

Министерство образования Российской Федерации
Томский политехнический университет
Томский государственный университет
Московский институт электроники и математики

*B. Г. Багров, B. B. Белов,
B. H. Задорожный, A. Ю. Трифонов*

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Основы комплексного анализа
Элементы вариационного исчисления
и теории обобщенных функций

*Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в
качестве учебного пособия для студентов инженерно-физических
специальностей высших учебных заведений*

Томск 2002

УДК 581

Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. Методы математической физики: I. Основы комплексного анализа. II. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций. – Томск: Изд-во НТЛ, 2002.– 672 с.

Настоящее учебное пособие посвящено изложению методов теории функций комплексного переменного, основ вариационного исчисления и теории обобщенных функций. Оно содержит теоретический материал в объеме, предусмотренным ныне действующей программой курса высшей математики для инженерно-физических и физических специальностей университетов. Теоретический курс дополнен индивидуальными заданиями (30 вариантов) для самостоятельного решения по разделу «Теория функций комплексного переменного» курса «Высшая математика и математическая физика».

Пособие предназначено для студентов и аспирантов физических и инженерно-физических специальностей.

Рецензенты: академик РАН, профессор В.П. Маслов

кафедра математики физического факультета
Московского государственного университета

Содержание

От авторов	4
Часть I. Основы комплексного анализа	7
Глава 1. Введение в теорию функций комплексного переменного	7
1. Комплексные числа и действия над ними	7
2. Множества на комплексной плоскости	14
3. Последовательности комплексных чисел. Бесконечно удаленная точка	16
4. Ряды комплексных чисел	19
5. Понятие функции комплексного переменного. Непрерывность	25
6. Степенные ряды комплексных чисел	27
7. Элементарные функции комплексного переменного	28
7.1. Степенная функция	29
7.2. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции .	30
7.3. Логарифмическая функция	34
7.4. Общая степенная функция	36
7.5. Обратные тригонометрические функции	37
8. Дифференцирование функций комплексного переменного	38
9. Гармонические функции	44
10. Кривые в комплексной плоскости	49
11. Интегралы от функций комплексного переменного	51
12. Теорема Коши	54
13. Интеграл Коши	60
14. Интеграл типа Коши	63
15. Некоторые следствия из интегральной формулы Коши	65
Глава 2. Теория вычетов и ее приложения	68
16. Ряд Тейлора	68
17. Ряд Лорана	73
18. Изолированные особые точки аналитических функций	85
18.1. Классификация изолированных особых точек	85
18.2. Устранимая особая точка	87
18.3. Полюс	88
18.4. Существенно особая точка	90
18.5. Бесконечно удаленная точка	92
19. Аналитическое продолжение	94
20. Римановы поверхности	100
21. Теория вычетов	102
22. Логарифмический вычет и его приложения	113
22.1. Логарифмический вычет	113
22.2. Принцип аргумента	115
22.3. Основная теорема алгебры	117

23. Приложения теории вычетов	118
23.1. Интегралы, содержащие рациональные функции от тригонометрических функций	118
23.2. Несобственные контурные интегралы	121
23.3. Несобственные интегралы от дробно-рациональных функций	125
23.4. Несобственные интегралы от осциллирующих функций	128
23.5. Интегралы Бромвича–Вагнера	129
23.6. Несобственные интегралы типа интегралов Эйлера	132
23.7. Другие несобственные интегралы	142
23.8. Представление функций контурными интегралами	149
Глава 3. Введение в теорию конформных отображений	152
24. Геометрический смысл производной аналитической функции	152
24.1. Геометрический смысл аргумента производной	153
24.2. Геометрический смысл модуля производной	153
24.3. Понятие конформного отображения	155
25. Линейная функция	156
26. Инверсия	158
27. Дробно-линейная функция	161
28. Степенные функции	167
29. Показательная и логарифмическая функции	171
30. Функция Жуковского	174
31. Тригонометрические и гиперболические функции	177
32. Основная задача теории конформных отображений	180
33. Интеграл Кристоффеля–Шварца	190
Глава 4. Элементы операционного исчисления	193
34. Преобразование Лапласа	193
35. Изображения простейших функций	197
36. Свойства преобразования Лапласа	199
37. Приложения операционного исчисления	215
37.1. Интегрирование линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	215
37.2. Интегрирование линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами	216
37.3. Интеграл Диамеля	219
37.4. Интегрирование линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами	221
37.5. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	223
37.6. Вычисление несобственных интегралов	224
38. Гамма-функция	225
39. Обобщенные оригиналы	236
40. Бета-функция	243
41. Биномиальные коэффициенты	251
42. Интеграл ошибок	253
Задания для самоконтроля	254
Теоретические вопросы	254
Индивидуальные задания	258

<i>Содержание</i>	5
Список литературы	260

22 октября 1900 года в Томском технологическом институте профессором В.Л. Некрасовым была прочитана первая лекция. Это была лекция по аналитической геометрии. Столетию этого события и посвящается настоящая книга.

ОТ АВТОРОВ

Еще одна книга по математической физике? Какую цель преследовали авторы, какие ставили задачи? Попробуем объяснить это.

Курс математической физики для физиков и инженеров в том или ином виде читается в вузах практически с начала прошлого века и имеет устойчивую традицию, вполне себя оправдавшую. В последние лет пятьдесят математическая физика оформилась в виде общеобразовательного курса, с которым студенты всех физических и инженерно-физических специальностей знакомятся на 2-3 году обучения. Этот курс вобрал в себя достаточно разнородные сведения из различных разделов математики, которые, с одной стороны, необходимы для завершения общего математического образования физиков и инженеров и являются базой для изучения специальных разделов математики и физики и, с другой стороны, выходят за рамки стандартных курсов математического анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений, линейной алгебры и аналитической геометрии, образуя математическую основу для изложения общеобразовательных курсов теоретической физики.

По отдельным разделам курса математической физики есть хорошие пособия различного уровня [11, ?, 23, 35, 39, 43, 44, 50, 51, 55] и др. (правда, большинство их издано не менее десяти лет назад). Но, как ни удивительно, нет книги, где бы под одной обложкой были изложены все (достаточно разнородные) разделы математики примерно на одном уровне строгости и в объемах, соответствующих содержанию того курса математической физики, который в последние десятилетия сформировался в вузах. Существует несколько книг [21, 33, 40, 46, 47], написанных известными математиками, которые могли бы претендовать на такую роль. Однако книги [46] и [47] по своему уровню рас считаны на физиков-теоретиков – для инженеров и физиков-экспериментаторов содержание этих книг малоинтересно, а книги [21, 33, 40] изданы столь давно, что являются сейчас библиографической редкостью, да и уже не полностью охватывают содержание современного курса. Следует отметить высокие методические достоинства всех этих книг и, если имеется возможность ознакомиться с ними, также рекомендовать их читателю, изучающему математическую физику.

Целью авторов было собрать воедино весь материал, который составляет (в разных вузах в разном объеме) общеобразовательный курс математической физики. Объем каждой части всегда превышает необходимый минимум, представляя тем самым всем желающим возможность получить дополнительные

сведения, а преподавателю – свободу маневра.

Другой, на наш взгляд, важной особенностью предлагаемого издания является сопровождение каждой части курса набором задач с детальными решениями и задач (без решений) для самостоятельной работы. По некоторым отдельным частям курса есть неплохие сборники задач [5, 7, 12, 16, 18, 30, 32, 49, 61, 64], но не было осуществлено сопровождение задачами всего курса в едином комплексе. Задачи с решениями несут и самостоятельную нагрузку – они демонстрируют практические приемы математической техники. Задания для самоконтроля собраны в тридцать приблизительно равноценных вариантов. Использование типовых индивидуальных заданий отражает специфику методики преподавания в технических вузах, а подбор задач – особенности применения математического аппарата в курсах по специальности. Читателю мы рекомендуем прорешать один из вариантов типовых индивидуальных заданий, поскольку, как хорошо известно, «математику учат, решая задачи, а не наблюдая, как их решают другие» (М. Рид, Б. Саймон [46]).

Таким образом, авторы попытались собрать вместе все достаточно разнородное содержание общеобразовательного курса математической физики и дать к нему сопровождение в виде задач (с решениями и без них). Сколь успешно это нам удалось – судить читателю.

Сам характер курса и его место в системе высшего инженерно-технического образования обусловливают и некоторые другие его особенности. В курсе не следует искать новейших достижений математики: с научной точки зрения содержание курса – это математика, достаточно прочно вошедшая в повседневный обиход всех физиков и инженеров (ее новейшие разделы – это предмет спецкурсов последних лет обучения). Общеобразовательный курс математической физики имеет устоявшиеся и оправдавшие себя традиции методики его изложения и уровня математической строгости. Особо следует отметить уровень строгости изложения. Авторами принят так называемый физический уровень строгости (как правило, его персонифицированными носителями являются физики-теоретики и профессиональные математики, занимающиеся сугубо физическими проблемами). Такой уровень предполагает во всех случаях математически корректную постановку задач и методы доказательства в каждой конкретной проблеме, однако в некоторых общих вопросах (типа существования решений, априорного определения области сходимости ряда, который будет представлять еще не полученное решение) отступления от идеальной математической корректности допускаются (существование решений доказывается фактом их предъявления; область сходимости разложения определяется после его фактического получения и т.д.). Иногда этот уровень строгости вызывает раздражение у «чистых» профессиональных математиков. Однако он общепринят в физических и инженерных исследованиях и всегда, если уж возникает такая необходимость, может быть доведен до идеала (что, как правило, требует больших затрат времени и сил).

Учитывая различную математическую подготовку читателей, авторы включили в каждый раздел материал различной трудности, от простого до сложного. Материал повышенной сложности отмечен в тексте звездочкой или набран мелким шрифтом. Читатель, пропустивший этот материал, не будет испытывать затруднений в понимании последующего текста. Для удобства читателя, которого могут интересовать отдельные разделы книги, мы старались излагать материал одинаково подробно, вне зависимости от того, применялись ли используемые приемы в предыдущих разделах.

Авторы приложили максимум усилий для устранения опечаток и ошибок, неизбежных в работе такого объема, однако они отдают себе отчет в том, что отдельные ошибки и неточности в тексте могли остаться, и будут признательны всем, кто укажет на них.

В тексте пособия используется сплошная нумерация параграфов в каждой части. При нумерации формул, теорем и лемм из данной части первое число указывает номер параграфа, а второе – порядковый номер формулы, теоремы, леммы. При ссылке на формулы из другой части перед номером параграфа римскими цифрами обозначается номер части. При нумерации следствий из теорем и лемм первое число указывает номер параграфа, второе – номер теоремы или леммы в этом параграфе и третье – номер собственно следствия. Для обозначения определений и замечаний нами используются символы ♦ и ◊, соответственно.

Авторы признательны А.Р. Данилину, А.М. Ильину, М.Р. Куваеву, Б.Ф. Назарову и особенно прочитавшим рукопись в полном объеме (за исключением позднейших вставок) С.П. Гулько и В.В. Кравцову за критические замечания, которые стимулировали работу над рукописью. Авторы признательны также всем сотрудникам кафедры высшей математики и математической физики Томского политехнического университета и кафедры прикладной математики Московского института электроники и математики, кафедр теоретической физики и квантовой теории поля Томского государственного университета и особенно А.Г. Давтяну и В.Ф. Зальмежу за полезные обсуждения и замечания. Авторам удалось опробовать отдельные части книги в преподавании курса математической физики студентам ТПУ, ТГУ и МИЭМ. Мы благодарны всем студентам, особенно В.Д. Баанову, В.А. Долгушеву и Г.Н. Сережникову, обратившим наше внимание на неточности и опечатки.

ЧАСТЬ I

ОСНОВЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

Данный раздел посвящен теории функций комплексного переменного и основным методам этой теории, широко используемым в приложениях.

Этот раздел отнесен к курсу математической физики, поскольку сама теория функций комплексного аргумента и, в частности, центральный ее объект – аналитическая (голоморфная) функция, возникли и развивались на основании физических представлений, связанных с математическими моделями плоских течений жидкости и тепловых потоков. С другой стороны, математический аппарат этой теории позволил разработать новые методы построения и исследования решений задач математической физики в гидро- и аэродинамике, электростатике, теории упругости и квантовой теории.

Материал, включенный авторами в этот раздел курса, определяется следующими учебными целями. Первая – дать, по возможности, полное и строгое изложение основ комплексного анализа. Вторая – выработать практические навыки использования математического аппарата теории функций комплексного переменного на большом количестве подробно разобранных учебных примеров и задач. Третья – продемонстрировать работу ряда методов комплексного анализа, широко используемых в инженерных и физических расчетах (операционное исчисление, вычисление интегралов). И, наконец, – ознакомить с асимптотическими методами оценки интегралов, зависящих от параметра (метод Лапласа, метод стационарной фазы), играющими важную роль в современной теоретической физике.

ГЛАВА 1

Введение в теорию функций комплексного переменного

1. Комплексные числа и действия над ними

◆ Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел $z = (x, y)$ с определенными ниже операциями над ними. Первое число пары x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$; второе число пары y называется мнимой частью числа z и обозначается $y = \operatorname{Im} z$.

◊ Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

Множеству комплексных чисел z можно взаимно однозначно сопоставить точки плоскости (xOy) с декартовыми координатами x, y . Такую плоскость в дальнейшем будем называть комплексной плоскостью, ось абсцисс – действительной, а ось ординат – мнимой осью комплексной плоскости.

В свою очередь, каждой точке (x, y) соответствует вполне определенный вектор – радиус-вектор этой точки, а каждому радиус-вектору, лежащему в плоскости, – вполне определенная точка – его конец. Поэтому будем в дальнейшем комплексные числа представлять также в виде векторов на плоскости (рис. 1).

Геометрическое представление комплексных чисел показывает, что при сравнении двух комплексных чисел z_1 и z_2 понятия «больше» и «меньше» теряют смысл, и наглядно иллюстрирует, что

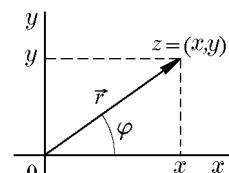


Рис. 1

равенство двух комплексных чисел $z_1 = z_2$ всегда подразумевает два равенства действительных чисел: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Операции над комплексными числами

1. Сложение

◆ Суммой комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число

$$z = (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \quad (1.1)$$

Данное определение сводит операции сложения комплексных чисел к операции сложения двух действительных чисел. Из определения вытекают следующие законы сложения:

- а) коммутативность $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$,
- б) ассоциативность $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

◊ Сложение допускает обратную операцию: для двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ можно найти такое число z , что $z_2 + z = z_1$. Такое число z называется разностью чисел z_1 и z_2 и обозначается символом $z = z_1 - z_2$. Очевидно, что

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2). \quad (1.2)$$

Можно показать, что существует единственное комплексное число $0 = (0, 0)$ такое, что для любого комплексного числа z выполнено равенство $z + 0 = z$.

Геометрический смысл операций сложения и вычитания комплексных чисел совершенно ясен: сумма и разность комплексных чисел z_1 и z_2 изображаются, соответственно, векторами, направленными по диагоналям параллелограмма, построенного на векторах z_1 и z_2 (рис. 2).

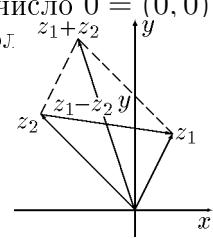


Рис. 2

2. Умножение

◆ Произведением комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число $z = z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2 = (x, y)$ такое, что

$$x = x_1 x_2 - y_1 y_2, \quad y = y_1 x_2 + y_2 x_1. \quad (1.3)$$

Из определения вытекают следующие законы умножения:

- a) коммутативность $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;
- б) ассоциативность $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$;
- в) дистрибутивность $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

Любое действительное число x можно считать комплексным числом $(x, 0)$. Точнее, подмножество комплексных чисел вида $(x, 0)$ взаимно однозначно соответствует множеству вещественных чисел (с сохранением арифметических операций). В дальнейшем будем отождествлять эти числа и записывать $x = (x, 0)$.

Умножение на действительную единицу $1 = (1, 0)$ не меняет комплексного числа $1 \cdot z = z$.

Комплексное число вида $z = (0, 1)$ называется мнимой единицей и будет обозначаться символом $i = (0, 1)$. Несложно убедиться, что $i \cdot i = i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Комплексное число вида $z = (0, y)$ называется чисто мнимым числом. Легко установить, что чисто мнимое число $(0, y)$ можно рассматривать как произведение мнимой единицы $i = (0, 1)$ и действительного числа $y = (y, 0)$, т.е. $(0, y) = iy$.

Мнимая единица позволяет придать прямой алгебраический смысл так называемой алгебраической форме записи комплексных чисел. Действительно,

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy. \quad (1.4)$$

В результате операции сложения и умножения комплексных чисел можно проводить по правилам алгебры многочленов, не обращаясь каждый раз непосредственно к определениям (1.1) и (1.3).

Пример 1.1. Найти $z_1 + z_2$ и $z_1 z_2$, если $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = -5 + 2i$.

Решение. Воспользовавшись алгебраической записью, получим

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (1 - 3i) + (-5 + 2i) = -4 - i, \\ z_1 z_2 &= (1 - 3i)(-5 + 2i) = -5 + 15i + 2i - 6i^2 = 1 + 17i. \end{aligned}$$

Для удобства работы с комплексными числами введем операцию комплексного сопряжения.

◆ Комплексное число w называется комплексно сопряженным числу $z = x + iy$, если $w = x - iy$, и обозначается $w = z^*$.

◊ В литературе для обозначения комплексно сопряженного числа иногда используется символ $\bar{z} = x - iy$.

Геометрически точки z и z^* симметричны относительно вещественной оси (см. рис. 3), причем $zz^* = x^2 + y^2$. Соотношение $z = z^*$ равносильно тому, что z – вещественное число.

Умножение также допускает обратную операцию. Пусть $z_2 \neq 0$, тогда можно найти такое число z , что

$$z_2 \cdot z = z_1. \quad (1.5)$$

Для этого, согласно (1.3), нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_2x - y_2y = x_1, \\ x_2y + y_2x = y_1. \end{cases} \quad (1.6)$$

◆ Число z (1.5) называется частным двух чисел z_1 и z_2 и обозначается $z = z_1/z_2$. Из системы (1.6) при условии $z_2 \neq 0$ получим

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.7)$$

◊ Без труда можно установить, что операция комплексного сопряжения удовлетворяет следующим свойствам:

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*, \quad (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*, \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}.$$

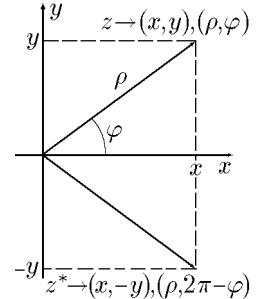


Рис. 3

Пример 1.2. Найти действительную и мнимую части числа

$$w = \frac{1 - 3i}{-1 + 2i}.$$

Решение. Домножим числитель и знаменатель дроби на число $-1 - 2i$, сопряженное знаменателю дроби, и получим

$$w = \frac{1 - 3i}{-1 + 2i} = \frac{(1 - 3i)(-1 - 2i)}{(-1 + 2i)(-1 - 2i)} = \frac{-1 + 3i - 2i - 6}{(-1)^2 + 2^2} = \frac{-7 + i}{5}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re} w = -\frac{7}{5}, \quad \operatorname{Im} w = \frac{1}{5}.$$

Наряду с алгебраической формой комплексных чисел (1.4) удобно использовать и так называемую тригонометрическую форму. Для этого напомним, что точку на плоскости можно задавать не только декартовыми, но и полярными координатами (ρ, φ) (см. рис. 1). Причем $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Подставив x , y в (1.2), получим

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.8)$$

Такая форма записи называется тригонометрической. Показательная форма записи комплексных чисел будет введена позднее [см. выражение (7.5)].

◆ Число ρ в (1.8) называют модулем, а φ – аргументом комплексного числа z и обозначают

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*} \geq 0, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Модуль комплексного числа z равен нулю тогда и только тогда, когда $z = 0$.

Непосредственно из рис. 2 видно, что для модуля комплексного числа z справедливы неравенства

$$|x| = |\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |y| = |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$$

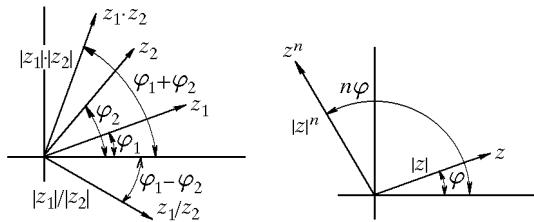


Рис. 4

Рис. 5

Поскольку длина стороны треугольника не больше суммы длин двух других его сторон и не меньше абсолютной величины их разности, то из рис. 3 с очевидностью следует неравенство

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (1.9)$$

Величина $\operatorname{Arg} z$ неоднозначна и определяется с точностью до любого слагаемого, кратного 2π . Наряду с символом $\operatorname{Arg} z$, обозначающим всю совокупность значений аргумента, будем употреблять символ $\arg z$, называемый главным значением аргумента и обозначающий одно какое-либо значение $\operatorname{Arg} z$, т.е. $\alpha \leq \arg z < \alpha + 2\pi$, $\alpha = \text{const}$. Величину $\arg z$, если не оговорено особо, будем рассматривать в пределах $0 \leq \arg z < 2\pi$, когда $\alpha = 0$ (или $-\pi \leq \arg z < \pi$, когда $\alpha = -\pi$). Тогда $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, где k – любое целое число, а из рис. 1 следует, что

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \varphi_0 & x > 0, y > 0 \\ \pi - \varphi_0 & x < 0, y > 0 \\ \pi + \varphi_0 & x < 0, y < 0 \\ 2\pi - \varphi_0 & x > 0, y < 0 \end{cases}, \quad \varphi_0 = \arccos \frac{|x|}{\rho}, \quad (1.10)$$

причем для всех действительных положительных чисел $\varphi = 0$, а для отрицательных $\varphi = \pi$. Соответственно, для чисто мнимых чисел, лежащих в верхней полуплоскости ($y > 0$), $\varphi = \pi/2$, а для лежащих в нижней полуплоскости ($y < 0$) $\varphi = 3\pi/2$.

Введение полярных координат и, соответственно, тригонометрической формы комплексных чисел (1.8) позволяет записать некоторые операции с комплексными числами в более удобной форме. Пусть $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. тогда равенство двух комплексных чисел $z_1 = z_2$ эквивалентно условиям

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \quad k = \overline{-\infty, \infty}.$$

Из соотношений (1.3) и (1.7) с учетом тригонометрических формул $\cos(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \mp \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$ и $\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \pm \sin \varphi_2 \cos \varphi_1$ непосредственно следуют формулы умножения и деления комплексных чисел

$$\begin{aligned} z = z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \\ z = \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, а при делении их модули делятся, а аргументы вычитаются (см. рис. 4).

3. Возвведение в целую степень

◆ Произведение n равных комплексных чисел z называется n -ой степенью числа z и обозначается z^n .

Аналогично вводится понятие возвведения в целую отрицательную степень

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{|z|^{2n}} (z^*)^n.$$

Операцию возвведения в целую положительную степень с помощью (1.11) и метода математической индукции можно определить формулой

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (1.12)$$

которая называется формулой Муавра и остается справедливой и для отрицательных целых n . Геометрический смысл формулы Муавра иллюстрирует рис. 5.

◊ Из формулы Муавра (1.12), в частности, следует, что

$$(z^*)^n = (z^n)^* \quad \text{и} \quad |z^n| = |z|^n. \quad (1.13)$$

Пример 1.3. Представить в алгебраической форме z^3 , z^{-3} , если $z = 1 + i$.

Решение. *Первый способ.* Воспользуемся алгебраической формой числа z :

$$\begin{aligned} z^3 &= (1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i, \\ z^{-3} &= \frac{1}{(1+i)^3} = \frac{1}{-2(1-i)} = -\frac{1}{4}(1+i). \end{aligned}$$

Второй способ. Представим число z в тригонометрической форме

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Тогда, согласно формуле Муавра (1.12),

$$\begin{aligned} z^3 &= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right), \\ z^{-3} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} z^3 &= 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2 + 2i, \\ z^{-3} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{1}{4}(1+i). \end{aligned}$$

4. Извлечение корня

♦ Комплексное число w называется корнем n -й степени из комплексного числа z , если $z = w^n$, и обозначается $w = \sqrt[n]{z} = z^{1/n}$.

Если обозначить $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, то, согласно операции возвведения в степень, имеем

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[n]{\rho}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \\ k &= \overline{-\infty, \infty}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right). \quad (1.14)$$

Первое соотношение показывает, что модули всех корней одинаковы, второе – что их аргументы различаются на значение, кратное $2\pi/n$. Функции $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ имеют период 2π . Поэтому, хотя формула (1.14) справедлива для всех целых k , она определяет различные значения корня n -й степени из z лишь для $k = \overline{0, n-1}$. Отсюда следует, что корень n -й степени из любого комплексного числа $z \neq 0$ имеет n различных значений и что эти значения располагаются в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (см. рис. ??, где $n = 3$).

Пример 1.4. Найти все значения корня $\sqrt[3]{8}$.

Решение. Имеем $x = 8$, $y = 0$. Найдем модуль и аргумент числа z

$$\rho = |z| = \sqrt{8^2 + 0^2} = \sqrt{8^2} = 8.$$

Число $z = 8$ лежит на положительной части действительной оси, следовательно, $\varphi = 0$. По формуле (1.14) при $n = 3$ получим:

$$w_k = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{0 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3} \right),$$

где $k = \overline{0, 2}$. Придадим индексу k значение $k = 0$. Тогда

$$w_0 = 2 \left(\cos \frac{2\pi \cdot 0}{3} + i \sin \frac{2\pi \cdot 0}{3} \right) = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2(1 + i \cdot 0) = 2.$$

Пусть теперь $k = 1$. Имеем

$$w_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi \cdot 1}{3} + i \sin \frac{2\pi \cdot 1}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -1 + i\sqrt{3}.$$

Наконец, когда $k = 2$,

$$w_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi \cdot 2}{3} + i \sin \frac{2\pi \cdot 2}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Изобразим найденные значения корней в комплексной плоскости. Для этого воспользуемся рис. ??, где положим $\varphi = 0$. Полученный рисунок дает наглядное представление о расположении корней в плоскости xOy . Они лежат в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 2 (см. рис. 7). Одна из вершин треугольника – точка $w_0 = (2, 0)$.

Пример 1.5. Найти все значения корня $\sqrt[4]{-1}$.

Решение. Имеем $z = -1$. Следовательно, $x = -1$, $y = 0$. Найдем модуль и аргумент числа z

$$\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1.$$

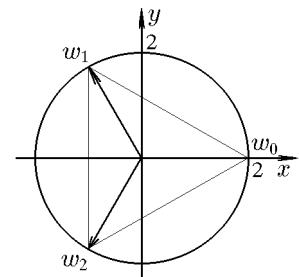


Рис. 7

Число $z = -1$ лежит на отрицательной части действительной оси, следовательно, $\varphi = \pi$. Совокупность корней определяется формулой (1.14), в которой положим $n = 4$, а $k = \overline{0, 3}$:

$$w_k = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right).$$

Придадим индексу k значение $k = 0$. Тогда

$$w_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

Положим теперь $k = 1, 2, 3$. Получим

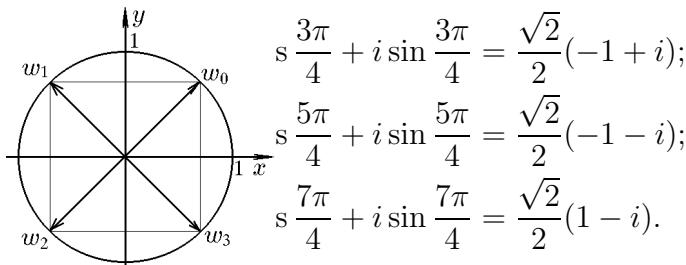


Рис. 8

Изобразим найденные значения корней в комплексной плоскости. Все значения корня $\sqrt[4]{-1}$ лежат в вершинах квадрата, вписанного в окружность единичного радиуса (рис. 8), причем одна из вершин квадрата – точка $w_0 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

2. Множества на комплексной плоскости

Приведем основные определения и свойства множеств комплексных чисел, которые необходимы нам для дальнейшей работы.

◆ Множество точек на комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z - z_0| < \varepsilon$, называется ε -окрестностью точки z_0 и обозначается $C(z_0, \varepsilon)$.

◊ Нетрудно заметить, что геометрически множество $C(z_0, \varepsilon)$ содержит все внутренние точки круга радиусом ε с центром в точке $O(x_0, y_0)$ ($z_0 = x_0 + iy_0$).

◆ Множество E называется ограниченным, если существуют такие z_0 и $\varepsilon > 0$, что $E \subset C(z_0, \varepsilon)$.

◆ Точка z_0 называется предельной точкой множества E , если для любого $\varepsilon > 0$ множество $C(z_0, \varepsilon) \cap E$ содержит по крайней мере одну точку, принадлежащую множеству E и отличную от z_0 .

◆ Множество E' называется производным множеством множества E , если оно состоит из всех предельных точек множества E .

◆ Точка z_0 называется изолированной точкой множества E , если существует окрестность точки z_0 , не содержащая других точек множества E .

◆ Точка z_0 называется внутренней точкой множества E , если существует такое $\varepsilon > 0$, что $C(z_0, \varepsilon) \subset E$.

◆ Точка z_0 комплексной плоскости называется граничной точкой множества E , если любая окрестность $C(z_0, \varepsilon)$ содержит, кроме самой точки z_0 , также точки, принадлежащие множеству E , и точки, не принадлежащие множеству E .

◆ Совокупность всех граничных точек множества E называется границей этого множества и обозначается γ_E , Γ_E или ∂E .

◆ Множество, состоящее только из внутренних точек, называется открытым.

- ◆ Множество $\bar{E} = E' \cup E$ называется замыканием множества E .
- ◆ Множество E называется линейно связным (или связным), если две любые его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в E .
- ◆ Множество E называется односвязным, если его граница γ_E – связное множество.
- ◆ Открытое связное множество называется областью.

Пример 2.1. Определить, какое множество на комплексной плоскости определено условием

$$|\arg z| < \frac{\pi}{4}.$$

Решение. В полярных координатах неравенство принимает вид

$$-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$$

и определяет угол между биссектрисами первого и четвертого координатных углов (рис. 9), причем сами биссектрисы не включаются.

Пример 2.2. Какое множество на комплексной плоскости определяется условием

$$|z - 1| \geq 2|z - i|.$$

Решение. Положим $z = x + iy$. Тогда

$$|x - 1 + iy| \geq 2|x + i(y - 1)|$$

или

$$\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \geq 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}.$$

Избавившись от квадратных корней, получим

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + y^2 &\geq 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4; \\ 0 &\geq 3x^2 + 2x + 3y^2 - 8y + 3; \\ 0 &\geq 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 3\left(y - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{3} + 3. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 \leq \frac{8}{9}.$$

Последнее неравенство задает круг радиуса $2\sqrt{2}/3$ с центром в точке $O(-1/3, 4/3)$.

Пример 2.3. Какое множество на комплексной плоскости определяется условием

$$|z + 3| + |z - 3| = 10. \quad (2.1)$$

Решение. Первый способ. Аналогично примеру 2.2 находим

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Таким образом, уравнение (2.1) определяет эллипс с центром в начале координат и полуосями $a = 5$, $b = 4$.

Второй способ. По определению, модули $|z + 3|$ и $|z - 3|$ определяют расстояние от произвольной точки z до точек $z_1 = -3$, $z_2 = 3$. Согласно (2.1), их сумма постоянна. Следовательно, уравнение (2.1) определяет геометрическое множество точек, сумма расстояний которых до точек z_1 и z_2 постоянна и равна 10, т.е. эллипс с фокусами в точках $z_1 = -3$, $z_2 = 3$ и с

$$c = 3, \quad 2a = 10, \quad a = 5, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = 4.$$

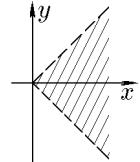


Рис. 9

3. Последовательности комплексных чисел. Бесконечно удаленная точка

♦ Если каждому натуральному числу n ($n = \overline{1, \infty}$) поставлено в соответствие некоторое комплексное число z_n , то говорят, что на множестве комплексных чисел задана последовательность, которая отображает множество \mathbb{N} в \mathbb{C} и обозначается $\{z_n\}$. Комплексные числа z_n , образующие последовательность, называются ее элементами.

Заметим, что поскольку комплексное число $z_n = x_n + iy_n$ характеризуется парой вещественных чисел, то последовательность комплексных чисел определяется двумя вещественными последовательностями $\{z_n\} = \{x_n\} + i\{y_n\}$.

♦ Число $z = x + iy$ называется пределом последовательности $\{z_n\} = \{x_n\} + i\{y_n\}$ и обозначается

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует N_ε такое, что для всех $n > N_\varepsilon$ справедливо $|z - z_n| < \varepsilon$.

♦ Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется сходящейся, если она имеет конечный предел и расходящейся в противном случае.

Теорема 3.1. *Последовательность комплексных чисел $\{z_n\} = \{x_n\} + i\{y_n\}$ имеет своим пределом число $z = x + iy$ тогда и только тогда, когда*

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (3.1)$$

Доказательство. 1. Пусть последовательность $\{z_n\}$ сходится к точке z . Тогда, по определению, для любого $\varepsilon > 0$ существует N_ε такое, что для любого $n > N_\varepsilon$ справедливо $|z - z_n| < \varepsilon$. Из неравенств $|x - x_n| \leq |z - z_n|$ и $|y - y_n| \leq |z - z_n|$ следует, что формулы (3.1) справедливы.

2. Аналогично из сходимости последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ и из неравенства

$$|z - z_n| = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} \leq |x - x_n| + |y - y_n|$$

следует сходимость последовательности $\{z_n\}$.

◊ Поскольку определение предела последовательности комплексных чисел дословно повторяет определение предела последовательности вещественных чисел, то для предела комплексных последовательностей справедливы доказанные в курсе математического анализа основные свойства предела вещественных последовательностей. В частности, если $\{z_n\}$ и $\{w_n\}$ – последовательности комплексных чисел, а α и β – комплексные постоянные, то выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha z_n + \beta w_n) &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} w_n; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \lim_{n \rightarrow \infty} w_n; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} w_n}, \quad w_n \neq 0, \quad n = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Соотношения (3.2) справедливы при условии, что в их правых частях не возникает неопределенностей.

♦ Последовательность $\{z_n\}$, $n = \overline{1, \infty}$ называется ограниченной, если существует такое положительное число $R > 0$, что для всех n справедливо неравенство $|z_n| < R$. В противном случае последовательность называется неограниченной.

◆ Пусть дана последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ такая, что для любого $R > 0$ существует N_R , такое что для всех $n > N_R$ справедливо $|z_n| > R$. В этом случае пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ и говорят, что последовательность стремится к бесконечности $z \rightarrow \infty$.

Проведем следующие рассуждения.

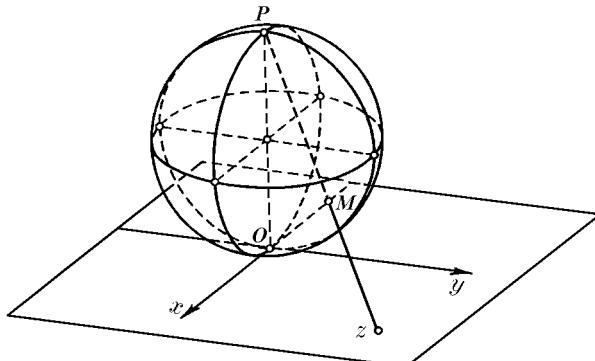


Рис. 10

Рассмотрим сферу S , касающуюся комплексной плоскости в точке O (рис. 10). Обозначим через P точку сферы, диаметрально противоположную точке O . Каждой точке z комплексной плоскости поставим в соответствие точку M , которая является точкой пересечения сферы S с прямой, проходящей через точки P и z (рис. 10). Очевидно, что последовательности $\{z_n\}$, стремящейся к бесконечности, соответствует последовательность точек сферы, сходящаяся к точке P . Поэтому добавим к комплексной плоскости так называемый бесконечно удаленный элемент – точку $z = \infty$ и поставим ему в соответствие точку P .

◆ Комплексная плоскость называется расширенной, если она состоит из обычной комплексной плоскости и единственного бесконечно удаленного элемента $z = \infty$.

◊ Соответствие между точками расширенной комплексной плоскости и точками сферы S является взаимно однозначным и называется стереографической проекцией, а сфера S – сферой Римана.

Аргумент комплексного числа $z = \infty$ не определен, так же как и его действительная и мнимая части.

Пример 3.1. Найти пределы последовательностей $\{w_n\}$, $n = \overline{1, \infty}$, если

$$\text{а) } w_n = \frac{n+1}{n-i}, \quad \text{б) } w_n = \left| \frac{i^n}{n} \right|, \quad \text{в) } w_n = \arg \frac{i^n}{n}.$$

Решение. а) Найдем действительную и мнимую части числа $w_n = u_n + iv_n$:

$$w_n = \frac{n+1}{n-i} = \frac{n^2 + n + ni + i}{n^2 + 1} = \frac{n^2 + n}{n^2 + 1} + i \frac{n+1}{n^2 + 1} = u_n + iv_n.$$

Найдем пределы вещественных последовательностей

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 1/n}{1 + 1/n^2} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n + 1/n^2}{1 + 1/n^2} = 0.$$

Следовательно, по теореме 3.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 1 + i0 = 1$.

б) Последовательность $w_n = |z_n|$ – вещественная. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

в) Представим число $z_n = i^n/n$ в тригонометрической форме

$$z_n = \frac{1}{n} \left(\cos \frac{\pi n}{2} + i \sin \frac{\pi n}{2} \right).$$

Следовательно,

$$\arg z_n = \begin{cases} 0 & n = 4k \\ \pi/2 & n = 4k + 1 \\ \pi & n = 4k + 2 \\ 3\pi/2 & n = 4k + 3 \end{cases}, \quad k = \overline{0, \infty},$$

и последовательность $\{w_n\}$ имеет вид

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

и предела не имеет.

◊ Таким образом, если $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, то последовательность $\arg z_n$ может расходиться. Покажем, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \neq 0$, то последовательность $\arg z_n$ также может расходиться.

Пример 3.2. Найти пределы последовательностей $\{w_n\}$, $n = \overline{1, \infty}$, если

$$\text{а)} w_n = z_n, \quad \text{б)} w_n = \arg z_n$$

при $z_n = 1 + i(-1)^n/n$.

Решение. а) В силу линейности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1.$$

б) Согласно формуле (1.10)

$$\arg z_n = \begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n^2}}, & n = 2k + 2; \\ 2\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n^2}}, & n = 2k + 1; \end{cases} \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Следовательно, последовательность имеет две предельные точки: 0 и 2π и поэтому расходится.

4. Ряды комплексных чисел

◆ Пусть дана некоторая последовательность комплексных чисел $\{w_n\}$ с общим элементом $w_n = u_n + iv_n$. Тогда выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \quad (4.1)$$

называется бесконечным рядом с комплексными членами. Величину w_n называют n -м членом ряда. Выражение

$$S_n = \sum_{k=1}^n w_k \quad (4.2)$$

называется n -частичной суммой.

◆ Ряд (4.1) называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Число S называется суммой ряда.

Теорема 4.1. Ряд (4.1) сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = U, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = V. \quad (4.3)$$

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится. Обозначим $\operatorname{Re} S_n = U_n$, $\operatorname{Im} S_n = V_n$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = U + iV,$$

т.е. оба ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся в силу теоремы 3.1. Аналогично из сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$.

Теорема переносит основные свойства рядов с вещественными членами на ряды с комплексными членами.

Теорема 4.2 (необходимый признак сходимости). Если ряд (4.1) сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$.

Доказательство. Действительно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} v_n,$$

и ряды $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ сходятся. Следовательно, по необходимому признаку сходимости ряда с вещественными элементами $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0 + i0 = 0$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказываются все остальные свойства рядов с комплексными членами.

◆ Ряд (4.1) называется сходящимся абсолютно (или безусловно), если сходится ряд, составленный из модулей его элементов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|. \quad (4.4)$$

◆ Сходящийся ряд (4.1) называется условно (неабсолютно) сходящимся, если ряд, составленный из модулей его элементов, расходится.

