



Компьютерная геометрия

Компьютерная геометрия есть математический аппарат, положенный в основу компьютерной графики.

Двухмерные преобразования

- Координаты точек задаются вектором $[x, y]$
- Перенос на плоскости

$$[x^* \quad y^*] = [x \quad y] + [a \quad b] = [x+a \quad y+b]$$

- Умножение на матрицу общего вида

$$[x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [(ax+cy) \quad (bx+dy)] = [x^* \quad y^*]$$

Масштабирование, отражение, сдвиг

- Масштабирование

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = [(ax+0y)(0x+dy)] = [ax \quad dy] = [x^* \quad y^*]$$

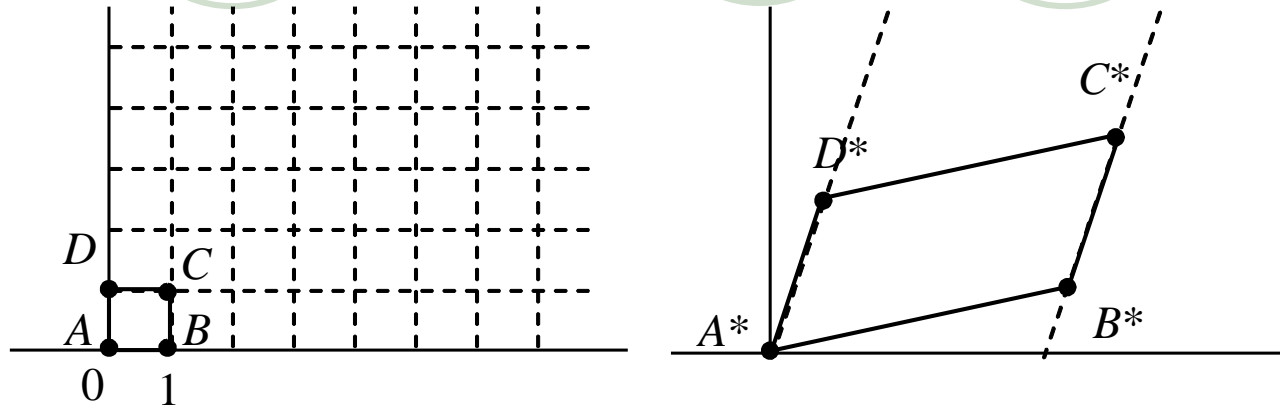
- Отражение

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [(-1x+0y)(0x+1y)] = [-x \quad y] = [x^* \quad y^*]$$

- Сдвиг

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad (bx+y)] = [x^* \quad y^*]$$

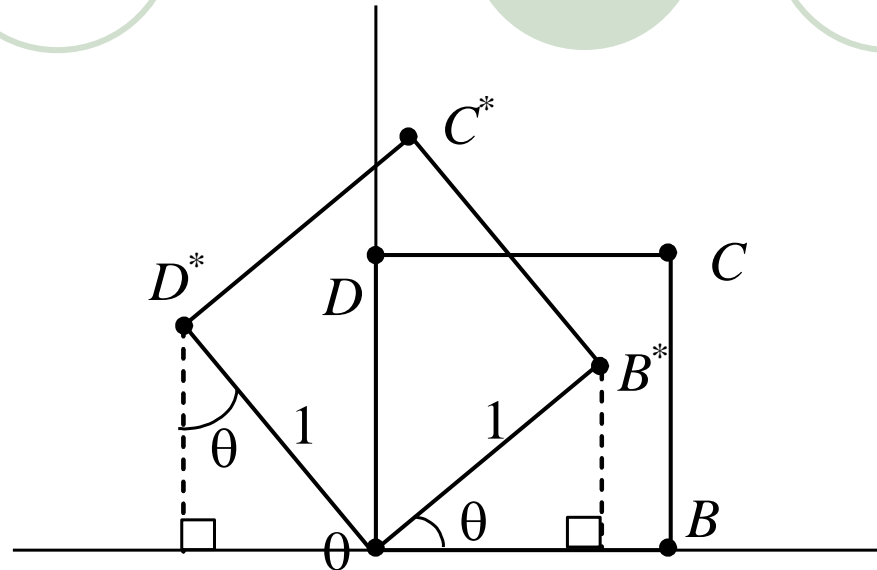
Преобразование единичного квадрата



$$\begin{array}{l} A \rightarrow \\ B \rightarrow \\ C \rightarrow \\ D \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \\ a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow A^* \\ \leftarrow B^* \\ \leftarrow C^* \\ \leftarrow D^* \end{array}$$

