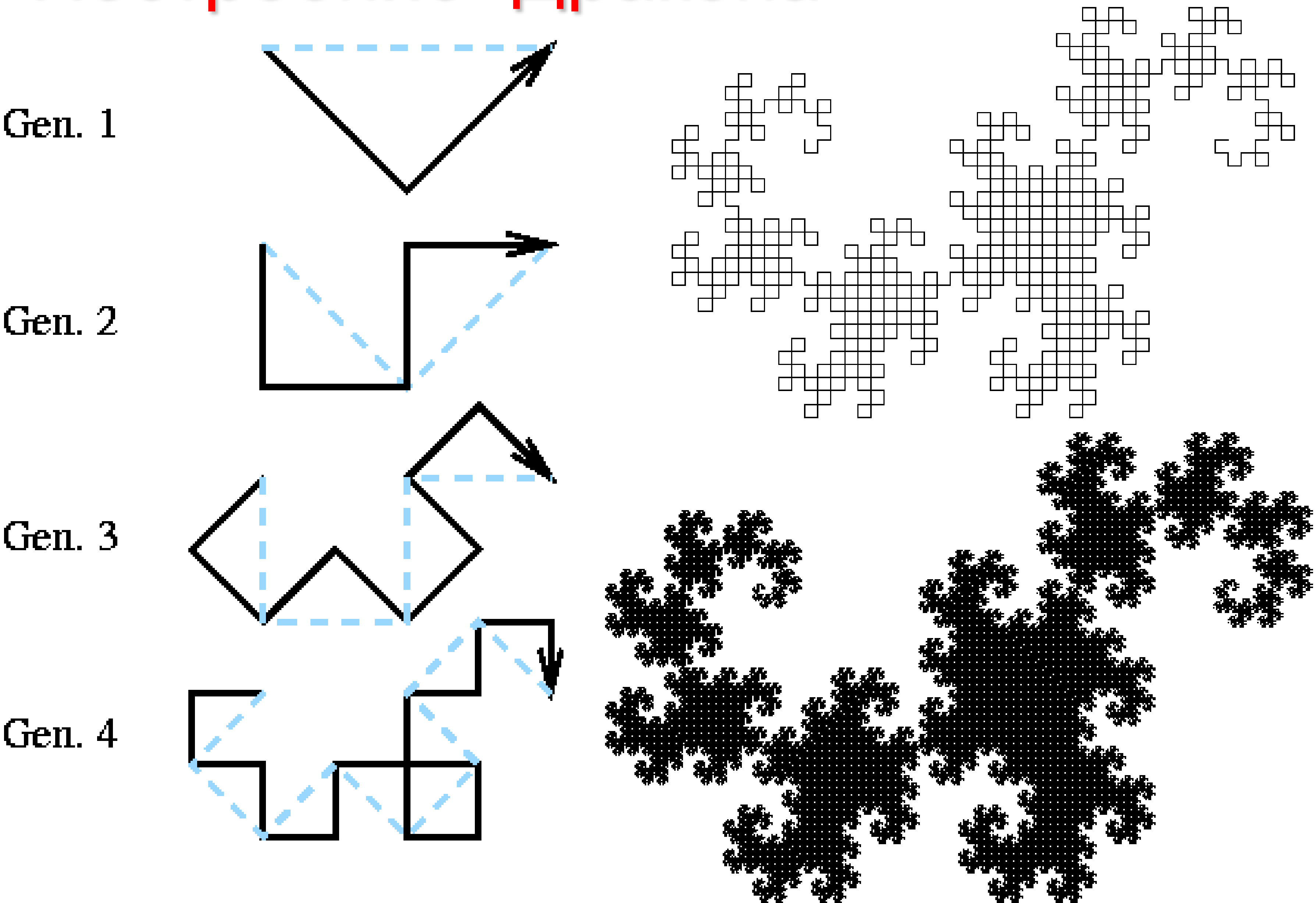