Теорема 4.3. *Если ряд (4.1) сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Так как $|u_n| \leq |w_n|$, $|v_n| \leq |w_n|$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ на основании первого признака сравнения знакоположительных рядов следует сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$. Следовательно, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ сходятся абсолютно, а ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся. Тогда из теоремы 4.1 следует сходимость искомого ряда.

Теорема 4.4. *Если оба ряда (4.3) сходятся абсолютно, то ряд (4.1) также сходится абсолютно.*

Доказательство следует непосредственно из неравенства треугольника (1.9):

$$|w_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \leq |u_n| + |v_n|$$

и первого признака сравнения для знакоположительных рядов.

◊ В качестве достаточного признака абсолютной сходимости можно использовать любой достаточный признак сходимости знакоположительных (вещественных) числовых рядов.

Приведем формулировки основных достаточных признаков сходимости, которые мы будем использовать для исследования комплексных рядов.

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (4.5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (4.6)$$

– знакоположительные числовые ряды.

1. *Первый признак сравнения.* Если существует такое N , что справедливо неравенство

$$a_n \leq |w_n| \leq b_n, \quad n = \overline{N, \infty}$$

и если ряд (4.6) сходится, то ряд (4.4) также сходится, а ряд (4.1) сходится абсолютно. Если же ряд (4.5) расходится, то ряд (4.4) расходится.

2. *Второй признак сравнения.* Если существует конечный и отличный от тождественного нуля предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_n|}{a_n} = \alpha, \quad 0 < \alpha < \infty,$$

то ряды (4.5) и (4.4) сходятся или расходятся одновременно.

3. *Признак Даламбера*. Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|w_{n+1}|}{|w_n|} = q,$$

то ряд (4.4) сходится [ряд (4.1) сходится абсолютно] при $q < 1$ и расходится при $q > 1$. При $q = 1$ вопрос о сходимости остается открытым.

4. *Признак Коши*. Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|w_n|} = q,$$

то ряд (4.4) сходится [ряд (4.1) сходится абсолютно] при $q < 1$, расходится при $q > 1$, а при $q = 1$ вопрос о сходимости ряда (4.4) остается открытым.

5. *Интегральный признак Коши*. Если $|w_n| = f(n)$, где функция $f(x)$ монотонно убывает и непрерывна при $x \geq a \geq 1$, то ряд (4.4) и интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

6. *Признак Дирихле*. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

сходится, если частичные суммы ряда (4.6) ограничены, т.е. существует такое $M > 0$, что

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| < M, \quad n = \overline{1, \infty},$$

а последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю.

Пример 4.1. Исследовать на абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} (1+i)^n.$$

Решение. Рассмотрим ряд из модулей. С учетом соотношения (1.13) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n}{3^n} (1+i)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} (\sqrt{2})^n.$$

Применим признак Коши сходимости знакоположительных рядов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n} (\sqrt{2})^n} = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1.$$

Здесь мы воспользовались известным предельным соотношением $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Следовательно, искомый ряд сходится абсолютно.

Пример 4.2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n + 2^n i}.$$

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin 3^n}{3^n + 2^n i} \right|,$$

составленный из модулей. Из ограниченности функции $\sin x$ для вещественных переменных следуют неравенства

$$|w_n| = \left| \frac{\sin 3^n}{3^n + 2^n i} \right| \leq \left| \frac{1}{3^n + 2^n i} \right| = \frac{1}{\sqrt{3^{2n} + 2^{2n}}} \leq \frac{1}{3^n} = a_n.$$

Следовательно, исходный ряд мажорируется рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}.$$

Применим к нему признак Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда в соответствии с первым признаком сравнения сходится и ряд, составленный из модулей, а исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 4.3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n/2} (1+i)^n.$$

Решение. Найдем действительную и мнимую части ряда. Для этого представим z_n в виде

$$z_n = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (1+i) \right]^n = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^n.$$

Согласно формуле Муавра (1.12)

$$\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^n = \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$z_n = \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} = u_n + iv_n,$$

где

$$u_n = \cos \frac{n\pi}{4}; \quad v_n = \sin \frac{n\pi}{4}.$$

Проверим выполнение необходимого признака сходимости ряда. Пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$$

не существуют. Следовательно, необходимый признак не выполняется и ряд расходится.

Пример 4.4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + i}{n^2}.$$

Решение. Исходный ряд сходится, так как сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

являющиеся его действительной и мнимой частями. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд, составленный из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n n + i}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + 1/n^2}}{n}.$$

Согласно первому признаку сравнения, в силу неравенства

$$\frac{\sqrt{1 + 1/n^2}}{n} > \frac{1}{n}$$

и расходимости гармонического ряда ряд, составленный из модулей, расходится. Следовательно, исходный ряд сходится условно.

Пример 4.5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n, \tag{4.7}$$

где знакоположительная последовательность $\{a_n\}$, $n = \overline{1, \infty}$, монотонно стремится к нулю, а φ – вещественная постоянная. Рассмотреть два частных случая:

$$\text{а)} \quad a_n = \frac{1}{n^2}, \quad \text{б)} \quad a_n = \frac{1}{n}.$$

Решение. 1. Обозначим n -ый член ряда через w_n . Тогда по формуле Муавра (1.12)

$$\operatorname{Re} w_n = a_n \cos n\varphi, \quad \operatorname{Im} w_n = a_n \sin n\varphi, \quad |w_n| = a_n.$$

Таким образом, ряд (4.7) сходится абсолютно, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{4.8}$$

2. Пусть ряд (4.8) расходится. Исследуем ряд (4.7) на условную сходимость. Обозначим

$$C_n(\varphi) = \sum_{k=1}^n \cos k\varphi, \quad S_n(\varphi) = \sum_{k=1}^n \sin k\varphi$$

и с учетом соотношений

$$\begin{aligned} 2 \sin k\varphi \sin \frac{\varphi}{2} &= \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\varphi - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\varphi; \\ 2 \cos k\varphi \sin \frac{\varphi}{2} &= \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\varphi - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\varphi \end{aligned}$$

получим

$$C_n(\varphi) = \frac{\cos[(n+1)\varphi/2] \sin(n\varphi/2)}{\sin \varphi/2},$$

$$S_n(\varphi) = \frac{\sin[(n+1)\varphi/2] \sin(n\varphi/2)}{\sin \varphi/2}.$$

Если $\varphi \neq 2\pi m$, $m = \overline{-\infty, \infty}$, то справедливы неравенства

$$|C_n(\varphi)| \leq \frac{1}{|\sin \varphi/2|}, \quad |S_n(\varphi)| \leq \frac{1}{|\sin \varphi/2|},$$

и по признаку Дирихле ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} w_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} w_n$$

сходятся. Если $\varphi = 2\pi m$, то $\cos n\varphi = 1$, $\sin n\varphi = 0$, $n = \overline{-\infty, \infty}$. Таким образом, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\varphi \tag{4.9}$$

сходится для всех φ . Аналогично ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi \tag{4.10}$$

сходится при $\varphi \neq 2\pi m$, $m = \overline{-\infty, \infty}$ [ряд (4.7) сходится условно] и расходится в противном случае.

3. Рассмотрим частные случаи.

а) Ряд (4.8) при $a_n = 1/n^2$ сходится, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

– обобщенный гармонический ряд, показатель которого больше единицы. Следовательно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n}{n^2}$$

сходится абсолютно.

б) Если $a_n = 1/n$, то ряд (4.8) расходится, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

– гармонический ряд. Таким образом, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n}{n}$$

сходится условно при $\varphi \neq 2\pi m$ и расходится при $\varphi = 2\pi m$, $m = \overline{-\infty, \infty}$.

5. Понятие функции комплексного переменного. Непрерывность

◆ Пусть даны две плоскости комплексных чисел $z = x + iy$, $w = u + iv$. Рассмотрим некоторое множество E в плоскости z и множество G в плоскости w . Если каждому числу z из множества E поставлены в соответствие одно или несколько комплексных чисел w из множества G , то говорят, что на множестве E задается функция комплексного переменного, отображающая множество E в G . Символически это обозначается

$$w = f(z), \quad (5.1)$$

при этом точку $w \in G$ называют образом точки $z \in E$, а точку z – прообразом точки w .

◆ Множество E называют областью определения функции $f(z)$, а множество всех комплексных чисел вида $f(z) \in G$, где z пробегает все множество E , – множеством значений функции $f(z)$ (см. рис. 11).

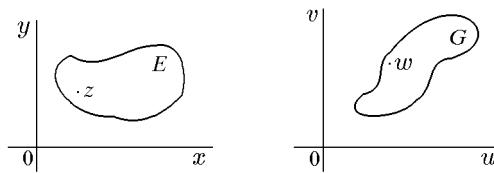


Рис. 11

◆ Если каждому числу z из множества E соответствует только одно число w из множества G , то функция $w = f(z)$ называется однозначной, в противном случае – многозначной.

◆ Однозначная функция $f(z)$ называется однолистной в области E , если для всех z_1 и z_2 , лежащих в области E , из условия $f(z_1) \neq f(z_2)$ следует, что $z_1 \neq z_2$, а из условия $z_1 \neq z_2$, – что $f(z_1) \neq f(z_2)$. В противном случае функция называется многолистной.

◆ Функция $f(z)$, однолистная в некоторой окрестности точки z_0 , называется однолистной в этой точке.

◊ Очевидно, что функция $w = f(z)$, однозначно отображающая область E в область G , будет однолистной, если обратная функция $z = \varphi(w)$ будет однозначна в области G .

◊ Заметим, что суперпозиция однолистных отображений также является однолистным отображением. Другими словами, если функция $\zeta = f(z)$ взаимно однозначно отображает область E в область D , а функция $w = \varphi(\zeta)$ взаимно однозначно отображает область D в область G , то сложная функция $w = \varphi(f(z))$ взаимно однозначно отображает область E в область G .

◊ Смысл терминов «однолистная» и «многолистная» функции мы поясним позднее.

Функцию $f(z)$ можно записать в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = (x, y) \in E,$$

где

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Перейдем к понятию непрерывности функции. Как и в случае вещественных функций, для этого дадим сначала определение предела функции.

◆ Комплексное число a называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что для всех $z \in E$, таких что

$|\Delta z| = |z - z_0| < \delta$, выполняется $|f(z) - a| < \varepsilon$. Для обозначения предела функции используется символ

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a. \quad (5.2)$$

◇ Поскольку определение предела функции комплексного переменного словно повторяет определение предела функции вещественного переменного, то для первого предела справедливы все основные свойства второго, доказанные в курсе математического анализа и полностью аналогичные свойствам предела последовательности комплексных чисел [см. соотношения (3.2)].

Пример 5.1. Вычислить

$$\text{a)} \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}; \quad \text{б)} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{z^*} - \frac{z^*}{z} \right).$$

Решение. а) Числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, стремятся к нулю. Для устранения неопределенности сделаем замену $z = w - i$. Тогда если $z \rightarrow -i$, то $w \rightarrow 0$ и

$$\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w(w + i)}{w} = \lim_{w \rightarrow 0} (w + i) = i.$$

б) Пусть $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Поскольку $z \rightarrow 0$, то $\rho \rightarrow 0$ и, соответственно,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{z^*} - \frac{z^*}{z} \right) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{\rho(\cos \varphi - i \sin \varphi)} - \frac{\rho(\cos \varphi - i \sin \varphi)}{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} \right) = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} 2i \sin 2\varphi = 2i \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Из полученного равенства следует, что пределы различны для различных направлений, по которым произвольная точка z стремится к $z = 0$ и, следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{z^*} - \frac{z^*}{z} \right)$$

не существует.

Заметим, что такой же результат получается, если произвольную точку z устремить к $z = 0$ по произвольной прямой $y = kx$. Действительно,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{z^*} - \frac{z^*}{z} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x(1 + ik)}{x(1 - ik)} - \frac{x(1 - ik)}{x(1 + ik)} \right) = \frac{4ik}{1 + k^2}.$$

Отсюда в силу произвольности углового коэффициента k следует, что предел не существует.

◆ Функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0 \in E$, если выполняется равенство

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0), \quad z \in E. \quad (5.3)$$

Равенство (5.3) эквивалентно двум равенствам

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0). \quad (5.4)$$

Пример 5.2. Доказать, что функция $f(z) = z^n$ непрерывна в каждой точке комплексной плоскости.

Решение. Рассмотрим функцию $f(z) = z^n$ при $n = 1$. Выберем $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon$. Тогда из выполнения неравенства $|z - z_0| < \delta$ следует

$$|f(z) - f(z_0)| = |z - z_0| < \delta = \varepsilon.$$

Тогда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Delta w = 0,$$

и функция $f(z) = z^n$ при $n = 1$ непрерывна на всей комплексной плоскости в силу произвольности z_0 . Но тогда и функция $f(z) = z^n$ при произвольном целом n непрерывна как произведение n непрерывных функций.

◆ Функция $f(z)$ называется непрерывной на множестве E , если она непрерывна в каждой точке множества E .

Достаточно очевидно

Утверждение 5.1. Если непрерывная в области E функция $w = f(z)$ однозначно отображает эту область на множество G , то обратная функция $w = \varphi(z)$ также является непрерывной, а множество G – областью,

доказательство которого мы оставляем читателю.

6. Степенные ряды комплексных чисел

◆ Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n, \quad (6.1)$$

где C_n – комплексные числа, z_0 – фиксированное комплексное число, z – независимая переменная, называется степенным рядом.

◆ Областью сходимости степенного ряда называется множество E , состоящее из точек z , в которых ряд (6.1) сходится.

Теорема 6.1 (Абеля). Если степенной ряд (6.1) сходится в точке z_1 , то он сходится абсолютно в круге $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ и равномерно в любом круге $|z - z_0| \leq R$, $R < |z_1 - z_0|$. Если ряд (6.1) расходится в точке z_1 , то он расходится для всех $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

Доказательство повторяет доказательство теоремы Абеля для вещественного ряда.

◆ Число $R = \sup_{z \in E} |z - z_0|$ где E – область сходимости ряда (6.1), называется радиусом сходимости ряда (6.1), а круг $|z - z_0| < R$ – кругом его сходимости.

◊ Аналогично вещественному случаю из признаков сходимости Коши и Даламбера для радиусов сходимости степенных рядов нетрудно получить соотношения

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n}}, \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|. \quad (6.2)$$

Соотношения (6.2) написаны в предположении, что пределы, стоящие в их правых частях, существуют. В противном случае для определения радиуса сходимости следует применять признаки Коши и Даламбера непосредственно, как это делается в примере 6.2.

Пример 6.1. Найти область и радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n!$.

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из модулей

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!},$$

где z – произвольная фиксированная точка. Здесь мы воспользовались соотношением (1.13). Применим к этому ряду признак Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{n+1} = 0.$$

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно для всех конечных z . Таким образом, областью сходимости является вся комплексная плоскость, а радиус сходимости равен бесконечности.

Пример 6.2. Найти область и радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n2^n}. \quad (6.3)$$

Решение. Обозначим через $w_n = (z+1)^n/(n2^n)$ общий член ряда и вычислим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|w_{n+1}|}{|w_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z+1|^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)} \frac{n2^n}{|z+1|^n} = \frac{|z+1|}{2}.$$

Тогда по признаку Даламбера ряд (6.3) сходится, если $|z+1|/2 < 1$, и расходится, если $|z+1|/2 > 1$. Радиус сходимости ряда (6.3) равен двум ($R = 2$).

Исследуем вопрос о сходимости ряда (6.3) на границе области сходимости. Сделаем в (6.3) замену

$$z+1 = 2(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{n}, \quad \varphi \in [0, 2\pi[.$$

В примере 4.5 показано, что последний ряд сходится при $\varphi \neq 0$ и расходится при $\varphi = 0$.

Таким образом, область сходимости ряда (6.3) представляет собой круг $|z+1| \leq 2$ с выколотой точкой $z = 1$.

7. Элементарные функции комплексного переменного

По аналогии с вещественным анализом определим функции комплексного переменного, которые будем называть элементарными.

7.1. Степенная функция

Понятие степенной функции

$$w = z^n, \quad n = \overline{1, \infty} \quad (7.1)$$

естественным образом вытекает из определения операции возведения в степень (1.12), а функции

$$z = \sqrt[n]{w} \quad (7.2)$$

– из определения операции извлечения корня (1.14). Для заданного n их можно рассматривать как пару обратных друг другу функций. Общий вид степенной функции и отображение, осуществляющее ей, будут рассмотрены позже. Здесь же мы на простом примере $w = z^2$ поясним введенные выше понятия однозначности, многозначности, а также однолистности и многолистности функции.

Пусть (ρ, φ) и (r, θ) – полярные координаты точек в плоскостях z и w , соответственно. Тогда из (7.1) следует

$$r = \rho^2, \quad \theta = 2\varphi. \quad (7.3)$$

Согласно (7.3), верхняя полуплоскость $\rho > 0, 0 < \varphi < \pi$ функцией $w = z^2$ однозначно отображается на всю комплексную плоскость w (лист комплексной плоскости) с разрезом по положительной части действительной оси: $r > 0, 0 < \theta < 2\pi$ (рис. 12). Для того чтобы пояснить появление разреза, рассмотрим более подробно отображение границы полуплоскости – действительной оси $\text{Im } z = 0$, обход которой совершается в направлении от точки A , соответствующей числу $z_1 = 1$ ($\rho_1 = 1, \varphi_1 = 0$), к точке B , соответствующей числу $z_2 = -1$ ($\rho_2 = 1, \varphi_2 = \pi$) (см. рис. 12, а). Оба комплексных числа ± 1 отобразятся в одно число $w = 1$. Однако, как это следует из рис. 12, б, точке A ($z = 1$) будет соответствовать точка A' ($w = 1, \rho = 1, \theta = 0$), а точке B ($z = -1$) – находящаяся как бы «под точкой A' » точка B' ($w = 1, \rho = 1, \theta = 2\pi$). В таких случаях принято считать, что положительная действительная полуось плоскости w состоит из двух «частей»: «верхнего берега» и «нижнего берега». «Верхний берег», обход которого совершается от A' к нулю, является образом положительной действительной полуоси плоскости z , а «нижний берег», обход которого совершается от нуля к B' , – образом отрицательной действительной полуоси плоскости z . Комплексную плоскость, изображенную на рис. 12, б, принято называть комплексной плоскостью (листом) с разрезом по положительной части действительной оси.

Покажем, что рассматриваемое отображение является не только однозначным, но и взаимнооднозначным, или однолистным. Действительно, хотя функция $z = \sqrt[n]{w}$, обратная к рассматриваемой, двузначна (за исключением точек $z = 0, z = \infty$), т.е. заданному значению w соответствуют два значения z и $-z$, таких что $z^2 = (-z)^2 = w$, лишь одно из них принадлежит верхней полуплоскости. Последнее и означает, что отображение в рассматриваемой области является взаимнооднозначным.

Поскольку точки z и $-z$ симметричны относительно начала координат, областью однолистности может служить любая полуплоскость, которая получается

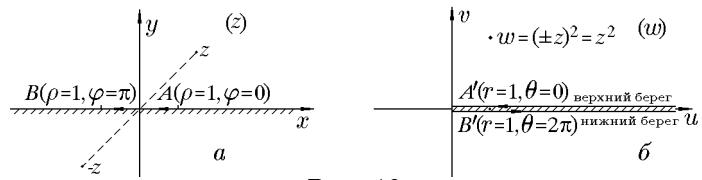


Рис. 12

при рассечении плоскости z любой прямой, проходящей через начало координат. Если граница полуплоскости образует с действительной осью угол φ (рис. 13, а), то образ этой полуплоскости – плоскость w с разрезом, образующим с осью Ou угол $\theta = 2\varphi$ (рис. 13, б).

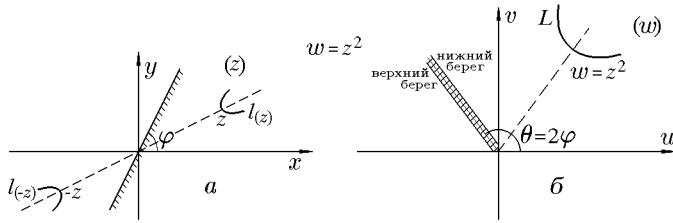


Рис. 13

Нетрудно видеть, что полуплоскость является максимальным множеством, в котором $w = z^2$ осуществляет однолистное отображение, и любое его расширение нарушает это свойство. Действительно, если рассматривать функцию $w = z^2$ на всей комплексной плоскости z , то она отобразит эту плоскость на комплексную плоскость w , пройденную дважды, или на два листа плоскости w .

В этом случае обратная функция $z = \sqrt{w}$ уже не является однозначной, так как одному значению w соответствуют два различных значения z и $-z$, принадлежащих рассматриваемой области. В этой ситуации можно поступить следующим образом: во-первых, указать, какое из двух значений следует иметь в виду. Если рассматриваемая точка w принадлежит некоторой кривой L (не проходящей через $z = 0, z = \infty$, рис. 13), то выбор одной точки из двух осуществляется, как говорят, выбором однозначной ветви $l_{(z)}$ ($l_{(-z)}$) двузначной (многозначной) функции. Во-вторых, вместо одного листа комплексной плоскости w можно рассматривать два, соединенных определенным образом в так называемую риманову поверхность, на которой функцию $z = \sqrt{w}$ можно считать уже однозначной.

Более подробно задача выбора однозначных ветвей многозначных функций и построение римановых поверхностей будет рассмотрена позже.

7.2. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции

◆ Функции комплексного переменного $e^z, \sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ определяются как суммы следующих рядов:

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \\ \operatorname{ch} z &= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \\ \operatorname{sh} z &= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \end{aligned} \quad (7.4)$$

Нетрудно показать, что ряды, определяющие функции (7.4), сходятся абсолютно во всей комплексной плоскости (см. пример 6.1), а при вещественном аргу-

менте ($z = x$) совпадают с соответствующими функциями вещественного переменного.

Теорема 7.1. Для любого комплексного числа z справедливо соотношение

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (7.5)$$

Формула (7.5) является обобщением известной из курса математического анализа формулы Эйлера на случай комплексных z и также называется формулой Эйлера.

Доказательство. Формулы (7.4) справедливы для любого z . Например, для e^{iz} получим

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Поскольку $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$, то

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos z + i \sin z,$$

что и требовалось доказать.

В дальнейшем нам понадобится правило замены индексов суммирования в двойных суммах. Поэтому рассмотрим ряд примеров.

Пример 7.1. Показать, что

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n f(n, m) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(n+m, m). \quad (7.6)$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x, y)$ в области $0 \leqslant y \leqslant x$. Тогда

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n f(n, m)$$

есть сумма значений функции $f(x, y)$, взятых в точках $x = n$, $y = m$, $0 \leqslant m \leqslant n$, где n и m – целые числа. Сначала проводится суммирование по m при фиксированном n , а затем по n . Такой порядок вычисления суммы можно проиллюстрировать графически следующим образом: значения $f(x, y)$ вычисляются в точках пересечения горизонтальных и вертикальных линий (рис. 14). Вертикальные линии нумеруются значениями n , горизонтальные – значениями m . Суммируются по m значения $f(n, m)$ при фиксированном n , что графически соответствует нахождению конечных сумм по точкам пересечения при движении по вертикальным линиям снизу вверх. Каждой вертикальной линии номера n соответствует своя сумма

$$\sigma_n = \sum_{m=0}^n f(n, m).$$

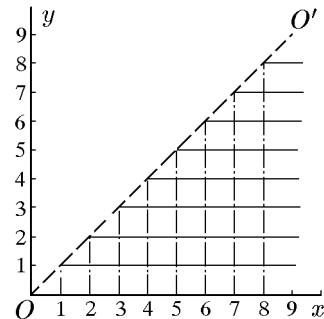


Рис. 14

Затем вычисляется бесконечная сумма «по горизонтальным линиям»

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n.$$

Предположим, что все возникшие двойные ряды сходятся абсолютно, т.е. σ не зависит от порядка суммирования. Поэтому сначала просуммируем по точкам, лежащим на каждой горизонтальной линии (фиксированного номера m), двигаясь по ней слева направо, а затем просуммируем «по вертикальным линиям», т.е. по m

$$\delta_m = \sum_{n=m}^{\infty} f(n, m), \quad \sigma = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} f(n, m).$$

Заменив индекс суммирования по n ($n \rightarrow n + m$) в последнем выражении, получим правило (7.6).

Пример 7.2. Доказать соотношение

$$\sigma = \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k f(k, m) = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{n-m} f(k + m, m). \quad (7.7)$$

Решение. Рассуждения, аналогичные рассуждениям примера 7.1, дают

$$\sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k f(k, m) = \sum_{m=0}^n \sum_{k=m}^n f(k, m).$$

Заменив k на $k + m$, получим

$$\sum_{m=0}^n \sum_{k=m}^n f(k, m) = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{n-m} f(k + m, m).$$

Следствие 7.1.1. Справедливо соотношение

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}. \quad (7.8)$$

Доказательство. Из определения показательной функции (7.4) с учетом бинома Ньютона получим

$$e^{z_1 + z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k z_1^k z_2^{n-k}}{n!}.$$

Воспользовавшись определением биномиальных коэффициентов C_n^k , запишем

$$e^{z_1 + z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!}.$$

Поменяв порядок суммирования аналогично примеру 7.1, получим

$$e^{z_1 + z_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_1^k z_2^m}{k!m!} = e^{z_1} e^{z_2},$$

что и требовалось доказать.

◊ Из формулы (7.8), в частности, следует, во-первых, что

$$(e^{iz})^n = e^{inz},$$

а во-вторых, что

$$e^{z_1+2\pi i} = e^{z_1}e^{2\pi i} = e^{z_1}.$$

Последнее равенство означает, что на комплексной плоскости функция e^z становится периодической с чисто мнимым периодом $T = 2\pi i$.

Следствие 7.1.2. Справедливо соотношение

$$(\cos z + i \sin z)^n = \cos nz + i \sin nz. \quad (7.9)$$

Формула (7.9) является обобщением формулы Муавра (1.12) на случай комплексных z и также называется формулой Муавра.

Доказательство. Из формулы Эйлера (7.5) следует

$$(\cos z + i \sin z)^n = (e^{iz})^n = e^{izn} = \cos nz + i \sin nz,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 7.1.3. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), & \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}); \\ \operatorname{sh} zi &= i \sin z, & \operatorname{ch} zi &= \cos z, \\ e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Доказательство. Эти соотношения нетрудно получить из формулы Эйлера.

◊ Из формул (7.11) следует, что на комплексной плоскости функции $\cos z$ и $\sin z$ по-прежнему остаются периодическими с периодом $T = 2\pi$, однако уже не являются ограниченными, поскольку выражаются через гиперболические функции. Самы гиперболические функции, так же как и показательная функция e^z , становятся периодическими с чисто мнимым периодом $T = 2\pi i$.

◊ Используя формулу Эйлера, из тригонометрической формы комплексного числа (1.8) получим так называемую показательную форму комплексного числа

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad \text{где} \quad \rho = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z, \quad (7.11)$$

удобную для возведения в степень и извлечения корня.

Пусть ν – произвольное вещественное число. Тогда

$$\begin{aligned} z^\nu &= (|z|e^{i\varphi})^\nu = (|z|e^{i(\varphi+2k\pi)})^\nu \Rightarrow \\ z^\nu &= |z|^\nu e^{i(\varphi\nu+2k\pi\nu)}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

В частности, ν может быть равно $1/n$.

Для функций (7.4) справедливы все основные соотношения, полученные для вещественных функций.

Пример 7.3. Доказать соотношение

$$\operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 = \frac{1}{2}[\operatorname{sh}(z_1 + z_2) + \operatorname{sh}(z_1 - z_2)].$$

Доказательство. Из определения гиперболических функций (7.4) можно записать

$$\operatorname{sh} z_1 = \frac{1}{2}[e^{z_1} - e^{-z_1}], \quad \operatorname{ch} z_2 = \frac{1}{2}[e^{z_2} + e^{-z_2}].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 &= \frac{1}{4}(e^{z_1} - e^{-z_1})(e^{z_2} + e^{-z_2}) = \\ &= \frac{1}{4}[e^{z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)} - e^{-(z_1-z_2)} + e^{z_1-z_2}] = \\ &= \frac{1}{2}[\operatorname{sh}(z_1 + z_2) + \operatorname{sh}(z_1 - z_2)]. \end{aligned}$$

Пример 7.4. Представить число

$$w = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{i}{2} \ln 2\right)$$

в алгебраической форме.

Решение. По определению,

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

С учетом формул (7.11) получим

$$\operatorname{tg} z = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{i}{2} \ln 2\right) &= -i \frac{e^{2i(\pi/6-i \ln 2/2)} - 1}{e^{2i(\pi/6-i \ln 2/2)} + 1} = \\ &= -i \frac{e^{i\pi/3} e^{\ln 2} - 1}{e^{i\pi/3} e^{\ln 2} + 1} = -i \frac{1 + i\sqrt{3} - 1}{1 + i\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - 3i}{7}. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\operatorname{Re} w = \frac{2\sqrt{3}}{7}, \quad \operatorname{Im} w = \frac{3}{7}.$$

7.3. Логарифмическая функция

♦ Функция, обратная функции $z = e^w$, называется логарифмической и обозначается $\operatorname{Ln} z = w$.

Пусть $w = \operatorname{Ln} z = u + iv$. Из (7.11) $z = |z|e^{i \operatorname{Arg} z}$. С другой стороны, $z = e^{u+iv}$, т.е. $|z|e^{i \operatorname{Arg} z} = e^u e^{iv}$. Отсюда $v = \operatorname{Arg} z$, $e^u = |z|$, т.е. $u = \ln |z|$. Таким образом,

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z; \tag{7.13}$$

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad 0 \leq \arg z < 2\pi, \tag{7.14}$$

где $k = \overline{-\infty, \infty}$.

◆ Значение логарифма числа z ($z \neq 0$), равное $\ln|z| + i \arg z$, называется главным значением $\text{Ln } z$ и обозначается

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z. \quad (7.15)$$

С учетом (7.14)

$$\text{Ln } z = \ln z + 2\pi k i, \quad k = \overline{-\infty, \infty}. \quad (7.16)$$

Свойства логарифма $\text{Ln } z$:

$$1. \text{ Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2,$$

$$2. \text{ Ln } \frac{z_1}{z_2} = \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_2.$$

◊ Функция $\text{Ln } z$ является многозначной, поэтому указанные равенства (если иное не оговорено особо) следует рассматривать с точностью до $2\pi k i$ или как равенства множеств, состоящих из одних и тех же чисел. Естественные для действительных чисел равенства $\ln x + \ln x = 2 \ln x$, $\ln x^2 = 2 \ln x$ на комплексной плоскости некорректны, т.е., вообще говоря, $\text{Ln } z + \text{Ln } z \neq 2 \text{Ln } z$, $\text{Ln } z^2 \neq 2 \text{Ln } z$, поскольку правые и левые части представляют собой разные множества. Так, для последнего соотношения $2 \text{Arg } z = 2(\arg z + 2\pi k) = 2 \arg z + 4\pi k$, тогда как $\text{Arg } z^2 = 2 \arg z + 2\pi k$. В качестве иллюстрации рассмотрим также множество $M = \{0, 1\}$, состоящее из двух элементов: нуля и единицы. Множество $M + M$ состоит из трех элементов: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$, тогда как множество $2M$ состоит только из двух элементов: $2 \cdot 0 = 0$ и $2 \cdot 1 = 2$.

Пример 7.5. Представить в алгебраической форме число

$$a) \ w = \text{Ln}(1 + i\sqrt{3}), \quad b) \ w = \ln(-a), \quad a > 0.$$

Решение. а) Согласно (7.13)

$$\text{Ln } z = \ln \rho + i(\varphi + 2\pi k),$$

где $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$ (см. рис. 15). Запишем число $z = 1 + i\sqrt{3}$ в виде показательной функции:

$$z = \rho e^{i\varphi + 2\pi k},$$

$$\rho = \sqrt{zz^*} = \sqrt{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})} = 2.$$

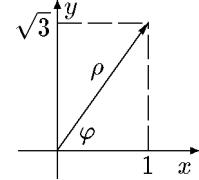


Рис. 15

Поскольку $\text{Re } z = 1 > 0$ и $\text{Im } z = \sqrt{3} > 0$, число z находится в первой четверти комплексной плоскости. Согласно (1.10), $\varphi = \varphi_0$, где

$$\varphi_0 = \arccos \frac{|x|}{\rho} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Тогда

$$\text{Re } w = \text{Re } \text{Ln}(1 + i\sqrt{3}) = \ln \rho = \ln 2,$$

$$\text{Im } w = \text{Im } \text{Ln}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

Окончательно получим

$$w = \text{Ln}(1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), \quad k = \overline{-\infty, \infty}.$$

б) Аналогично

$$\ln(-a) = \ln|a| + \pi i = \ln a + \pi i, \quad a > 0.$$

В частности, $\ln(-1) = i\pi$.

7.4. Общая степенная функция

◆ Общей степенной функцией называется функция вида

$$w = z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}, \quad (7.17)$$

где α – заданное комплексное число.

Пример 7.6. Представить в алгебраической форме число

$$w = (-12 + 5i)^{-i}.$$

Решение. По определению (7.17)

$$z_1^{z_2} = e^{\operatorname{Ln} z_1^{z_2}} = e^{z_2 \operatorname{Ln} z_1},$$

где $z_1 = -12 + 5i$, $z_2 = -i$. Запишем

$$\operatorname{Ln} z_1 = \operatorname{Ln}(-12 + 5i) = \ln \rho + i(\varphi + 2\pi k).$$

Найдем модуль и аргумент числа z_1 : $\rho = |z_1| = 13$. Поскольку $\operatorname{Re} z_1 = -12 < 0$, $\operatorname{Im} z_1 = 5 > 0$, число z_1 находится во II-ой четверти. Согласно (1.10),

$$\varphi = \pi - \varphi_0, \quad \varphi_0 = \arccos \frac{12}{13}.$$

Тогда

$$\varphi = \pi - \arccos \frac{12}{13}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Ln} z_1 = \operatorname{Ln}(-12 + 5i) = \ln 13 + i\left(\pi - \arccos \frac{12}{13} + 2\pi k\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} w &= e^{-i \operatorname{Ln}(-12+5i)} = \exp \left\{ -i \left[\ln 13 + i \left(\pi - \arccos \frac{12}{13} + 2\pi k \right) \right] \right\} = \\ &= \exp \left\{ -i \ln 13 + \left(\pi - \arccos \frac{12}{13} + 2\pi k \right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ \pi - \arccos \frac{12}{13} + 2\pi k \right\} \exp(-i \ln 13). \end{aligned}$$

С учетом формулы Эйлера (7.5) получим

$$w = \exp \left(\pi - \arccos \frac{12}{13} + 2\pi k \right) (\cos \ln 13 - i \sin \ln 13).$$

7.5. Обратные тригонометрические функции

◆ Функция, обратная функции $z = \cos w$, называется арккосинусом и обозначается $w = \operatorname{Arccos} z$.

Из формулы Эйлера следует, что

$$z = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw}).$$

Следовательно, $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$. Отсюда получаем $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$, т.е.

$$w = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}) = \operatorname{Arccos} z. \quad (7.18)$$

В отличие от вещественного случая знак \pm перед корнем не ставится, так как $\sqrt{z^2 - 1}$ уже является многозначной функцией.

Аналогично записываем

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} z &= -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}); \\ \operatorname{Arctg} z &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z}; \\ \operatorname{Arsh} z &= \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}); \\ \operatorname{Arch} z &= \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}); \\ \operatorname{Arth} z &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

◊ В вещественном анализе основными элементарными функциями принято считать полиномы, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Все остальные элементарные функции получаются из основных с помощью четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления) и суперпозиций (построения сложных функций), применяемых конечное число раз. Из проведенного выше рассмотрения видно, что в теории функций комплексного переменного основными элементарными функциями являются только полиномы, показательные и логарифмические функции.

Пример 7.7. Представить в алгебраической форме число

$$w = \operatorname{Arcsin} \frac{5}{3}.$$

Решение. Согласно формуле (7.19),

$$w = -i \operatorname{Ln} \left(\frac{5}{3}i + \sqrt{1 - \frac{25}{9}} \right) = -i \operatorname{Ln} \left(\frac{5}{3}i \pm \frac{4}{3}i \right).$$

В результате получим

$$\begin{aligned} w^1 &= -i \operatorname{Ln} 3i = -i \left(\ln 3 + \frac{\pi i}{2} + 2i\pi k \right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i \ln 3, \\ w^2 &= -i \operatorname{Ln} \frac{i}{3} = -i \left(\ln \frac{1}{3} + \frac{\pi i}{2} + 2i\pi k \right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k + i \ln 3. \end{aligned}$$

Объединим полученные результаты в одну формулу

$$w_k = \operatorname{Arcsin} \frac{5}{3} = \pi \left(2k + \frac{1}{2} \right) \pm i \ln 3, \quad k = \overline{-\infty, \infty}.$$

Пример 7.8. Представить в алгебраической форме число

$$w = \operatorname{Arth}(-1 + 2i).$$

Решение. Согласно формуле (7.19), для $k = \overline{-\infty, \infty}$

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + (-1 + 2i)}{1 - (-1 + 2i)} = \frac{1}{2} \ln \frac{-1 + i}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\pi}{4}i + 2i\pi k \right) = -\frac{1}{4} \ln 2 + \pi \left(\frac{3}{8} + k \right)i. \end{aligned}$$

8. Дифференцирование функций комплексного переменного

♦ Функция $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z , если при $\Delta z \rightarrow 0$ существует конечный предел отношения

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad (8.1)$$

не зависящий от способа стремления Δz к нулю. Этот предел называется производной функции $f(z)$ в точке z и обозначается $f'(z)$:

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}. \quad (8.2)$$

◊ Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z , то она и непрерывна в этой точке.

Теорема 8.1. Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке $z = x+iy$, то в точке (x, y) существуют частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ по переменным x, y , причем имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \quad (8.3)$$

Соотношения (8.3) называются условиями Коши–Римана.

Доказательство. Так как функция $f(z)$ дифференцируема, то существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z},$$

который, по определению предела, не зависит от способа стремления Δz к нулю.

а) Пусть $\Delta z = \Delta x$. Тогда

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

б) Пусть $\Delta z = i\Delta y$. Получим

$$f'(z) = -i \left\{ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} \right\} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Но, по определению предела, результаты, полученные в случаях а) и б), должны быть равны, что и доказывает теорему.

◊ Не представляет особого труда показать, что если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 , то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ не только имеют частные производные в точке x_0, y_0 , но и дифференцируемы как функции двух переменных в этой точке. Ответ на вопрос о дифференцируемости функции $f(z)$ в точке z_0 , если ее реальная и мнимая части дифференцируемы как функции двух переменных в точке x_0, y_0 , дает следующая теорема:

Теорема 8.2. *Если каждая из функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируема в точке x, y как функция двух переменных, а их частные производные удовлетворяют условиям Коши – Римана (8.3), то функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является дифференцируемой функцией комплексного переменного $z = x + iy$.*

Доказательство. Поскольку функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке $(x, y) \in E$, то

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) \Delta y, \\ \Delta v(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_3(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \varepsilon_4(\Delta x, \Delta y) \Delta y,\end{aligned}$$

где $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = 0$, $k = \overline{1, 4}$, а $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\Delta f(x) = \Delta u + i \Delta v &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right) + \\ &\quad + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) \Delta y + \\ &\quad + i [\varepsilon_3(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \varepsilon_4(\Delta x, \Delta y) \Delta y] = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) (\Delta x + i \Delta y) + [\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) + i \varepsilon_3(\Delta x, \Delta y)] \Delta x + \\ &\quad + [\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) + i \varepsilon_4(\Delta x, \Delta y)] \Delta y.\end{aligned}$$

Из последнего соотношения с учетом неравенства

$$\begin{aligned}&|[\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) + i \varepsilon_3(\Delta x, \Delta y)] \Delta x + \\ &\quad + [\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) + i \varepsilon_4(\Delta x, \Delta y)] \Delta y| \leqslant \\ &\leqslant [| \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) | + | \varepsilon_3(\Delta x, \Delta y) |] |\Delta x| + \\ &\quad + [| \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) | + | \varepsilon_4(\Delta x, \Delta y) |] |\Delta y| \leqslant \\ &\leqslant [| \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) | + | \varepsilon_3(\Delta x, \Delta y) | + \\ &\quad + | \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) | + | \varepsilon_4(\Delta x, \Delta y) |] \rho.\end{aligned}$$

следует существование предела (8.2), что и доказывает теорему.