- Коэф. матрицы преобразования эквивалентны координатам B^* и D^*

Поворот единичного квадрата



- Координаты B^* : $x^* = (1)\cos \theta$ и $y^* = (1)\sin \theta$
- Координаты D^* : $x^* = (-1)\sin \theta$ и $y^* = (1)\cos \theta$

Матрица преобразований:
$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Однородные координаты

- Преобразования переноса, масштабирования и поворота в матричной форме $P^* = P + T$, $P^* = P^* S$, $P^* = P^* R$ целесообразно унифицировать!
- Переход в однородные координаты:

Точки задаются вектором $[x, y, 1]$

Матрица преобразований:
$$\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ m & n & s \end{bmatrix}$$

Нормализация

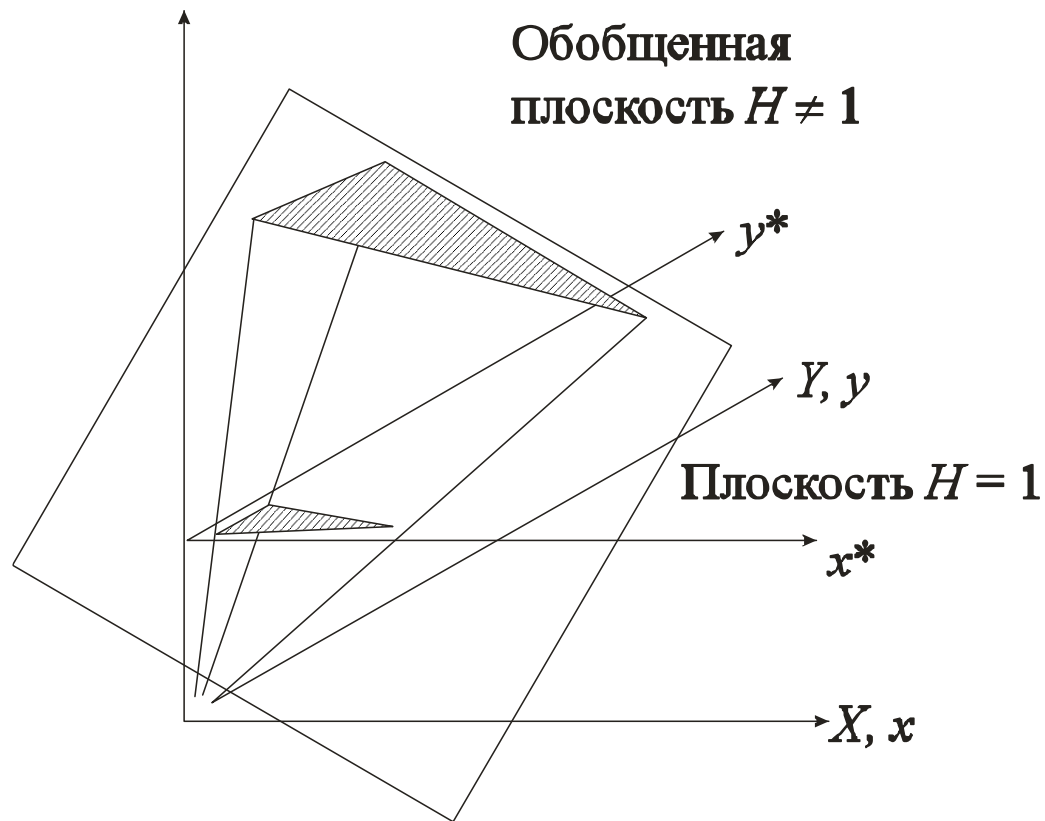
$$[X \quad Y \quad H] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ m & n & s \end{bmatrix}$$

- В общем случае $H \neq 1$, и преобразованные обычные координаты получаются за счет нормализации однородных координат, т. е.

$$x^* = \frac{X}{H} \quad y^* = \frac{Y}{H}$$

$$[x^* \quad y^* \quad 1] = \left[\frac{X}{H} \quad \frac{Y}{H} \quad 1 \right]$$