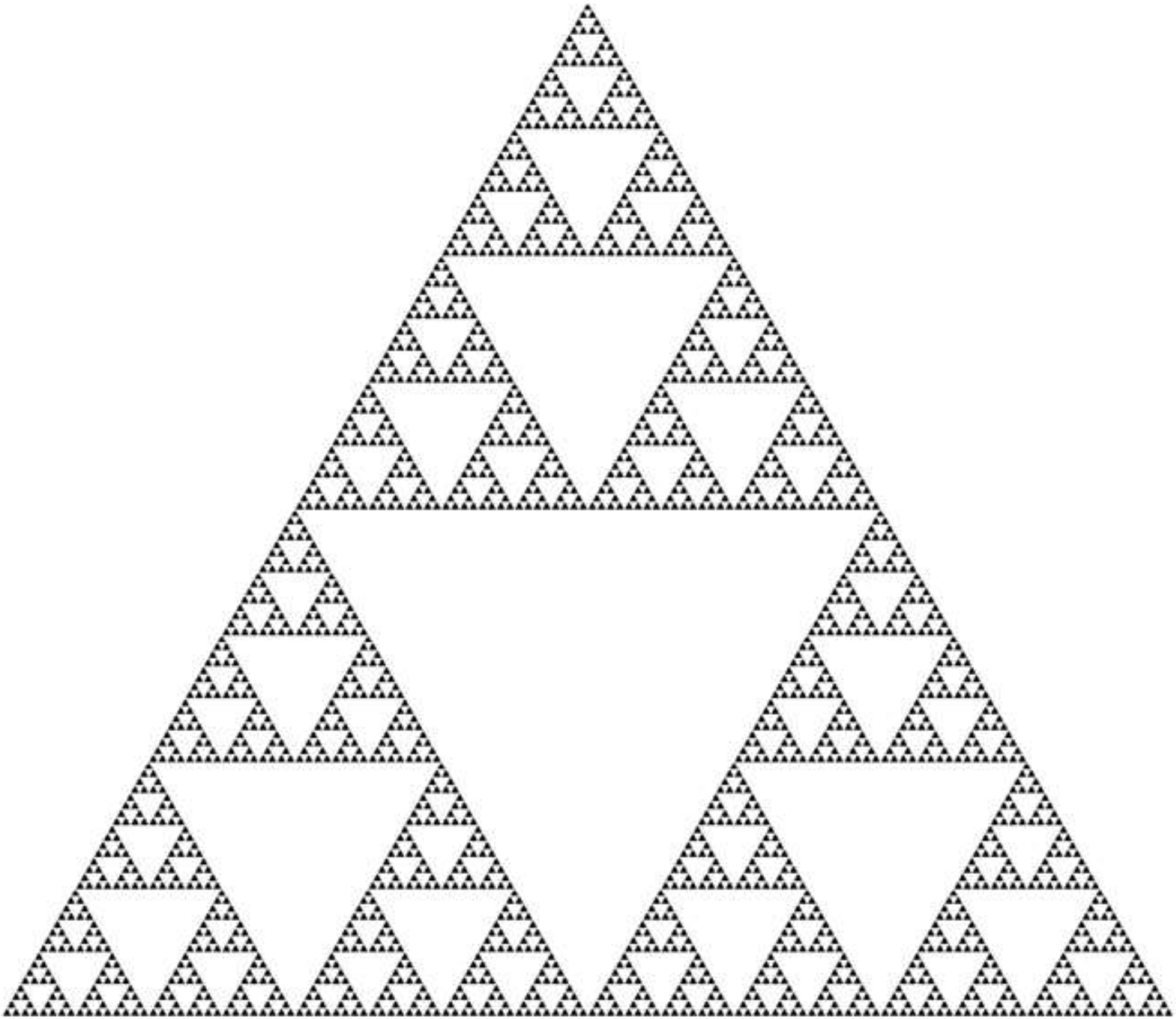
- Тогда преобразования *p1* и *p2*:





Построение “Дракона"

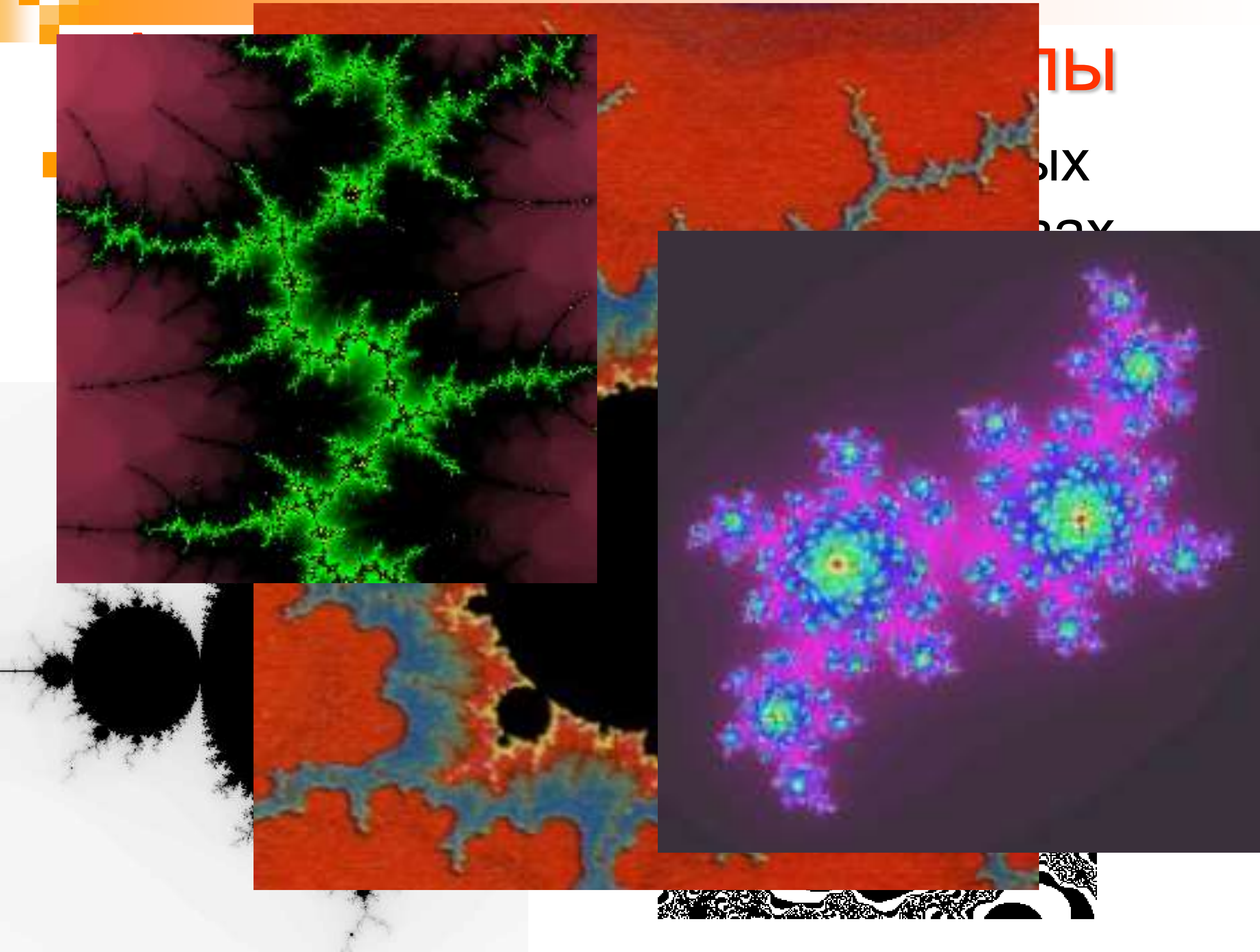




…лы

…ых

…ах



Множество Мандельброта

- В математике **множество Мандельброта** — это фрактал, определённый как множество точек на комплексной плоскости, для которых итеративная последовательность

$$z_0 = 0$$

$$z_{n+1} = {z_n}^2 + c$$

- не уходит в бесконечность.