Пример 8.1. Показать, что условия Коши–Римана (8.3) эквивалентны условию

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0. \tag{8.4}$$

Решение. Функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ с учетом соотношений

$$x = \frac{z + z^*}{2}, \quad y = \frac{z - z^*}{2i}$$

формально можно рассматривать как функцию двух переменных z и z^* , т.е.

$$f(z) = u\left(\frac{z + z^*}{2}, \frac{z - z^*}{2i}\right) + iv\left(\frac{z + z^*}{2}, \frac{z - z^*}{2i}\right).$$

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z^*} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*} + i \left[\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям Коши–Римана (8.3), то

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0$$

и наоборот.

Из рассмотренного примера вытекает удобное в практических приложениях замечание.

◊ Если функция $f(z)$ в точке z удовлетворяет условию (8.4), то функция дифференцируема в этой точке, причем

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

и, следовательно, производные для дифференцируемых функций можно получать формальным дифференцированием $f(z)$ по переменной z .

Пример 8.2. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = z^*$.

Решение. Первый способ. Для данной функции имеем

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (8.5)$$

Рассмотрим два случая:

- a) $\Delta y = 0$, т.е. $\Delta z = \Delta x \neq 0$, тогда $\Delta f/\Delta z = 1$;
- б) $\Delta x = 0$, т.е. $\Delta z = i\Delta y \neq 0$, тогда $\Delta f/\Delta z = -1$.

Следовательно, отношение (8.5) при $\Delta z \rightarrow 0$ предела не имеет и функция $f(z) = z^*$ не дифференцируема.

Второй способ. Так как $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

и условия Коши–Римана не выполняются ни в одной точке комплексной плоскости.

Третий способ. Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 1$$

на всей комплексной плоскости, то функция $f(z) = z^*$ не дифференцируема ни в одной точке комплексной плоскости.

◊ Условия (8.3) иногда называют условиями Даламбера–Эйлера, что более правомерно с исторической точки зрения, так как они впервые были исследованы Даламбера и в особенности Эйлером в работах, посвященных приложениям функций комплексного переменного к гидромеханике, картографии и интегральному исчислению.

◆ **Функция $f(z)$, определенная в области E , называется аналитической (регулярной или голоморфной) в точке $z_0 \in E$, если она $f(z)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0 , целиком лежащей в E .**

◊ Поскольку определение производной в бесконечно удаленной точке $z_0 = \infty$ теряет смысл, условимся считать функцию $f(z)$ аналитической в этой точке, если функция $\varphi(z) = f(1/z)$ аналитична в точке $z_0 = 0$.

◆ Точка z_0 , в которой функция $f(z)$ является аналитической, называется правильной точкой этой функции, в противном случае она называется особой.

◆ **Функция $f(z)$ называется аналитической в области E , если $f(z)$ аналитична во всех точках области E .**

◊ Подчеркнем, что определение аналитической функции предполагает ее однозначность в области E , поскольку только в этом случае понятия предела и производной имеют смысл. Понятие аналитичности будет распространено позднее на многозначные функции.

Из условий Коши–Римана (8.3) следует, что для производной функции $f(z)$ справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Следствие. В полярной системе координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ условия Коши–Римана (8.3) для функции $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$ имеют вид ($z = \rho e^{i\varphi}$)

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}. \quad (8.6)$$

Доказательство. Перейдем в полярную систему координат:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), & v(x, y) &= v(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi); \\ \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi = \frac{\partial v}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial x} \sin \varphi; \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= \frac{\partial v}{\partial x} \rho (-\sin \varphi) + \frac{\partial v}{\partial y} \rho \cos \varphi. \end{aligned}$$

Сравнив последние два соотношения, получим

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

Аналогично доказывается второе соотношение в (8.6).

Так как определение производной (8.2) дословно повторяет определение производной функции одной действительной переменной, то в комплексной плоскости сохраняются все правила дифференцирования, справедливые для функции

одной вещественной переменной:

1. $[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$,
2. $[Cf(z)]' = Cf'(z)$, $C = \text{const}$,
3. $[[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$,
4. $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$,
5. $[f(\varphi(z))]' = \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi(z)} \varphi'(z)$,
6. $\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}$, $w = f(z)$, $z = \varphi(w)$ и т.д.

Отметим, что функции $f(z)$, $g(z)$ и $\varphi(z)$ предполагаются дифференцируемыми, причем последнее равенство, определяющее производную обратной функции, справедливо в области ее однолистности.

Сформулируем утверждение, имеющее важное практическое значение, справедливость которого вытекает из теоремы 5.1.

Утверждение 8.1. *Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой области E и не является постоянной, то при отображении, осуществляемом функцией $w = f(z)$, образом области E является множество G . Тогда множество G также является областью.*

Пример 8.3. Показать, что функция $f(z) = e^z$ аналитична во всей комплексной плоскости.

Решение. По формуле Эйлера $f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Следовательно,

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y,$$

Найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Условия Коши–Римана выполняются на всей комплексной плоскости. Следовательно, функция $f(z) = e^z$ – аналитическая на этой плоскости. Вычислив производную из (8.5), получим

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z, \text{ т.е. } (e^z)' = e^z.$$

◊ Так как функции $e^{\pm z}$ и $e^{\pm iz}$ – аналитические, то являющиеся их линейными комбинациями функции $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ также аналитичны.

Пример 8.4. Показать, что функция $f(z) = \ln z$ аналитична в комплексной плоскости, кроме точки $z = 0$, при условии $-\pi < \arg z \leqslant \pi$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(z) = \ln z$. Положим $u(\rho, \varphi) = \ln \rho$, $v(\rho, \varphi) = \varphi$. Из условий Коши–Римана в полярной системе координат (8.3) найдем

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial \rho},$$

т.е. функция $f(z) = \ln z$ – аналитическая всюду, кроме точки $z = 0$.

Найдем производную функции $f(z) = \ln z$. По определению, $z = e^f$. Дифференцируя это равенство, получим $1 = e^f f'$ или $f' = e^{-f} = 1/z$, т.е.

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}.$$

◊ Так как функция $\ln z$ – аналитическая в области $-\pi < \arg z \leq \pi$, функции $\arcsin z$, $\arccos z$, и $\operatorname{arch} z$, $\operatorname{arsh} z$ также аналитические всюду, кроме точек $z = \pm 1$ и $z = \pm i$, соответственно.

Пример 8.5. Найти производную функции $f(z) = \arcsin z$ (z не принадлежит лучу $[-1, \infty[$).

Решение. С учетом (7.19) и правил дифференцирования сложных функций получим

$$\begin{aligned} (\arcsin z)' &= -i(\ln(iz + \sqrt{1 - z^2}))' = \\ &= \frac{-i}{iz + \sqrt{1 - z^2}} \left(i - \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{1 - z^2} + iz}{iz + \sqrt{1 - z^2} \sqrt{1 - z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$f'(z) = (\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Теорема 8.3. Действительная и мнимая части аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ связаны соотношениями

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy \right) + C; \quad (8.7)$$

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dx - \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dy \right) + C, \quad (8.8)$$

где интегрирование ведется по произвольному пути, соединяющему (x_0, y_0) и (x, y) и принадлежащему области аналитичности.

Доказательство. Из курса математического анализа известно, что

$$dv(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dy$$

и функцию $v(x, y)$ можно представить криволинейным интегралом

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) + C,$$

который не зависит от кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y) . С помощью соотношений Коши–Римана

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy$$

получим

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) + C = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + C.$$

Доказательство соотношения (8.8) аналогично.

9. Гармонические функции

◊ Мы установили соотношения (8.7) и (8.8), связывающие функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в предположении, что функция $f(z) = u + iv$ – аналитическая. Возникает вопрос: любая ли непрерывная вместе со своими частными производными функция двух переменных может являться действительной или мнимой частью аналитической функции? В общем случае ответ отрицателен.

Пример 9.1. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, если $v(x, y) = x^2 + y^2$ и $f(0) = 1$.

Решение. Функция $u(x, y)$ должна удовлетворять условиям Коши–Римана, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2y.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = 2xy + \varphi(y).$$

Из второго условия Коши–Римана найдем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x + \varphi'(y) = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2x.$$

Таким образом, $\varphi'(y) = -4x$, что невозможно, т.е. исходная задача некорректна. Следовательно, не всякая функция двух переменных может являться действительной $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ частью аналитической функции. Такие функции должны удовлетворять дополнительным условиям, а именно: быть гармоническими.

♦ Функция $\Phi(x, y)$ называется гармонической в области E , если она непрерывна в области E вместе со своими частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in E. \quad (9.1)$$

Уравнение (9.1) называется двумерным уравнением Лапласа.

В дальнейшем мы покажем, что аналитическая в области E функция имеет в этой области непрерывные производные любого порядка.

Теорема 9.1. Действительная и мнимая части аналитической в области E функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ являются в этой области гармоническими функциями, если они имеют непрерывные вторые частные производные.

Доказательство. По определению аналитических функций, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ во всех точках E удовлетворяют условиям Коши–Римана

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}; \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \quad (9.2)$$

Продифференцируем первое равенство по x , а второе – по y и сложим полученные выражения. Получим

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y \partial x} = 0, \quad (9.3)$$

т.е. функция $u(x, y)$ – гармоническая. Теперь первое тождество (9.2) продифференцируем по y , а второе – по x и вычтем из первого второе, тогда

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} = 0. \quad (9.4)$$

Таким образом, теорема доказана.

◆ Две гармонические в области E функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, связанные в этой области условиями Коши–Римана, называются сопряженными.

◇ Действительная и мнимая части аналитической функции являются сопряженными гармоническими функциями.

Теорема 9.2. Для любой функции $u(x, y)$, гармонической в односвязной области E , существует сопряженная к ней гармоническая функция $v(x, y)$, определяемая соотношением

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy \right) + \text{const}, \quad (9.5)$$

где интегрирование проводится по произвольной кусочно-гладкой кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y) и целиком лежащей в E .

Доказательство. Поскольку функция $u(x, y)$ – гармоническая, то из теоремы Грина следует, что значение криволинейного интеграла, стоящего в правой части соотношения (9.5), не зависит от пути интегрирования. Выберем в качестве кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y) , ломаную с отрезками, параллельными осям координат. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy \right) + \text{const} = \\ &= - \int_{x_0}^x \frac{\partial u(x, y_0)}{\partial y} dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy + \text{const} = v(x, y). \end{aligned}$$

Продифференцируем полученное соотношение по x . Получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= -\frac{\partial u(x, y_0)}{\partial y} + \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} dy = \\ &= -\frac{\partial u(x, y_0)}{\partial y} - \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} dy = \\ &= -\frac{\partial u(x, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Big|_{y_0}^y = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}.\end{aligned}$$

Аналогично доказывается справедливость первого соотношения Коши–Римана.

◊ Из теорем 9.1 и 9.2 вытекает, что действительная и мнимая части аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ связаны соотношением

$$v(x, y) = - \int_{x_0}^x \frac{\partial u(t, y_0)}{\partial y} dt + \int_{y_0}^y \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dt + C, \quad (9.6)$$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial v(t, y_0)}{\partial y} dt - \int_{y_0}^y \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} dt + C, \quad (9.7)$$

если ломаная ABC лежит в области аналитичности $f(z)$. Здесь $A = (x_0, y_0)$, $B = (x, y_0)$, $C = (x, y)$.

Пример 9.2. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по известной мнимой части

$$v(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3,$$

если $f(0) = 0$.

Решение. Проверим, является ли функция $v(x, y)$ гармонической. Для этого найдем

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= 3x^2 + 12xy - 3y^2, & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 6x + 12y, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 6x^2 - 6xy - 6y^2. & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= -6x - 12y.\end{aligned}$$

Таким образом, функция $v(x, y)$ является гармонической и существует сопряженная ей функция $u(x, y)$. Применив формулу (9.7), получим

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (6x^2 - 6xy - 6y^2) dx + (-3x^2 - 12xy + 3y^2) dy = \\ &= \int_0^x (6t^2 - 6ty_0 - 6y_0^2) dt + \int_0^y (-3x^2 - 12xt + 3t^2) dt.\end{aligned}$$

Здесь мы положили $x_0 = 0, y_0 = 0$. Получим

$$u(x, y) = 2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + y^3 + C.$$

Из условия $f(0) = 0$ находим $C = 0$. Тогда

$$f(z) = (2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + y^3) + i(x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3),$$

и окончательно получим

$$f(z) = 2z^3 + iz^3.$$

Пример 9.3. Найти аналитическую функцию $f(z)$ по известной действительной части

$$u(x, y) = -y^3 + 3x^2y + 2x,$$

если $f(1) = 2 - 4i$.

Решение. Функция $u(x, y)$ — гармоническая, так как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6y + 6y = 0.$$

Из первого условия Коши—Римана находим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -3y^2 + 3x^2.$$

Следовательно,

$$v(x, y) = 3y^2x - x^3 + \varphi(y).$$

Подставим функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ во второе условие Коши—Римана и получим

$$6xy + \varphi'(y) = 6xy + 2.$$

Следовательно,

$$\varphi'(y) = 2 \quad \text{и} \quad \varphi(y) = 2y + C.$$

Тогда

$$v(x, y) = 3y^2x - x^3 + 2y + C.$$

Постоянную C определим из условия $f(1) = 2 - 4i$. Поскольку $\operatorname{Re} 1 = 1$ и $\operatorname{Im} 1 = 0$, то

$$f(1) = u(1, 0) + iv(1, 0) = 2 + i(-1 + C) = 2 - 4i$$

и $C = -3$. Тогда

$$v(x, y) = 3y^2x - x^3 + 2y - 3.$$

Окончательно получим

$$f(z) = -iz^3 + 2z - 3i.$$

Пример 9.4. Найти аналитическую функцию $f(z)$ по известной мнимой части

$$v(x, y) = y \cos y \operatorname{sh} x + x \sin y \operatorname{ch} x,$$

если $f(0) = 0$.

Решение. Проверим функцию $v(x, y)$ на гармоничность:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= y \cos y \operatorname{ch} x + \sin y [\operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x], \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= y \cos y \operatorname{sh} x + \sin y \operatorname{sh} x + \sin y [\operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x]; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \operatorname{sh} x [\cos y - y \sin y] + x \operatorname{ch} x \cos y, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= -\operatorname{sh} x \sin y - x \operatorname{sh} x \sin y - \operatorname{sh} x [\sin y + y \cos y].\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

т.е. функция $v(x, y)$ – гармоническая, и для нее существует сопряженная функция $u(x, y)$. Из первого условия Коши–Римана находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{sh} x [\cos y - y \sin y] + x \operatorname{ch} x \cos y.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = \operatorname{ch} x [\cos y - y \sin y] + \cos y \int_0^x t \operatorname{ch} t dt + \varphi(y).$$

Вычислим интеграл

$$\int t \operatorname{ch} t dt.$$

Для этого проинтегрируем один раз по частям, положив $U = t$, $dU = dt$, $dV = \operatorname{ch} t dt$, $V = \operatorname{sh} t$. Тогда

$$\int t \operatorname{ch} t dt = t \operatorname{ch} t - \int \operatorname{ch} t dt = t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t + C.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = \operatorname{ch} x [\cos y - y \sin y] + \cos y [x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x] + \varphi(y).$$

Воспользуемся вторым условием Коши–Римана. Для этого найдем частные производные

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \operatorname{ch} x [-\sin y - (\sin y + y \cos y)] - \sin y [x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x] + \varphi'(y), \\ -\frac{\partial v}{\partial x} &= -y \cos y \operatorname{ch} x - \sin y \operatorname{sh} x - x \operatorname{sh} x \sin y.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$u(x, y) = x \operatorname{sh} x \cos y - y \operatorname{ch} x \sin y + C.$$

Из условия $f(0) = 0$ находим, что $C = 0$.

Рассмотрим второй способ решения задачи. Найдем функцию $u(x, y)$ из соотношения (9.7). Запишем

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \int_0^x \{\operatorname{sh} t[\cos y - y \sin y] + t \operatorname{ch} t \cos y\} dt = \\ &= \operatorname{ch} t[\cos y - y \sin y] \Big|_0^x + \cos y \int_0^x t \operatorname{ch} t dt. \end{aligned}$$

Возьмем интеграл по частям, положив, как и ранее, $U = t$, $dU = dt$, $dV = \operatorname{ch} t dt$, $V = \operatorname{sh} t$. Тогда

$$u_1(x, y) = \operatorname{ch} t[\cos y - y \sin y] \Big|_0^x + \cos y[t \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t] \Big|_0^x.$$

Запишем теперь

$$u_2(x, y) = \int_0^y \{t \cos t \operatorname{ch} x + \sin t [\operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x]\} dt.$$

Возьмем интеграл по частям, положив теперь $U = t$, $dU = dt$, $dV = \cos t dt$, $V = \sin t$. Тогда

$$u_2(x, y) = \operatorname{ch} x[t \sin t + \cos t] \Big|_0^y - \cos t[\operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x] \Big|_0^y.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = u_1(x, 0) + u_2(x, y) = x \operatorname{sh} x \cos y - y \operatorname{ch} x \sin y$$

и

$$f(z) = (x \operatorname{sh} x \cos y - y \operatorname{ch} x \sin y) + i(y \cos y \operatorname{sh} x + x \sin y \operatorname{ch} x).$$

Окончательно получим

$$f(z) = (1 + iz) \operatorname{sh} z.$$

◊ Переход от переменных x, y к комплексной переменной z в более сложных выражениях может быть осуществлен с помощью соотношений

$$x = \frac{z + z^*}{2}, \quad y = \frac{z - z^*}{2i}.$$

10. Кривые в комплексной плоскости

♦ Если каждому значению t из интервала $a < t < b$ поставлено в соответствие комплексное число

$$z(t) = x(t) + iy(t), \tag{10.1}$$

где $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$, а $y(t) = \operatorname{Im} z(t)$, то мы будем говорить, что на интервале $[a, b]$ задана комплексная (комплекснозначная) функция действительного переменного t .

♦ Для комплекснозначной функции действительного переменного определим понятия предела, производной и интеграла при помощи соотношений

$$\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) + i \lim_{t \rightarrow t_0} y(t),$$

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t), \quad (10.2)$$

$$\int_a^b z(t) dt = \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt.$$

◆ Пусть дана комплекснозначная функция $z(t)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$. При этом отрезку $[a, b]$ отвечает некоторое множество в комплексной плоскости. Это множество вместе с указанием порядка, в котором проходятся его точки, называется непрерывной кривой Γ , а уравнение $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ – параметрическим уравнением этой кривой Γ .

◆ Точка z называется точкой самопересечения кривой, если $z = z(t_1) = z(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$.

◆ Простой кривой, или кривой Жордана, называется непрерывная кривая, не имеющая точек самопересечения.

◆ Простую кривую, у которой конец совпадает с началом, называют замкнутой кривой.

◆ Кривая Γ называется гладкой, если существует параметрическое уравнение $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, с функцией $z(t)$, имеющей на отрезке $[a, b]$ непрерывную и отличную от нуля производную.

◆ Непрерывная кривая Γ называется кусочно-гладкой кривой, если ее можно разбить на конечное число частей, каждая из которых является гладкой кривой.

◆ Замкнутый контур без самопересечений, лежащий в комплексной плоскости, будем называть положительно ориентированным, если обход совершается против часовой стрелки, и обозначать Γ^+ . В противном случае контур будем называть отрицательно ориентированным и обозначать Γ^- .

◊ Если это не приводит к недоразумениям, индекс ‘+’ у положительно ориентированных контуров может быть опущен, т.е. $\Gamma = \Gamma^+$.

Пример 10.1. Выяснить, какие линии определяются уравнением

$$z = 2e^{it} + e^{-it}, \quad t \in [0, 2\pi[.$$

Решение. Найдем действительную и мнимую части комплексного числа z . По формуле Эйлера (7.5) получим

$$x = 3 \cos t, \quad y = \sin t.$$

Исключив t , получим

$$\frac{x^2}{3^2} + y^2 = 1.$$

Это уравнение эллипса с полуосями $a = 3$, $b = 1$. С учетом изменения параметра t видим, что точка z делает полный оборот по эллипсу от точки $z = 3$ против часовой стрелки (см. рис. 16).

Пример 10.2. Написать в комплексной форме уравнение окружности

$$x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0. \quad (10.3)$$

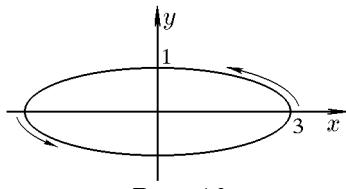


Рис. 16

Решение. Имеем $x^2 + y^2 = zz^*$, $2y = i(z - z^*)$. Подставив эти выражения в уравнение (10.3), получим

$$zz^* - 2iz^* + 2iz - 8 = 0$$

или

$$(z - i)(z^* + i) - 9 = 0.$$

Окончательно получим

$$|z - i|^2 = 9.$$

11. Интегралы от функций комплексного переменного

◆ Интеграл от функции комплексного переменного $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ вдоль кривой Γ определяется следующим соотношением:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\Gamma} (u + iv)(dx + idy) = \\ &= \int_{\Gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\Gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy. \end{aligned} \quad (11.1)$$

◊ Таким образом, интеграл от функции комплексного переменного определяется как сумма двух криволинейных интегралов второго рода от функции двух вещественных переменных.

Пусть $z(t)$, $a \leq t \leq b$, – параметрическое уравнение гладкой кривой Γ , $z(t) = x(t) + iy(t)$. В этом случае интеграл от функции комплексного переменного может быть преобразован в интеграл от комплекснозначной функции действительных переменных (10.2)

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt. \quad (11.2)$$

Если Γ – кусочно-гладкая кривая, то в правой части (11.2) будет стоять сумма определенных интегралов, каждый из которых соответствует гладкому участку кривой.

Пример 11.1. Вычислить интеграл

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^n}, \quad n = \overline{-\infty, \infty},$$

где Γ – окружность радиуса R с центром в начале координат.

Решение. Параметрическое уравнение окружности имеет вид $x = R \cos t$, $y = R \sin t$. Тогда $z = x + iy = Re^{it}$, $dz = [x'(t) + iy'(t)]dt = R(-\sin t + i \cos t)dt = iR(\cos t + i \sin t)dt = iRe^{it}dt$.

1. Пусть $n = 1$. Тогда

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it} dt}{Re^{it}} = 2\pi i.$$

2. Рассмотрим случай, когда $n \neq 1$. Получим

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^n} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}dt}{(Re^{it})^n} = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{it(n-1)}dt = 0.$$

Легко увидеть, что если окружность обходится k раз, то для $n = 1$

$$\int_{\Gamma_k} \frac{dz}{z} = 2\pi ik,$$

тогда как для $n \neq 1$ интеграл по-прежнему равен нулю.

Следовательно,

$$\int_{|z|=R} \frac{dz}{z^n} = 2\pi ki\delta_{1,n}, \quad (11.3)$$

где δ_{1n} – символ Кронекера, k – количество обходов окружности $|z| = R$.

Отметим, что результат интегрирования зависит от n и k , но не зависит от радиуса окружности R , что станет очевидным после того, как мы докажем теорему Коши.

Пример 11.2. Вычислить $I = \int_{\Gamma} z^2 dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющей точки $z_1 = 1$ и $z_2 = i$.

Решение. Параметрическое уравнение отрезка z_1z_2 имеет вид $x(t) = 1 - t$, $y(t) = t$, $t \in [0, 1]$, т.е. $z = (1 - t) + it$, $dz = z'(t)dt = (-1 + i)dt$. Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma} z^2 dz = \int_0^1 [(1-t) + it]^2 (-1+i) dt = \\ &= (-1+i) \left\{ \int_0^1 [(1-t)^2 - t^2] dt + 2i \int_0^1 t(1-t) dt \right\} = \\ &= (-1+i) \left\{ (t - t^2) + 2i \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \right\} \Big|_0^1 = \\ &= (-1+i) 2i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{3}(1+i). \end{aligned}$$

Пример 11.3. Вычислить интеграл

$$I = \int_{\Gamma} z|z| dz$$

по контуру $\Gamma : \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \leq 0\}$.

Решение. Контур Γ можно представить в параметрической форме следующим образом:

$$\begin{cases} x = \cos t & t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]. \\ y = \sin t & \end{cases}$$

Тогда

$$z(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}, \quad |z| = 1$$

и

$$dz = ie^{it}dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \int_{3\pi/2}^{2\pi} 1 \cdot ie^{it}e^{it} dt = i \int_{3\pi/2}^{2\pi} e^{2it} dt = \frac{1}{2}e^{2it} \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} = \frac{1}{2}[e^{4\pi i} - e^{3\pi i}] = \\ &= \frac{1}{2}[\cos 4\pi + i \sin 4\pi - \cos 3\pi - i \sin 3\pi] = \frac{1}{2}[2] = 1. \end{aligned}$$

Непосредственно из определения (11.1) вытекают следующие свойства интеграла от функции комплексного переменного:

1. Линейность.

$$\int_{\Gamma} [C_1 f_1(z) + C_2 f_2(z)] dz = C_1 \int_{\Gamma} f_1(z) dz + C_2 \int_{\Gamma} f_2(z) dz. \quad (11.4)$$

Здесь и в дальнейшем $f_1(z)$ и $f_2(z)$ непрерывны, кривая Γ – кусочно-гладкая, а C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Доказательство этого свойства непосредственно следует из свойства линейности криволинейного интеграла второго рода.

2. Ориентированность. Пусть Γ^+ и Γ^- – один и тот же путь, проходящий в прямом и обратном направлениях. Тогда

$$\int_{\Gamma^+} f(z) dz = - \int_{\Gamma^-} f(z) dz. \quad (11.5)$$

Доказательство непосредственно следует из зависимости криволинейного интеграла второго рода от направления на кривой.

3. Аддитивность. Пусть Γ состоит из кусочно-гладких кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z) dz, \quad (11.6)$$

причем направление обхода кривых Γ_k , $k = \overline{1, n}$, совпадает с направлением обхода Γ .

Доказательство следует из свойства аддитивности криволинейного интеграла второго рода.

4. Оценка интегралов.

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| |dz|,$$

где $|dz| = dl$ – длина дуги, а в правой части стоит криволинейный интеграл первого рода.

12. Теорема Коши

Теорема 12.1 (Коши). *Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области E , то интеграл от этой функции по произвольному кусочно-гладкому замкнутому контуру $\Gamma \subset E$ равен нулю.*

Доказательство проведем при дополнительном (упрощающем) предположении, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в области E . По определению интеграла в комплексной плоскости

$$J = \oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \oint_{\Gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Подынтегральные функции в криволинейном интеграле удовлетворяют условиям теоремы Грина. Следовательно,

$$J = \iint_{D_{\Gamma}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{D_{\Gamma}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy,$$

где $D_{\Gamma} \subset E$ – область, ограниченная контуром Γ . В силу условий Коши–Римана $J = 0$ и теорема доказана. Доказательство для общего случая см., например, в [39].

Следствие. *Пусть E – односвязная область $z_1, z_2 \in E$, а $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset E$ – две произвольные кривые с началом в z_1 и концом в z_2 (см. рис. 17). Тогда для аналитической в области E функции $f(z)$ справедливо*

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz. \quad (12.1)$$

Доказательство. Рассмотрим разность интегралов от функции $f(z)$, вычисленных по контурам Γ_1 и Γ_2 :

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz - \int_{\Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2^-} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz = 0,$$

что и требовалось доказать.

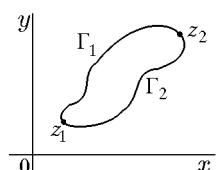


Рис. 17

◆ Аналитическая функция $F(z)$ называется первообразной функции $f(z)$ в области E , если $F'(z) = f(z)$ для всех z , принадлежащих области E .

◇ Если $F(z)$ – первообразная функции $f(z)$ в области E , то функция $\Phi(z) = F(z) + C$, где C – произвольная комплексная константа, также является первообразной функции $f(z)$ в области E .

◆ Совокупность всех первообразных функции $f(z)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(z)$ и обозначается $\int f(z) dz$. При этом, если $F(z)$ – какая-либо первообразная функции $f(z)$, то

$$\int f(z) dz = F(z) + C.$$

Теорема 12.2. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области E , а точки z_1 и z_2 принадлежат E , то для любой кусочно-гладкой кривой Γ , соединяющей точку z_1 с точкой z_2 , целиком лежащей в E , справедливо соотношение

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = F(z)|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1), \quad (12.2)$$

где $F(z)$ – произвольная первообразная функции $f(z)$ в области E . Соотношение (12.2) называется формулой Ньютона–Лейбница.

Доказательство дословно повторяет доказательство аналогичного свойства криволинейных интегралов второго рода.

Пример 12.1. Вычислить $\int_{\Gamma} z^2 dz$, где Γ – кривая, соединяющая точки $z_1 = 1$ и $z_2 = i$.

Решение. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $F'(z) = z^2$, где $F(z) = z^3/3 + C$. Поскольку функция $f(z) = z^2$ аналитична во всей комплексной плоскости, то

$$\int_{\Gamma} z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_1^i = \frac{1}{3}(i^3 - 1^3) = -\frac{1+i}{3}.$$

Пример 12.2. Вычислить

$$I = \int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

где Γ : $|z| = 4$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Для \sqrt{z} выбирается однозначная ветвь, на которой $\sqrt{4} = -2$ (см. разд. «Степенная функция»).

Решение. Первый способ. Искомый интеграл можно вычислить непосредственно по формуле (11.2), положив $z = \rho e^{i\varphi}$, где аргумент φ меняется от нуля до π . Согласно (1.12),

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i(\varphi+2\pi k)/2}, \quad k = 0, 1.$$

Так как интегрирование проводится по окружности $|z| = 4$, то $z = 4e^{i\varphi}$, $dz = 4ie^{i\varphi} d\varphi$, а

$$\sqrt{z} = 2e^{i(\varphi/2+\pi k)},$$

откуда в силу условия $\sqrt{4} = -2$ следует, что $k = 1$ и, соответственно,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{\pi} \frac{4ie^{i\varphi} d\varphi}{2e^{i(\varphi/2+\pi)}} = 2i \int_0^{\pi} e^{i(\varphi/2-\pi)} d\varphi = \\ &= 4e^{i(\varphi/2-\pi)} \Big|_0^{\pi} = 4(e^{-i\pi/2} - e^{i\pi}) = 4(1 - i). \end{aligned}$$

Второй способ. Так как точки $z = 4$ и $z = -4$ принадлежат односвязной области аналитичности подынтегральной функции, то применение формулы Ньютона–Лейбница (12.2) дает

$$I = \int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_4^{-4} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} \Big|_4^{-4} = 2[\sqrt{-4} - \sqrt{4}].$$

Согласно выбору ветви, для которой $\sqrt{4} = -2$, т.е. $k = 1$, находим

$$\sqrt{-4} = 2e^{i(\pi/2+k\pi)} \Big|_{k=1} = 2e^{3\pi i/2} = -2i,$$

откуда

$$I = 2(-2i + 2) = 4(1 - i).$$

Теорема 12.1 допускает важное обобщение (доказательство мы не приводим, см. [39]).

Теорема 12.3 (Коши, основная). *Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области E и непрерывна в замкнутой области $\bar{E} = E + \Gamma_E$, то интеграл от функции $f(z)$ по границе этой области равен нулю:*

$$\int_{\Gamma_E} f(z) dz = 0.$$

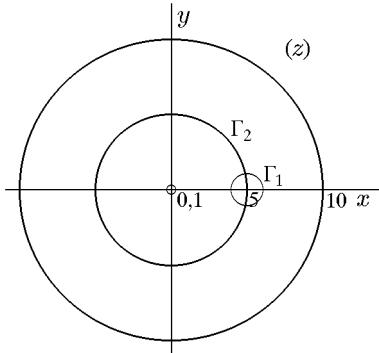


Рис. 18

До сих пор рассматривались только односвязные области. Для выяснения роли связности области рассмотрим функцию $f(z) = 1/z$. Эта функция аналитична в кольце $r < |z| < R$, которое является двусвязной областью. Положим для определенности $r = 0,1$, $R = 10$ и сравним результаты интегрирования

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} \quad (12.3)$$

по контурам $\Gamma = \Gamma_1$: $|z - 5| = 1$ и $\Gamma = \Gamma_2$: $|z| = 5$, целиком лежащим в рассматриваемом кольце $0,1 < |z| < 10$ (рис. 18).

Очевидно, что интеграл по первому контуру Γ_1 равен нулю:

$$\int_{|z-5|=1} \frac{dz}{z} = 0, \quad (12.4)$$

так как в двусвязной области $0,1 < |z| < 10$ можно выделить односвязную область, например $|z - 5| \leq 2$, полностью содержащую внутри себя контур интегрирования $|z - 5| = 1$. Что касается интегрирования по контуру Γ_2 , то, согласно примеру 11.1, в этом случае интеграл будет отличен от нуля:

$$\int_{|z|=5} \frac{dz}{z} = 2\pi i. \quad (12.5)$$

Сравнение формул (12.4) и (12.5) позволяет сделать вывод, что теорема 12.1 остается справедливой только для тех контуров в многосвязной области, для которых удается выделить односвязную подобласть, полностью содержащую этот контур. В противном случае теорема 12.1 в многосвязной области неверна.

Отметим различие между рассматриваемыми выше контурами: если контур $|z - 5| = 1$ путем непрерывной деформации можно стянуть в точку, не выходя при этом за границу области, то для контура $|z| = 5$ это оказывается невозможным. Именно этот факт может служить критерием применимости теоремы 12.1 для контура, расположенного в многосвязной области.

Теорема 12.4 (Коши для многосвязной области). Если функция $f(z)$ аналитична в области E и непрерывна в замкнутой области $\bar{E} = E + \Gamma_E$, то интеграл от функции $f(z)$ по границе этой области равен нулю, если область E во время обхода границы все время остается с одной стороны:

$$\int_{\Gamma_E} f(z) dz = 0. \quad (12.6)$$

Доказательство. Пусть $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ – внешняя и внутренние части границы области Γ_E . Проведем разрезы $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ (рис. 19), превращающие многосвязную область E в односвязную с границей

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma_E + \gamma_1^+ + \gamma_1^- + \dots + \gamma_n^+ + \gamma_n^-.$$

Тогда, согласно теореме 12.3 и с учетом того, что разрезы проходят дважды в противоположных направлениях, имеем

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz = \int_{\Gamma_E} f(z) dz = 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 12.4.1. Если обход замкнутых контуров $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \dots, \Gamma_n$ в формуле (12.6) считать положительным (против часовой стрелки), то она может быть записана в виде

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z) dz. \quad (12.7)$$

Другими словами, интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам.

Доказательство. Согласно (12.6), имеем

$$\int_{\Gamma} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k^-} f(z) dz = 0.$$

Изменение направления обхода контуров Γ_k непосредственно приводит к формуле (12.7).

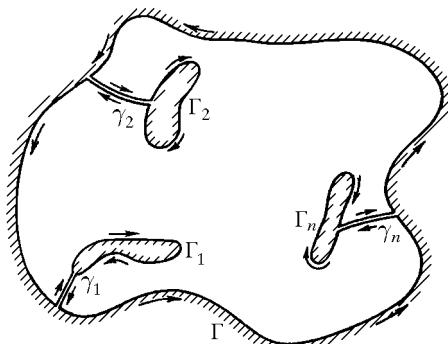


Рис. 19

Следствие 12.4.2. Для двусвязной области интеграл по внешнему (внутреннему) контуру равен интегралу по любому замкнутому контуру, расположенному в этой области и охватывающему ее внутреннюю границу.

Доказательство очевидно.

◊ Утверждение следствия 12.4.2 хорошо иллюстрируется примером 11.1, в котором результат интегрирования не зависит от радиуса окружности, по которой ведется интегрирование.

Пример 12.3. Вычислить

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^n}, \quad n = \overline{-\infty, \infty},$$

где Γ – произвольный замкнутый контур, охватывающий точку $z = 0$.

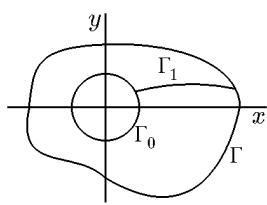


Рис. 20

Решение. Первый способ. Рассмотрим двусвязную область, внешней границей которой является контур Γ , а внутренней – окружность $\Gamma_0 : |z| = R$ с радиусом, меньшим кратчайшего расстояния между началом координат и контуром Γ (рис. 20). В такой области функция z^{-n} аналитична при любых значениях n и согласно следствию 12.4.1 можно записать

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^n} = \int_{|z|=R} \frac{dz}{z^n},$$

откуда с учетом результата примера 11.1 получаем

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^n} = 2\pi i \delta_{1,n}.$$

Второй способ. Обозначим (см. рис. 20)

$$\tilde{\Gamma} = \underbrace{\Gamma + \Gamma_1^+ + \Gamma_1^- + \Gamma_0^-}_{\gamma} + \Gamma_0^+,$$

где Γ_0 – окружность радиуса R , а R меньше кратчайшего расстояния между началом координат и контуром Γ ; Γ_1 – произвольная жорданова кривая, соединяющая контуры Γ_0 и Γ . Знаки + и – определяют направление обхода контура против и по часовой стрелке, соответственно. Тогда

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^n} = \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{dz}{z^n} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z^n} + \int_{\Gamma_0^+} \frac{dz}{z^n} - \int_{\Gamma_0^-} \frac{dz}{z^n} = \int_{\Gamma_0^+} \frac{dz}{z^n} = 2\pi i \delta_{1,n},$$

где $n = \overline{-\infty, \infty}$. Здесь мы воспользовались результатом примера 11.1, а также теоремой 12.4 для контура γ .

Пример 12.4. Вычислить интегралы

$$\text{a)} \oint_{\Gamma_k} \frac{dz}{z}, \quad \text{б)} \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z},$$

где Γ_k – произвольный замкнутый контур, а γ_k – произвольный контур с началом в точке $z_1 = 1$ и с концом в точке $z_2 = z$. По обоим контурам точка $z = 0$ обходится k раз.

Решение. а) Случай $k = 1$ рассмотрен в примере 11.1. Рассмотрим случай $k = 2$, т.е. замкнутый контур Γ_2 обходит начало координат два раза (рис. 21). Трудность, возникающая в этом случае, заключается в появлении точки самопересечения S , в результате чего контур Γ_2 перестает быть простым. Эту трудность можно преодолеть введением разреза AB , разбивающего контур Γ_2 на два простых: $ACDSBA$ и $ABEGSA$, проходимых в этом же направлении (рис. 21), причем разрез AB обходится дважды в противоположных направлениях. Тогда

$$\oint_{\Gamma_2} \frac{dz}{z} = \oint_{ACDSBA} \frac{dz}{z} + \oint_{ABEGSA} \frac{dz}{z}. \quad (12.8)$$

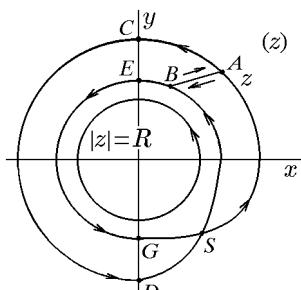


Рис. 21

Далее так же, как и в примере 11.1, находим

$$\oint_{\Gamma_2} \frac{dz}{z} = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i. \quad (12.9)$$

Изменив в (12.9) направление обхода, получим

$$\oint_{\Gamma_2^-} \frac{dz}{z} = -4\pi i. \quad (12.10)$$

Из (12.9) и (12.10) следует достаточно очевидный результат для произвольного k

$$\int_{\Gamma_k} \frac{dz}{z} = 2\pi k i, \quad k = \overline{-\infty, \infty}, \quad (12.11)$$

где положительным значениям k соответствует положительное направление обхода Γ_k , отрицательным – отрицательное.

б) Поскольку функция $f(z) = 1/z$ аналитична в комплексной плоскости с вырезанной отрицательной частью вещественной оси $-\pi < \arg z < \pi$ и $(\ln z)' = 1/z$, то

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_1^z \frac{dz}{z} = \ln z - \ln 1 = \ln z,$$

где γ – простой контур, соединяющий точки $z_1 = 1$ и $z_2 = z$, не проходящий через начало координат и не пересекающий отрицательную часть действительной оси.

Рассмотрим теперь контур γ_1 , который один раз пересекает отрицательную часть действительной оси при обходе точки $z = 0$ в положительном направлении (рис. 22).