Геометрический смысл нормализации



Матрицы преобразований для однородных координат

● Перенос

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}$$

●

Поворот

$$\begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

● Масштаб

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

Комбинированные преобразования

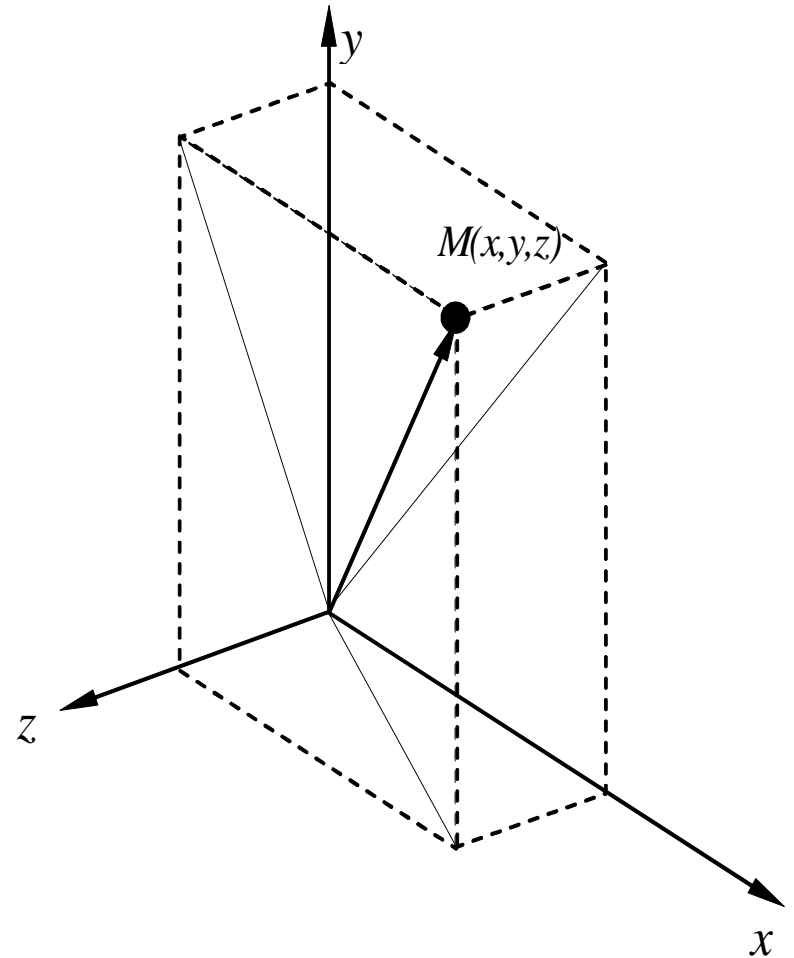
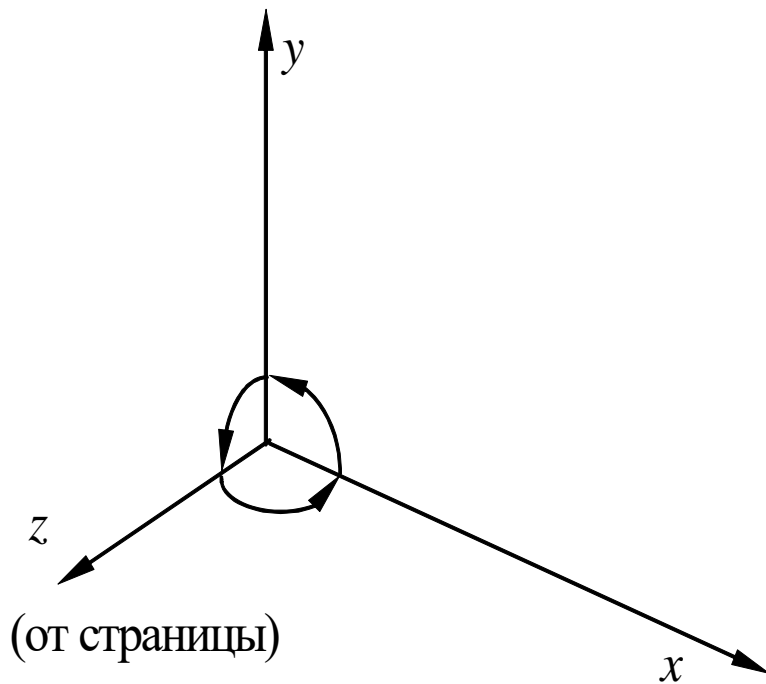
- В общем случае вращение около произвольной точки может быть выполнено путем переноса центра вращения в начало координат, поворотом относительно начала координат, а затем переносом точки вращения в исходное положение.