Комплексные числа

- Комплексные числа — расширение множества вещественных чисел, обычно обозначается **C**. Любое комплексное число может быть представлено как формальная сумма $x + iy$, где x и y — вещественные числа, i — <u>**мнимая единица**</u>, то есть число, удовлетворяющее уравнению $i^2 = -1$.
- Комплексные числа образуют алгебраически замкнутое поле — это означает, что многочлен степени ***n*** с комплексными коэффициентами имеет ровно ***n*** комплексных корней

Операции над комплексными числами

- Формально, комплексное число z — это упорядоченная пара вещественных чисел (x, y) с введёнными на них следующим образом операциями сложения и умножения:
- $(x, y)+(x', y')=(x+x', y+y')$
- $(x, y)\cdot(x', y')=(x\cdot x'-y\cdot y', x\cdot y'+y\cdot x')$
- Вещественные числа представлены в этой модели парами вида (x, 0), причём операции с такими парами согласованы с обычными сложением и умножением вещественных чисел. Мнимая единица в такой системе представляется парой (0, 1)

Построение множества Мандельброта

$$c = x + i \cdot y$$

$$Z_0 = 0$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_0^2 + c \\ &= x + iy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= Z_1^2 + c \\ &= (x+iy)^2 + x + iy \\ &= x^2 + 2ixy - y^2 + x + iy \\ &= x^2 - y^2 + x + (2xy + y)i \end{aligned}$$

- Если переформулировать эти выражения в виде итеративной последовательности значений координат комплексной плоскости ***x*** и ***y***, т. е. заменив ***Z***$\boldsymbol{Z_n}$ на $\boldsymbol{x_n + i * y_n}$, а ***c*** на ***p+i*q***, мы получим:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= {x_n}^2 - {y_n}^2 + p \\ y_{n+1} &= 2x_n y_n + q \end{aligned} \qquad (*)$$