Контур γ_1 , в отличие от контура γ , не является простым, так как имеет точку самопересечения S . Введем разрез AD , разбивающий контур γ_1 на два простых: замкнутый $ASCD$ и незамкнутый ADS , проходимых в том же направлении, причем сам разрез AD обходится дважды в противоположных направлениях.

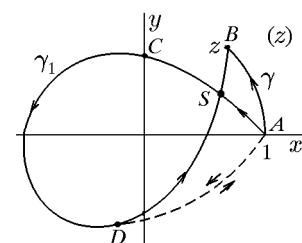


Рис. 22

Тогда

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \oint_{ASCDA} \frac{dz}{z} + \int_{ADSB} \frac{dz}{z}.$$

Учтя, что

$$\oint_{ASCDA} \frac{dz}{z} = 2\pi i, \quad \int_{ADSB} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \ln z,$$

найдем

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \ln z + 2\pi i. \quad (12.12)$$

Изменив в (12.12) направление обхода, получим

$$\oint_{\gamma_1^-} \frac{dz}{z} = \ln z - 2\pi i. \quad (12.13)$$

Из (12.12) и (12.13) следует достаточно очевидный результат для произвольного k

$$\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z} = \ln z + k2\pi i = \text{Ln } z, \quad (12.14)$$

где положительным значениям k соответствует положительное направление обхода γ_k , отрицательным – отрицательное, а для $k = 0$ контур γ не пересекает отрицательную часть действительной оси.

Подводя итог, можно отметить, что интеграл (12.14) представляет собой многозначную функцию, однозначные ветви которой определяются выбором контура γ_k .

13. Интеграл Коши

Теорема 13.1. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области E . Тогда для всех z , принадлежащих E , и кусочно-гладкого контура Γ , целиком лежащего в E , справедливо

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & z \in D_{\Gamma} \\ 0 & z \notin D_{\Gamma} \end{cases}, \quad (13.1)$$

где D_{Γ} – область, ограниченная контуром Γ (рис. 23).

Интеграл, стоящий в правой части равенства (13.1), называется интегралом Коши (интегральной формулой Коши), а функция $K(z, \zeta) = 1/(\zeta - z)$ – ядром интеграла Коши.

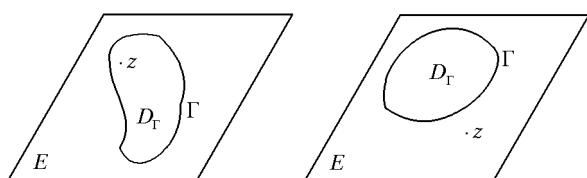


Рис. 23

Доказательство. 1. Запишем

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta - z} d\zeta = J_1 + J_2,$$

где

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta, \quad J_2 = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

2. Рассмотрим интеграл J_2 . Пусть $z \notin D_{\Gamma}$, тогда подынтегральное выражение – аналитическая функция ζ и по теореме Коши $J_2 = 0$.

Пусть теперь $z \in D_{\Gamma}$, тогда, поступая так же, как и при решении примера 12.3, получим $J_2 = f(z)$.

3. Рассмотрим интеграл J_1 :

а) $z \notin D_{\Gamma}$. В этом случае подынтегральное выражение является аналитической функцией и, следовательно, $J_1 = 0$.

б) $z \in D_{\Gamma}$. Рассмотрим двусвязную область, получаемую из D_{Γ} удалением круга $|\zeta - z| < \varepsilon$. В полученной области выражение $[f(\zeta) - f(z)]/(\zeta - z)$ аналитично и, следовательно, согласно следствию 12.4.1 можно записать

$$J_1 = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Последний интеграл, согласно теореме Коши 12.1, не зависит от ε . Заметим, что предел

$$\lim_{|\zeta-z|=\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = f'(z)$$

существует и ограничен в силу аналитичности функции $f(z)$, а следовательно, и функции $[f(\zeta) - f(z)]/(\zeta - z)$. Тогда

$$\begin{aligned} |J_1| &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \oint_{|\zeta-z|=\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leqslant \\ &\leqslant \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{|\zeta-z|=\varepsilon} \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| |d\zeta| = \\ &= |f'(z)| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{|\zeta-z|=\varepsilon} |d\zeta| = |f'(z)| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi\varepsilon = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $J_1 = 0$, что и доказывает теорему.

◊ Для заданных z и $f(z)$ существует бесконечное множество контуров Γ , охватывающих точку z и целиком лежащих в односвязной области E , для которых

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z).$$

Формула Коши допускает обобщение формулы (13.1) на случай неодносвязных областей.

Теорема 13.2. Пусть $f(z)$ аналитична в области E и непрерывна на границе этой области. Тогда для всех $z \in E$ справедливо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_E} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (13.2)$$

где Γ_E – граница области E (см. рис. 19). При обходе контура область E всегда должна находиться слева.

Интеграл (13.2) называется интегралом Коши для многосвязной области.

Доказательство. Пусть область E (см. рис. 19) – $(n+1)$ -связная, а $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ – внешняя и внутренние части границы Γ_E этой области. Рассмотрим $(n+2)$ -связную область, полученную из E удалением круга $|\zeta - z| < \varepsilon$. Функция $f(\zeta)/(\zeta - z)$ аналитична во внутренних точках полученной области и непрерывна на ее границе. Значит, согласно следствию 12.4.1, справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_E} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (13.3)$$

причем при обходе Γ_E слева остается область E , а при обходе окружности – внутренняя часть круга $|\zeta - z| < \varepsilon$. К интегралу в правой части применима теорема 13.1, в силу чего

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_E} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z),$$

и формула (13.3) переходит в (13.2), что и требовалось доказать.

◊ Теорему 13.2 в случае односвязной области можно рассматривать как обобщение теоремы 13.1, когда контур расширяется до границы области E .

◊ Для двусвязной области с внешней границей Γ и внутренней Γ_1 формула (13.2) принимает вид

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz - \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz \right\}. \quad (13.4)$$

Обход этих контуров положителен относительно области, ими ограниченной.

◊ Интегральная формула Коши (13.2) показывает, что многие свойства аналитических функций определяются свойствами простейшей из них $\mathcal{K}(z, \zeta) = 1/(\zeta - z)$ – ядра Коши.

Пример 13.1. Вычислить интеграл

$$I = \oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{1+z^2} dz.$$

Решение. Исходный интеграл можно представить в виде

$$I = \oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z+i)(z-i)} dz.$$

Обозначим

$$\varphi(z) = \frac{\cos z}{z+i}.$$

Функция $\varphi(z)$ аналитична в области $|z - i| < 1$ и непрерывна на ее границе. Тогда с учетом интегральной формулы Коши (13.2) получим

$$I = \oint_{|z-i|=1} \frac{\varphi(z)}{z-i} dz = 2\pi i \varphi(i) = 2\pi i \frac{\cos i}{i+i} = \pi \cos i = \pi \operatorname{ch} 1.$$

Пример 13.2. Вычислить интеграл

$$I = \oint_{|z|=1/2} \frac{e^z}{z^2+z} dz.$$

Решение. Поскольку $z(z+1) = (z-0)(z+1)$, обозначим

$$\varphi(z) = \frac{e^z}{z+1}.$$

Функция $\varphi(z)$ аналитична в области $|z| < 1$ и контур интегрирования $|z| = 1/2$ целиком лежит в этой области. Тогда

$$I = \oint_{|z|=1/2} \frac{\varphi(z)}{z-0} dz = 2\pi i \varphi(0) = 2\pi i \frac{e^0}{0+1} = 2\pi i.$$

◊ Отметим, что интеграл в формуле Коши (13.2) определяется лишь значениями $f(z)$ на границе Γ_E области E . Таким образом, значения функции внутри области аналитичности задаются ее значениями на границе. Формула Коши позволяет вычислять значения функции во всех точках области, если известны граничные значения этой функции.

Теорема 13.3 (о среднем). Если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$ и непрерывна на его границе $|z - z_0| = R$, то значение этой функции в центре круга (точка z_0) равно среднему арифметическому ее значений на окружности:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi. \quad (13.5)$$

Доказательство. Формула (13.5) следует непосредственно из (13.2) после замены $\zeta = z_0 + Re^{i\varphi}$.

14. Интеграл типа Коши

♦ Пусть Γ – произвольная кусочно-гладкая ориентированная кривая, не обязательно замкнутая, и $\varphi(z)$ – непрерывная функция, определенная вдоль Γ . Выражение

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \notin \Gamma \quad (14.1)$$

называется интегралом типа Коши.

Теорема 14.1. Интеграл типа Коши есть аналитическая функция $F(z)$ для всех z , не принадлежащих Γ и

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad z \notin \Gamma. \quad (14.2)$$

Доказательство. Если выполняется соотношение (14.2), то функция $F(z)$ аналитична для всех z , не принадлежащих Γ .

Докажем справедливость соотношения (14.2). Для этого рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi i \Delta z} \int_{\Gamma} \varphi(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i \Delta z} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2 (\zeta - z - \Delta z)} [(\zeta - z)^2 - (\zeta - z)(\zeta - z - \Delta z) - \\ &- \Delta z(\zeta - z - \Delta z)] d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) \Delta z}{(\zeta - z)^2 (\zeta - z - \Delta z)} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta. \end{aligned}$$

Перейдем к пределу $\Delta z \rightarrow 0$ и получим (14.2), что и требовалось доказать.

Следствие 14.1.1. Производные n -ого порядка функции (14.1) $F(z)$ определяются путем n -кратного дифференцирования по z подынтегральной функции

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (14.3)$$

Доказательство следует из соотношений (14.1) и (14.2) при использовании метода математической индукции.

Следствие 14.1.2. Функция $f(z)$, аналитическая в области E и непрерывная на границе Γ_E этой области, бесконечно дифференцируема во внутренних точках области, и ее производная n -ого порядка находится по формуле

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma_E} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (14.4)$$

Здесь Γ_E – граница области E .

Доказательство. Из формулы (13.1) следует, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_E^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

т.е. аналитическая в области E функция представляется интегралом Коши. Формула (14.4) следует из (14.3) как частный случай.

Следствие 14.1.3. Производные аналитической в области E функции $f(z)$ также являются аналитическими в области E функциями.

Доказательство. Аналитическая функция бесконечно дифференцируема. Следовательно, функция $\varphi(z) = f^{(n)}(z)$ является дифференцируемой, а ее производная – непрерывной, т.е. функция $\varphi(z)$ – аналитическая, что и требовалось доказать.

Пример 14.1. Вычислить

$$\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^3} dz,$$

где Γ – окружность радиуса R с центром в точке $z = 0$.

Решение. Из (14.4), в частности, следует

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z). \quad (14.5)$$

Подставим в формулу (14.5) $f(z) = \cos z$, $n = 2$, $z = 0$. Тогда

$$\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} (\cos z)''|_{z=0} = -\pi i.$$

15. Некоторые следствия из интегральной формулы Коши

В этом разделе мы рассмотрим несколько теорем, полезных не столько в практических, сколько в теоретических приложениях.

Первой мы рассмотрим теорему Морера, являющуюся обращением теоремы Коши.

Теорема 15.1 (Морера). Если функция $f(z)$ непрерывна в области E и

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

для любого кусочно-гладкого замкнутого контура Γ , целиком лежащего в E ($\Gamma \subset E$), тогда функция $f(z)$ аналитична в области E .

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta.$$

Согласно условию теоремы, ее значение не зависит от пути интегрирования и

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta,$$

где в качестве пути интегрирования можно выбрать отрезок прямой, соединяющей точки z и $z + \Delta z$. Предельный переход $\Delta z \rightarrow 0$ в полученном равенстве дает

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta,$$

откуда в силу непрерывности функции $f(z)$ получим

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dF(z)}{dz} = f(z).$$

Таким образом, функция $F(z)$ является аналитической и ее производная есть функция $f(z)$. Но, как следует из следствия 14.1.3, производная аналитической функции также аналитическая функция, что и требовалось доказать.

Теорема 15.2 (принцип максимума модуля). *Если $f(z)$ не равна тождественно постоянной, аналитична в области E и непрерывна на границе Γ_E , то ее модуль может достигать наибольшего значения только на границе области E .*

Доказательство. Пусть z_0 – произвольная фиксированная внутренняя точка области E . Согласно утверждению 8.1, точка $w_0 = f(z_0)$ принадлежит множеству значений функции $f(z)$ вместе с некоторой окрестностью $|w - w_0| < \delta$. Выберем в этой окрестности некоторую точку w_1 , такую что $|w_1| > |w_0|$. Точке w_1 соответствует точка $z_1 \in E$, такая что $w_1 = f(z_1)$. Обозначим $|z_1 - z_0| = \varepsilon$. Если $\delta \rightarrow 0$, то $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу аналитичности функции $f(z)$. Следовательно, в любой окрестности точки z_0 существует точка z_1 , такая что $|f(z_1)| > |f(z_0)|$, т.е. точка z_0 не может быть точкой максимума. В силу произвольности z_0 $|f(z)|$ не может достигать наибольшего значения во внутренних точках области E . Следовательно, он достигает его на границе, что и требовалось доказать.

◊ Минимальное значение модуля функции $|f(z)|$ также не может достигаться внутри области E , что доказывается аналогично.

Теорема 15.3 (Лиувилля). *Функция, аналитическая и ограниченная на всей комплексной плоскости, есть постоянная.*

Доказательство. Пусть z_0 и z_1 – любые две точки, расположенные внутри замкнутого контура Γ . Используя формулу (13.2), можно записать

$$f(z_1) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{\zeta - z_1} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right] f(\zeta) d\zeta.$$

Выберем в качестве контура интегрирования окружность $|\zeta| = R$ с радиусом R , большим обоих чисел $|z_0|$, $|z_1|$. Тогда оценка интеграла дает

$$|f(z_1) - f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{(z_0 - z_1)f(\zeta)}{(\zeta - z_0)(\zeta - z_1)} d\zeta \right|.$$

Учтя, что $|f(\zeta)| < M$, даже когда $|\zeta| \rightarrow \infty$, найдем

$$|f(z_1) - f(z_0)| < \frac{|z_0 - z_1|MR}{(R - |z_0|)(R - |z_1|)}.$$

Устремим R к бесконечности ($R \rightarrow \infty$), сохранив z_0 и z_1 неподвижными. Тогда ясно, что $f(z_1) - f(z_0) = 0$, так как предел правой части неравенства равен нулю. В силу произвольности z_0 и z_1 заключаем, что функция $f(z)$ есть постоянная.

Отметим, что эта теорема допускает несколько очевидных обобщений. Одно из них заключается в том, что если условие ограниченности заменить условием возрастания модуля $|f(z)|$ не быстрее, чем $M|z|^n$, то $f(z)$ – полином степени не выше n . Еще одно обобщение мы приведем позднее, после того, как рассмотрим ряд Лорана.

ГЛАВА 2

Теория вычетов и ее приложения

Эта глава посвящена изложению основных положений теории вычетов. Теоретический материал иллюстрируется примерами. Глава снабжена приложением, где в удобной для использования в теории вычетов форме приведены необходимые сведения из теории функций вещественной переменной, касающиеся несобственных интегралов.

16. Ряд Тейлора

◆ Функциональная последовательность $\{u_n(z)\}$, $n = \overline{1, \infty}$, $z \in E$, называется равномерно сходящейся к функции $u(z)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует N_ε , не зависящее от z и такое, что для всех $n > N_\varepsilon$ и для всех z , принадлежащих области E , справедливо

$$|u(z) - u_n(z)| < \varepsilon.$$

◆ Функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = f(z), \quad z \in E, \quad (16.1)$$

называется равномерно сходящимся к $f(z)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует N_ε , не зависящее от z и такое, что для всех $n > N_\varepsilon$ и для всех z , принадлежащих области E , справедливо

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^n u_k(z) \right| < \varepsilon.$$

Теорема 16.1 (признак Вейерштрасса). *Если для всех z , принадлежащих области E ,*

- 1) $|u(z) - u_n(z)| \leq a_n$, $n = \overline{1, \infty}$ и числовая последовательность $\{a_n\}$ сходится к нулю, то последовательность $\{u_n(z)\}$ сходится равномерно в области E ;
- 2) $|u_n(z)| \leq b_n$, $n = \overline{1, \infty}$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд (16.1) сходится равномерно в области E .

Последовательность $\{a_n\}$ называется мажорирующей для последовательности $\{u_n(z)\}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – мажорирующим для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$.

Доказательство дословно повторяет доказательство соответствующей теоремы для вещественных функциональных рядов.

Теорема 16.2 (Вейерштрасса). *Пусть $u_n(z)$, $n = \overline{1, \infty}$, – аналитические в области E функции. Тогда, если ряд (16.1) сходится в E равномерно к функции $f(z)$, то*

1. $f(z)$ – аналитическая в E функция;
2. ряд можно почленно дифференцировать любое число раз:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z), \quad k = \overline{1, \infty}; \quad (16.2)$$

3. ряд (16.2) сходится равномерно в любой замкнутой подобласти G области E ;
4. ряд можно почленно интегрировать:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} u_n(z) dz \quad (16.3)$$

для любого контура Γ , лежащего в E .

Доказательство этой теоремы приведено, например, в [50, ?].

Теорема 16.3. Всякий степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = f(z) \quad (16.4)$$

внутри его круга сходимости сходится к аналитической функции и

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Доказательство. Согласно теореме Абеля, внутри круга сходимости степенной ряд сходится равномерно, что в силу теоремы Вейерштрасса является доказательством сделанного утверждения.

Теорема 16.4. Функция $f(z)$, аналитическая внутри круга $|z - z_0| < R$, разлагается в этом круге в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad (16.5)$$

где

$$C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = \overline{0, \infty}; \quad (16.6)$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad (16.7)$$

а Γ – произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур, целиком лежащий в круге $|z - z_0| < R$ и охватывающий точку z_0 .

Ряд (16.5) называется рядом Тейлора функции $f(z)$.

◊ Из формулы (14.4) следует, что (16.6) является следствием (16.7).

Доказательство. Пусть z принадлежит открытому кругу радиуса ρ ($\rho < R$) с центром в точке z_0 , а ζ лежит на окружности радиуса ρ с центром в точке z_0 . Тогда

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \left(\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right).$$

Но $\left| \frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right| < 1$ и, следовательно,

$$\frac{1}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta-z_0} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right)^n. \quad (16.8)$$

Ряд (16.8) сходится равномерно по ζ для $|z-z_0| < \rho$, так как он мажорируется рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z-z_0|^n}{\rho^{n+1}},$$

т.е. его можно почленно интегрировать. Домножим (16.8) на $f(\zeta)/(2\pi i)$ и проинтегрируем по окружности $|z-z_0| = \rho$. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.$$

С другой стороны, с учетом разложения (16.8) получим

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right)^n d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta. \end{aligned}$$

Обозначим

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Под интегралом стоит функция, аналитическая в кольце $0 < |z-z_0| < R$. Заменив здесь окружность $|z-z_0| = \rho$ любым кусочно-гладким замкнутым контуром Γ , целиком лежащим в круге $|z-z_0| < R$ и охватывающим точку z_0 , получим формулу (16.5), (16.7), что и требовалось доказать.

◊ Круг сходимости степенного ряда (16.5) $|z-z_0| < R$ является максимальным кругом, в котором функция $f(z)$, представимая этим рядом, является аналитической. В силу этого радиус сходимости R ряда Тейлора (16.5) определяет кратчайшее расстояние от центра разложения z_0 до ближайшей особой точки.

◊ Отметим, что теорема 16.3 является следствием определения аналитической функции как функции, дифференцируемой в окрестности некоторой точки z , т.е. удовлетворяющей условию Коши–Римана. Однако такой подход не единствен. Аналитическую функцию $f(z)$ можно определить выражением (16.4), тогда условия Коши–Римана становятся следствием такого определения. В этом случае очень часто (хотя и не всегда) вместо термина «аналитическая» (в смысле «однозначная аналитическая») используют термин «голоморфная функция». Выражение «голоморфная» в переводе с греческого имеет значение «подобная целой», что соответствует явлому виду (16.4), представляющему собой сумму слагаемых, содержащих $(z-z_0)$ в целой степени.

Обобщение понятия голоморфной функции приводит к понятию аналитической функции, что в нашем случае соответствует термину «многозначная

аналитическая» (полная аналитическая) функция (подробнее см. разд. «Аналитическое продолжение»).

Следствие. Разложение аналитической в области E функции $f(z)$ в ряд Тейлора единственное.

Доказательство этого утверждения для более общего случая (ряда Лорана) приведено в следующем разделе.

Соотношения (7.4), посредством которых были определены элементарные функции, с учетом теоремы 16.3 можно рассматривать как разложения этих функций в ряд Тейлора, сходящиеся на всей комплексной плоскости. Из формулы (16.6) следуют дополнительные тейлоровские разложения в круге $|z| < 1$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, \quad (16.9)$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n. \quad (16.10)$$

Разложения (16.9) и (16.10) написаны для тех однозначных ветвей, на которых функции равны нулю и единице, соответственно, при $z = 0$. Для того чтобы получить ряды Тейлора для других значений многозначных функций, например $\ln(1+z)$, следует к ряду (16.9) добавить слагаемое $2k\pi i$, соответствующее выбранной однозначной ветви.

В формуле (16.10) в общем случае α – произвольное комплексное число, так что для многозначной функции $(1+z)^\alpha = \exp[\alpha \ln(1+z)]$ выбрана однозначная ветвь

$$(1+z)^\alpha = \exp[\alpha \ln(1+z)].$$

В частных случаях, когда

а) $\alpha = n$, $n = \overline{1, \infty}$, функция $(1+z)^\alpha$ однозначна и разлагается по биному Ньютона в полином, сходящийся на всей комплексной плоскости;

б) $\alpha = -1$, функция представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии с показателем $q = -z$, $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n. \quad (16.11)$$

Пример 16.1. Разложить в ряд Тейлора по $z - i$ функцию $f(z) = z^3$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

Решение. Переидем в функции $f(z)$ к переменной $w = z - i$. Тогда $z = w + i$ и

$$f(w) = z^3 \Big|_{z=w+i} = (w+i)^3 = w^3 + 3iw^2 - 3w - i.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$f(z) = f(w) \Big|_{w=z-i} = (z-i)^3 + 3(z-i)^2i - 3(z-i) - i.$$

В силу единственности разложения в ряд Тейлора это и есть искомое разложение. Областью сходимости этого ряда является вся комплексная плоскость, за исключением бесконечно удаленной точки $z = \infty$ и радиус сходимости $R = \infty$.

Пример 16.2. Разложить в ряд Тейлора по степеням $z - \pi i/2$ функцию $f(z) = e^z$. Найти радиус сходимости полученного ряда.

Решение. Введем новую переменную $w = z - \pi i/2$, т.е. $z = w + \pi i/2$ и

$$f(w) = e^w \Big|_{z=w+\pi i/2} = e^{w+\pi i/2} = e^{\pi i/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}.$$

Здесь мы воспользовались известным разложением функции $f(w) = e^w$ в ряд Тейлора. Возвращаясь к исходным переменным, получим ряд

$$f(z) = e^z = f(w) \Big|_{z=w+\pi i/2} = i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - \pi i/2)^n}{n!},$$

сходящийся на всей комплексной плоскости, за исключением бесконечно удаленной точки $z = \infty$, радиус сходимости которого $R = \infty$.

Пример 16.3. Найти первые три члена разложения функции $f(z) = e^z/z$ в ряд Тейлора по степеням $z - 1/2$ и указать радиус сходимости этого ряда.

Решение. Найдем первые две производные этой функции

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{e^z z - e^z}{z^2} = \frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z^2}, \\ f''(z) &= \frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z^2} + 2 \frac{e^z}{z^3} - \frac{e^z}{z^2}. \end{aligned}$$

В точке $z = 1/2$ получим

$$f(1/2) = 2\sqrt{e}, \quad f'(1/2) = -2\sqrt{e}, \quad f''(1/2) = 10\sqrt{e}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n = \\ &= 2\sqrt{e} - 2\sqrt{e} \left(z - \frac{1}{2}\right) + \frac{10}{2} \sqrt{e} \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \dots \end{aligned}$$

Для определения радиуса сходимости ряда отметим, что ближайшей к центру разложения $z_0 = 1/2$ особой точкой является точка $z_1 = 0$, в которой функция $f(z)$ не определена. Расстояние между этими точками определяет радиус сходимости, равный $R = |z_1 - z_0| = 1/2$. Таким образом, областью сходимости ряда Тейлора является круг $|z - 1/2| < 1/2$.

Пример 16.4. Функцию

$$f(z) = \frac{1}{3 - 2z}$$

разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 1 + i$ и указать радиус сходимости.

Решение. Преобразуем аргумент функции, выделив выражение $(z - 1 - i)$:

$$\frac{1}{3 - 2z} = \frac{1}{(1 - 2i) - 2(z - 1 - i)}.$$

Вынесем множитель $(1 - 2i)$ и воспользуемся разложением (16.11). Тогда

$$\frac{1}{3 - 2z} = \frac{1}{\left[1 - \frac{2(z-1-i)}{1-2i}\right]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(1-2i)^{n+1}} (z-1-i)^n.$$

Радиус сходимости можно определить как расстояние от центра разложения $z_0 = 1 + i$ до ближайшей особой точки $z - 1 = 3/2$, т.е.

$$R = \left| \frac{3}{2} - 1 - i \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

или из условия сходимости разложения (16.11)

$$\left| \frac{2(z-1-i)}{1-2i} \right| < 1, \quad |z-1-i| < \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Пример 16.5. Функцию

$$f(z) = \frac{2}{(1+z)^3}$$

разложить в ряд Тейлора по степеням z . Указать радиус сходимости.

Решение. Заметим, что

$$\frac{2}{(1+z)^3} = \left(\frac{1}{1+z} \right)''$$

и учтем возможность почленного дифференцирования ряда Тейлора в круге его сходимости. Тогда из (16.11) двукратным дифференцированием находим

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+z)^3} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \right)'' = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) z^{n-2} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+2)(k+1) z^k. \end{aligned}$$

17. Ряд Лорана

Определение. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = f(z) \tag{17.1}$$

называется рядом Лорана. Здесь z_0 – фиксированная точка комплексной плоскости, z – переменная, а C_n , $n = -\infty, \infty$, – некоторые константы.

Ряд (17.1) сходится в точке z , если в этой точке сходятся ряды

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \tag{17.2}$$

и

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}, \tag{17.3}$$

т.е. областью сходимости ряда (17.1) является общая часть области сходимости рядов (17.2) и (17.3).

◆ Ряд (17.2) называется правильной частью ряда Лорана, а ряд (17.3) – его главной частью.

Областью сходимости ряда (17.2) является круг $|z - z_0| < R$, где R – радиус сходимости этого ряда. Внутри круга ряд сходится к аналитической функции $\varphi(z)$. Вопрос о сходимости ряда на границе круга решается индивидуально для каждой ее точки.

Рассмотрим теперь ряд (17.3). Сделаем в нем замену переменных

$$\tilde{z} = \frac{1}{z - z_0}.$$

Тогда получим степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \tilde{z}^n.$$

Обозначим его радиус сходимости $1/r$, тогда

$$\psi(\tilde{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \tilde{z}^n, \quad |\tilde{z}| < 1/r.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Таким образом, ряд (17.3) вне круга $|z - z_0| < r$ сходится к аналитической функции $\psi(z)$. Если $r < R$, то существует общая область сходимости рядов (17.2) и (17.3) – круговое кольцо $r < |z - z_0| < R$, в котором ряд (17.1) сходится к аналитической функции

$$f(z) = \varphi(z) + \psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R. \quad (17.4)$$

Теорема 17.1. Функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $r < |z - z_0| < R$, представляется в этом кольце рядом Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ с коэффициентами

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega, \quad (17.5)$$

где Γ – произвольный замкнутый контур, целиком лежащий в кольце $r < |z - z_0| < R$ и охватывающий точку z_0 .

Доказательство. Согласно теореме Коши 12.4 (для многосвязной области), справедлива формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(\omega) d\omega}{\omega - z},$$

где $\tilde{\gamma} = \Gamma_1^- + \Gamma_2^+$, а Γ_1, Γ_2 – окружности радиусов ρ_1 и ρ_2 ($r < \rho_1 < \rho_2 < R$), соответственно, с центром в точке z_0 (см. рис. 24). Тогда, согласно (13.4),

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho_2} \frac{f(\omega)}{\omega-z} d\omega - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho_1} \frac{f(\omega)}{\omega-z} d\omega,$$

где $z \in D_{\tilde{\gamma}}$: $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$. Рассмотрим дробь

$$\frac{1}{\omega-z} = \frac{1}{\omega-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\omega-z_0}} = \frac{1}{\omega-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\omega-z_0} \right)^n. \quad (17.6)$$

Ряд (17.6) сходится равномерно, так как для всех $|z - z_0| < R$ выполняется $\left| \frac{z-z_0}{\omega-z_0} \right| < 1$ для $\omega \in \Gamma_2$.

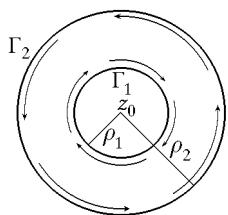


Рис. 24

Аналогично для $\omega \in \Gamma_1$

$$\frac{1}{\omega-z} = -\frac{-1}{z-z_0} \frac{1}{1 - \frac{\omega-z_0}{z-z_0}} = -\frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega-z_0}{z-z_0} \right)^n. \quad (17.7)$$

Ряд (17.7) также сходится равномерно по ω . Подставим ряды (17.6) и (17.7) в выражение для $f(z)$. Получим

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho_2} \frac{f(\omega)}{\omega-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\omega-z_0} \right)^n d\omega + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho_1} \frac{f(\omega)}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega-z_0}{z-z_0} \right)^n d\omega = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho_2} \frac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^{n+1}} d\omega + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho_1} f(\omega)(\omega-z_0)^n d\omega = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n C_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}, \end{aligned}$$

где обозначено

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho_2} \frac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^{n+1}} d\omega, \quad n = \overline{0, \infty};$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho_1} f(\omega)(\omega-z_0)^{n-1} d\omega, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Заметим, что подынтегральные выражения в коэффициентах C_n и C_{-n} являются аналитическими функциями в кольце $r < |z - z_0| < R$, поэтому значения соответствующих интегралов не изменятся при произвольном деформировании

контуров в области аналитичности. Можно положить $\rho_2 = \rho_1$ и, деформируя контур, получить

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega, \quad n = \overline{-\infty, \infty},$$

где Γ – произвольный замкнутый контур, целиком лежащий в кольце $r < |z - z_0| < R$ и охватывающий точку z_0 . Таким образом, теорема доказана.

Следствие 17.1.1. Ряд Лорана (17.1), (17.5) сходится равномерно в кольце $r/k \leq |z - z_0| \leq kR$, где $0 < k < 1$.

Доказательство. Правильная часть ряда Лорана, согласно теореме Абеля, сходится абсолютно в круге $|z - z_0| < R$ и равномерно в замкнутом круге $|z - z_0| \leq kR$. Главная часть представляет собой степенной ряд по переменной $\zeta = 1/(z - z_0)$ и, следовательно, также равномерно сходится в области $|\zeta| < k/r$, т.е. всюду вне круга $|z - z_0| > r/k$.

Следствие 17.1.2. Разложение в ряд Лорана единствено.

Доказательство. Пусть во всех точках z внутри некоторого кольца одновременно имеют место два разложения

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n (z - z_0)^n.$$

Умножим оба разложения на $(z - z_0)^{-k-1}$ и проинтегрируем вдоль окружности радиуса ρ_0 с центром в точке z_0 , лежащей внутри кольца, в которой оба ряда сходятся равномерно. Тогда с учетом

$$\int_{|z-z_0|=\rho_0} (z - z_0)^{n-k-1} dz = 2\pi i \delta_{n,k}$$

получим

$$2\pi i C_k = 2\pi i \tilde{C}_k, \quad \text{или} \quad C_k = \tilde{C}_k, \quad k = \overline{-\infty, \infty}.$$

Таким образом, следствие доказано.

Аналогично доказывается единственность разложения в ряд Тейлора.

Следствие 17.1.3. Коэффициенты C_n (17.5) удовлетворяют неравенству Коши

$$|C_n| \leq \frac{M}{R_0^n},$$

где

$$M = \max_{\omega \in \Gamma_0} |f(\omega)|, \quad \Gamma_0 : |\omega - z_0| = R_0, \quad r < R_0 < R.$$

Доказательство. Из формулы (17.5) в силу произвольности Γ следует

$$\begin{aligned} |C_n| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega-z_0|=R_0} \frac{|f(\omega)|}{|\omega - z_0|^{n+1}} |d\omega| \leq \\ &\leq \frac{M}{2\pi R_0^{n+1}} \int_{|\omega-z_0|=R_0} |d\omega| = \frac{M}{R_0^n}, \end{aligned}$$

для $n = \overline{-\infty, \infty}$.

Следствие 17.1.4. Если функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области E , ограниченной внешним контуром Γ и внутренними $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, а точка z_0 расположена внутри (или на границе) одного из контуров Γ_n , например Γ_1 (рис. 25), и можно указать такие $r < R$, что

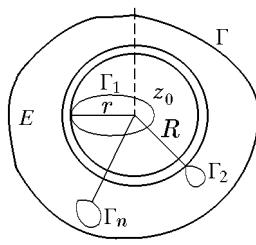


Рис. 25

то функция $f(z)$ может быть представлена рядом Лорана (17.1) с коэффициентами (17.5) в кольце $r < |z - z_0| < R$.

Доказательство очевидно.

◊ Следствие остается справедливым, если контуры Γ_n вырождаются в особые точки z_n .

Пример 17.1. Функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)^2}$$

разложить в ряд Лорана по степеням $(z - 1)$.

Решение. Подынтегральная функция имеет две особые точки $z_0 = 1, z_1 = -1$. Поскольку точка $z_0 = 1$ является центром разложения, то согласно следствию 17.1.4 для кольца аналитичности $r < |z - 1| < R$ имеем $r = |1 - 1| = 0, R = |-1 - 1| = 2$, и, следовательно, областью сходимости является кольцо $0 < |z - 1| < 2$, представляющее собой в данном случае круг $|z - 1| < 2$ с выколотым центром $z = 1$.

Если из комплексной плоскости удалить круг $|z - 1| \leq 2$, то получится еще одно кольцо: $|z - 1| > 2$, в котором функция $f(z)$ аналитична. Рассмотрим последовательно обе области.

I. $0 < |z - 1| < 2$.

Первый способ. Чтобы найти коэффициенты C_n , воспользуемся непосредственно формулой (17.5). Тогда

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{1/(z^2 - 1)^2}{(z - 1)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{(z + 1)^2(z - 1)^{n+3}},$$

где Γ_1 – произвольный замкнутый контур, целиком лежащий в кольце $0 < |z - 1| < 2$.

Если $n \leq -3$, то подынтегральная функция аналитична во всех точках внутри контура Γ_1 , включая точку $z_0 = 1$, и, следовательно,

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{(z + 1)^2(z - 1)^{n+3}} = 0.$$

Если же $n > -3$, то, согласно (17.5), для функции $1/(z + 1)^2$, аналитической внутри Γ_1 , имеем

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{1/(z^2 - 1)^2}{(z - 1)^{n+1}} dz = \frac{1}{(n+2)!} \frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}} \left[\frac{1}{(z + 1)^2} \right] \Big|_{z=1} = \\ &= \frac{1}{(n+2)!} \frac{(-1)^n (n+3)!}{(z + 1)^{n+4}} \Big|_{z=1} = \frac{(-1)^n (n+3)}{2^{n+4}}. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд Лорана для рассматриваемой функции в кольце $0 < |z - 1| < 2$ будет иметь вид

$$\frac{1}{(z^2 - 1)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z - 1)^n = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}(z - 1)^n.$$

Второй способ. С учетом того, что функция $1/(z^2 - 1)$ просто разлагается на элементарные дроби

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{(z - 1)(z + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z + 1} \right),$$

функцию $f(z)$ можно записать как

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z + 1} \right) \right]^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(z - 1)^2} - \frac{2}{(z - 1)(z + 1)} + \frac{1}{(z + 1)^2} \right] \end{aligned}$$

или с учетом предыдущего разложения

$$\frac{1}{(z^2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(z - 1)^2} - \frac{1}{z - 1} + \frac{1}{z + 1} + \frac{1}{(z + 1)^2} \right].$$

Два первых слагаемых уже имеют нужный вид, являясь степенями разности $(z - 1)$, а два последних связаны соотношением

$$\frac{1}{(z + 1)^2} = - \left(\frac{1}{z + 1} \right)'.$$

Таким образом, с помощью тождественных преобразований вся задача свелась к разложению функции $1/(1 + z)$ в ряд Лорана. Для этого представим ее в виде

$$\frac{1}{1 + z} = \frac{1}{2 + (z - 1)} = \frac{1}{2[1 + (z - 1)/2]},$$

позволяющем воспользоваться разложением (16.11), так как $|z - 1|/2 < 1$ (или $|z - 1| < 2$), откуда

$$\frac{1}{1 + z} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z - 1}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z - 1)^n$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z + 1)^2} &= - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z - 1)^n \right)' = \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} n (z - 1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} (n+1) (z - 1)^n. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + z} + \frac{1}{(1 + z)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z - 1)^n + \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} (n+1) (z - 1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} (n+3) (z - 1)^n \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$\frac{1}{(z^2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} (n+3)(z-1)^n \right].$$

Объединив выражение в квадратных скобках в одну сумму, окончательно имеем разложение

$$\frac{1}{(z^2 - 1)^2} = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+4}} (n+3)(z-1)^n,$$

совпадающее с тем, которое мы получили ранее.

II. $|z - 1| > 2$

Первый способ. Воспользуемся непосредственно формулой (17.5). Тогда

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{dz/[(z^2 - 1)^2]}{(z-1)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{(z+1)^2(z-1)^{n+3}},$$

где Γ_2 – произвольный замкнутый контур, целиком лежащий в кольце $|z - 1| > 2$ и охватывающий точки $z_0 = 1$ и $z_1 = -1$. Если γ_0 и γ_1 – произвольные непересекающиеся контуры, охватывающие точки $z_0 = 1$ и $z_1 = -1$, то, согласно (12.7), для коэффициентов C_n имеем

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{(z+1)^2(z-1)^{n+3}} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\gamma_0} \frac{dz/[(z+1)^2]}{(z-1)^{n+3}} + \int_{\gamma_1} \frac{dz/[(z-1)^{n+3}]}{(z+1)^2} \right]. \end{aligned}$$

Первый интеграл уже вычислялся:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{dz/[(z+1)^2]}{(z-1)^{n+3}} = \begin{cases} 0, & n \leq -3; \\ (-1)^n (n+3)/2^{n+4}, & n > -3. \end{cases}$$

Аналогично вычисление второго интеграла дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{dz/[(z-1)^{n+3}]}{(z+1)^2} &= \left[\frac{1}{(z-1)^{n+3}} \right]' \Big|_{z=-1} = \\ &= -\frac{n+3}{(z-1)^{n+4}} \Big|_{z=-1} = -\frac{(-1)^n (n+3)}{2^{n+4}}. \end{aligned}$$

С учетом этого коэффициенты C_n можно записать

$$C_n = \begin{cases} -\frac{(-1)^n (n+3)}{2^{n+4}}, & n \leq -3; \\ \frac{(-1)^n (n+3)}{2^{n+4}} - \frac{(-1)^n (n+3)}{2^{n+4}} = 0, & n > -3 \end{cases}$$

или

$$C_n = \begin{cases} -\frac{(-1)^n (n+3)}{2^{n+4}}, & n \leq -4; \\ 0, & n > -4. \end{cases}$$

Таким образом, в кольце $|z - 1| > 2$ получим разложение

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} &= - \sum_{n=-\infty}^{-4} \frac{(-1)^n(n+3)(z-1)^n}{2^{n+4}} = \\ &= - \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n(-n+3)}{2^{-n+4}(z-1)^n} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n(n-3)}{2^{-n+4}(z-1)^n}, \end{aligned}$$

которое после изменения индекса суммирования примет вид

$$\frac{1}{(z^2 - 1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)2^n}{(z-1)^{n+4}}.$$

Второй способ. Как и в предыдущем случае, воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} \right], \\ \frac{1}{(z+1)^2} &= - \left(\frac{1}{z+1} \right)' . \end{aligned}$$

Однако для того чтобы воспользоваться разложением (17.1) в кольце $|z-1| > 2$, представим $1/(z+1)$ в виде

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{(z-1)[1+2/(z-1)]},$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{z-1} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(z-1)^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{z-1} - \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{4}{(z-1)^3} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(z-1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Поменяв индекс суммирования $n-3 \rightarrow n$, получим

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{4}{(z-1)^3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+3}}{(z-1)^{n+4}}$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+1)^2} &= - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(z-1)^{n+1}} \right)' = \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{4}{(z-1)^3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)2^n}{(z-1)^{n+2}}, \end{aligned}$$

или после замены индекса суммирования ($n-2 \rightarrow n$)

$$\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{4}{(z-1)^3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+3)2^{n+2}}{(z-1)^{n+4}}.$$

Таким образом, получим разложение

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} - \frac{2}{(z-1)^2} + \right. \\ &\quad + \frac{4}{(z-1)^3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+3}}{(z-1)^{n+4}} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{4}{(z-1)^3} + \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+3) 2^{n+2}}{(z-1)^{n+4}} \right] = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+2}}{(z-1)^{n+4}} (-2 + n + 3) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 2^n}{(z-1)^{n+4}}, \end{aligned}$$

совпадающее с разложением, полученным первым способом.