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y & H \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X & Y & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -m(\cos\theta - 1) + n(\sin\theta) & -m(\sin\theta) - n(\cos\theta - 1) & 1 \end{bmatrix}$$

Трёхмерные преобразования

- Правосторонняя система координат



Однородные координаты

- $[X, Y, Z, H] = [x, y, z, 1] * T$

- $T = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}$

- $[x^*, y^*, z^*, 1] = [\frac{X}{H}, \frac{Y}{H}, \frac{Z}{H}, 1]$, где $H \neq 1$, $H \neq 0$

Трёхмерный перенос

- $T(Dx, Dy, Dz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Dx & Dy & Dz & 1 \end{bmatrix}$

- **Трёхмерное изменение масштаба**

$$\begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{bmatrix}$$

Трёхмерный сдвиг

- $[x \ y \ z \ 1]^* \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ h & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x+yd+hz, \ bx+y+iz, \ cx+fy+z, \ 1].$

Трёхмерное вращение

- $R_z = \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- $R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Theta) & \sin(\Theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- $R_y = \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & 0 & -\sin(\Theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\Theta) & 0 & \cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Пример реализации:

//инициализация начальных данных

```
procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);  
begin
```

//задание начальных координат

```
  a[1,1]:=-50; a[1,2]:= 50;  a[1,3]:=0;  a[1,4]:=1;
```

```
  a[2,1]:= 50; a[2,2]:= 50;  a[2,3]:=0;  a[2,4]:=1;
```

```
  a[7,1]:= 25; a[7,2]:=-25;  a[7,3]:=25;  a[7,4]:=1;
```

```
  a[8,1]:=-25; a[8,2]:=-25;  a[8,3]:=25;  a[8,4]:=1;
```

//задание матрицы преобразования

```
  m[1,1]:=1;  m[1,2]:=0; m[1,3]:=0;  m[1,4]:=0;
```

```
  m[2,1]:=0;  m[2,2]:=1; m[2,3]:=0;  m[2,4]:=0;
```

```
  m[3,1]:=0;  m[3,2]:=0; m[3,3]:=1;  m[3,4]:=0;
```

```
  m[4,1]:=0;  m[4,2]:=0; m[4,3]:=0;  m[4,4]:=1;
```

```
end;
```


Обработчик нажатия кнопки

```
procedure TForm1.RotateYExecute(Sender: TObject);
begin
  if XAngle.Text = " " then alfa := 0.2
  else alfa := StrToInt(YAngle.Text)*2*Pi/360;
  m[1,1]:=cos(alfa); m[1,2]:=0; m[1,3]:=-sin(alfa); m[1,4]:=0;
  m[2,1]:=0;      m[2,2]:=1; m[2,3]:=0;      m[2,4]:=0;
  m[3,1]:=sin(alfa); m[3,2]:=0; m[3,3]:=cos(alfa); m[3,4]:=0;
  m[4,1]:=0;      m[4,2]:=0; m[4,3]:=0;      m[4,4]:=1;
  ABCxM; //вызов подпрограммы умножения матриц
end;
```

Подпрограмма умножения матриц

```
Procedure TForm1.ABCxM;  
var i,j,k: Integer;  
    b: array[1..4] of real;  
begin  
    for j:=1 to 8 do  
        begin  
            for i:=1 to 4 do  
                b[i]:=a[j,1]*m[1,i]+a[j,2]*m[2,i]+a[j,3]*m[3,i]+a[j,4]*m[4,i];  
            for k:=1 to 4 do  
                a[j,k]:=b[k];  
            end;  
            //Не забудьте про нормализацию  
            PaintBox1.Repaint; // Принудительный вызов перерисовки  
        end;  
end;
```

Перерисовка (обработка onPaint)

```
procedure TForm1.PaintBox1Paint(Sender: TObject);
var x,y: Integer;
begin
x := PaintBox1.Width div 2;
y := PaintBox1.Height div 2;
with PaintBox1.Canvas do
begin
//оси
MoveTo(X,0);      LineTo(X,Height);
MoveTo(0,Y);      LineTo(Width,y);
//тело
MoveTo(X+round(a[1,1]),Y-round(a[1,2]));
LineTo(X+round(a[2,1]),round(Y-a[2,2]));
LineTo(X+round(a[3,1]),Y-round(a[3,2]));
MoveTo(X+round(a[4,1]),Y-round(a[4,2]));
LineTo(X+round(a[8,1]),Y-round(a[8,2]));
end;
end;
```