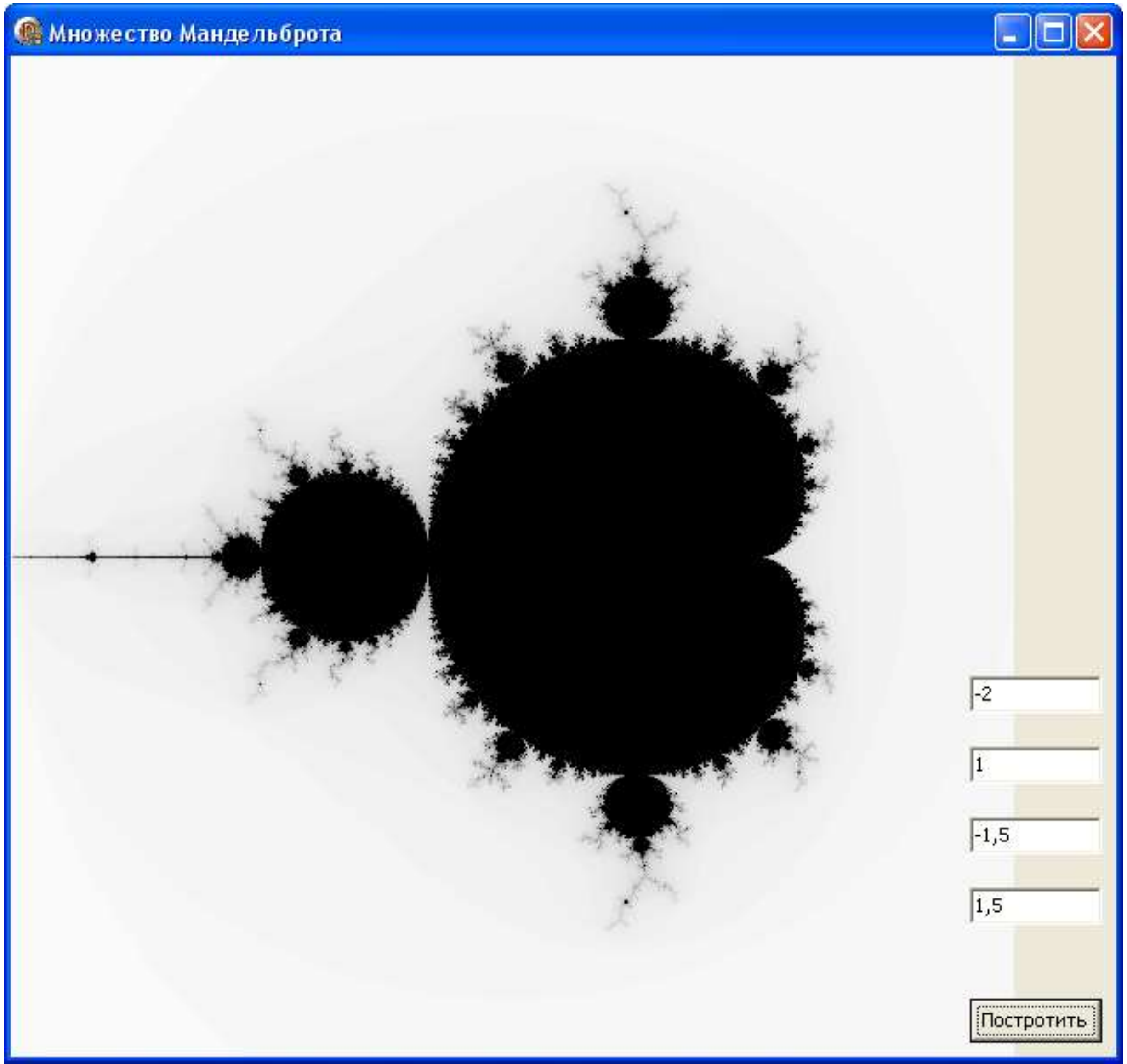
Построение множества Мандельброта (2)

- Для каждого пиксела, отображающего некоторую точку с координатами ***(a, b)***, проводят серию вычислений по формулам ***(*)***. При этом исходные значения x_0 и y_0 для каждой новой точки ***(a, b)*** изначально всегда равны нулю. На каждом шаге, кроме очередных значений x_{i+1} и y_{i+1}, вычисляют величину $r_i=sqrt(x_i^2+y_i^2)$. Эта величина представляет собой не что иное, как расстояние от точки (x_i, y_i) до начала координат.
- Точка ***(a, b)*** считается принадлежащей множеству Мандельброта, если она в процессе вычислений никогда не удаляется от начала координат на критическое расстояние, большее или равное ***<u>двум</u>***. Такой пиксел окрашивается в черный цвет. Для всех прочих значений ***a*** и ***b*** величина r_i может переходить запретный рубеж в две единицы за разное количество шагов. В зависимости от этого, точку окрашивают в соответствующий цвет.