Пример 17.2. Разложить в ряд Лорана в окрестности нуля функцию $f(z) = e^{1/z}$.

Решение. Используя известное разложение

$$e^\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!},$$

получим

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}.$$

Этот ряд сходится для всех z , кроме $z = 0$, т.е. в кольце $|z| > 0$. Кольцо $|z| > 0$ представляет собой всю комплексную плоскость с выколотым началом координат.

Пример 17.3. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$$

в кольце $1 < |z| < 3$.

Решение. В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-3)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1} \right); \\ \frac{1}{z-3} &= -\frac{1}{3} \frac{1}{1-z/3} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}, \quad |z| < 3; \\ \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad |z| > 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \right).$$

Пример 17.4. Найти и построить области сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+i) \left(\frac{z}{1+i} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{z^n}. \quad (17.8)$$

Решение. 1) Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+i) \left(\frac{z}{1+i} \right)^n \quad (17.9)$$

и исследуем его на сходимость методом Даламбера

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1+i)[z/(1+i)]^{n+1}}{(n+i)[z/(1+i)]^n} \right| = \\ &= \left| \frac{z}{1+i} \right| = \frac{|z|}{\sqrt{2}} < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд (17.9) сходится в круге $|z| < \sqrt{2}$.

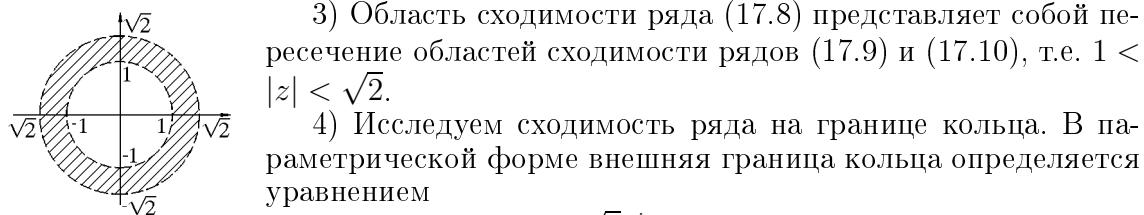
2) Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{z^n}. \quad (17.10)$$

Применим признак Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2 z^n}{z^n z^{n+1}} \right| = \left| \frac{1}{z} \right| < 1.$$

Следовательно, ряд (17.10) сходится вне круга единичного радиуса $|z| > 1$.



3) Область сходимости ряда (17.8) представляет собой пересечение областей сходимости рядов (17.9) и (17.10), т.е. $1 < |z| < \sqrt{2}$.

4) Исследуем сходимость ряда на границе кольца. В параметрической форме внешняя граница кольца определяется уравнением

$$z = \sqrt{2}e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi[.$$

Рис. 26
Исследуем на сходимость ряд

$$\begin{aligned} J &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+i) \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\varphi}}{1+i} \right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+i) \left(\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\pi/4}} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+i) e^{i(\varphi-\pi/4)n}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

Проверяем выполнение необходимого признака

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+i) \left\{ \cos \left[\left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right] + i \sin \left[\left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} = \infty.$$

Следовательно, внешняя граница кольца не входит в область сходимости. Аналогично сходимость ряда (17.8) на внутренней границе кольца определяется сходимостью ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{in\varphi}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\cos n\varphi - i \sin n\varphi). \quad (17.11)$$

Проверим выполнение необходимого признака

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\cos n\varphi - i \sin n\varphi) = \infty,$$

т.е. ряд (17.11) расходится. Окончательно для области сходимости получим $1 < |z| < \sqrt{2}$ (см. рис. 26).

Пример 17.5. Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

по степеням $z - z_0$, где $z_0 = 3 - i$.

Решение. 1) Разложим функцию $f(z)$ на элементарные дроби, применив метод неопределенных коэффициентов. Поскольку знаменатель дроби имеет корни $z_{1,2} = \pm i$, то

$$\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{A}{z + i} + \frac{B}{z - i}.$$

Приведя правую часть к общему знаменателю

$$z = A(z - i) + B(z + i)$$

и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z

$$\begin{array}{c|l} z^1 & 1 = A + B, \\ z^0 & 0 = -Ai + Bi, \end{array}$$

из второго уравнения получим равенство $A = B$, подставив которое в первое уравнение системы, найдем $A = 1/2$, $B = 1/2$. Следовательно,

$$\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{1}{2(z + i)} + \frac{1}{2(z - i)}.$$

В дальнейшем воспользуемся известным разложением (16.11).

2) Преобразуем первую дробь к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{z + i} &= \frac{1}{(i - 3) + 3 + z} = \frac{1/3}{1 + (z + i - 3)/3} = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z + i - 3}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n (z + i - 3)^n, \\ &\quad \left| \frac{z + i - 3}{3} \right| < 1. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+i} &= \frac{1}{(z+i-3)+3} = \frac{1/(z+i-3)}{1+3/(z+i-3)} = \\ &= \frac{1}{z+i-3} \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \left(\frac{1}{z+i-3} \right)^n, \quad \left| \frac{3}{z+i-3} \right| < 1. \end{aligned}$$

3) Аналогично преобразуем вторую дробь

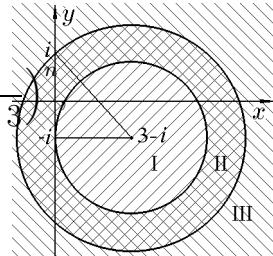
$$\begin{aligned} \frac{1}{z-i} &= \frac{1}{(z+i-3)-2i+3} = \\ &= \frac{1}{3-2i} \frac{1}{1-\frac{z+i-3}{2i-3}} = \\ &= \frac{1}{3-2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i-3} \right)^n (z+i-3)^n, \\ &\quad \left| \frac{z+i-3}{2i-3} \right| < 1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-i} &= \frac{1}{z+i-3} \frac{1}{1+\frac{3-2i}{z+i-3}} = \frac{1}{z+i-3} \sum_{n=0}^{\infty} (2i-3)^n \left(\frac{1}{z+i-3} \right)^n \\ &\quad \left| \frac{2i-3}{z+i-3} \right| < 1. \end{aligned}$$

4) Полученные разложения определяют функцию в разных областях:

Рис. 27



1. $f(z) = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n (z+i-3)^n + \frac{1}{2(3-2i)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i-3}{2i-3} \right)^n.$

Разложение справедливо в области I: $|z+i-3| < 3$ (см. рис. 27).

$$\begin{aligned} 2. \quad f(z) &= \frac{1}{2(z+i-3)} \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \left(\frac{1}{z+i-3} \right)^n + \\ &+ \frac{1}{2(z+i-3)} \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \left(\frac{2i-3}{z+i-3} \right)^n. \end{aligned}$$

Разложение справедливо в области III: $|z+i-3| > \sqrt{13}$ (см. рис. 27).

$$\begin{aligned} 3. \quad f(z) &= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n (z+i-3)^n + \\ &+ \frac{1}{2(z+i-3)} \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \left(\frac{2i-3}{z+i-3} \right)^n. \end{aligned}$$

Пересечение областей сходимости рядов, стоящих в правой части, пусто, т.е. $z \in \emptyset$.

$$\begin{aligned} 4. \quad f(z) &= \frac{1}{2(z+i-3)} \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \left(\frac{1}{z+i-3} \right)^n + \\ &+ \frac{1}{2(3-2i)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i-3}{2i-3} \right)^n. \end{aligned}$$

Разложение справедливо в области II: $3 < |z+i-3| < \sqrt{13}$ (см. рис. 27).

Пример 17.6. Разложить функцию

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$.

Решение. Перепишем функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \sin z$$

и воспользуемся разложением функции $\sin z$ в ряд Тейлора. Получим

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!}.$$

Область сходимости полученного ряда – кольцо $|z| > 0$.

Пример 17.7. Установить связь между рядами Лорана и рядами Фурье.

Решение. Ряд Фурье функции $f(t)$, интегрируемой на отрезке $[0, 2\pi]$, в комплексной форме определяется соотношением

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int}, \quad (17.12)$$

где для коэффициентов Фурье справедлива формула

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n = \overline{-\infty, \infty}. \quad (17.13)$$

Положим $e^{it} = z$, $\tilde{f}(z) = f(t)$. Тогда формула (17.12) примет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n. \quad (17.14)$$

Учтем, что, во-первых, $dt = dz/(iz)$ и, во-вторых, при изменении t от нуля до 2π переменная z пробегает замкнутый контур $|z| = 1$ в положительном направлении. Тогда коэффициенты (17.13) можно записать

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{\tilde{f}(z) dz}{z^{n+1}}. \quad (17.15)$$

Сравнив (17.14), (17.15) с (17.1), (17.5), можно сделать вывод, что ряд Фурье (17.12), (17.13) функции $f(t)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ является рядом Лорана функции $\tilde{f}(z) = f(t)$, если $z = e^{it}$. Об интегралах (17.15) см. также разд. 23.1.

18. Изолированные особые точки аналитических функций

18.1. Классификация изолированных особых точек

◆ Точка $z_0 \in E$ называется правильной точкой функции $f(z)$, если существует сходящийся степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n,$$

который в общей части области E и своего круга сходимости $|z - z_0| < R$ сходится к функции $f(z)$. Точки $z \in \bar{E}$, не являющиеся правильными для $f(z)$, называются ее особыми точками.

Это определение эквивалентно определению правильных точек, данному нами в первой главе с использованием понятия аналитичности функции $f(z)$. Такая формулировка более удобна для целей данной главы.

◆ Особая точка z_0 аналитической функции $f(z)$ называется изолированной особой точкой, если существует ε -окрестность точки z_0 , не содержащая других особых точек функции $f(z)$.

◊ В дальнейшем мы ограничим рассмотрение изолированными особыми точками, классификацию которых будем проводить в зависимости от вида лорановского разложения (ряда Лорана) функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 .

Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z - z_0)^n = \psi(z) + \varphi(z); \quad (18.1)$$

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n, \quad \psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}(z - z_0)^{-n}.$$

◆ Особая точка z_0 называется **устранимой особой точкой** функции $f(z)$, если в разложении (18.1) функции $f(z)$ в ряд Лорана нет слагаемых с отрицательными степенями, т.е. $\psi(z) = 0$.

◆ Особая точка называется **полюсом порядка m** функции $f(z)$, если в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана содержится конечное число слагаемых с отрицательными степенями $(z - z_0)$. Здесь m – старшая отрицательная степень $z - z_0$, $C_{-m} \neq 0$. При $m = 1$ полюс называется простым, а при $m > 1$ – кратным.

◆ Точка z_0 называется **существенно особой точкой** функции $f(z)$, если в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана содержится неограниченное число отличных от нуля слагаемых с отрицательными степенями $(z - z_0)$.

◆ Функция $f(z)$ называется **целой**, если она представима степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n, \quad (18.2)$$

радиус сходимости которого равен бесконечности.

◊ Из определения целой функции следует, что функция, аналитическая во всей комплексной плоскости за исключением, может быть, бесконечно удаленной точки, является целой. Очевидно, что функции e^z , $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, $\cos z$, а также полиномы от них – целые функции.

◆ Функция $f(z)$ называется **мероморфной**, если ее можно представить в виде

$$f(z) = \frac{g(z)}{\varphi(z)}, \quad (18.3)$$

где $g(z)$ и $\varphi(z)$ – целые функции.

◊ Нетрудно заметить, что функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$, а также полиномы от них – мероморфные функции.

Более подробное и полное рассмотрение свойств целой и мероморфной функций будет проведено в разд. «Приложение теории вычетов».

18.2. Устранимая особая точка

Рассмотрим простейшие свойства устранимых изолированных особых точек.

Теорема 18.1. *Если точка z_0 – устранимая особая точка аналитической функции $f(z)$, то существует конечный предел*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C_0, \quad |C_0| < \infty. \quad (18.4)$$

Доказательство. Так как правая часть равенства (18.1) является степенным рядом, сходящимся в круге $|z - z_0| < R$, то, по теореме Вейерштрасса, его сумма аналитична в круге и, следовательно, непрерывна в точке z_0 , поэтому при $z \rightarrow z_0$ сумма ряда имеет предел, который равен C_0 .

Справедлива и обратная

Теорема 18.2. *Если для функции $f(z)$, аналитической в окрестности изолированной особой точки z_0 , справедливо соотношение (18.4), то z_0 – устранимая особая точка этой функции.*

Доказательство. В силу существования предела (18.4) и аналитичности функции $f(z)$ можно указать некоторую окрестность $|z - z_0| < R$ точки z_0 , в которой эта функция ограничена, т.е. $|f(z)| < M$, и, кроме того, может быть разложена в ряд Лорана (17.1) с коэффициентами (17.5), удовлетворяющему неравенству Коши в силу следствия 17.1.3, т.е.

$$C_n < MR_0^{-n}.$$

Согласно (17.5), R_0 может быть выбран сколь угодно малым. Но тогда из неравенства Коши следует, что коэффициенты $C_n = 0$ для всех $n < 0$. Это означает, что главная часть ряда Лорана полностью отсутствует и точка z_0 является устранимой особой точкой.

Пример 18.1. Показать, что точка $z = 0$ является устранимой особой точкой функции

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

Решение. Функция $f(z)$ не определена при $z = 0$. При $z \neq 0$ ее можно представить рядом

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!},$$

т.е. точка $z = 0$ – устранимая особая точка. Из разложения следует

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Если положить $f(0) = 1$, то функция $f(z)$ будет аналитической в точке $z = 0$. Именно поэтому особая точка называется устранимой. В силу этого свойства при необходимости в дальнейшем будем рассматривать эту точку как правильную.

18.3. Полюс

Теорема 18.3. *Если точка z_0 является полюсом порядка m аналитической функции $f(z)$, то*

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) &= \infty, \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^m &= C_{-m}, \end{aligned} \tag{18.5}$$

т.е. $0 < |C_n| < \infty$.

Доказательство. Если z_0 – полюс порядка m аналитической функции, то, по определению,

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{C_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)$$

или

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} C_n(z - z_0)^n,$$

причем $|C_{-m}| \neq 0$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = (z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} C_n(z - z_0)^{n+m} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{k-m}(z - z_0)^k.$$

Таким образом, для функции $\Phi(z)$ точка z_0 является устранимой особой точкой и, следовательно, согласно предыдущей теореме,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Phi(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = C_{-m}.$$

Так как $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m = 0$ и $|C_{-m}| \neq 0$, $|C_{-m}| < \infty$, то получаем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Phi(z)}{(z - z_0)^m} = \infty,$$

что и требовалось доказать.

Справедлива также обратная

Теорема 18.4. *Если для функции $f(z)$, аналитической в окрестности изолированной особой точки z_0 , справедливо соотношение (18.5), то точка z_0 – полюс этой функции порядка m .*

Доказательство. Согласно теореме 18.2, точка z_0 является устранимой особой точкой для произведения $f(z)(z - z_0)^m$, которое по этой причине может быть разложено в ряд Тейлора

$$f(z)(z - z_0)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

причем $a_0 = C_{-m} \neq 0$, поскольку

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^m = C_{-m} = a_0.$$

Разделив указанное разложение на $(z - z_0)^m$, для функции $f(z)$ получим лорановское разложение

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-m},$$

определяющее точку z_0 как полюс порядка m .

◆ Точка z_0 называется нулем функции $f(z)$ порядка m , если

$$f(z_0) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} = 0, \quad k = \overline{1, m-1},$$

а

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} \neq 0 < \infty.$$

Кроме того, для практического решения задач нужно напомнить, что если точка z_0 является нулем порядка m функции $f(z)$, то

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0,$$

а сама функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 может быть представлена в виде

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad g(z_0) \neq 0.$$

С учетом сказанного из теоремы 18.4 вытекает

Следствие 18.4.1. Если точка z_0 является нулем порядка m функции $f(z)$, то она является полюсом порядка m функции $1/f(z)$.

Доказательство. Действительно, функцию $1/f(z)$ можно записать как $1/[(z - z_0)^m g(z)]$, откуда следует

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m \frac{1}{(z - z_0)^m g(z)} = \frac{1}{g(z_0)} = C_{-m} \neq 0, \quad |C_{-m}| < \infty.$$

Пример 18.2. Показать, что для функции $1/(\sin z - z)$ точка $z_0 = 0$ является полюсом третьего порядка.

Решение. Достаточно показать, что $z_0 = 0$ есть нуль третьего порядка для знаменателя $\sin z - z$. Для этого найдем $(\sin z - z)|_{z=0} = 0$, $(\sin z - z)'|_{z=0} = (\cos z - 1)|_{z=0} = 0$, $(\sin z - z)''|_{z=0} = \sin z|_{z=0} = 0$, $(\sin z - z)'''|_{z=0} = \cos z|_{z=0} = 1$. Так как производная третьего порядка отлична от нуля, точка $z_0 = 0$ — нуль третьего порядка.

Следствие 18.4.2. Если точка z_0 является нулем порядка m функции $\varphi(z)$ и порядка k функции $\psi(z)$, то для функции $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$ точка z_0 является

- нулем порядка n , если $m - k = n > 0$;
- устранимой особой точкой, если $m - k = 0$;
- полюсом порядка n , если $k - m = n > 0$.

Пример 18.3. Показать, что для функции $z^2/(\sin z - z)$ точка $z = 0$ является простым полюсом.

Решение. Так как $z = 0$ есть нуль порядка $m = 2$ для числителя и порядка $k = 3$ для знаменателя (см. предыдущий пример), то $n = k - m = 1$, т.е. $z = 0$ – простой полюс.

18.4. Существенно особая точка

Теорема 18.5 (Сохоцкого–Вейерштрасса). *Предел функции $f(z)$ в ее существенно особой точке не существует. Другими словами, для любого наперед заданного комплексного числа A существует последовательность $\{z_n\}$, сходящаяся к существенно особой точке z_0 , такая что*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A. \quad (18.6)$$

Доказательство. 1. Пусть $A = \infty$. Очевидно, что в этом случае существует, по меньшей мере, одна последовательность $\{z_n\} \rightarrow z_0$, для которой справедливо соотношение (18.6). Действительно, если такой последовательности не существует, то функция $f(z)$ будет ограниченной в окрестности точки z_0 , а сама точка в соответствии с теоремой 18.2 и вопреки условию доказываемой теоремы будет устранимой особой точкой.

2. Пусть $A \neq \infty$. Будем снова исходить из противного. Пусть соотношение (18.6) не выполняется. Тогда должны существовать окрестность $0 < |z - z_0| < \delta$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $|f(z) - A| > \varepsilon$ при $0 < |z - z_0| < \delta$.

Построим функцию

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}.$$

Эта функция является аналитической в окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$ и, кроме того, удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(z)| = \frac{1}{|f(z) - A|} < \frac{1}{|\varepsilon|}.$$

Последнее означает, что функция $\varphi(z)$ в окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$ является ограниченной. Поскольку точка z_0 – изолированная особая точка для функции $f(z)$, то такова же она и для функции $\varphi(z)$. Ограничность функции $\varphi(z)$ позволяет утверждать (теорема 18.2), что существует предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = B < \infty.$$

Определив зависимость $f(z)$ от $\varphi(z)$

$$f(z) = A + \frac{1}{\varphi(z)}, \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

и вычислив предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \begin{cases} A + 1/B, & B \neq 0; \\ \infty, & B = 0, \end{cases}$$

приходим к заключению, что точка z_0 – либо устранимая особая точка, либо полюс функции $f(z)$, что противоречит условию теоремы и доказывает ее справедливость.

Из доказанных теорем 18.2 и 18.4 непосредственно вытекает

Теорема 18.6. *Если для функции $f(z)$, аналитической в окрестности изолированной особой точки z_0 , предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует (да же бесконечный), то точка z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$.*

◊ Таким образом, если в изолированной особой точке

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C, |C| < \infty,$

то z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$;

2. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty, \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^m = C_{-m}, 0 < |C_{-m}| < \infty,$

то z_0 – полюс функции $f(z)$ порядка m ;

3. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует, даже бесконечный,

то z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$.

Значение предела функции $f(z)$ в особой точке z_0 можно положить в основу классификации изолированных особых точек функции $f(z)$.

Пример 18.4. Показать, что функция

$$f(z) = e^{-1/z^2}$$

имеет существенно особую точку $z = 0$.

Решение. *Первый способ.* Рассмотрим $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

1. Пусть $z = x$. Тогда

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = 0.$$

2. Пусть $z = iy$, тогда

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{y \rightarrow 0} e^{1/y^2} = \infty.$$

Следовательно, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует и точка $z = 0$ – существенно особая.

Второй способ. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$. Воспользуемся известным разложением

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$$

и получим

$$f(z) = e^{-1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-2n}.$$

Полученное разложение содержит бесконечное число отличных от нуля слагаемых с отрицательными степенями z . Следовательно, точка $z = 0$ – существенно особая.

Пример 18.5. Найти изолированные особые точки функции

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

и определить их тип.

Решение. *Первый способ.* Особые точки определяются условием $e^z = 1$, или

$$z = \ln 1 = \ln 1 + i \operatorname{Arg} 1 = 0 + i2\pi k, \quad k = \overline{-\infty, \infty}.$$

Достаточно определить тип одной точки, например при $k = 0$. Представим e^z в виде ряда. Тогда можно записать

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 / \left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) = 1 / \left(z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} \right) = \\ &= 1 / \left(z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} \right) = 1 / \left[z \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} \right) \right] \end{aligned}$$

или

$$1 / \left[z \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} \right) \right] = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} \right]^n.$$

В этом разложении существует только одно слагаемое с отрицательной степенью z . Тогда $z = 0$ – полюс первого порядка, а функция $f(z)$ имеет простые полюса в точках $z = 0 + i2\pi k$, $k = \overline{-\infty, \infty}$.

Второй способ. Особые точки определяются условием $e^z = 1$, или

$$z = \ln 1 = \ln 1 + i \operatorname{Arg} 1 = 0 + i2\pi k, \quad k = \overline{-\infty, \infty}.$$

Так как точки $z_k = 2\pi ik$ являются простыми нулями функции $f(z) = e^z - 1$, то они являются простыми полюсами функции $1/f(z)$.

Заметим, что $z = \infty$ также является особой точкой функции $f(z)$. К рассмотрению таких особых точек мы и переходим.

18.5. Бесконечно удаленная точка

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$, т.е. она аналитична в кольце $R < |z| < \infty$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(\omega) = f\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \text{где } \omega = \frac{1}{z}.$$

Функция $\varphi(\omega)$ – аналитическая в кольце $0 < |\omega| < 1/R$ кроме, может быть, самой точки $\omega = 0$. Разложим функцию $\varphi(\omega)$ в ряд Лорана

$$\varphi(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n \omega^n, \quad 0 < |\omega| < 1/R. \quad (18.7)$$

Возвратившись к переменной z , получим

$$f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n, \quad R < |z| < \infty, \quad (18.8)$$

где $C_n = \tilde{C}_{-n}$.

◆ Разложение (18.8) называется разложением функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

◆ Бесконечно удаленная точка является изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует $R > 0$ такое, что функция $f(z)$ вне круга $|z| > R$ не имеет особых точек, находящихся на конечном расстоянии от точки $z = 0$.

◊ Будем классифицировать особенности в бесконечно удаленной точке в соответствии с классификацией точки $\omega = 0$ функции $\varphi(\omega)$ (18.7). В результате приходим к следующему определению.

◆ Точка $z = \infty$ функции $f(z)$ называется

1) устранимой особой точкой, если разложение (18.8) не содержит отличных от нуля слагаемых с положительными степенями z ;

2) полюсом порядка m , если разложение (18.8) содержит конечное число m отличных от нуля слагаемых с положительными степенями z ;

3) существенно особой точкой, если разложение (18.8) содержит бесконечное число отличных от нуля слагаемых с положительными степенями z .

◆ Если точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$, то говорят, что функция $f(z)$ – аналитическая в точке $z = \infty$ и полагают $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$.

Пример 18.6. Найти особые точки функций

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f_1(z) &= \frac{1}{e^z - 1} e^{1/(z-1)}; \quad \text{б)} \quad f_2(z) = \frac{z}{\sin^2[\pi/(z-1)]}; \\ \text{в)} \quad f_3(z) &= \frac{z-1}{z^2}. \end{aligned}$$

Решение. а) Особые точки функции $f_1(z)$ определяются из уравнений $z-1 = 0$, $e^z - 1 = 0$, т.е. $z = 1$, $z_k = 2\pi ki$, $k = -\infty, \infty$.

Так как $\lim_{z \rightarrow 1} e^{1/(z-1)}$ не существует, то точка $z = 1$ является существенно особой. Так как точки $z_k = 2\pi ki$ – простые нули функции $e^z - 1$, то они являются простыми полюсами функции $f_1(z)$. Точка $z = \infty$, будучи предельной точкой полюсов z_k , не является изолированной особой точкой.

б) Аналогично точки $z_k = 1 + 1/k$, будучи нулями функции $\sin[\pi/(z-1)]$, являются полюсами второго порядка функции $f_2(z)$. Точка $z = 1$ является предельной точкой полюсов z_k (неизолированной особой точкой). Точка $z = \infty$ в силу эквивалентности

$$\sin \frac{\pi}{z-1} \sim \frac{\pi}{z}, \quad z \rightarrow \infty$$

является полюсом третьего порядка функции $f_2(z) \sim z^3$ при $z \rightarrow \infty$.

в) Точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой функции $f_3(z)$, так как

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z^2} = 0,$$

а точка $z = 0$ – полюсом второго порядка.

Теорема 18.7. Если функция $f(z)$ аналитична в расширенной комплексной плоскости, то она постоянна.

Доказательство. Рассмотрим окружность $|z| = R$. Из аналитичности функции $f(z)$ в точке $z = \infty$ следует ее ограниченность вне круга $|z| > R$. С другой стороны, из аналитичности функции в замкнутом круге $|z| \leq R$ следует ее ограниченность в этом круге. Но тогда функция ограничена во всей плоскости, т.е. она постоянна.

19. Аналитическое продолжение

Теорема 19.1 (о единственности). *Если две аналитические в области D функции $f(z)$ и $g(z)$ совпадают на множестве $E \subset D$, имеющем хотя бы одну предельную точку, принадлежащую D , то они тождественно совпадают в D .*

Доказательство. 1. Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = f(z) - g(z).$$

2. По определению предельной точки, существует последовательность различных точек $\{z_k\}$, $k = \overline{1, \infty}$, такая что $z_k \in E \subset D$ для всех $k = \overline{1, \infty}$, и $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0$, причем $z_0 \in D$. По условию теоремы, $f(z) = g(z)$ при $z \in E$, следовательно, $f(z_k) = g(z_k)$, $k = \overline{1, \infty}$ и $\Phi(z_k) = 0$, $k = \overline{1, \infty}$.

3. Разложим функцию $\Phi(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z - z_0$, причем радиус сходимости R данного ряда $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$ не меньше расстояния R_0 от точки z_0 до границы области E . По условию теоремы $C_0 = 0$ и $\Phi(z_0) = 0$. Следовательно, разложение функции $\Phi(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид

$$\Phi(z) = (z - z_0)\Phi_1(z), \quad \text{где} \quad \Phi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(z - z_0)^n.$$

4. Поскольку точки z_k различны и $\Phi_1(z_k) = 0$ для всех $k = \overline{1, \infty}$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_1(z_k) = 0.$$

Следовательно, по свойству непрерывных функций $\Phi_1(z_0) = 0$ и коэффициент $C_1 = 0$, и

$$\Phi(z) = (z - z_0)^2\Phi_2(z), \quad \text{где} \quad \Phi_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2}(z - z_0)^n.$$

Аналогично предыдущему, получим $\Phi_2(z_0) = 0$, т.е. $C_2 = 0$. Продолжая этот процесс, получим, что все коэффициенты C_n в разложении функции $\Phi(z)$ в ряд

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$$

в окрестности точки z_0 равны нулю. Следовательно, $\Phi(z) \equiv 0$ внутри круга $|z - z_0| < R_0$.

5. Докажем, что функция $\Phi(z)$ тождественно равна нулю во всей области D . Пусть \tilde{z} – произвольная точка области D , лежащая вне круга $|z - z_0| < R_0$. Соединим точку z_0 с точкой \tilde{z} простой непрерывной кривой γ (см. рис. 28), целиком лежащей в области D и отстоящей от границы области D на расстояние $d > 0$. Пусть ζ_1 – точка пересечения кривой γ с окружностью $|z - z_0| = R_0$. Рассмотрим разложение функции $\Phi(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z - \zeta_1$:

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^1(z - \zeta_1)^n. \quad (19.1)$$

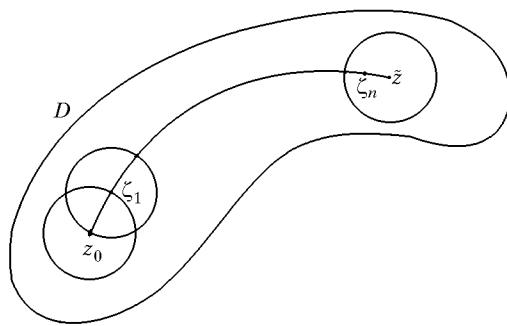


Рис. 28

Поскольку $\Phi(z) \equiv 0$ в круге $|z - z_0| < R_0$, то аналогично пункту 4 данной теоремы $C_n^1 \equiv 0$, $n = \overline{1, \infty}$. Обозначим через R_1 радиус сходимости ряда (19.1). Тогда $\Phi(z) \equiv 0$ в круге $|z - \zeta_1| < R_1$.

Пусть ζ_2 – последняя по направлению к \tilde{z} точка пересечения кривой γ с окружностью $|z - \zeta_1| = R_1$ (см. рис. 28). Разложим функцию $\Phi(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z - \zeta_2$:

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 (z - \zeta_2)^n. \quad (19.2)$$

Аналогично (19.1) находим $C_n^2 \equiv 0$, $n = \overline{1, \infty}$, и $\Phi(z) \equiv 0$ в круге $|z - \zeta_2| < R_2$.

Совершая подобные построения достаточно большое число раз, получим круг $|z - \zeta_l| < R_l$, содержащий точку \tilde{z} , для всех точек которого $\Phi(z) = 0$. Следовательно, $\Phi(\tilde{z}) = 0$. Из произвольности \tilde{z} следует, что $\Phi(z) \equiv 0$ для всех $z \in D$. Следовательно, $f(z) = g(z)$ для всех $z \in D$, что и требовалось доказать.

♦ Функция $F(z)$ называется аналитическим продолжением функции $f(z)$ с множества E в область G , если:

1. функция $f(z)$ определена на множестве E ;
2. функция $F(z)$ – аналитическая в области G , причем $E \subset G$;
3. $F(z) = f(z)$ при $z \in E$.

Теорема 19.2 (принцип аналитического продолжения). Пусть множество E имеет предельную точку z_0 , принадлежащую области G . Тогда аналитическое продолжение с множества E в область G единственно.

Доказательство. Допустим, что функция $f(z)$, определенная на E , имеет два аналитических продолжения $F_1(z)$ и $F_2(z)$ в область G . Так как $F_1(z) = F_2(z)$ при $z \in E$, то по теореме о единственности $F_1(z) = F_2(z)$ при $z \in G$, что и требовалось доказать.

Следствие 19.2.1. Пусть даны функция $f_1(z)$, аналитическая в области G_1 , и функция $f_2(z)$, аналитическая в G_2 (см. рис. 29). Пусть $G_1 \cap G_2 = g \neq \emptyset$ и

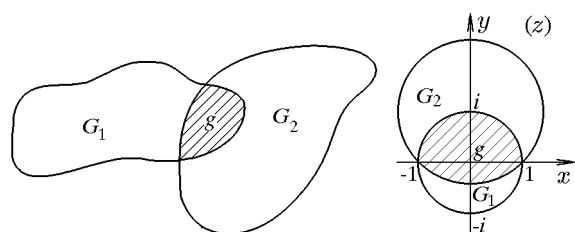


Рис. 30

Рис. 29

множество g содержит предельную точку z_0 , в которой $f_1(z_0) = f_2(z_0)$. Тогда существует единственная функция

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in G_1, \\ f_2(z) & z \in G_2, \end{cases} \quad (19.3)$$

аналитическая в области $G = G_1 \cup G_2$ функция $F(z)$ (19.3), совпадающая с $f_1(z)$ в G_1 и с $f_2(z)$ в G_2 .

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(z)$, определенную на множестве $g = G_1 \cap G_2$ и совпадающую на этом множестве с функциями $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Аналитическим продолжением функции $f(z)$ на область G_1 является функция $f_1(z)$, а на область G_2 – функция $f_2(z)$. Аналитическое продолжение функции $f(z)$ на область $G = G_1 \cup G_2$ единственно и определяется соотношением (19.3), что и требовалось доказать.

- ◆ Функция $F(z)$ (19.1) называется аналитическим продолжением функции $f_1(z)$ ($f_2(z)$) на область $G = G_1 \cup G_2$.
- ◆ Функцию $f_2(z)$ ($f_1(z)$) также называют аналитическим продолжением функции $f_1(z)$ ($f_2(z)$) на область G_2 (G_1).

Пример 19.1. Пусть

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad G_1 : |z| < 1, \\ f_2(z) &= \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n, \quad G_2 : |z-i| < \sqrt{2}. \end{aligned}$$

В области $g = G_1 \cap G_2$ (см. рис. 30) функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают. Функции f_1 и f_2 являются аналитическими продолжениями друг друга и элементами одной функции $F(z) = 1/(1-z)$, аналитической в области $G = G_1 \cup G_2$.

Рассмотрим некоторые специальные случаи множества g . Пусть множество g является общим участком границ областей G_1 и G_2 .

◊ Функция $f_2(z)$ называется непосредственным аналитическим продолжением функции $f_1(z)$ в область G_2 через дугу g , если существует аналитическая в области $G_1 \cup g \cup G_2$ функция $F(z)$, удовлетворяющая условиям (19.3).

Теорема 19.3 (принцип непрерывного продолжения). Если g является общей частью границ областей G_1 и G_2 , в которых функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитичны, а кроме того, непрерывны в $G_1 \cup g$, $G_2 \cup g$ и равны на границе g , то $f_2(z)$ [$f_1(z)$] является непосредственным аналитическим продолжением функции $f_1(z)$ [$f_2(z)$] на область G_2 (G_1).

Доказательство. По условиям теоремы существует непрерывная в области $G_1 \cup g \cup G_2$ функция

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1; \\ f_1(z) = f_2(z), & z \in g; \\ f_2(z), & z \in G_2. \end{cases} \quad (19.4)$$

Рассмотрим произвольный замкнутый контур $\Gamma = \gamma_1^+ + \gamma_2^+$, составленный из дуг γ_1 и γ_2 , целиком лежащих в G_1 , G_2 и отсекающих от общей границы g одну и туже дугу γ_g (рис. 31).

Рассмотрим далее интеграл

$$I = \int_{\Gamma} F(z) dz.$$

Для вычисления этого интеграла добавим к нему слагаемые, сумма которых тождественно равна нулю

$$I = \int_{\Gamma} F(z) dz + \int_{\gamma_g^+} F(z) dz + \int_{\gamma_g^-} F(z) dz.$$

Согласно определению функции $F(z)$ (19.4), интеграл I можно записать в виде

$$I = \int_{\gamma_1^+} f_1(z) dz + \int_{\gamma_2^+} f_2(z) dz + \int_{\gamma_g^+} f_1(z) dz + \int_{\gamma_g^-} f_2(z) dz$$

или

$$I = \int_{\gamma_1^+ + \gamma_g^+} f_1(z) dz + \int_{\gamma_2^+ + \gamma_g^-} f_2(z) dz.$$

Поскольку контуры $\gamma_1^+ + \gamma_g^+$ и $\gamma_2^+ + \gamma_g^-$ – замкнутые и целиком лежат, соответственно, в G_1 и G_2 , то

$$I = \int_{\Gamma} F(z) dz = 0.$$

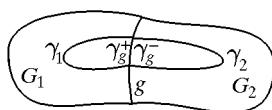


Рис. 31

Отсюда в соответствии с теоремой Морера и в силу произвольности контура Γ заключаем, что функция $F(z)$ аналитична в $G_1 \cup g \cup G_2$, а это и означает, что $f_2(z)$ является непосредственным аналитическим продолжением $f_1(z)$ через дугу g .

Таким образом, если существует аналитическая функция $f_2(z)$, являющаяся непрерывным продолжением аналитической функции $f_1(z)$ через дугу g , то она является и аналитическим продолжением этой функции, причем единственным.

Рассмотрим теперь следующий специальный случай, когда $g = g_1 \cup g_2$. Пусть $f_1(z)$ аналитична в области G_1 , а $f_2(z)$ – в G_2 (см. рис. 32). Пусть $G_1 \cap G_2 = g$, причем g_1 и g_2 такие, что

$$\begin{aligned} f_1(z) &= f_2(z), & z \in g_1, \\ f_2(z) &\neq f_1(z), & z \in g_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим область $\tilde{G} = G \setminus g_2$, $G = G_1 \cup G_2$. Согласно следствию, определена единственная аналитическая функция $\tilde{F}(z)$, являющаяся аналитическим продолжением функции $f_1(z)$, $z \in G_1 \setminus g_2$, в область \tilde{G} ,

$$\tilde{F}(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in G_1 \setminus g_2, \\ f_2(z) & z \in G_2 \setminus g_2. \end{cases}$$

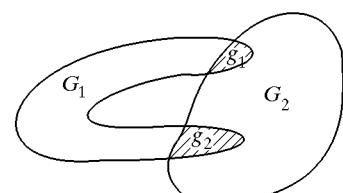


Рис. 32

Функция \tilde{F} может быть аналитически продолжена в область g_2 двумя способами:

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \begin{cases} \tilde{F}(z), & z \in \tilde{G}, \\ f_1(z), & z \in g_2; \end{cases} \\ F_2(z) &= \begin{cases} \tilde{F}(z), & z \in \tilde{G}, \\ f_2(z), & z \in g_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (19.5)$$

Равенства (19.5) определяют двузначную аналитическую в области G функцию $F(z)$, принимающую различные значения в одних и тех же точках области $g_2 \subset G$.

В общем случае алгоритм построения аналитического продолжения был предложен Вейерштрасом и заключается в следующем.

Метод Вейерштрасса

Пусть в области E задана аналитическая функция $f(z)$. Выберем произвольную точку z_0 и разложим функцию $f(z)$ в точке z_0 в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (19.6)$$

Пусть R_0 – радиус сходимости ряда (19.6). Возможны два случая.

Случай 1. Радиус сходимости ряда R_0 не превосходит расстояния от точки z_0 до γ – границы области E . В этом случае круг сходимости ряда не выходит за границу области E .

Случай 2. Радиус сходимости ряда R_0 больше расстояния от точки z_0 до границы γ области E . В этом случае область G_1 , представляющая собой круг $|z - z_0| < R_0$, уже не является подобластью области E . В области G_1 ряд (19.6) определяет аналитическую функцию $f_1(z)$, совпадающую с $f(z)$ в области $G_1 \cap E$. Функция $f_1(z)$ является аналитическим продолжением функции $f(z)$ в область $E_1 = G_1 \cup E$.

Выберем произвольную точку $z_1 \in E_1$ и разложим функцию

$$F_1(z) = \begin{cases} f(z), & z \in E, \\ f_1(z), & z \in G_1 \end{cases}$$

в степенной ряд

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F_1^{(n)}(z_1) (z - z_1)^n. \quad (19.7)$$

Проводя для функции $F_1(z)$ рассуждения, аналогичные тем, что проведены для функции $f(z)$, получим аналитическую функцию

$$F_2(z) = \begin{cases} F_1(z), & z \in E_1, \\ f_2(z), & z \in G_2 \end{cases}$$

где G_2 – область сходимости ряда (19.7).

Повторяя этот процесс, мы получим аналитическое продолжение функции $f(z)$ вдоль цепочки областей $E, G_1, E_1, G_2, \dots, G_n, \dots$

Понятие аналитического продолжения естественным образом приводит к понятию полной аналитической функции, которая, вообще говоря, многозначна.

◆ Функция $F(z)$, полученная путем аналитического продолжения вдоль всех возможных цепочек областей, выходящих из области E первоначального определения функции $f(z)$, называется полной аналитической функцией. Ее область

определения называется естественной областью существования полной аналитической функции.

◊ Отметим, что аналитическое продолжение функции $F(z)$ через границу Γ ее естественной области существования невозможно. При этом все точки границы Γ являются особыми точками функции $F(z)$. В противном случае ее можно было бы аналитически продолжить методом Вейерштрасса.

Пример 19.2 Исследовать возможность аналитического продолжения функции

$$f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^{2^k}.$$

Решение. Очевидно, что $z = 1$ – особая точка функции $f(z)$, поскольку

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \infty,$$

но

$$f(z) = 1 + z^2 + \sum_{k=1}^{\infty} z^{2^{k+1}} = z^2 + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (z^2)^{2^k} = z^2 + f(z^2),$$

и поскольку

$$\lim_{z^2 \rightarrow 1} f(z^2) = \infty,$$

то имеем уже две особые точки: $z_{1,2} = \sqrt[2]{1} = \pm 1$.

Аналогично

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + z^2 + z^4 + \sum_{k=1}^{\infty} z^{2^{k+2}} = \\ &= z^2 + z^4 + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (z^4)^{2^k} = z^2 + z^4 + f(z^4), \\ &\lim_{z^4 \rightarrow 1} f(z^4) = \infty, \end{aligned}$$

и получаем уже четыре особые точки $z_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{1} = \pm 1, \pm i$. В общем случае

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 + z^4 + \cdots + z^{2^n} + f(z^{2^n}), \\ &\lim_{z^{2^n} \rightarrow 1} f(z^{2^n}) = \infty, \end{aligned}$$

и, следовательно, имеем $2n$ особых точек $\sqrt[2^n]{1}$. Но все эти точки лежат на окружности $|z| = 1$, и при $n \rightarrow \infty$ на любой сколь угодно малой дуге их число неограниченно. Таким образом, возможность аналитического продолжения отсутствует ввиду существования этой сплошной линии особенностей, через которую невозможно пройти. Сама окружность $|z| = 1$ является естественной границей рассматриваемой функции.

Аналитическое продолжение методом Вейерштрасса в практических приложениях малоэффективно. При продолжении конкретных функций мы будем использовать и другие приемы, например интегральные представления функций.

◊ Обобщение понятия аналитических функций на многозначные функции порождает новый тип изолированных особых точек – точки ветвления (разветвления) аналитической функции.

◆ Точка z_0 называется точкой ветвления (разветвления) многозначной аналитической функции $f(z)$, если в любой ее ε -окрестности нельзя разделить регулярные (однозначные) ветви этой функции.

◆ Точка ветвления z_0 многозначной аналитической функции $f(z)$ называется алгебраической точкой ветвления порядка n , если после n обходов вокруг этой точки по замкнутому контуру γ , не охватывающему других особых точек, функция $f(z)$ принимает исходное значение (возвращается к исходной ветви). Если такого конечного n не существует, то точка z_0 называется логарифмической (или трансцендентной) точкой ветвления.

20. Римановы поверхности

◊ Оперировать с многозначными функциями неудобно. Удобнее рассматривать функцию $F(z)$ как однозначную, но определенную на более сложных множествах, чем комплексная плоскость.

Рассмотрим теперь двузначную аналитическую функцию (19.5) и склеим области G_1 и G_2 в области g_1 , где функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают, а два экземпляра области g_2 , принадлежащие областям G_1 и G_2 , оставлены свободными.

Тогда на полученном множестве, представляющем собой объединение областей G_1 и G_2 , склеенных по g_1 , функция $F(z)$ является однозначной аналитической функцией.

◆ Построенное таким образом множество называется римановой поверхностью аналитической функции $F(z)$, являющейся аналитическим продолжением функции $f_1(z)$, а отдельные экземпляры повторяющихся областей – различными листами римановой поверхности W .

Пример 20.1 Показать, что функция $f(z) = z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$ является многолистной.

Решение. Согласно правилу извлечения корня,

$$f(z) = \sqrt[n]{|\rho|} e^{i(\varphi+2\pi k)/n}, \quad k = \overline{0, n-1}; \\ \rho = |z|, \quad \varphi = \arg z; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Выберем ту ветвь функции $f(z) = \sqrt[n]{z}$, которая является аналитическим продолжением функции $u = \sqrt[n]{x}$, $x > 0$, т.е.

$$w = f_1(z) = \sqrt[n]{\rho} e^{i\varphi/n}, \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Область определения G_1 является плоскостью z , разрезанной по положительной части действительной оси (разрез можно провести по любому лучу, соединяющему точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \infty$, в которых функция $f(z) = z^{1/n}$ является однозначной). Областью W_1 значений функции f_1 является сектор

$$0 \leq \arg w < \frac{2\pi}{n}; \quad w \in W.$$

Рассмотрим теперь область G_2 – ту же плоскость z с разрезом по положительному направлению оси Ox , но $2\pi \leq \arg z < 4\pi$. Рассмотрим в G_2 функцию

$$f_2(z) = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\varphi+2\pi)/n}, \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Областью значений W_2 функции $f_2(z)$ является сектор

$$\frac{2\pi}{n} \leq \arg w < \frac{4\pi}{n}$$

плоскости $w \in W$.

Заметим, что $\bar{G}_1 \cap G_2 = \Gamma_1$ – луч $\arg z = 2\pi$, на котором совпадают функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Поскольку функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в одной и той же точке z имеют различные значения, то для того чтобы функция

$$F_1(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in G_1, \\ f_2(z) & z \in G_2 \end{cases}$$

была однозначной в $R_1 = G_1 \cup G_2$, будем считать R_1 римановой поверхностью, склеенной из листов G_1 и G_2 по общей границе Γ_1 – лучу $\arg z = 2\pi$, или, как принято говорить, склеивают нижний берег разреза листа G_1 с верхним берегом разреза листа G_2 . Аналогично

$$f_k(z) = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\varphi+2\pi k)/n}, \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1; \\ f_2(z), & z \in G_2; \\ \dots \\ f_n(z), & z \in G_n \end{cases}$$

– однозначная аналитическая функция, определенная на римановой поверхности

$$R = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n,$$

склеенное из n листов. Отметим, что нижний берег разреза листа G_n склеен с верхним берегом разреза листа G_1 . Естественно, что в трехмерном пространстве при последнем склеивании нельзя избежать самопересечений. Однако мы не будем отождествлять принадлежащие разным листам G_k , $k = 1, n$ точки луча, по которому происходит самопересечение.

Существуют лишь две точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \infty$, называемые алгебраическими точками ветвления (разветвления), которые принадлежат всем листам G_k , соединяя их между собой. На рис. 33 изображена риманова поверхность функции $f(z) = \sqrt[3]{z}$.

Пусть $f(z) = \ln z$. Риманова поверхность логарифма

$$w = \ln z \tag{20.1}$$

бесконечнолистна. Ее устройство показано на рис. 34. Мы опять берем область D – плоскость C с разрезом вдоль отрицательной полуоси – и в ней главную ветвь логарифма

$$w = f_0(z) = \ln |z| + i \arg z \quad (-\pi < \arg z < \pi).$$

Эта функция однолистно отображает D на полосу

$$D_0^* = \{-\pi < \operatorname{Im} w < \pi\};$$

соответствие берегов разреза и границ полосы указано на рис. 34.

Логарифм имеет в области D бесконечно много ветвей

$$w = f_k(z) = f_0(z) + 2k\pi i \quad (k = \overline{-\infty, \infty}),$$

отображающих D на полосы D_k^* , сдвинутые по отношению к D_0^* на целое, кратное $2\pi i$. В соответствии с этим мы берем счетное множество экземпляров области D и склеиваем верхний берег разреза на нулевом экземпляре с нижним берегом разреза на первом экземпляре, а нижний берег разреза на нулевом экземпляре – с верхним берегом разреза на первом экземпляре и т.д. Точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \infty$ являются логарифмическими точками ветвления. Поскольку в этих точках функция $f(z) = \ln z$ не определена, считается, что ее риманова поверхность не содержит точек над точками $z_1 = 0$, $z_2 = \infty$ (см. рис. 34).

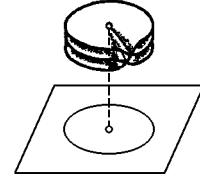


Рис. 33

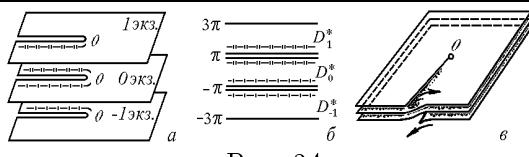


Рис. 34

21. Теория вычетов

◆ Комплексное число, которое обозначено $\text{Res}_{z=z_0} f(z)$ и равно значению интеграла

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\omega) d\omega, \quad (21.1)$$

называется вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 . Здесь γ – произвольный кусочно-гладкий контур без самопересечений, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$ и охватывающий только одну особую точку z_0 функции $f(z)$, который при интегрировании обходится в положительном направлении (против часовой стрелки).

Теорема 21.1 В изолированной особой точке справедливо равенство

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1}, \quad (21.2)$$

где C_{-1} – коэффициент при $(z-z_0)^{-1}$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 .

Доказательство. Так как в окрестности изолированной особой точки z_0 функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n,$$

где

$$C_n = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^{n+1}} d\omega.$$

Тогда, по определению,

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \oint_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \frac{dz}{2\pi i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \oint_{\gamma} (z-z_0)^n \frac{dz}{2\pi i}.$$

Поскольку (см. пример 12.3)

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i, \quad \text{и} \quad \oint_{\gamma} (z-z_0)^n dz = 0, \quad \text{если} \quad n \neq -1,$$

то, следовательно,

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1},$$

что и требовалось доказать.

◊ Из равенства (21.2) следует, что вычет в правильной и устранимой особых точках равен нулю.

Теорема 21.2 (Коши, основная) Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области E , то интеграл от функции $f(z)$ по границе этой области равен нулю:

$$\int_{\Gamma_E} f(z) dz = 0.$$

Теорема 21.3 (основная теорема теории вычетов).

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области E и непрерывна в замкнутой области $\bar{E} = E + \gamma_E$ за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k ($k = \overline{1, n}$, $z_k \notin \gamma_E$). Тогда

$$\oint_{\gamma_E} f(\omega) d\omega = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (21.3)$$

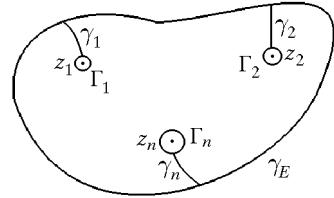
Здесь контур γ_E – граница области E – обходится в положительном направлении.

Доказательство. Пусть Γ_k – окружность достаточно малого радиуса (т.е. внутри Γ_k не содержится особых точек, отличных от z_k) с центром в точке z_k , ориентированная в положительном направлении. В силу теоремы Коши

$$\oint_{\gamma} f(\omega) d\omega = \oint_{\gamma_E} f(\omega) d\omega + \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k^-} f(\omega) d\omega = 0,$$

где $\gamma = \gamma_E + \sum_{k=1}^n (\gamma_k^+ + \gamma_k^- + \Gamma_k^-)$ (см. рис. 35). Следовательно,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_E} f(\omega) d\omega &= \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k^-} f(\omega) d\omega = \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z), \end{aligned}$$



что и требовалось доказать.

Рис. 35

Теорема 21.4 (простой полюс). Пусть z_0 – простой полюс. Тогда вычет функции $f(z)$ в точке $z = z_0$ определяется выражением

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (21.4)$$

Доказательство. В случае простого полюса справедливо следующее разложение:

$$f(z) = C_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n.$$

Следовательно,

$$(z - z_0) f(z) = C_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^{n+1},$$

т.е.

$$C_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

В силу (21.2) теорема доказана.

Следствие 21.4.1. Если z_0 – простой полюс функции $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$ и $\varphi(z_0) \neq 0$, а z_0 – простой полюс функции $\psi(z)$ (т.е. $\psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0$), то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Доказательство. Согласно (21.4),

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=z_0} \left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right] &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} / \frac{1}{z - z_0} = \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) / \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0} &= \varphi(z_0) / \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 21.5 (кратный полюс). Пусть z_0 – полюс аналитической функции $f(z)$ кратности m . Тогда вычет функции $f(z)$ в точке $z = z_0$ определяется выражением

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}[(z-z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}}. \quad (21.5)$$

Доказательство. Так как z_0 – полюс кратности m , то

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{C_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n,$$

т.е.

$$f(z)(z-z_0)^m = C_{-m} + \cdots + C_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^{n+m}.$$

Продифференцируем полученное равенство $m-1$ раз. Получим

$$\begin{aligned} \frac{d^{m-1}[f(z)(z-z_0)^m]}{dz^{m-1}} &= \\ = C_{-1}(m-1)! + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^{n+1} (n+m) \cdots (n+2). \end{aligned}$$

Перейдя в последнем равенстве к пределу, получим (21.5), что и требовалось доказать.

Пример 21.1. Найти вычет функции

$$f(z) = \frac{1}{z(z-i)^2}$$

относительно точки $z_0 = i$ и $z_0 = 0$.

Решение. Точка $z_0 = i$ для функции $f(z)$ – полюс второго порядка, так как для функции $1/f(z) = z(z-i)^2$ она – нуль второго порядка. Следовательно,

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{z(z-i)^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \frac{(z-i)^2}{z(z-i)^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z} \right) = - \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z^2} = 1.$$

Для точки $z_0 = 0$, являющейся простым полюсом, из (21.4) имеем

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{z(z-i)^2} = \frac{1}{(-i)^2} = -1.$$

Пример 21.2. Найти вычет функции $f(z) = \operatorname{cth} z$ в точке $z_0 = 0$.

Решение. Так как точка $z_0 = 0$ является простым полюсом функции $\operatorname{cth} z$, то, согласно следствию 21.4.1, имеем

$$\operatorname{Res}_{z=0} \operatorname{cth} z = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \left. \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \right|_{z=0} = 1.$$

Пример 21.3. Найти вычет функции $f(z) = e^{1/z}$ в точке $z_0 = 0$.

Решение. Разложение функции $f(z) = e^{1/z}$ в окрестности точки $z = 0$ содержит бесконечное количество слагаемых с отрицательными степенями z (см. пример 17.2). Следовательно, точка $z = 0$ – существенно особая точка. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{-n} \frac{1}{z^n}, \quad \text{где} \quad C_{-n} = \frac{1}{n!}.$$

Следовательно, $C_{-1} = 1$. Таким образом,

$$\operatorname{Res}_{z=0} e^{1/z} = 1.$$

Пример 21.4. Найти вычет функции

$$f(z) = \frac{z^3 - 1}{(z + 1)(z - 2i)^3}$$

в изолированной особой точке $z_0 = 2i$.

Решение. Определим тип особой точки. Поскольку

$$\lim_{z \rightarrow 2i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i)f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i)^2 f(z) = \infty$$

и

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i)^3 f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^3 - 1}{z + 1} = \frac{-8i - 1}{2i + 1} \neq \infty,$$

то точка $z_0 = 2i$ является полюсом третьего порядка (см. также пример 21.1). Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=2i} f(z) &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 2i} \left[(z - 2i)^3 \frac{z^3 - 1}{(z + 1)(z - 2i)^3} \right]'' = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 2i} \left[\frac{z^3 - 1}{z + 1} \right]'' = \frac{53 - 4i}{25}. \end{aligned}$$

Пример 21.5. Найти вычет функции

$$f(z) = z^3 \exp\left(\frac{7}{z^2}\right)$$

в изолированной особой точке $z_0 = 0$ и определить тип этой точки.

Решение. Согласно (21.2),

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1}.$$

Найдем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в точке $z_0 = 0$. Получим

$$f(z) = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \frac{1}{z^{3-2n}} = z^3 + 7z + \frac{49}{4z} + \dots$$

Поскольку в разложении присутствует бесконечное количество слагаемых с отрицательными степенями z , то z_0 – существенно особая точка. Из явного вида разложения находим

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = C_{-1} = \frac{49}{4}.$$

Пример 21.6. Найти вычет функции

$$f(z) = \frac{e^{z^2} - 1 - z^2}{\sin z - z + z^3/6}$$

в изолированной особой точке $z_0 = 0$, определив тип этой точки.

Решение. Первый способ. Представим функцию $f(z)$ в виде

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n} - 1 - z^2}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} - z + \frac{z^3}{6}} = \\ &= \frac{1 + z^2 + \frac{z^4}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} - 1 - z^2}{z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{5!} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} - z + \frac{z^3}{6}} = \\ &= \frac{z^4 \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^{2n-4}}{n!} \right)}{z^5 \left(\frac{1}{5!} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-4}}{(2n+1)!} \right)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow 0} [zf(z)] = 60,$$

т.е. $z_0 = 0$ – простой полюс. Тогда

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} [zf(z)] = 60.$$

Второй способ. Обозначим

$$\varphi(z) = e^{z^2} - 1 - z^2, \quad \psi(z) = \sin z - z + \frac{z^3}{6}.$$

Так как, с одной стороны,

$$\begin{aligned}\varphi(z)|_{z=0} &= 0, \\ \varphi'(z)|_{z=0} &= 2z(e^{z^2} - 1)|_{z=0} = 0, \\ \varphi''(z)|_{z=0} &= 2[(1 + 2z^2)e^{z^2} - 1]|_{z=0} = 0, \\ \varphi^{(3)}(z)|_{z=0} &= 4z(3 + 2z)e^{z^2}|_{z=0} = 0, \\ \varphi^{(4)}(z)|_{z=0} &= 4(3 + 4z + 6z^2 + 4z^3)e^{z^2}|_{z=0} = 12,\end{aligned}$$

а с другой,

$$\begin{aligned}\psi(z)|_{z=0} &= 0, \\ \psi'(z)|_{z=0} &= \cos z - 1 + \frac{z^2}{2}|_{z=0} = 0, \\ \psi''(z)|_{z=0} &= -\sin z + z|_{z=0} = 0, \\ \psi^{(3)}(z)|_{z=0} &= -\cos z + 1|_{z=0} = 0, \\ \psi^{(4)}(z)|_{z=0} &= \sin z|_{z=0} = 0, \\ \psi^{(5)}(z)|_{z=0} &= \cos z|_{z=0} = 1,\end{aligned}$$

мы заключаем, что точка $z_0 = 0$ – нуль четвертого порядка для $\varphi(z)$ и пятого для $\psi(z)$. Следовательно, эта точка – простой полюс функции $f(z)$. Согласно (21.4), имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z=0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{[z\varphi(z)]^{(5)}}{\psi^{(5)}(z)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z\varphi^{(5)}(z) + 5\varphi^{(4)}(z)}{\cos z} = 5\varphi^{(4)}(z)|_{z=0} = 5 \cdot 12 = 60.\end{aligned}$$

Здесь для раскрытия неопределенности мы воспользовались правилом Лопиталя. Второй способ более удобен при малых n и k .

Понятие вычета распространяется и на случай бесконечно удаленной точки.

◆ Вычетом аналитической функции $f(z)$ в точке $z = \infty$ называется комплексное число, равное значению интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^-} f(\omega) d\omega = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} f(\omega) d\omega = \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z), \quad (21.6)$$

где $\Gamma^{+(-)}$ – произвольный замкнутый контур, обход которого совершается в положительном (отрицательном) направлении и вне которого функция $f(z)$ является аналитической и не имеет особых точек, отличных от точки $z = \infty$.

Теорема 21.6. Для вычета функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке справедлива формула

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1}. \quad (21.7)$$

Доказательство. Так как по определению изолированной бесконечно удаленной точки функция $f(z)$ является аналитической в кольце $R < |z| < \infty$, то ее можно разложить в нем в ряд Лорана, сходящийся в этом кольце,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n, \quad R < |z| < \infty; \quad C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

где Γ – произвольный кусочно-гладкий контур, лежащий в том же кольце. Следовательно,

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1},$$

т.е. теорема доказана.

Следствие 21.6.1. Пусть функция $f(z)$ аналитична в точке $z = \infty$. Тогда справедливо соотношение

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)). \quad (21.8)$$

Доказательство. Поскольку $f(z)$ аналитична в точке $z = \infty$, то в окрестности бесконечно удаленной точки функция $f(z)$ представляется рядом Лорана

$$f(z) = f(\infty) + \frac{C_{-1}}{z} + \frac{C_{-2}}{z^2} + \dots$$

Следовательно,

$$C_{-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} [f(z) - f(\infty)]z.$$

В силу (21.7) следствие доказано.

Следствие 21.6.2. Пусть для функции $f(z)$ точка $z = \infty$ является нулем порядка $k > 1$, тогда

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Доказательство очевидно, поскольку разложение функции в окрестности точки $z = \infty$, являющейся нулем порядка $k > 1$, имеет вид

$$f(z) = \frac{C_{-k}}{z^k} + \frac{C_{-k-1}}{z^{k+1}} + \dots, \quad C_0 = C_{-1} = \dots = C_{-k+1} = 0,$$

и в этом разложении отсутствует слагаемое C_{-1}/z .

Следствие 21.6.3. Пусть функция $f(z)$ имеет в бесконечно удаленной точке полюс порядка m . Тогда справедливо соотношение

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} [z^{m+2} f^{(m+1)}(z)]. \quad (21.9)$$

Доказательство. По определению полюса m -ого порядка, в бесконечно удаленной точке имеем

$$f(z) = C_m z^m + \dots + \frac{C_{-1}}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}.$$

Продифференцируем это соотношение $m+1$ раз по z . Домножим полученный результат на z^{m+2} и перейдем к пределу при $z \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [z^{m+2} f^{(m+1)}(z)] = (-1)^{m+1} (m+1)! C_{-1}.$$

В силу (21.7) следствие доказано.

Пример 21.7. Найти вычет функции $f(z) = 1/z$ в точке $z_0 = \infty$.

Решение. Функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n,$$

где $C_n = \delta_{n,-1}$. Тогда, согласно формуле (21.7), получим

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{1}{z} = -C_{-1} = -1.$$

◊ В рассмотренном примере

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0.$$

Следовательно, точка $z = \infty$ есть устранимая особая точка. Тем не менее, вычет в этой точке отличен от нуля.

Пример 21.8. Найти вычет функции

$$f(z) = \frac{2z+i}{z^2+4} \sin\left(\pi \frac{z+3}{z}\right)$$

в бесконечно удаленной точке $z_0 = \infty$.

Решение. Первый способ. Поскольку

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0,$$

то функция $f(z)$ аналитична в точке $z = \infty$. Следовательно, по формуле (21.8)

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z[f(\infty) - f(z)] = 0.$$

Второй способ. Так как точка $z = \infty$ является нулем второго порядка функции $f(z)$, то, согласно следствию 21.6.2,

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{2z+i}{z^2+4} \sin\left(\pi \frac{z+3}{z}\right) = 0.$$

Пример 21.9. Найти вычет функции

$$f(z) = z^2 \sin \frac{2\pi + i}{z}$$

в бесконечно удаленной точке $z_0 = \infty$.

Решение. Первый способ. Найдем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \sin \frac{2\pi + i}{z} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2\pi + i)^{2n+1} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1} = \\ &= z(2\pi + i) - \frac{(2\pi + i)^3}{6z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2\pi + i)^{2n+1} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n-1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$C_{-1} = -\frac{1}{6}(2\pi + i)^3.$$

Согласно (21.7)

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1} = \frac{1}{6}(2\pi + i)^3.$$

Второй способ. Так как точка $z = \infty$ является простым полюсом функции $f(z)$, то, согласно формуле (21.9),

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=\infty} z^2 \sin \frac{2\pi + i}{z} &= -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 \left(z^2 \sin \frac{2\pi + i}{z} \right)' = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 \left[2 \sin \frac{2\pi + i}{z} - \frac{2(2\pi + i)}{z} \cos \frac{2\pi + i}{z} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2\pi + i)^2}{z^2} \sin \frac{2\pi + i}{z} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\left[2 \sin \frac{2\pi + i}{z} - \frac{2(2\pi + i)}{z} \cos \frac{2\pi + i}{z} - \frac{(2\pi + i)^2}{z^2} \sin \frac{2\pi + i}{z} \right]'}{\left(\frac{1}{z^3} \right)'} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{(2\pi + i)^3}{z^4} \cos \frac{2\pi + i}{z} \right] / \left(-\frac{3}{z^4} \right) \right\} = \frac{1}{6}(2\pi + i)^3. \end{aligned}$$

Теорема 21.7. Если функция $f(z)$ является аналитической на расширенной комплексной плоскости за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k ($k = \overline{1, N}$), включая и $z = \infty$ ($z_N = \infty$), то

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = 0. \quad (21.10)$$

Доказательство. Рассмотрим круг $|z| < R$ радиуса R такого, что $|z_k| < R$, $k = \overline{1, N-1}$. Тогда по основной теореме о вычетах имеем

$$\oint_{|z|=R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

или

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z) dz = \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz,$$

где Γ принадлежит кольцу $R < |z| < \infty$ и охватывает точку $z = 0$. Тогда

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz$$

или

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z),$$

что и требовалось доказать.

Пример 21.10. Вычислить интеграл

$$I = \int_{|z|=2} z^3 \cos\left(\frac{2i}{z}\right) dz.$$

Решение. Согласно основной теореме теории вычетов,

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z),$$

где z_k – все изолированные особые точки внутри контура $|z| = 2$. В контур интегрирования попадает одна изолированная особая точка $z = 0$. Найдем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{2i}{z}\right)^{2n} = \\ &= z^3 - \frac{1}{2}(2i)^2 z + \frac{(2i)^4}{24z} + z^3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{2i}{z}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$C_{-1} = \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{2}{3}.$$

Окончательно получим

$$I = 2\pi i \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi i.$$

Пример 21.11. Вычислить интеграл

$$I = \int_{|z|=1/4} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{z \operatorname{ch}(z\pi i)} dz.$$

Решение. Первый способ. Согласно основной теореме теории вычетов,

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z),$$

где z_k – все изолированные особые точки внутри контура интегрирования. В круге $|z| = 1/4$ находится одна изолированная особая точка: $z = 0$. Определим ее тип. Для этого представим функцию $f(z)$ в виде

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (9z)^{2n}}{z \operatorname{ch} \pi iz} = \\ &= \frac{1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} - 1 + \frac{(9z)^2}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (9z)^{2n}}{z \operatorname{ch} \pi iz} = \\ &= \frac{2 + \frac{85}{2}z + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 9^{2n} z^{2n-1}}{\operatorname{ch} \pi iz}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 2.$$

Следовательно, точка $z = 0$ – устранимая особая точка функции $f(z)$. Поэтому ее разложение в ряд Лорана не содержит отрицательных степеней z . Следовательно,

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$$

и

$$I = 0.$$

Второй способ. Так как точка $z = 0$ является простым нулем числителя

$$(e^{2z} - \cos 9z)'|_{z=0} = (2e^{2z} + 9\sin 9z)|_{z=0} = 2 \neq 0$$

и знаменателя

$$(z \operatorname{ch} z\pi i)'|_{z=0} = (\operatorname{ch} z\pi i + z\pi i \operatorname{sh} z\pi i)|_{z=0} = 1 \neq 0,$$

то, согласно следствию 18.4.2, точка $z = 0$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$, и, следовательно, $I = 0$.

Пример 21.12. Вычислить интеграл

$$I = \int_{|z|=1} \frac{z^2 e^{1/z} - 1}{z} dz.$$

Решение. Представим подынтегральное выражение в виде

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} - 1}{z} = \frac{z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \right) - 1}{z} = \\ &= z + 1 + \frac{1}{2z} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} - \frac{1}{z} = z + 1 - \frac{1}{2z} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$C_{-1} = -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{2}.$$

Поскольку в круг $|z| < 1$ попадает одна изолированная особая точка $z = 0$, то

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} \right) = -\pi i.$$

Пример 21.13. Вычислить интеграл

$$I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^{10} + 1}.$$

Решение. Внутри контура интегрирования $|z| = 2$ подынтегральная функция имеет десять особых точек

$$z_k = \exp\left[\frac{(2k+1)\pi}{10}i\right], \quad k = \overline{0, 9},$$

являющихся простыми полюсами, лежащими на единичной окружности. Вне контура особых точек нет, следовательно, по теореме 21.7

$$\sum_{k=0}^9 \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z).$$

Поскольку точка $z = \infty$ является нулем десятого порядка функции $f(z)$, можно записать $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$, откуда

$$I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^{10} + 1} = 2\pi i \sum_{k=0}^9 \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

22. Логарифмический вычет и его приложения

22.1. Логарифмический вычет

◆ Логарифмической производной функции $f(z)$ называется функция $\varphi(z)$, определяемая выражением

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = [\ln f(z)]'. \quad (22.1)$$

◆ Логарифмическим вычетом аналитической функции $f(z)$ в точке $z = z_0$ называется вычет в этой точке логарифмической производной функции $f(z)$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Теорема 22.1. Если точка z_0 является нулем аналитической функции $f(z)$ порядка m , то логарифмический вычет этой функции в точке z_0 определяется выражением

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \varphi(z) = \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = m. \quad (22.2)$$

Доказательство. Так как z_0 – нуль функции $f(z)$ порядка m , то в окрестности этой точки

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} C_k (z - z_0)^k \quad \text{и} \quad f'(z) = \sum_{k=m}^{\infty} k C_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^m \sum_{k=m}^{\infty} C_k (z - z_0)^{k-m} = (z - z_0)^m \psi(z); \\ f'(z) &= (z - z_0)^{m-1} \sum_{k=m}^{\infty} k C_k (z - z_0)^{k-m} = (z - z_0)^{m-1} g(z), \end{aligned}$$

где $\psi(z_0) \neq 0$, $g(z_0) \neq 0$. Тогда

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{\sum_{k=m}^{\infty} k C_k (z - z_0)^{k-m}}{\sum_{k=m}^{\infty} C_k (z - z_0)^{k-m}} = \frac{1}{z - z_0} \frac{g(z)}{\psi(z)}.$$

Из полученного выражения следует, что z_0 – простой полюс функции $\varphi(z)$. Действительно,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \varphi(z) = \frac{m C_m}{C_m} = m.$$

По формуле (21.4) получим

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \varphi(z) = \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f'(z)}{f(z)} = m,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 22.2. *Если точка z_0 является полюсом аналитической функции $f(z)$ порядка n , тогда логарифмический вычет функции $f(z)$ в точке z_0 определяется выражением*

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = -n. \quad (22.3)$$

Доказательство. Функция $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс порядка n . Тогда функция $g(z) = 1/f(z)$ будет иметь в точке z_0 нуль порядка n , и $[\ln f(z)]' = -[\ln g(z)]'$. Поэтому согласно теореме 22.1, утверждение доказано.

◆ Логарифмическим вычетом функции $f(z)$ относительно замкнутого контура Γ называется комплексное число, равное значению интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (22.4)$$

Теорема 22.3. *Если функция $f(z)$ мероморфна внутри замкнутого контура Γ , то ее логарифмический вычет относительно этого контура равен разности между числом нулей и числом полюсов функции $f(z)$ внутри Γ*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^k m_j - \sum_{l=1}^p n_l = N - P, \quad (22.5)$$

причем каждый нуль и каждый полюс считается столько раз, сколько его кратность.

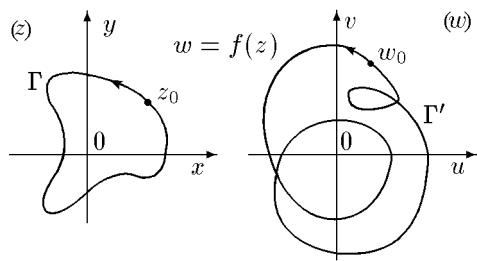


Рис. 36

Доказательство. Обозначим $f'(z)/f(z) = \varphi(z)$. Интеграл от $\varphi(z)$ по контуру Γ может быть вычислен по основной теореме теории вычетов. Поскольку все особые точки функции $\varphi(z)$ – это нули и полюсы функции $f(z)$, а вычеты в этих точках определяются соотношениями (22.2) и (22.3), то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \varphi(z) dz = \sum_{j=1}^M \operatorname{Res}_{z=z_j} \varphi(z) = \sum_{j=1}^k m_j - \sum_{l=1}^p n_l = N - P,$$

что и требовалось доказать.

◊ Отметим, что если вместо нулей функции $f(z)$ рассматривать так называемые a -точки, т.е. корни уравнения $f(z) = a$, то формула (22.5) примет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = N_a - P, \quad (22.6)$$

где N_a – общее число a -точек функции $f(z)$ внутри контура Γ . Для доказательства (22.6) достаточно заменить в наших рассуждениях функцию $f(z)$ выражением $[f(z) - a]$.

22.2. Принцип аргумента

Геометрический смысл формул (22.5), (22.6) раскрывает следующая

Теорема 22.4 (принцип аргумента). Пусть *справедливы условия теоремы 22.3. Тогда разность между числом нулей N и числом полюсов P функции $f(z)$ внутри Γ равна числу оборотов точки w при обходе кривой Γ' , являющейся образом кривой Γ при отображении $w = f(z)$, или, что то же самое, приращению аргумента $\Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z)$ функции $f(z)$ при положительном обходе замкнутой кривой Γ , деленному на 2π .*

Доказательство. Отметим на кривой Γ произвольную точку z_0 , которую будем считать начальной и конечной точкой пути интегрирования (см. рис. 36).

При обходе кривой Γ значение $\ln f(z)$ будет непрерывно меняться и после возвращения z в точку z_0 его значение, вообще говоря, будет отличаться от значения $\ln f(z_0)$. Это различие при одном значении $f(z_0)$ может осуществляться только за счет разных значений аргумента, приписываемых $\ln f(z)$: $\Phi_0 = \operatorname{Arg}(f(z_0))$ до и $\Phi_1 = \operatorname{Arg}(f(z_0))$ после обхода. Теперь, если воспользоваться формулой (22.5), то с учетом сказанного ее можно записать

$$\begin{aligned} N - P &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} (\ln f(z)) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} [\ln |f(z_0)| + i\Phi_1 - \ln |f(z_0)| - i\Phi_0] = \end{aligned}$$

$$= \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{2\pi} = n = \frac{\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} f(z)}{2\pi}, \quad (22.7)$$

что и требовалось доказать.

Если вместо нулей функции $f(z)$ рассматривать ее a -точки, то выражение (22.7) примет вид

$$N_a - P = n = \frac{\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} [f(z) - a]}{2\pi}. \quad (22.8)$$

Теорема 22.5 (Руше). *Если аналитические внутри Γ и непрерывные на Γ функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ удовлетворяют неравенству*

$$|f(z)|_\Gamma > |\varphi(z)|_\Gamma, \quad (22.9)$$

то функции $f(z)$ и $f(z) + \varphi(z)$ имеют внутри Γ одинаковое количество нулей.

Доказательство. Из соотношения

$$\begin{aligned} \arg(f(z) + \varphi(z)) &= \arg \left[f(z) \left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right) \right] = \\ &= \arg f(z) + \arg \left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right) \end{aligned}$$

и в силу принципа аргумента имеем

$$\Delta_\Gamma \arg(f(z) + \varphi(z)) = \Delta_\Gamma \arg f(z) + \Delta_\Gamma \arg \left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right). \quad (22.10)$$

Последнее слагаемое в (22.10) определяет приращение аргумента для функции $w = 1 + \varphi(z)/f(z)$, но так как при движении z по Γ

$$|w - 1| = \left| \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right| < 1,$$

то точка w не может обойти начало координат $w = 0$. И, следовательно,

$$\Delta_\Gamma \arg \left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right) = 0$$

и

$$\Delta_\Gamma \arg(f(z) + \varphi(z)) = \Delta_\Gamma \arg f(z).$$

Последнее равенство, согласно принципу аргумента, означает, что функции $f(z) + \varphi(z)$ и $f(z)$ имеют внутри Γ одинаковое число нулей, что и требовалось доказать.

Пример 22.1. Найти число корней уравнения $z^9 + 6z^5 + z + 1 = 0$ а) в круге $|z| \leq 1$; б) в круге $|z| \leq 2$.

Решение. а) В круге $|z| \leq 1$ положим $f(z) = 6z^5 + 1$, $\varphi(z) = z^9 + z$. Так как для точек окружности $|z| = 1$, имеем $|f(z)| = |6z^5 + 1| \geq 6|z|^5 - 1 = 5$ и, соответственно, $|\varphi(z)| = |z^9 + z| \leq |z|^9 + |z| = 2$, то

$$|f(z)|_{|z|=1} > |\varphi(z)|_{|z|=1},$$

и по теореме Руше число корней исходного уравнения совпадает с числом корней уравнения $6z^5 + 1 = 0$, т.е. равно пяти.

б) Найдем число корней в круге $|z| \leq 2$. Положим $f(z) = z^9 + 1$, $\varphi(z) = 6z^5 + z$. Так как для точек окружности $|z| = 2$, имеем $|f(z)| = |z^9 + 1| \geq |z|^9 - 1 = 511$ и, соответственно, $|\varphi(z)| \leq 6|z|^5 + |z| = 194$, то

$$|f(z)|_{|z|=2} > |\varphi(z)|_{|z|=2},$$

и по теореме Руше число корней исходного уравнения совпадает с числом корней уравнения $z^9 + 1 = 0$, т.е. равно девяти.

22.3. Основная теорема алгебры

Теорема 22.6 (основная теорема алгебры). *Полином степени n имеет на комплексной плоскости ровно n нулей (с учетом их кратности).*

Доказательство. Пусть

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_n \neq 0,$$

– полином степени n . Найдем логарифмическую производную функции $P_n(z)$:

$$\varphi(z) = \frac{P'_n(z)}{P_n(z)} = \frac{\sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}}{\sum_{k=0}^n a_k z^k} = \frac{n}{z} \psi(z), \quad (22.11)$$

где

$$\psi(z) = \frac{\sum_{k=1}^n (ka_k/n a_n) z^{k-n}}{\sum_{k=0}^n (a_k/a_n) z^{k-n}} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\alpha_l}{z^l}.$$

Здесь мы воспользовались разложением

$$\frac{1}{1+q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^n, \quad |q| < 1,$$

положив в нем

$$q = q(z) = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n}.$$

Условие $|q| < 1$ будет выполняться при $|z| > R$, где R определяется из уравнения $|q(R)| = 1$. Из вышесказанного и формулы (22.11) следует, что коэффициент C_{-1} в разложении функции

$$\varphi(z) = \frac{P'_n(z)}{P_n(z)}$$

в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ определяется соотношением

$$C_{-1} = n.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} \varphi(z) = -C_{-1} = -n.$$

Выберем контур Γ так, чтобы все особые точки функции $\varphi(z)$ (кроме $z = \infty$) содержались внутри контура. Тогда по теореме 21.7

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \varphi(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{P'_n(z)}{P_n(z)} dz = -\operatorname{Res}_{z=\infty} \varphi(z) = n.$$

В силу (22.5) последний интеграл равен разности между числом нулей и числом полюсов функции $P_n(z)$ с учетом их кратности. Однако полином n -ой степени не имеет полюсов, что и доказывает теорему.