Ф-ция проверки принадлежности точки к множеству Мандельброта

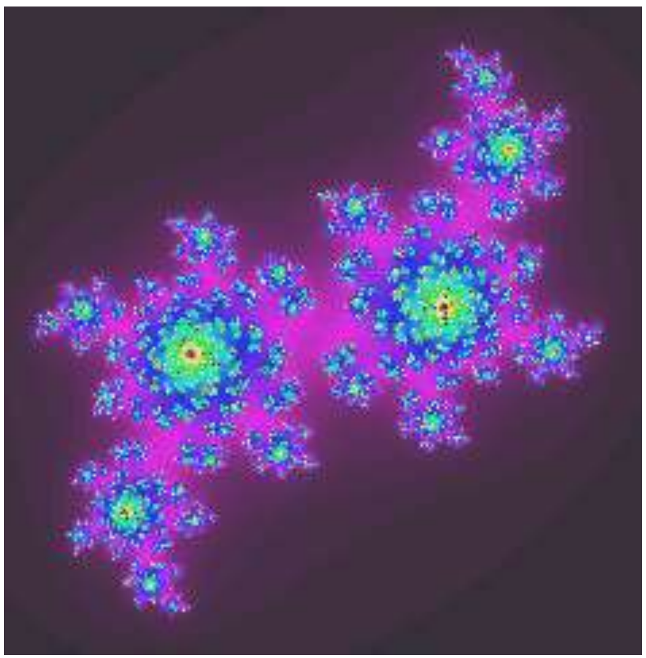
- function Mandelbrot(a, b: Real): Integer;
- var xy, x, y, x2, y2, r: real;   k: Integer;
- begin
- x := 0; y := 0; r := 0;
- k := 100; //счетчик числа итераций
- While (r<4) And (k>0) do
-   begin
-   X2 := x * x;
-   Y2 := y * y;
-   xy := x * y;
-   x := X2 - Y2 + a;
-   y := 2 * xy + b;
-   r := X2 + Y2;
-   dec(k);
-   end;
- k := Round((k / 100) * 255);
- Result := RGB(k, k, k);
- End;