◊ Отметим, что доказательство теоремы можно упростить, если использовать теорему Руше. Действительно, разобьем полином $P_n(z)$ на два:

$$\tilde{P}_n(z) = a_n z^n \quad \text{и} \quad Q_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k.$$

Легко видеть, что при любых заданных коэффициентах a_k всегда найдется такое R , что на окружности $|z| = R$ будет выполняться неравенство

$$0 < \left| \frac{Q_{n-1}(z)}{\tilde{P}_n(z)} \right| \Big|_{|z|=R} < 1,$$

поскольку

$$\begin{aligned} |\tilde{P}_n(z)| \Big|_{|z|=R} &= |a_n| R^n, \\ |Q_{n-1}(z)| \Big|_{|z|=R} &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k, \end{aligned}$$

и R^n при больших R растет быстрее, чем любой полином степени $(n-1)$. В силу установленного неравенства и теоремы Руше заключаем, что число нулей полинома $P_n(z)$ в круге $|z| = R$ равно числу нулей полинома $\tilde{P}_n(z) = a_n z^n$ в этом круге. Но полином $\tilde{P}_n(z) = a_n z^n$ на всей комплексной плоскости имеет единственный n -кратный нуль: точку $z = 0$. Следовательно, такое же число нулей имеет и полином $P_n(z)$, что и требовалось доказать.

23. Приложения теории вычетов

Теория вычетов может быть успешно использована для вычисления определенных интегралов, разложения функций в ряды, суммирования рядов и др. В этом разделе мы рассмотрим ряд задач, которые можно решить с помощью теории вычетов.

23.1. Интегралы, содержащие рациональные функции от тригонометрических функций

Рассмотрим интегралы вида

$$I_1 = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi. \tag{23.1}$$

где R – рациональная функция от $\sin \varphi, \cos \varphi$. Схему вычисления интегралов (23.1) удобно задать следующим утверждением.

Утверждение 23.1. Пусть $R(u, v)$ – рациональная функция. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z), \quad (23.2)$$

где z_k – особые точки функции

$$f(z) = -\frac{i}{z} R\left(\frac{1}{2}\left[z + \frac{1}{z}\right], \frac{-i}{2}\left[z - \frac{1}{z}\right]\right)$$

в круге единичного радиуса, причем на границе этого круга функция $f(z)$ не имеет особых точек.

Действительно, проведем под знаком интеграла замену

$$z = e^{i\varphi}, \quad dz = ie^{i\varphi}d\varphi = izd\varphi,$$

тогда

$$d\varphi = -i \frac{dz}{z}.$$

Кроме того,

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}).$$

Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin \varphi = \frac{-i}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Если φ изменяется от нуля до 2π , то z пробегает замкнутый контур – окружность $|z| = 1$ в положительном направлении.

Таким образом,

$$I_1 = -i \oint_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left[z + \frac{1}{z}\right], \frac{-i}{2}\left[z - \frac{1}{z}\right]\right) \frac{dz}{z}.$$

В силу общих свойств аналитических функций подынтегральное выражение представляет собой аналитическую функцию внутри круга $|z| = 1$, за исключением конечного числа точек, являющихся нулями знаменателя, что и доказывает утверждение.

Пример 23.1. Вычислить интеграл

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2},$$

где $0 < a < 1$.

Решение. Сделаем в интеграле замену переменных $\cos \varphi = (z - z^{-1})/2$, $d\varphi = -i dz/z$. Тогда

$$I_1 = -i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z[1 - a(z + z^{-1}) + a^2]} = -i \oint \frac{dz}{(1 - az)(z - a)}.$$

Функция $f(z) = (-i)/[(1 - az)(z - a)]$ имеет внутри круга $|z| < 1$ один простой полюс $z = a$ (функция $1/f(z)$ имеет в этой точке простой нуль). По формуле (21.4) находим

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = \frac{-i}{1 - a^2}.$$

Тогда

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(1 - az)(z - a)} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Окончательно получим

$$I_1 = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Пример 23.2. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{6 + \sqrt{35} \sin t} dt.$$

Решение. Сделаем в интеграле замену

$$\sin t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad dz = ie^{it} dt, \quad dt = \frac{dz}{iz}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} f(z) dz = \int_{|z|=1} \frac{-i dz}{z [6 + \sqrt{35}(z - 1/z)/(2i)]} = \\ &= \int_{|z|=1} \frac{-i dz}{6z + \sqrt{35}z^2/(2i) - \sqrt{35}/(2i)} = \\ &= 2 \int_{|z|=1} \frac{dz}{12iz + \sqrt{35}z^2 - \sqrt{35}} = 4\pi i \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z). \end{aligned}$$

Найдем корни знаменателя

$$\sqrt{35}z^2 + 12iz - \sqrt{35} = 0.$$

Поскольку дискриминант $D = -144 + 4 \cdot 35 = -4$, то

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-12i + 2i}{2\sqrt{35}} = -5 \frac{i}{\sqrt{35}}, \\ z_2 &= \frac{-12i - 2i}{2\sqrt{35}} = -7 \frac{i}{\sqrt{35}}. \end{aligned}$$

Точка $z = z_2$ не попадает в круг $|z| < 1$. Точка $z = z_1$ является простым полюсом функции $f(z)$. Следовательно,

$$\operatorname{Res}_{z=-5i/\sqrt{35}} f(z) = \lim_{z \rightarrow -5i/\sqrt{35}} \frac{1}{\sqrt{35} \left(z + \frac{7i}{\sqrt{35}} \right)} = -\frac{i}{2}.$$

Окончательно получим

$$I = 4\pi i \left(-\frac{i}{2} \right) = 2\pi.$$

23.2. Несобственные контурные интегралы

В курсе математического анализа (см. также Приложение П1) было введено понятие несобственных интегралов от функции действительного переменного, содержащих либо особые точки на контуре (области) интегрирования, либо неограниченные контуры (области) интегрирования. Аналогичные понятия можно ввести для функций комплексного переменного и, более того, это можно сделать в более компактной форме.

Поскольку на комплексной плоскости бесконечно удаленная точка единственна, то оба типа интегралов можно объединить, дополнив в случае необходимости конечные особые точки аналитической функции $f(z)$ на контуре γ бесконечно удаленной точкой. Ясно, что в силу аддитивности контурного интеграла (см. (11.6)) достаточно определить несобственный интеграл с особой точкой, расположенной в одном из концов контура, например в точке a , независимо от того, является a конечной или бесконечно удаленной точкой.

Несобственным интегралом от функции $f(z)$ по контуру γ с особенностью в точке a называют

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz, \quad (23.3)$$

где γ_{ε} – часть контура γ , лежащая вне произвольной окрестности точки a , характеризуемой максимальным диаметром ε . Если предел (23.3) существует и конечен, несобственный интеграл называют сходящимся, в противном случае – расходящимся. Так же как и для функций действительного переменного (см. формулу (??)), интеграл (23.3) называется абсолютно сходящимся, если сходится несобственный криволинейный интеграл первого рода

$$\int_{\gamma} |f(z)| |dz| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon}} |f(z)| |dz|.$$

В тех случаях, когда точка a – внутренняя точка контура γ , его можно разбить на два: $\bar{\gamma}$ и $\tilde{\gamma}$ так, что $\gamma = \bar{\gamma} + \tilde{\gamma}$, а точка $z = a$ является граничной для каждого контура. В результате несобственный интеграл можно представить в виде суммы

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{\bar{\gamma}_{\varepsilon_1}} f(z) dz + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{\tilde{\gamma}_{\varepsilon_2}} f(z) dz. \quad (23.4)$$

Интеграл (23.4) будет сходящимся, если существуют оба предела, стоящие в правой части, и расходящимся, если хотя бы один из пределов не существует. Если интеграл (23.4) расходится, когда ε_1 и ε_2 стремятся к нулю независимо друг от друга, может оказаться, что сумма этих пределов конечна, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ (см. рис. 37). В этом случае несобственный интеграл называют сходящимся в смысле главного значения (по Коши) и обозначают

$$\text{V.p. } \int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\gamma}_{\varepsilon}} f(z) dz + \int_{\tilde{\gamma}_{\varepsilon}} f(z) dz \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz. \quad (23.5)$$

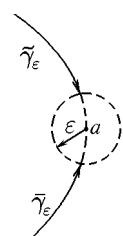


Рис. 37

Здесь $\gamma_{\varepsilon} = \bar{\gamma}_{\varepsilon} + \tilde{\gamma}_{\varepsilon}$ – часть контура γ , лежащая вне окружности $|z - a| = \varepsilon$ (или $|z| = 1/\varepsilon$, если $a = \infty$).

Из теоремы ?? очевидно, что значение сходящегося интеграла (23.3) совпадает с его главным значением (23.5).

Введение несобственных интегралов позволяет существенным образом расширить область применения теоремы 21.3 (основной теоремы о вычетах).

Пусть, как и в теореме 21.3, E – область, ограниченная кривой γ и $z = a \in \gamma$, обозначим через γ_ρ часть контура γ , лежащую вне круга $|z - a| \leq \rho$ (или $|z| \geq 1/\rho$, если $a = \infty$), а через $\bar{\gamma}_\rho$ – часть границы этого круга, принадлежащую области E , т.е. $\gamma = \gamma_\rho + \bar{\gamma}_\rho$. С помощью введенных обозначений сформулируем одно из обобщений теоремы 21.3.

Теорема 23.1. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в области E за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k ($k = \overline{1, n}$) и одна из особых точек, например z_n , принадлежит контуру γ . Тогда, если*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \int_{\bar{\gamma}_\rho} f(z) dz \right| = 0, \quad (23.6)$$

то интеграл в смысле главного значения существует и

$$\text{V.p.} \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \underset{z=z_k}{\text{Res}} f(z). \quad (23.7)$$

Доказательство. Если несобственный интеграл (23.7) существует, то, согласно (23.5),

$$\text{V.p.} \int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz. \quad (23.8)$$

С другой стороны, с учетом $\gamma = \gamma_\rho + \bar{\gamma}_\rho$ и теоремы 21.3 можно записать

$$\int_{\gamma_\rho} f(z) dz + \int_{\bar{\gamma}_\rho} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \underset{z=z_k}{\text{Res}} f(z). \quad (23.9)$$

Предельный переход при $\rho \rightarrow 0$ в формуле (23.9) с учетом (23.6) приводит к (23.7). Таким образом, теорема доказана.

Естественно, что если границе принадлежит m особых точек, удовлетворяющих условию (23.6), то суммирование в правой части (23.7) ведется до $n - m$ вместо $n - 1$.

Аналогично теоремам ??, ?? рассмотрим требования к функции $f(z)$, необходимые для выполнения условия (23.6). Пусть

$$M(\rho) = \max_{z \in \bar{\gamma}_\rho} |f(z)|. \quad (23.10)$$

Тогда справедлива

Лемма 23.1. *Функция $f(z)$ удовлетворяет условию (23.6), если*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} M(\rho) \bar{l}(\rho) = 0, \quad (23.11)$$

где $\bar{l}(\rho)$ – длина контура $\bar{\gamma}_\rho$.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы об оценке интеграла. Действительно, согласно (23.6),

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \int_{\gamma_\rho} f(z) dz \right| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} |f(z)| |dz| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} M(\rho) \bar{l}(\rho) = 0.$$

Для практических целей условия (23.11) можно расписать в зависимости от того, является ли особая точка a конечной или бесконечно удаленной. Так как для $a \neq \infty$, $\bar{l}(\rho) \leq 2\pi\rho$, то из

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho M(\rho) = 0 \quad (23.12)$$

следует (23.11). В свою очередь, для $a = \infty$, $\bar{l}(\rho) \leq 2\pi/\rho$, соответственно

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} M(\rho) = 0 \quad (23.13)$$

или, если обозначить $1/\rho = R$, $M(1/\rho) = \varepsilon(R) = \max_{z \in \gamma_R} |f(z)|$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \varepsilon(R) = 0. \quad (23.14)$$

Отметим, что если подынтегральную функцию можно представить в виде $f(z)e^{iaz}$, то условие (23.14) можно заменить более мягким условием, которое определяет

Лемма 23.2 (Жордана). *Если функция $f(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq y_0$ (см. рис. 38) удовлетворяет условию*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon(R) = 0, \quad (23.15)$$

то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{iaz} f(z) dz = 0, \quad (23.16)$$

если $a > 0$ и γ_R – дуга окружности $|z - iy_0| = R$, лежащая в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq y_0$.

Доказательство. Непосредственное вычисление интеграла (23.16) проведем заменой $z = Re^{i\varphi} + iy_0$:

$$\int_{\gamma_R} e^{iaz} f(z) dz = \int_0^\pi e^{ia(Re^{i\varphi} + iy_0)} f(Re^{i\varphi} + iy_0) R i e^{i\varphi} d\varphi. \quad (23.17)$$

Оценка интеграла (23.17) по модулю дает

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\gamma_R} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq \\ & \leq \int_0^\pi \left| e^{ia[R \cos \varphi + i(R \sin \varphi + y_0)]} \right| |f(Re^{i\varphi} + iy_0)| R d\varphi \leq \end{aligned}$$

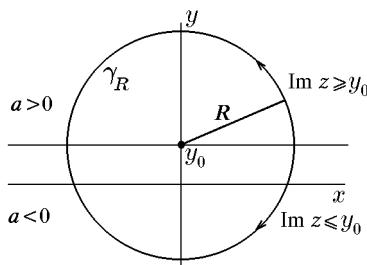


Рис. 38

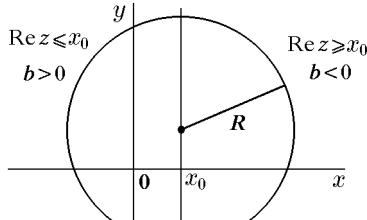


Рис. 39

$$\leq R\varepsilon(R)e^{-ay_0} \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\varphi} d\varphi = 2R\varepsilon(R)e^{-ay_0} \int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\varphi} d\varphi, \quad (23.18)$$

поскольку функция $\sin\varphi$ симметрична относительно $\varphi = \pi/2$.

В силу очевидного на $[0, \pi/2]$ соотношения $\sin\varphi \geq 2\varphi/\pi$ оценку (23.18) можно записать

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} e^{iaz} f(z) dz \right| &\leq 2R\varepsilon(R)e^{-ay_0} \int_0^{\pi/2} e^{-2aR\varphi/\pi} d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{a} \varepsilon(R) e^{-ay_0} (1 - e^{-aR}). \end{aligned} \quad (23.19)$$

Если $a > 0$, то предельный переход в (23.19) при $R \rightarrow \infty$ приводит к утверждению (23.16), что и требовалось доказать.

При повороте системы координат из леммы Жордана нетрудно получить очевидные следствия.

Следствие 23.2.1. Пусть $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана в полу平面 $\text{Im } z \leq y_0$. Тогда формула (23.15) остается справедливой, если $a < 0$ и γ – дуга окружности $|z - iy_0| = R$, лежащая в полу平面 $\text{Im } z \leq y_0$ (см. рис. 38).

Следствие 23.2.2. Пусть $a = -ib$. Формула (23.15) в этом случае преобразуется к виду

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{bz} f(z) dz = 0 \quad (23.20)$$

и остается справедливой, если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана:

1. в полу平面 $\text{Re } z \geq x_0$, причем $b < 0$ и γ_R – дуга полуокружности $|z - x_0| = R$, расположенная в этой полу平面;
2. в полу平面 $\text{Re } z \leq x_0$, причем $b > 0$ и γ_R – дуга полуокружности $|z - x_0| = R$, расположенная в этой полу平面 (см. рис. 39).

23.3. Несобственные интегралы от дробно-рациональных функций

Рассмотрим интегралы вида

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x) dx, \quad (23.21)$$

где $\mathcal{R}(x)$ – дробно-рациональная функция. Схему вычисления таких интегралов сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 23.2. Пусть функция $\mathcal{R}(x)$, заданная на действительной оси $]-\infty, \infty[$, может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z \geq 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k , $k = 1, N$, не лежащих на действительной оси. Тогда, если существуют $M > 0$, $\varepsilon > 0$ и $R > 0$ такие, что

$$|\mathcal{R}(z)| \leq \frac{M}{R^{1+\varepsilon}}, \quad \operatorname{Im} z \geq 0, \quad |z| > R. \quad (23.22)$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} \mathcal{R}(z), \quad (23.23)$$

где z_k – особые точки функции $\mathcal{R}(z)$ в верхней полуплоскости.

Доказательство. Пусть $\mathcal{R}(z)$ – аналитическое продолжение функции $\mathcal{R}(x)$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$. Рассмотрим замкнутый контур Γ , состоящий из кривой γ – лежащей в верхней полуплоскости части окружности радиуса R с центром в начале координат и диаметра этой окружности, являющегося отрезком оси Ox (см. рис. 40). Выберем радиус R таким, чтобы внутри контура Γ лежали все особые точки функции $\mathcal{R}(z)$, находящиеся в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, т.е. чтобы выполнялось неравенство (23.22). Согласно основной теореме теории вычетов, имеем

$$\oint_{\Gamma} \mathcal{R}(z) dz = \int_{-R}^R \mathcal{R}(x) dx + \int_{\gamma} \mathcal{R}(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} \mathcal{R}(z).$$

Согласно четвертому свойству интегралов от функции комплексного переменного $\mathcal{R}(z)$ по кривой γ

$$J = \left| \int_{\gamma} \mathcal{R}(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |\mathcal{R}(z)| |dz| \leq \frac{\pi M}{R^{\varepsilon+1}} R.$$

Здесь мы учли, что $|dz| = R d\varphi$ на контуре γ и $\varphi \in [0, \pi]$. Переходя в последнем равенстве к пределу $R \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J = 0.$$

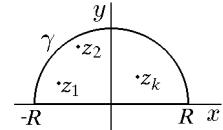


Рис. 40

Следовательно,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \mathcal{R}(z) dz = 0.$$

Приняв во внимание, что в силу (23.22)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \mathcal{R}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x) dx,$$

в пределе $R \rightarrow \infty$ получим

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} \mathcal{R}(z),$$

что и требовалось доказать.

Пример 23.3. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Решение. Нетрудно заметить, что аналитическое продолжение подынтегральной функции удовлетворяет условиям теоремы 23.2. С одной стороны, для любого $R > 0$ существует $M > 0$ такое, что для всех $|z| > R$ справедливо

$$\left| \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

С другой стороны, представление

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

говорит о том, что функция $f(z)$ имеет два простых полюса: $z_1 = i$ и $z_2 = -i$, не лежащих на действительной оси. Полюс $z_1 = i$ принадлежит верхней полуплоскости. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z).$$

Для вычета функции $f(z)$ в простом полюсе $z_1 = i$ получим

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{1+z^2} = \frac{1}{2i}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi,$$

что совпадает с результатом, известным из курса математического анализа.

Пример 23.4. Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 10x^2 + 9}.$$

Решение. Аналитическое продолжение

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 10z^2 + 9}$$

подынтегральной функции удовлетворяет условиям теоремы 23.2. Действительно, для любого $R > 0$ существует $M > 0$ такое, что для всех $|z| > R$ справедливо

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{z^4 + 10z^2 + 9} \right| \leq \frac{M}{|z|^4}.$$

Биквадратное уравнение $z^4 + 10z^2 + 9 = 0$ имеет корни

$$z_{1,2} = \pm i, \quad z_{3,4} = \pm 3i,$$

которые не лежат на вещественной оси и являются простыми полюсами функции $f(z)$. Следовательно, функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)}.$$

Найдем вычеты функции $f(z)$ в полюсах $z_1 = i$, $z_3 = 3i$, лежащих в верхней полуплоскости:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} f(z)(z-i) = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)} = \frac{1}{16i} = -\frac{i}{16}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\operatorname{Res}_{z=3i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 3i} f(z)(z-3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{1}{(z-i)(z+i)(z+3i)} = \frac{i}{48}.$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^4 + 10z^2 + 9} = \\ &= 2\pi i [\operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=3i} f(z)] = \\ &= 2\pi i \left[\frac{i}{48} - \frac{i}{16} \right] = \frac{\pi}{12}, \end{aligned}$$

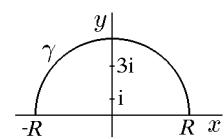


Рис. 41

где контур Γ выбирается аналогично тому, как это сделано в предыдущем примере (см. рис. 41).

23.4. Несобственные интегралы от осциллирующих функций

Рассмотрим интегралы вида

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx, \quad a > 0. \quad (23.24)$$

Схему вычисления таких интегралов удобно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 23.3. Пусть функция $f(x)$, заданная на всей действительной оси $-\infty < x < \infty$, может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z \geq 0$ за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k ($k = 1, N$), не лежащих на действительной оси, и удовлетворяет в этой полуплоскости условиям леммы Жордана. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} e^{iaz} f(z), \quad (23.25)$$

где z_k – особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости.

Доказательство с учетом леммы Жордана полностью аналогично доказательству теоремы 23.2.

Пример 23.5. Вычислить интегралы

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + b^2} dx, \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx,$$

где $\alpha > 0$, $b > 0$, $a > 0$.

Решение. 1. Из формулы Эйлера следует, что

$$I_1 = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + b^2} dx,$$

где аналитическое продолжение подынтегрального выражения удовлетворяет условию теоремы 23.3 и в верхней полуплоскости имеет только одну особую точку $z_0 = ib$ – простой полюс, так как

$$\lim_{z \rightarrow ib} \frac{z - ib}{z^2 + b^2} = \frac{1}{2ib}.$$

Следовательно,

$$I_1 = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + b^2} dx = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) e^{iaz} \right\}.$$

Поскольку

$$\operatorname{Res}_{z=ib} \frac{e^{i\alpha z}}{z^2 + b^2} = \lim_{z \rightarrow ib} \frac{e^{i\alpha z}(z - ib)}{z^2 + b^2} = \frac{e^{i^2 \alpha b}}{2ib},$$

то

$$I_1 = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \frac{e^{-\alpha b}}{2ib} \right\} = \frac{\pi e^{-\alpha b}}{b}.$$

Окончательно получим

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi e^{-\alpha b}}{b}, \quad \alpha > 0, \quad b > 0.$$

2. Аналогично с учетом четности подынтегральной функции

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + a^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[2\pi i \operatorname{Res}_{z=ia} \frac{ze^{iz}}{z^2 + a^2} \right] = \operatorname{Im} i\pi \lim_{z \rightarrow ia} \frac{ze^{iz}}{z + ia} = \frac{\pi}{2} e^{-a}. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \quad a > 0.$$

23.5. Интегралы Бромвича–Вагнера

Рассмотрим интегралы вида

$$I_4 = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{bz} f(z) dz, \quad b > 0. \quad (23.26)$$

◊ Контур интегрирования, соответствующий прямой

$$\operatorname{Re} z = \alpha, \quad -\infty < \operatorname{Im} z < \infty,$$

называют контуром Бромвича, а интеграл (23.26), в котором все особые точки функции $f(z)$ расположены слева от контура Бромвича и $\alpha > 0$, $b > 0$, – интегралом Бромвича–Вагнера. Если все особые точки функции $f(z)$ лежат левее оси Oy , то за контур Бромвича принимают ось Oy .

Отметим, что интегралы вида (23.26) имеют важное значение в приложениях, использующих интегральные преобразования (Лапласа и др.). Схему вычисления таких интегралов удобно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 23.4. *Если функция $f(z)$ допускает аналитическое продолжение с прямой $\operatorname{Re} z = \alpha$ на полуплоскость $\operatorname{Re} z \leq \alpha$, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k , $k = \overline{1, N}$, не лежащих на прямой $\operatorname{Re} z = \alpha$, и удовлетворяет в этой полуплоскости условиям леммы Жордана, то при $b > 0$*

$$I_4 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} f(z) e^{bz} dz = \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) e^{bz}, \quad (23.27)$$

где z_k – особые точки функции $f(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z < \alpha$.

Доказательство. Рассмотрим контур γ_R , представляющий собой окружность радиуса R с центром, лежащим на прямой $\operatorname{Re} z = \alpha$, содержащую внутри себя все особые точки z_k функции $f(z)$ (рис. ??). Обозначим через γ_R^+ левую полуокружность γ_R и через δ_R диаметр окружности γ_R , совпадающий с прямой $\operatorname{Re} z = \alpha$. Выберем положительное направление обхода контура $\gamma_R^+ + \delta_R$ и рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\delta_R} f(z) e^{bz} dz + \int_{\gamma_R^+} f(z) e^{bz} dz \right). \quad (23.28)$$

Согласно основной теореме теории вычетов (теорема 21.3), имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\delta_R} f(z) e^{bz} dz + \int_{\gamma_R^+} f(z) e^{bz} dz \right) = \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) e^{bz}. \quad (23.29)$$

Из (23.29) предельным переходом $R \rightarrow \infty$ с учетом следствия 23.2.2 леммы Жордана приходим к формуле (23.28), что и требовалось доказать.

Пример 23.6. Вычислить интегралы

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{tz}}{z} dz, \quad \alpha > 0; \quad (23.30)$$

$$I(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{(t-\tau)z}}{z} dz; \quad (23.31)$$

$$I(t, \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{zt} \frac{e^{-z\tau_1} - e^{-z\tau_2}}{z} dz \quad (23.32)$$

при $\tau_1 < \tau_2$.

Решение. а) При $t > 0$, согласно (23.27), имеем

$$I(t) = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{zt}}{z} = 1, \quad t > 0. \quad (23.33)$$

При $t < 0$, выбрав замкнутый контур в виде $\delta_R + \gamma_R^-$ (рис. ??) и используя следствие 23.2.2 леммы Жордана и свойство аналитичности функции e^{zt}/z в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha$, имеем

$$\int_{\delta_R} \frac{e^{tz}}{z} dz + \int_{\gamma_R^-} \frac{e^{tz}}{z} dz = 0,$$

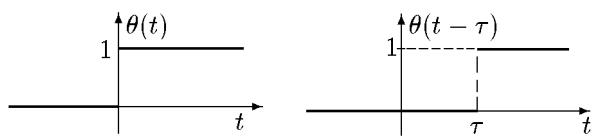


Рис. 44

Рис. 43

откуда при $R \rightarrow \infty$ получим

$$I(t) = 0, \quad t < 0. \quad (23.34)$$

Таким образом, формулы (23.33) и (23.34) задают интегральное представление единичной функции $\theta(t)$ (рис. 43)

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{tz}}{z} dz = \theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \quad (23.35)$$

б) Из (23.35) непосредственно следует (рис. 44)

$$I(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{(t-\tau)z}}{z} dz = \theta(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases}. \quad (23.36)$$

◊ Формула (23.36) соответствует теореме запаздывания в операционном исчислении (см. разд. «Свойства преобразования Лапласа»).

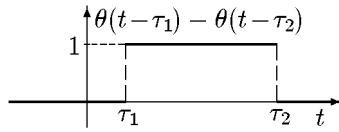


Рис. 45

в) Из (23.36) непосредственно следует (рис. 45)

$$\begin{aligned} I(t, \tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{zt} \frac{e^{-z\tau_1} - e^{-z\tau_2}}{z} dz = \\ &= \theta(t - \tau_1) - \theta(t - \tau_2) = \begin{cases} 0, & t < \tau_1; \\ 1, & \tau_1 < t < \tau_2; \\ 0, & \tau_2 < t. \end{cases} \end{aligned} \quad (23.37)$$

Функцию $I(t, \tau_1, \tau_2)$ называют характеристической функцией отрезка $[\tau_1, \tau_2]$ и обозначают $h(t, \tau_1, \tau_2)$.

Пример 23.7. Вычислить

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^2 + 1} dz, \quad \alpha > 0.$$

Решение. Аналогично предыдущему примеру

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^2 + 1} dz = \\ &= \left\{ \operatorname{Res}_{z=i} \frac{e^{tz}}{z^2 + 1} + \operatorname{Res}_{z=-i} \frac{e^{tz}}{z^2 + 1} = \frac{e^{it}}{2i} - \frac{e^{-it}}{2i} = \sin t, \quad t > 0 \right\} = \\ &= \theta(t) \sin t. \end{aligned}$$

23.6. Несобственные интегралы типа интегралов Эйлера

Рассмотрим интегралы вида

$$I_5 = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \mathcal{R}(x) dx, \quad (23.38)$$

$$I_6 = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \mathcal{R}(x) (\ln x)^m dx, \quad (23.39)$$

$$I_7 = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha \mathcal{R}(x) dx, \quad (23.40)$$

где $\mathcal{R}(x)$ – рациональная функция, а $\alpha \in]0, 1[$. Ниже будет показано, что интегралы I_6 , I_7 сводятся к интегралу I_5 , который, заметим, является преобразованием Меллина функции $\mathcal{R}(x)$.

Теорема 23.5. Пусть функция $\mathcal{R}(x)$, заданная на действительной полуоси $[0, \infty[$, допускает аналитическое продолжение в комплексную плоскость, за исключением конечного числа полюсов z_k , $k = \overline{1, N}$, функции $\mathcal{R}(z)$, не лежащих на указанной полуоси. Тогда, если интеграл (23.38) существует, то он равен

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} \mathcal{R}(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} [z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z)]. \quad (23.41)$$

Доказательство. Напомним, что интеграл (23.38) сходится, если

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha |\mathcal{R}(x)| = \lim_{x \rightarrow \infty} |x|^\alpha |\mathcal{R}(x)| = 0. \quad (23.42)$$

В силу условий теоремы подынтегральная функция (23.38) допускает соответствующее аналитическое продолжение в виде $x^{\alpha-1} \mathcal{R}(x) \rightarrow z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z)$. В этом случае условия (23.42) в комплексной плоскости принимают вид

$$\lim_{z \rightarrow 0} |z|^\alpha |\mathcal{R}(z)| = \lim_{z \rightarrow \infty} |z|^\alpha |\mathcal{R}(z)| = 0. \quad (23.43)$$

Не ограничивая общности задачи, будем считать, что точка $z = 0$ не является ни нулем, ни полюсом функции $\mathcal{R}(z)$. В противном случае, выделив из $\mathcal{R}(z)$ множитель z^n (n – целое число), мы получим подынтегральную функцию вида $z^{\alpha+n} \mathcal{R}_1(z)$, где $\mathcal{R}_1(0) \neq 0; \infty$. Отсюда с помощью соответствующих преобразований приходим к функции, удовлетворяющей высказанному предположению.

С другой стороны, для рациональной функции $\mathcal{R}(z)$ справедлива следующая асимптотическая оценка:

$$\mathcal{R}(z) \sim \frac{A}{z^k}, \quad z \rightarrow \infty, \quad k \text{ – целое.} \quad (23.44)$$

Такое поведение функции $\mathcal{R}(z)$ позволяет удовлетворить условиям (23.43) только для $\alpha > 0$ и $k - \alpha > 0$, т.е.

$$0 < \alpha < k. \quad (23.45)$$

Далее в комплексной плоскости проведем разрез вдоль действительной полуоси $[0, \infty[$ и рассмотрим контур γ (рис. 46). Он состоит из отрезка $[\rho, R]$, проходящего вдоль верхнего берега (в.б.) разреза, затем в положительном направлении вдоль окружности γ_R радиуса R с центром в начале координат ($|z| = R$), затем вдоль нижнего берега (н.б.) разреза по отрезку $[R, \rho]$ и, наконец, в отрицательном направлении вдоль окружности γ_ρ радиуса ρ с центром в начале координат ($|z| = \rho$). Контур γ замкнут и не охватывает начало координат. Подобный контур необходим затем, что функция $z^{\alpha-1}$ неоднозначна в области, содержащей начало координат ($z = 0$ – точка разветвления), а, следовательно, к контуру, охватывающему точку $z = 0$, не применима теорема о вычетах.

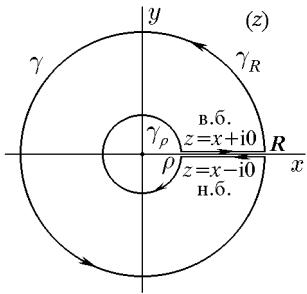


Рис. 46

Разрез и выбранная конфигурация контура γ позволяют выделить однозначную ветвь функции $z^{\alpha-1}$, если задать значение аргумента z в какой-либо точке плоскости. Будем считать, что на верхнем берегу разреза $\arg z = 0$. При обходе по замкнутому контуру γ вокруг начала координат мы с верхнего берега разреза попадаем на нижний, при этом аргумент z получает дополнительное слагаемое 2π , и, следовательно, на нижнем берегу разреза $\arg z = 2\pi$.

Обозначив $|z| = r$, будем иметь
на верхнем берегу: $z = x + i0$

$$r = x, \quad z = x, \quad z^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}; \quad (23.46)$$

на нижнем берегу: $z = x - i0$

$$r = x, \quad z = xe^{i2\pi}, \quad z^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}e^{i2\pi\alpha}; \quad (23.47)$$

на γ_R : $|z| = r = R$, $z = Re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$;
на γ_ρ : $|z| = r = \rho$, $z = \rho e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$.

Рациональная функция $\mathcal{R}(z)$, содержащая только целые степени, как на верхнем, так и на нижнем берегах имеет вид $\mathcal{R}(x)$.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{\gamma} z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z) dz,$$

который с учетом (23.46), (23.47) и согласно основной теореме о вычетах 21.3 можно записать

$$\begin{aligned} & \int_{\rho}^R x^{\alpha-1} \mathcal{R}(x) dx + \int_{\gamma_R} z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z) dz + \int_R^{\rho} x^{\alpha-1} e^{i2\pi\alpha} \mathcal{R}(x) dx + \\ & + \int_{\gamma_\rho} z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} [z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z) dz]. \end{aligned} \quad (23.48)$$

Пределенный переход $\rho \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ в (23.48) дает

$$\begin{aligned} & (1 - e^{i2\pi\alpha}) \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \mathcal{R}(x) dx + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z) dz + \\ & + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} [z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z) dz]. \end{aligned} \quad (23.49)$$

Покажем, что оба предела в левой части (23.49) равны нулю.

Действительно, предел

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z) dz \quad (23.50)$$

равен нулю, если, согласно формуле (23.12), обращается в нуль предел

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho M(\rho) \quad (23.51)$$

где

$$M(\rho) = \max_{z \in \gamma_\rho} [z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z)] = \rho^{\alpha-1} R(\rho). \quad (23.52)$$

Подставив (23.52) в (23.51), находим с учетом (23.43), (23.45)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho M(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^\alpha \mathcal{R}(\rho) = 0,$$

откуда и следует равенство нулю предела (23.50).

Утверждение, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z) dz = 0, \quad (23.53)$$

доказывается аналогично с использованием формулы (23.14).

Таким образом, из (23.49) с учетом (23.50), (23.53) следует (23.41), что и требовалось доказать.

Перейдем к рассмотрению интегралов (23.39), (23.40). Легко заметить, что интегралы (23.39) можно получить из (23.38), проинтегрировав последний по параметру α . Действительно,

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} \mathcal{R}(x) (\ln x)^m dx = \frac{d^m}{d\alpha^m} \int_0^\infty x^{\alpha-1} \mathcal{R}(x) dx. \quad (23.54)$$

В свою очередь, интеграл (23.40) можно свести к (23.38) заменой

$$\frac{x}{1-x} = y. \quad (23.55)$$

Действительно, после замены (23.55) интеграл (23.40) принимает вид

$$\int_0^\infty y^\alpha \bar{\mathcal{R}}(y) dy, \quad (23.56)$$

где

$$\bar{\mathcal{R}}(y) = (1+y)^{-2} \mathcal{R}\left(\frac{y}{1+y}\right).$$

Поскольку для функции $\bar{\mathcal{R}}(y)$ справедлива асимптотическая оценка

$$\bar{\mathcal{R}}(y) \sim \frac{A}{y^2}, \quad y \rightarrow \infty,$$

то интегралы (23.56), а соответственно, и (23.40) будут сходиться, согласно (23.45), только для $0 < \alpha + 1 < 2$ или $-1 < \alpha < 1$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 23.8. Вычислить интеграл Эйлера

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx. \quad (23.57)$$

Решение. Прежде всего, отметим, что для функции $\mathcal{R}(z) = 1/(1+z)$ справедлива асимптотическая оценка

$$\frac{1}{1+z} \sim \frac{A}{z}, \quad z \rightarrow \infty,$$

и, следовательно, согласно (23.45), интеграл (23.57) будет сходиться при $0 < \alpha < 1$. С учетом того, что функция $1/(1+z)$ имеет простой полюс в точке $z = -1 = e^{i\pi}$, по формуле (23.41) находим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx &= \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \operatorname{Res}_{z=e^{i\pi}} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} = \\ &= \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha}(e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha})} \lim_{z=e^{i\pi}} z^{\alpha-1} = \\ &= -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{(e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha})/2i} [e^{i\pi}]^{\alpha-1} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}. \quad (23.58)$$

Пример 23.9. Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx. \quad (23.59)$$

Решение. Заменой $e^x = y$ интеграл приводится к виду

$$I = \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{1+y} dy,$$

откуда, согласно (23.58),

$$I = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Пример 23.10. Вычислить

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^2} dx. \quad (23.60)$$

Решение. Для аналитического продолжения подынтегральной функции

$$\frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)^2} \quad (23.61)$$

условие сходимости (23.45) выполняется при $0 < \alpha < 2$. Функция (23.61) имеет в точке $z = -1$ единственный полюс второго порядка. Тогда по формуле (23.41) имеем

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^2} dx = -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} \operatorname{Res}_{z=e^{i\pi}} \frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)^2}. \quad (23.62)$$

Вычислим вычет в правой части (23.62):

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=e^{i\pi}} \frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)^2} &= \lim_{z \rightarrow e^{i\pi}} \frac{d}{dz} (z^{\alpha-1}) = \\ &= (\alpha-1) \lim_{z \rightarrow e^{i\pi}} z^{\alpha-2} = (\alpha-1)e^{i\pi\alpha}. \end{aligned} \quad (23.63)$$

Подставив (23.63) в (23.62), найдем

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^2} dx = \frac{\pi(1-\alpha)}{\sin \pi\alpha}. \quad (23.64)$$

Из (23.64), например, для $\alpha = 1/2$ получим

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 23.11. Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x)^2} dx. \quad (23.65)$$

Решение. Согласно соотношению (23.54), исходный интеграл можно записать в виде

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x)^2} dx = \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} dx}{(1+x)^2} \Big|_{\alpha=1/2}. \quad (23.66)$$

Воспользовавшись соотношением (23.64), выражение (23.66) перепишем как

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x)^2} dx &= \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\pi(1-\alpha)}{\sin \pi\alpha} \right) \Big|_{\alpha=1/2} = \\ &= \frac{\pi}{\sin^2 \pi\alpha} [\pi(\alpha-1) \cos \pi\alpha - \sin \pi\alpha] \Big|_{\alpha=1/2} = -\pi. \end{aligned}$$

Пример 23.12. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \frac{dx}{(2+x)^2}. \quad (23.67)$$

Решение. Сравнив (23.67) с (23.40), найдем $\alpha = -1/2$. Отсюда следует, что интеграл сходится, так как α удовлетворяет неравенству $-1 < \alpha < 1$. Заменой переменной (23.55) исходный интеграл сводится к виду

$$I = \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}(2+3y)^2} = \frac{1}{9} \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}(2/3+y)^2}. \quad (23.68)$$

Из (23.68), согласно (23.41), найдем

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\pi i}{9(1-e^{i\pi})} \operatorname{Res}_{z=(2e^{i\pi})/3} \left[\frac{1}{\sqrt{z}(2/3+z)^2} \right] = \\ &= \frac{\pi i}{9} \lim_{z \rightarrow (2e^{i\pi})/3} \frac{d}{dz} (z^{-1/2}) = -\frac{\pi i}{18} \left(\frac{2}{3} e^{i\pi} \right)^{-3/2} = \frac{\pi}{4\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Пример 23.13. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}}{1+\sqrt[3]{x}} dx.$$

Решение. Интеграл сходится, если $0 < \beta < 1/3$. Замена переменной $x = y^3$ приводит интеграл к виду (23.38)

$$I = 3 \int_0^\infty \frac{y^{3\beta-1}}{1+y} dy.$$

Положив в (23.58) $\alpha = 3\beta$, получим

$$I = \frac{3\pi}{\sin 3\pi\beta}.$$

◊ До сих пор в интегралах (23.38)–(23.40) мы рассматривали нецелые α . В случае целых α формула (23.41) перестает «работать», так как ее знаменатель обращается в нуль. Не излагая общих методов и приемов вычисления интегралов такого типа, мы их проиллюстрируем на ряде конкретных примеров. Начнем с интегралов вида (23.40).

Пример 23.14. Вычислить

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx, \quad a > 0. \quad (23.69)$$

Решение. Рассмотрим интеграл

$$\int_\gamma \frac{\ln z}{z^2+a^2} dz, \quad (23.70)$$

где контур γ изображен на рис. 47.