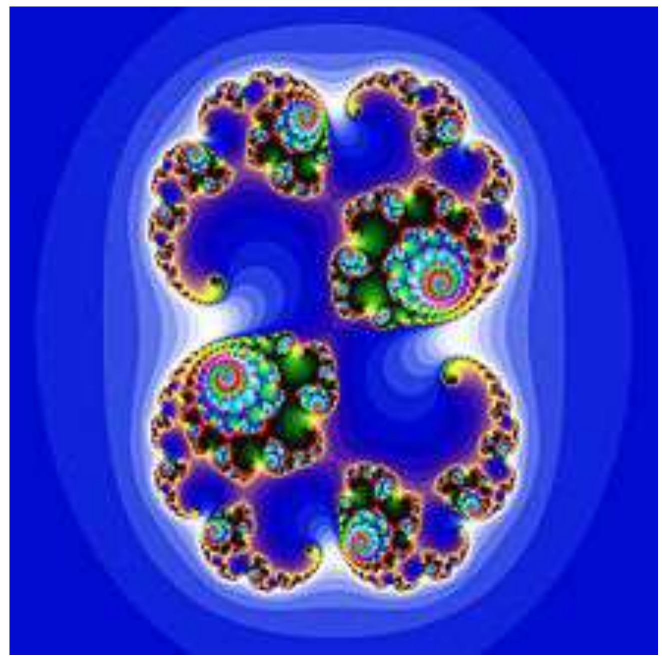
Множество Мандельброта



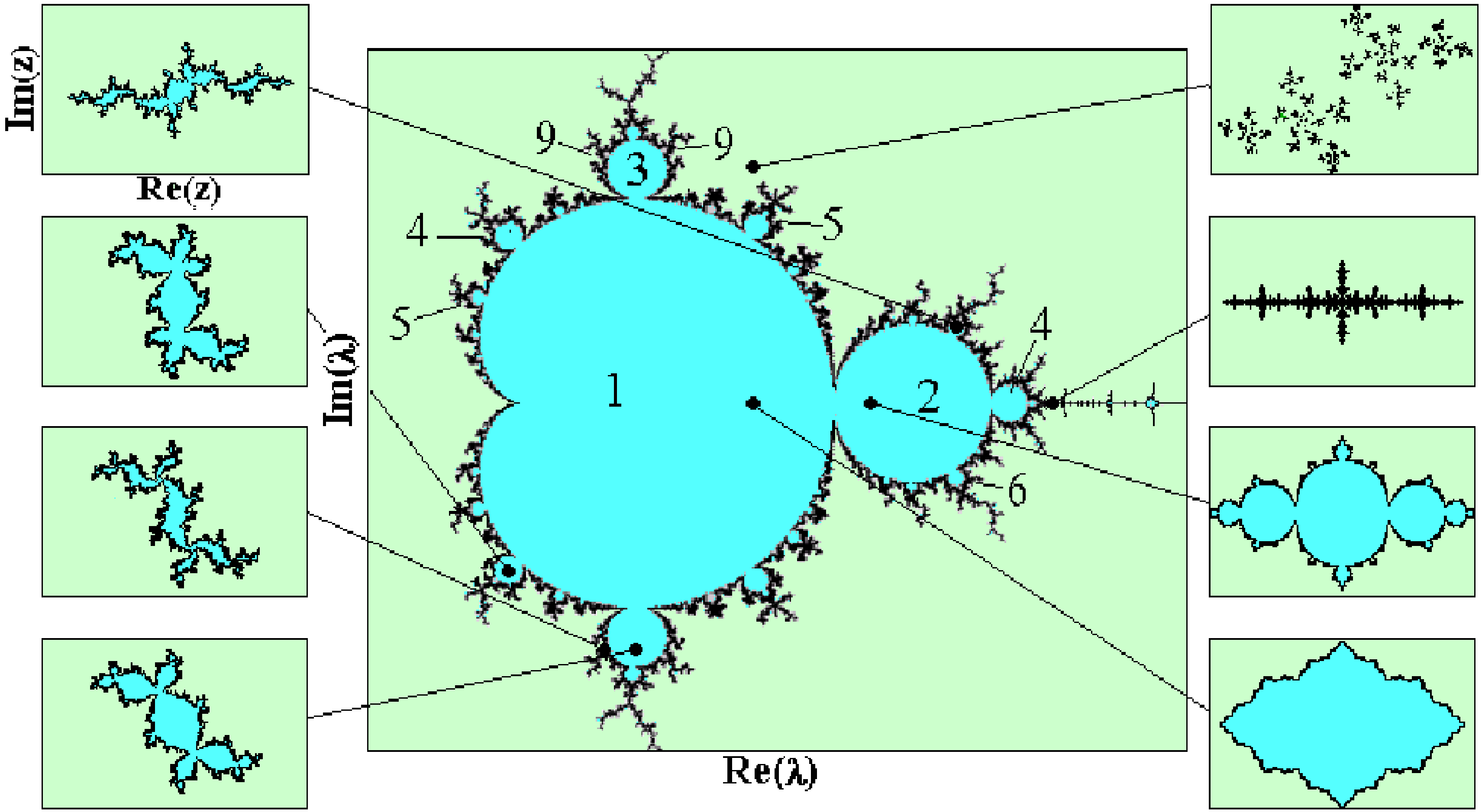
Множество Жюлиа

Если взять какую-нибудь точку из множества Мандельброта (другими словами, взять какое-то определенное значение ***C***) и повторить процесс вычислений по этой итерационной формуле, но начальное значение ***Z*** брать не (0, 0), а из диапазона значений (то есть, также как для рисования множества Мандельброта мы меняли ***C***, теперь меняем ***Z***), то получим множество Жюлиа.





Связь множества Мандельброта и множества Жюлиа



Стохастические фракталы

- получаются в том случае, если в итерационном процессе случайным образом менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные - несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д.

Системы итерируемых функций

- IFS представляет собой систему функций из некоторого фиксированного класса функций, отображающих одно многомерное множество на другое. Наиболее простая IFS состоит из аффинных преобразований плоскости:

$X' = A*X + B*Y + C$

$Y' = D*X + E*Y + F$

- закодировав какое-то изображение двумя аффинными преобразованиями, мы однозначно определяем его с помощью 12-ти коэффициентов. Если теперь задаться какой-либо начальной точкой (например X=0 Y=0) и запустить итерационный процесс, то мы после первой итерации получим две точки, после второй - четыре, после третьей - восемь и т.д. Через несколько десятков итераций совокупность полученных точек будет описывать закодированное изображение.