Такой контур позволяет обойти точку $z = 0$, являющуюся логарифмической точкой разветвления, и выделить однозначную ветвь логарифма, принимающего действительные значения для $z = x > 0$. Внутри контура γ расположена точка $z = ia$, являющаяся простым полюсом подынтегральной функции.

Используя свойство аддитивности контурных интегралов и основную теорему о вычетах 21.3, интеграл (23.70) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_{\rho}^R \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + \int_{\gamma_R} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz + \int_{-R}^{-\rho} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + \int_{\gamma_\rho} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz = \\ = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ia} \frac{\ln z}{z^2 + a^2}. \end{aligned} \quad (23.71)$$

С учетом того, что

$$\int_{-R}^{-\rho} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx = \int_{\rho}^R \frac{\ln(-x)}{x^2 + a^2} dx = \int_{\rho}^R \frac{\ln x + i\pi}{x^2 + a^2} dx,$$

пределенный переход $\rho \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ в (23.71) дает

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + i\pi \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} + \int_{\gamma_\rho} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz + \\ + \int_{\gamma_R} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz = \frac{\pi}{a} \left(\ln a + i\frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (23.72)$$

Следуя формуле (23.12), вычислим

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho M(\rho),$$

где

$$M(\rho) = \max_{z \in \gamma_\rho} \left| \frac{\ln z}{z^2 + a^2} \right| \leqslant \frac{|\ln \rho| + \pi}{a^2 - \rho^2}, \quad \rho < a.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho M(\rho) \leqslant \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho(|\ln \rho| + \pi)}{a^2 - \rho^2} = 0,$$

а это, согласно лемме 23.1, означает, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz = 0. \quad (23.73)$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz = 0. \quad (23.74)$$

Подставив (23.73) и (23.74) в (23.72), получим

$$2 \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + i\pi \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi \ln a}{a} + i\frac{\pi^2}{2a}. \quad (23.75)$$

Сравнив действительные и мнимые части (23.75), найдем

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi \ln a}{2a}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}. \quad (23.76)$$

Отметим, что для вычисления интегралов общего вида

$$\int_0^\infty (\ln x)^m \mathcal{R}(x) dx,$$

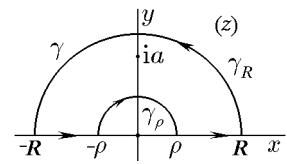


Рис. 47

где m — целое, следует рассмотреть контурный интеграл

$$\int_\gamma (\ln z)^{m+1} \mathcal{R}(z) dz, \quad (23.77)$$

контур γ которого изображен на рис. 46. Правда, если $\mathcal{R}(x)$ — четная функция, вместо (23.77) можно рассматривать более простой интеграл

$$\int_\gamma (\ln z)^m \mathcal{R}(z) dz$$

с более простым контуром γ , изображенным на рис. 47.

Вычисление интегралов (23.38) с целым α проиллюстрируем следующим примером:

Пример 23.15. Вычислить

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}. \quad (23.78)$$

Решение. Рассмотрим интеграл

$$\int_\gamma \frac{\ln z}{1+z^3} dz, \quad (23.79)$$

где контур γ изображен на рис. 46. Такой контур позволяет обойти точку $z = 0$, являющуюся логарифмической точкой разветвления, и выделить однозначную ветвь логарифма, принимающую действительные значения на верхнем берегу $z = x$ и значения $z = xe^{i2\pi}$ на нижнем берегу. Внутри контура γ расположены три особые точки $z_1 = e^{i\pi/3}$, $z_2 = e^{i\pi}$ и $z_3 = e^{i5\pi/3}$, являющиеся простыми полюсами подынтегральной функции (23.79).

Используя свойство аддитивности контурных интегралов и основную теорему о вычетах 21.3, интеграл (23.79) можно записать

$$\begin{aligned} \int_{\rho}^R \frac{\ln x}{1+x^3} dx + \int_{\gamma_R} \frac{\ln z}{1+z^3} dz + \int_R^{\rho} \frac{\ln x}{1+x^3} dx + \int_{\gamma_{\rho}} \frac{\ln z}{1+z^3} dz = \\ = 2\pi i \sum_{k=1}^3 \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{\ln z}{1+z^3}. \end{aligned} \quad (23.80)$$

Учтем, что на нижнем берегу

$$\int_R^{\rho} \frac{\ln x}{1+x^3} dx = - \int_{\rho}^R \frac{\ln x + 2\pi i}{1+x^3} dx.$$

Тогда предельный переход $\rho \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ в (23.80) дает

$$\begin{aligned} -2i\pi \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{\ln z}{1+z^3} dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{\ln z}{1+z^3} dz = \\ = 2\pi i \left[\lim_{z \rightarrow e^{i\pi/3}} \frac{\ln z}{(e^{i\pi/3} - e^{i\pi})(e^{i\pi/3} - e^{i5\pi/3})} + \right. \\ \left. + \lim_{z \rightarrow e^{i\pi}} \frac{\ln z}{(e^{i\pi} - e^{i\pi/3})(e^{i\pi} - e^{i5\pi/3})} + \right. \\ \left. + \lim_{z \rightarrow e^{i5\pi/3}} \frac{\ln z}{(e^{i5\pi/3} - e^{i\pi/3})(e^{i5\pi/3} - e^{i\pi})} \right]. \end{aligned} \quad (23.81)$$

С помощью леммы 23.1 легко показать (см. предыдущие примеры), что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{\ln z}{1+z^3} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{\ln z}{1+z^3} dz = 0. \quad (23.82)$$

Тогда формула (23.81) примет вид

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} = -\frac{i\pi}{3} \left[\frac{2}{\sqrt{3}i(3+\sqrt{3}i)} - \frac{10}{\sqrt{3}i(3-\sqrt{3}i)} + 1 \right] = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Отметим, что интеграл (23.78) можно было вычислить проще с помощью замены переменной $x^3 = y$. Тогда, согласно (23.58),

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{y^{1/3-1}}{1+y} dy = \frac{\pi}{3 \sin(\pi/3)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

◊ Следует отметить, что для интегралов (23.38) от четных функций с целым α можно использовать формулу (23.23), так как в этом случае

$$\int_0^{\infty} \mathcal{R}(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x) dx.$$

В заключение рассмотрим интегралы типа (23.38) с комплексным показателем.

Пример 23.16. Вычислить

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\ln x)}{a^2 + x^2} dx, \quad \int_0^\infty \frac{\sin(\ln x)}{a^2 + x^2} dx, \quad a > 0. \quad (23.83)$$

Решение. Интегралы (23.83) можно рассматривать как действительную и мнимую части интеграла

$$\int_0^\infty \frac{e^{i \ln x}}{a^2 + x^2} dx.$$

Рассмотрим контурный интеграл

$$\int_\gamma \frac{e^{i \ln z}}{a^2 + z^2} dz, \quad (23.84)$$

где γ – контур, изображенный на рис. 47 и содержащий внутри себя точку $z = ia$, являющуюся простым полюсом. Выберем однозначную ветвь логарифма так, чтобы $\ln z = \ln x$ для $x > 0$ и $\ln z = \ln x + i\pi$ для $x < 0$ на действительной оси $z = x$. Как и в предыдущих примерах, распишем (23.84)

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{e^{i \ln x}}{a^2 + x^2} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{i \ln z}}{a^2 + z^2} dz + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i \ln x}}{a^2 + x^2} dx + \\ & + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{e^{i \ln z}}{a^2 + z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ia} \frac{e^{i \ln z}}{a^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (23.85)$$

С учетом того, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i \ln x}}{a^2 + x^2} dx &= \int_0^\infty \frac{e^{i(\ln x + i\pi)}}{a^2 + x^2} dx, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{i \ln z}}{a^2 + z^2} dz &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{e^{i \ln z}}{a^2 + z^2} dz = 0, \end{aligned}$$

формулу (23.85) можно переписать

$$(1 + e^{-\pi}) \int_0^\infty \frac{e^{i \ln x}}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{i(\ln a + i\pi/2)},$$

откуда

$$\int_0^\infty \frac{e^{i \ln x}}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi e^{-\pi/2} e^{i \ln a}}{a(1 + e^{-\pi})} = \frac{\pi e^{i \ln a}}{2a \operatorname{ch} \pi/2}. \quad (23.86)$$

Приравняв действительные и мнимые части (23.86), найдем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos(\ln x)}{a^2 + x^2} dx &= \frac{\pi \cos(\ln a)}{2a \operatorname{ch} \pi/2}, \\ \int_0^\infty \frac{\sin(\ln x)}{a^2 + x^2} dx &= \frac{\pi \sin(\ln a)}{2a \operatorname{ch} \pi/2}. \end{aligned} \quad (23.87)$$

23.7. Другие несобственные интегралы

Здесь мы рассмотрим обобщение предыдущих теорем на интегралы, содержащие конечные особые точки на контуре интегрирования.

Теорема 23.6. Пусть функция $\mathcal{R}(x)$ удовлетворяет требованиям теоремы 23.2 при условии, что часть простых полюсов N_1 из общего числа N особых точек лежит на действительной оси γ_x . Тогда

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \left[\sum_{k=1}^{N-N_1} \operatorname{Res}_{z=z_k \notin \gamma_x} R(z) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_1} \operatorname{Res}_{z=z_k \in \gamma_x} R(z) \right]. \quad (23.88)$$

Доказательство. Если мы докажем равенство (23.88) для $N_1 = 1$, то доказательство для произвольного $N_1 \leq N$ очевидно. Итак, для функции $\mathcal{R}(z)$, имеющей на действительной оси полюс $z = x_1$, рассмотрим интеграл

$$\int_{\gamma} \mathcal{R}(z)dz,$$

по контуру γ , изображенному на рис. 48.

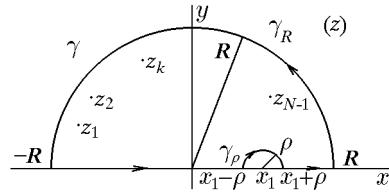


Рис. 48

Радиусы полуокружностей γ_ρ и γ_R выбраны так, чтобы все особые точки, не принадлежащие действительной оси, находились внутри контура γ . Используя свойство аддитивности контурного интеграла и основную теорему о вычетах, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_R} \mathcal{R}(z)dz + \int_{-R}^{x_1 - \rho} \mathcal{R}(x)dx + \int_{\gamma_\rho} \mathcal{R}(z)dz + \int_{x_1 + \rho}^R \mathcal{R}(x)dx = \\ & = 2\pi i \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{Res}_{z=z_k \notin \gamma} \mathcal{R}(z). \end{aligned} \quad (23.89)$$

Предельный переход $\rho \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ в (23.89) дает

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \mathcal{R}(z)dz + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \mathcal{R}(z)dz + \int_{-\infty}^{x_1} \mathcal{R}(x)dx + \int_{x_1}^{\infty} \mathcal{R}(x)dx = \\ & = 2\pi i \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{Res}_{z=z_k \notin \gamma_x} \mathcal{R}(z). \end{aligned} \quad (23.90)$$

При доказательстве теоремы 23.2, было показано, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \mathcal{R}(z)dz = 0,$$

тогда (23.90) можно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x)dx + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \mathcal{R}(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{Res}_{z=z_k \notin \gamma_x} \mathcal{R}(z). \quad (23.91)$$

Рассмотрим более подробно интеграл

$$\int_{\gamma_\rho} \mathcal{R}(z)dz. \quad (23.92)$$

Так как точка $z = x_1$ является простым полюсом, то в кольце $0 < |z - x_1| < \rho_1$, не содержащем других особых точек, функцию $\mathcal{R}(z)$ можно разложить в равномерно сходящийся ряд Лорана, если $\rho_1 > \rho$ и сколь угодно близко к ρ . Тогда интеграл (23.92) можно записать

$$\int_{\gamma_\rho} \mathcal{R}(z)dz = C_{-1} \int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z - x_1} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \int_{\gamma_\rho} (z - x_1)^k dz.$$

Положив $z - x_1 = \rho e^{i\varphi}$, получим равенство

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\rho} \mathcal{R}(z)dz &= iC_{-1} \int_{\pi}^0 d\varphi + \sum_{k=0}^{\infty} C_k i \int_{\pi}^0 \rho^{k+1} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = \\ &= -i\pi C_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \frac{\rho^{k+1}}{k+1} [1 - e^{i(k+1)\pi}], \end{aligned}$$

пределенный переход в котором дает

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \mathcal{R}(z)dz = -i\pi C_{-1}$$

или

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \mathcal{R}(z)dz = -i\pi \operatorname{Res}_{z=x_1} \mathcal{R}(z) \quad (23.93)$$

с учетом того, что

$$C_{-1} = \operatorname{Res}_{z=x_1} \mathcal{R}(z).$$

Подстановка (23.93) в (23.91) приводит к

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x)dx = 2\pi i \left[\sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{Res}_{z=z_k \notin \gamma} \mathcal{R}(z) + \frac{1}{2} \operatorname{Res}_{z=x_1} \mathcal{R}(z) \right]. \quad (23.94)$$

В случае произвольного числа полюсов N_1 , лежащих на действительной оси, формула (23.94) очевидным образом переходит в (23.88).

Теорема 23.7. Пусть функция $\mathcal{R}(x)$ удовлетворяет требованиям теоремы 23.3 при условии, что часть простых полюсов N_1 из общего числа особых точек N лежит на действительной оси γ_x . Тогда

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iaz} \mathcal{R}(x) dx = 2\pi i \left[\sum_{k=1}^{N-N_1} \operatorname{Res}_{z=z_k \notin \gamma_x} \mathcal{R}(z) e^{iaz} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_1} \operatorname{Res}_{z=z_k \in \gamma_x} \mathcal{R}(z) e^{iaz} \right]. \quad (23.95)$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы с необходимыми извлечениями из доказательства теоремы 23.2.

Теорема 23.8. Пусть функция $\mathcal{R}(x)$ удовлетворяет требованиям теоремы 23.5 при условии, что α – некоторое комплексное число, а часть простых полюсов N_1 из общего числа особых точек N лежит на луче $\gamma_x :]0, \infty[$. Тогда

$$\text{V.p.} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \mathcal{R}(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \left[\sum_{k=1}^{N-N_1} \operatorname{Res}_{z=z_k \notin \gamma_x} \mathcal{R}(z) z^{\alpha-1} + \frac{1 + e^{i2\pi\alpha}}{2} \sum_{k=1}^{N_1} \operatorname{Res}_{z=z_k \in \gamma_x} \mathcal{R}(z) z^{\alpha-1} \right]. \quad (23.96)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 23.6 с необходимыми извлечениями из доказательства теоремы 23.5. Отметим лишь, что замкнутый контур выбирается как комбинация контуров, изображенных на рис. 46, 48, и изображен на рис. 49.

Пример 23.17. Вычислить

$$I = \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x - b)}, \quad a > 0. \quad (23.97)$$

Решение. Функция

$$\mathcal{R}(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)(z - b)}, \quad (23.98)$$

во-первых, при $z \rightarrow \infty$ справедливо

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{R}(z)}{z^3} = A, \quad A = \text{const}, \quad |A| < \infty,$$

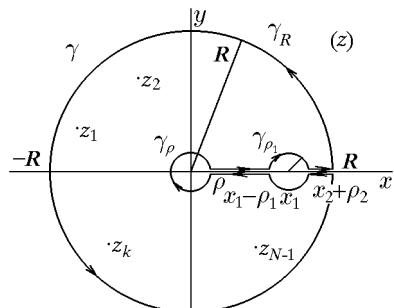


Рис. 49

а во-вторых, имеет три простых полюса $z_1 = ia$, $z_2 = -ia$ и $z_3 = b$, из которых z_1 расположен в верхней полуплоскости, z_2 – в нижней, а z_3 – на действительной оси. Вычислив согласно (23.88)

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z=ia} \mathcal{R}(z) &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{(z+ia)(z-b)} = \frac{1}{2ia(ia-b)}, \\ \operatorname{Res}_{z=b} \mathcal{R}(z) &= \lim_{z \rightarrow b} \frac{1}{(z^2+a^2)} = \frac{1}{b^2+a^2}\end{aligned}$$

и подставив в (23.97) найденные вычеты, получим

$$\begin{aligned}\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x-b)} &= 2\pi i \left[\frac{1}{2ia(ia-b)} + \frac{1}{2(b^2+a^2)} \right] = \\ &= -\frac{\pi b}{a(a^2+b^2)}. \quad (23.99)\end{aligned}$$

Отметим, что вычисление интеграла (23.97) обычным способом гораздо более громоздко. Действительно, разложим (23.98) на простейшие дроби:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(z) &= \frac{1}{(x^2+a^2)(x-b)} = \\ &= \frac{1}{b^2+a^2} \left[-\frac{x}{x^2+a^2} - \frac{b}{x^2+a^2} + \frac{1}{x-b} \right]. \quad (23.100)\end{aligned}$$

Тогда

$$I = \frac{1}{b^2+a^2} \left[- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^2+a^2} - b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x-b} \right]. \quad (23.101)$$

В предыдущих примерах и Приложении П1 показано, что первый и последний интегралы в (23.101) сходятся в смысле главного значения к нулю, а второй интеграл сходится в обычном смысле

$$\begin{aligned}I &= \frac{b}{b^2+a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = -\frac{b}{a(b^2+a^2)} \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} = \\ &= -\frac{b\pi}{a(b^2+a^2)}.\end{aligned}$$

Заметим, что при $a \rightarrow +0$ значение $I \rightarrow -\infty$, т.е. интеграл (23.97) расходится, так как два простых полюса $z = \pm ia$ сливаются в один двукратный $z = 0$. Такой же результат следует из (23.101) при $a = 0$:

$$I = \frac{1}{b^2} \left[- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} - b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x-b} \right],$$

так как второй интеграл (см. пример ??) содержит четную степень x и в смысле главного значения расходится.

Пример 23.18. Вычислить

$$I = \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx.$$

Решение. Заметим, что аналитическое продолжение подынтегральной функции при $\alpha > 0$ удовлетворяет условиям теоремы 23.8 и имеет один простой полюс $z = 0$, лежащий на действительной оси. Следовательно, согласно (23.95) имеем

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = \pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{i\alpha z}}{z} = \pi i. \quad (23.102)$$

Для $\alpha = -|\alpha| < 0$ заменой $x \rightarrow -x$ получим

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i|\alpha|x}}{x} dx = -\pi i. \quad (23.103)$$

В примере ?? показано, что при $\alpha = 0$

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} = 0.$$

Таким образом,

$$\text{V.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = \begin{cases} 1/2, & \alpha > 0; \\ 0, & \alpha = 0; \\ -1/2, & \alpha < 0. \end{cases} \quad (23.104)$$

Пример 23.19. Вычислить

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Решение. Воспользуемся результатом предыдущей задачи:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{Im} \left(\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \operatorname{Im} (i\pi) = \pi. \quad (23.105)$$

Пример 23.20. Вычислить интеграл

$$\text{V.p.} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} dx.$$

Решение. Для функции $\mathcal{R}(z) = 1/(1-z)$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z(1-z)} = 0,$$

и, следовательно, согласно (23.45), исходный интеграл сходится для $0 < \alpha < 1$. Функция $\mathcal{R}(z)$ имеет единственный простой полюс $z = 1$, принадлежащий лучу $]0, \infty[$, и удовлетворяет условиям теоремы 23.8. Вычислив

$$\operatorname{Res}_{z=1} \frac{z^{\alpha-1}}{1-z} = -1,$$

согласно соотношению (23.96) найдем

$$\text{V.p.} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} dx = -\pi i \frac{1+e^{i2\pi\alpha}}{1-e^{i2\pi\alpha}} = \pi \operatorname{ctg} \alpha\pi. \quad (23.106)$$

◊ В заключение отметим, что сформулированные выше теоремы охватывают достаточно узкий класс интегралов. Поэтому интерес представляют не только сами теоремы, но также приемы и методы, использованные в доказательствах этих теорем, которые нередко позволяют вычислять интегралы более широких классов.

Пример 23.21. Вычислить

$$I = \int_0^\infty \frac{1-\cos \alpha x}{x^2} dx.$$

Решение. Рассмотрим контурный интеграл

$$I = \int_\gamma \frac{1-e^{i\alpha z}}{z^2} dz, \quad \alpha > 0, \quad (23.107)$$

где контур γ изображен на рис. 48 при условии $x_1 = 0$. Внутри такого контура подынтегральная функция не имеет особых точек. Тогда, с одной стороны, согласно теореме Коши $I = 0$, а с другой — согласно свойству аддитивности контурных интегралов

$$\begin{aligned} I &= \int_{-R}^{-\rho} \frac{1-e^{i\alpha x}}{x^2} dx + \int_{\gamma_\rho} \frac{1-e^{i\alpha z}}{z^2} dz + \\ &+ \int_\rho^R \frac{1-e^{i\alpha x}}{x^2} dx + \int_{\gamma_R} \frac{1-e^{i\alpha z}}{z^2} dz = 0. \end{aligned} \quad (23.108)$$

Предельный переход $\rho \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ в (23.108) с учетом равенства

$$\int_{-R}^{-\rho} \frac{1-e^{i\alpha x}}{x^2} dx = \int_\rho^R \frac{1-e^{-i\alpha x}}{x^2} dx$$

дает

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{2 - (e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x})}{x^2} dx + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{1 - e^{i\alpha z}}{z^2} dz + \\ & + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{1 - e^{i\alpha z}}{z^2} dz = 0. \end{aligned} \quad (23.109)$$

Согласно лемме 23.1 при $\alpha > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{1 - e^{i\alpha z}}{z^2} dz = 0. \quad (23.110)$$

Для вычисления интеграла по контуру γ_ρ воспользуемся тем, что точка $z = 0$ для подынтегральной функции (23.107) является полюсом первого порядка с вычетом, равным

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1 - e^{i\alpha z}}{z^2} = -i\alpha,$$

и, следовательно, в окрестности точки $z = 0$ может быть разложена в ряд Лорана

$$\frac{1 - e^{i\alpha z}}{z^2} = -\frac{i\alpha}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n. \quad (23.111)$$

Тогда

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{1 - e^{i\alpha z}}{z^2} dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \left[-\frac{i\alpha}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \right] dz. \quad (23.112)$$

Если $z \in \gamma_\rho$, то $z = \rho e^{i\varphi}$, $dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, и выражение (23.112) можно записать

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{1 - e^{i\alpha z}}{z^2} dz &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \left[-\frac{i\alpha}{\rho e^{i\varphi}} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \rho^n e^{in\varphi} \right] i\rho e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \alpha \int_{\pi}^0 d\varphi = -\alpha\pi. \end{aligned} \quad (23.113)$$

Подставив (23.110), (23.113) в (23.109) получим

$$2 \int_0^\infty \frac{1 - (e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x})/2}{x^2} dx = \alpha\pi$$

или

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx = \frac{\alpha\pi}{2}. \quad (23.114)$$

23.8. Представление функций контурными интегралами

Рассмотрим подробней интегралы от функции

$$f(z) = \frac{e^{itz}}{z} \quad (23.115)$$

по контурам l , l_+ , l_- , изображенным на рис. 50.

Первый контур l (рис. 50, а) представляет собой всю действительную ось Ox . Простой полюс $z = x = 0$ функции (23.115) принадлежит контуру интегрирования, и, следовательно, соответствующий интеграл можно рассматривать в смысле главного значения на неограниченном промежутке от $-\infty$ до ∞ вдоль действительной оси Ox

$$\text{V.p. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x} dx. \quad (23.116)$$

Контуры l_+ , l_- выбраны так, что они обходят полюс $z = 0$ по окружности радиуса ε сверху и снизу, соответственно, совпадая вне этой окружности с контуром l , т.е. действительной осью Ox . В этом случае вместо интеграла (23.116) рассматриваются сходящиеся интегралы

$$\int_{l_+} \frac{e^{itz}}{z} dz - \int_{l_-} \frac{e^{itz}}{z} dz. \quad (23.117)$$

Если ввести две разрывные функции: знаковую (signatura)

$$\text{sign } t = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases} \quad (23.118)$$

и единичную функцию Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (23.119)$$

то для трех интегралов (23.116), (23.117) можно сформулировать следующие леммы.

Лемма 23.3. Для функции $\text{sign } t$ справедливо следующее интегральное представление:

$$\text{sign } t = \text{V.p.} \left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{dx}{x} \right). \quad (23.120)$$

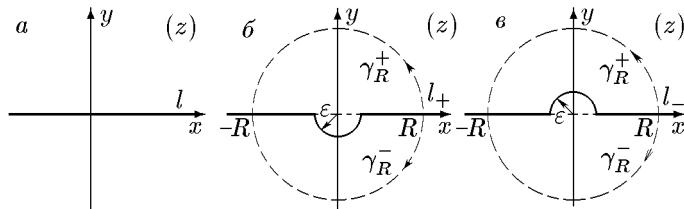


Рис. 50

Доказательство следует непосредственно из решения примера 23.18.

Лемма 23.4. Для функции Хевисайда $\theta(t)$ справедливо следующее интегральное представление:

$$\theta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_+} e^{itz} \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{l_-} e^{-itz} \frac{dz}{z}. \quad (23.121)$$

Доказательство. Пусть $t > 0$. Рассмотрим контур γ , состоящий из двух контуров l_{+R} и γ_R^+ . Контур l_{+R} представляет собой часть контура l_+ на отрезке $[-R, R]$, а γ_R^+ – верхняя часть окружности радиуса R (рис. 50,б). Проинтегрируем функцию (23.115) по составленному таким образом замкнутому контуру γ , используя свойство аддитивности контурных интегралов и основную теорему о вычетах 21.3,

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{l_{+R}} e^{itz} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_R^+} e^{itz} \frac{dz}{z} \right] = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{itz}}{z}. \quad (23.122)$$

Предельный переход $R \rightarrow \infty$ в (23.122) с учетом того, что второй интеграл удовлетворяет лемме Жордана и, следовательно,

$$\int_{\gamma_R^+} e^{itz} \frac{dz}{z} = 0,$$

а

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{itz}}{z} = 1,$$

дает

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{l_+} e^{itz} \frac{dz}{z} = 1. \quad (23.123)$$

Пусть теперь $t < 0$. Рассмотрим интеграл от функции (23.115) по контуру $\gamma = l_{+R} + \gamma_R^-$ (рис. 50,б). По теореме Коши

$$\int_{\gamma} e^{itz} \frac{dz}{z} = \int_{l_{+R}} e^{itz} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_R^-} e^{itz} \frac{dz}{z} = 0, \quad (23.124)$$

так как точка $z = 0$ находится вне контура γ .

Предельный переход $R \rightarrow \infty$ в (23.124) дает

$$\int_{l_{+R}} e^{itz} \frac{dz}{z} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^-} e^{itz} \frac{dz}{z} = 0.$$

Из следствия 1 леммы Жордана имеем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^-} e^{itz} \frac{dz}{z} = 0$$

и, следовательно,

$$\int_{l_+} e^{itz} \frac{dz}{z} = 0. \quad (23.125)$$

Совокупность (23.121), (23.125) и доказывает утверждение (23.119).

Доказательство для контура l_- проводится аналогично, следует лишь учесть, что обход контура γ_R^- (рис. 50, ν) совершается в отрицательном направлении.

Соотношения, аналогичные (23.119), были получены ранее с помощью интегралов Бромвича–Вагнера и если последние связаны с приложениями, использующими преобразование Лапласа, то соотношения (23.119) связаны с преобразованием Фурье.

В заключение отметим, что интегралы (23.117) иногда удобно записывать в виде

$$\int_{l_+} e^{itz} \frac{dz}{z} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{dx}{x - i0}, \quad \int_{l_-} e^{itz} \frac{dz}{z} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{dx}{x + i0}. \quad (23.126)$$

Поясним эти обозначения. Поскольку значение ε может быть сколь угодно малым, интегрирование в (23.117) идет фактически по действительной оси Ox за исключением сколь угодно малой окрестности точки $z = 0$. Если полюс функции (23.115) сместить на величину ε по мнимой оси вверх (так, чтобы он находился над осью Ox), то интегрирование можно распространить на всю действительную ось с последующим предельным переходом $\varepsilon \rightarrow 0$. Такая процедура будет полностью соответствовать правилу обхода полюса $z = 0$, предписываемого контуром l_+ , т.е.

$$\int_{l_+} e^{itz} \frac{dz}{z} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{dx}{x - i0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{dx}{x - i\varepsilon}. \quad (23.127)$$

Аналогично, смещение полюса в точку $-i\varepsilon$ соответствует правилу обхода полюса $z = 0$, предписываемого контуром l_- (под осью Ox).

ГЛАВА 3

Введение в теорию конформных отображений

24. Геометрический смысл производной аналитической функции

Пусть $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – аналитическая в области E функция. Значение функции $w = u + iv$ будем изображать точкой плоскости uOv . Рассмотрим условия, при которых точке $z = x + iy$ в плоскости независимого переменного z будет соответствовать одна точка $w = u + iv$ в плоскости w и наоборот.

Утверждение 24.1. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в точке z . Тогда отображение, осуществляемое функцией f , однолистно (взаимно однозначно) в некоторой окрестности этой точки, если*

$$f'(z) \neq 0. \quad (24.1)$$

Справедливость этого утверждения следует из аналогичной теоремы для функции двух вещественных переменных: отображение будет взаимно однозначным, если якобиан перехода от переменных (x, y) к переменным (u, v) отличен от нуля, т.е.

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0. \quad (24.2)$$

Вычислим этот якобиан

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Из условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

следует (24.1)

$$J = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2.$$

Поскольку

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = u_x(x, y) + iv_x(x, y),$$

то условие (24.2) эквивалентно условию (24.1), что и доказывает утверждение.

◊ Заметим, что из однолистности функции $f(z)$ в окрестности каждой точки области E , вообще говоря, не следует ее однолистность во всей области. Например, функция $f(z) = z^3$ однолистна в каждой точке кольца $1 < |z| < 2$, поскольку $f'(z) = 3z^2 \neq 0$, но она не однолистна во всем кольце.

24.1. Геометрический смысл аргумента производной

Пусть z_0 – произвольная точка области E и γ – гладкая кривая, целиком лежащая в E , $z_0 \in \gamma$. Тогда при однолистном отображении области E в область G , осуществляющем функцией f , кривая γ отображается кривой Γ (см. рис. 51).

Если γ задается параметрическим уравнением $z(t)$, то Γ задается уравнением $w(t) = f(z(t))$. Следовательно,

$$w'(t) = f'(z(t)) z'(t) \neq 0,$$

и в точке $z_0 = z(t_0)$, соответствующей значению параметра $t = t_0$, можем записать

$$\operatorname{Arg} w'(t_0) = \operatorname{Arg} (f'(x_0) z'(t_0))$$

или

$$\operatorname{Arg} f'(z_0) = \operatorname{Arg} w'(t_0) - \operatorname{Arg} z'(t_0). \quad (24.3)$$

◊ Таким образом, в геометрическом смысле $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ есть разность между углом $\operatorname{Arg} w'(t_0)$, который составляет касательная к кривой Γ в точке $w_0 = f(z_0)$ с осью Ou , и углом $\operatorname{Arg} z'(t_0)$, который составляет касательная к кривой γ в точке z_0 с осью Ox .

Теорема 24.1 (свойство сохранения углов). При отображении, осуществляющем аналитической функцией $f(z)$, удовлетворяющей условию $f'(z_0) \neq 0$, угол $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ между любыми кривыми γ_1 и γ_2 , пересекающимися в точке z_0 , равен углу $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ между их образами, пересекающимися в точке $w_0 = f(z_0)$, с тем же направлением отсчета.

Доказательство. Пусть $\varphi = (\widehat{\gamma_1 \gamma_2})$ и $\Phi = (\widehat{\Gamma_1 \Gamma_2})$. Тогда

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \Phi = \Phi_1 - \Phi_2.$$

Согласно (10.2)

$$\Phi_1 = \operatorname{Arg} f'(z_0) + \varphi_1, \quad \Phi_2 = \operatorname{Arg} f'(z_0) + \varphi_2.$$

Таким образом,

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi = \beta,$$

что и доказывает теорему (см. рис. 52).

24.2. Геометрический смысл модуля производной

Выясним геометрический смысл модуля производной аналитической функции $f(z)$. Для этого из точки $z_0 = z(t_0)$ перейдем в точку z вдоль кривой γ (в заданном направлении). Обозначим хорду, соединяющую эти точки, через Δz

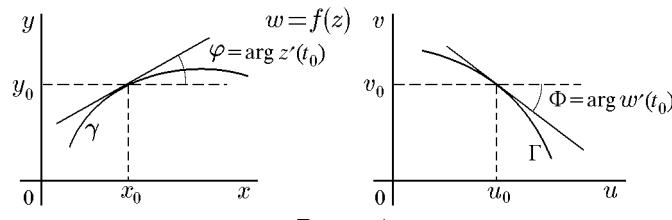


Рис. 51

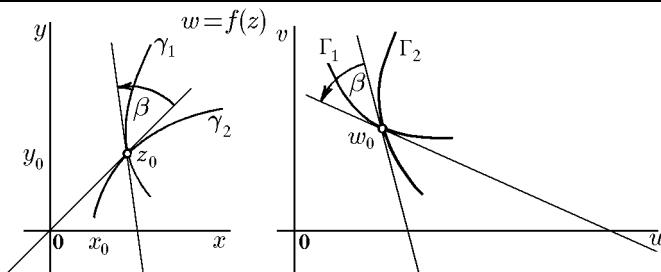


Рис. 52

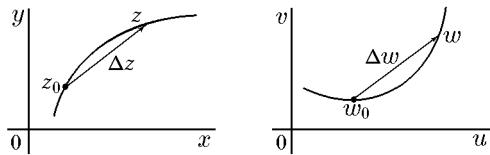


Рис. 53

(рис. 53). На плоскости w точкам z_0 и z будут соответствовать точки w_0 и w , принадлежащие кривой Γ – образу кривой γ , а хорде Δz отвечает хорда Δw (см. рис. 53).

Согласно определению производной, имеем

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0}, \quad z \in \gamma$$

или

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|}, \quad z \in \gamma. \quad (24.4)$$

Особенностью этого предела является то, что точка z стремится к точке z_0 не произвольным образом, а по кривой γ . Однако аналитичность функции $w = f(z)$ позволяет утверждать, что этот и аналогичные пределы по любым другим кривым, проходящим через точку z_0 , существуют и равны между собой.

Поэтому соотношение (24.4) можно записать в виде, в котором предел не зависит от способа стремления z к z_0 :

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|} = \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}.$$

◊ Геометрически $|\Delta w|$ – длина вектора Δw , а $|\Delta z|$ – длина вектора Δz . Поэтому геометрический смысл последнего соотношения заключается в том, что при отображении, осуществляемом аналитической функцией, удовлетворяющей условию $f'(z_0) \neq 0$, бесконечно малые элементы преобразуются подобным образом в любом направлении, причем $|f'(z_0)|$ – коэффициент подобия. Это свойство означает постоянство растяжения (сжатия) отображения в точке z_0 .

Пример 24.1. Найти коэффициент подобия k и угол поворота α кривых, проходящих через точку $z_0 = i$, при отображении $w = z^2$.

Решение. Точка $z_0 = i$ отображается в точку $w_0 = i^2 = -1$. Поскольку $w' = 2z$, значение производной в точке $z_0 = i$ равно $w'(i) = 2i = 2e^{i\pi/2}$. Отсюда следует, что $k = 2$, $\alpha = \pi/2$. Таким образом, окрестность точки $z_0 = i$ при отображении $w = z^2$ переходит в окрестность точки $w_0 = -1$ с радиусом, в два раза большим исходного. При этом все кривые, проходящие через точку $z_0 = i$, поворачиваются на угол $\pi/2$ против часовой стрелки.

24.3. Понятие конформного отображения

◆ Отображение, осуществляемое функцией $w = f(z)$, называется конформным в точке z_0 , если оно обладает свойством сохранения углов и постоянством растяжений.

◆ Однолистное отображение $w = f(z)$ области E на область G называется конформным в области E , если оно конформно в каждой точке множества E .

Теорема 24.2. *Если функция $f(z)$ – однолистная и аналитическая в области E , то отображение $w = f(z)$ конформно.*

Доказательство следует непосредственно из геометрического смысла модуля и аргумента производной аналитической функции и определения конформного отображения.

Справедливо и обратное утверждение.

Отсюда вытекают два очевидных следствия.

Следствие 24.2.1. Отображение, обратное к конформному в некоторой области, конформно.

Следствие 24.2.2. Суперпозиция конформных отображений является конформным отображением.

Если рассматривать функцию $w = f(z)$ в замкнутой области, то справедлива

Теорема 24.3 (принцип соответствия границ). *Пусть E и G – односвязные области, ограниченные жордановыми кривыми γ и Γ , соответственно. Тогда функцию $w = f(z)$, конформно отображающую E на G , можно непрерывно продолжить на границу γ и продолженная функция $w = f(z)$ отображает взаимно однозначно кривую γ на кривую Γ с сохранением ориентации.*

Сформулированный выше принцип соответствия границ имеет важное практическое значение. Действительно, в тех случаях, когда этот принцип применим, для отыскания области G , на которую функция $w = f(z)$ отображает конформно заданную область E с границей γ , достаточно найти образ Γ границы γ и установить соответствие направлений обхода прообраза γ и образа Γ – границы области G . Тогда, если обход границы γ был таким, что область E оставалась слева (справа), то искомой областью G будет та, которая остается слева (справа) при установленном направлении обхода границы Γ .

Последние рассуждения мы проводили в предположении, что существует функция $w = f(z)$, реализующая конформное отображение областей E в G . Переайдем теперь к определению условий, обеспечивающих существование такого отображения. Соответствующая теорема – теорема Римана – является основной теоремой теории конформных отображений. Однако прежде чем перейти к теореме Римана, докажем теорему о так называемых «исключительных» областях.

Теорема 24.4. *Вся расширенная комплексная плоскость или вся комплексная плоскость с одной выколотой точкой не может быть конформно отображена на ограниченную область.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему для расширенной плоскости с одной выколотой точкой, которую без ограничения общности можно считать бесконечно удаленной (см. разд. «Дробно-линейная функция»). Предположим, что конечная плоскость (точка $z = \infty$ выколота) функцией $w = f(z)$ отображается на какую-либо ограниченную область. Но тогда $f(z)$ – целая функция, ограниченная на всей плоскости, и по теореме Лиувилля такая функция является постоянной, что и доказывает невозможность подобного конформного отображения ($f'(z) = 0$).

Теорема 24.5 (Римана). *Каковы бы ни были односвязные области E и G с границами, состоящими более чем из одной точки, существует функция $w = f(z)$, конформно отображающая область E на G , причем эта функция единственна, если*

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha,$$

где z_0, w_0 – заданные точки областей E и G , соответственно, а α – заданное действительное число.

Отметим, что теоремы 24.3 и 24.5 приведены без доказательств. Строгое их доказательство (см. [17, 35]) выходит за рамки нашего курса, для практических же целей этих формулировок вполне достаточно.

◊ Заметим, что теорема Римана, гарантируя существование конформных отображений, не указывает способ их отыскания. Поэтому следующим нашим шагом будет исследование отображений, осуществляемых элементарными функциями, среди которых мы выделим функции, осуществляющие конформные отображения некоторых стандартных областей.

25. Линейная функция

Отображение, осуществляющее линейной функцией

$$w = az + b \tag{25.1}$$

можно рассматривать как композицию трех простейших отображений. Действительно, положим $w_1 = |a|z$, $w_2 = e^{i\arg a}w_1$, $w_3 = w_2 + b$. Тогда нетрудно видеть, что $w = w_3(w_2(w_1(z)))$. Из геометрического смысла произведения и суммы комплексных чисел ясно, что отображение w_1 есть отображение подобия (сжатие при $|a| < 1$, растяжение при $|a| > 1$); отображение w_2 представляет поворот всей плоскости (w_1) относительно начала координат на угол $\arg a$ и, наконец, отображение w_3 есть параллельный перенос плоскости (w_2) на вектор, изображающий комплексное число b .

Так как $w'(z) = a \neq 0$, то отображение, осуществляющее линейной функцией (25.1), конформно во всей расширенной плоскости, причем оно имеет две неподвижные точки $z_1 = c = b/(1 - a)$ (при $a \neq 1$) и $z_2 = \infty$.

Следовательно, классификацию отображений, осуществляемых линейной функцией, можно провести иначе. Так, при $a = 1$ отображение сводится только к параллельному переносу на вектор, изображающий комплексное число b , с одной неподвижной точкой $z = \infty$. При $a = |a|e^{i\alpha} \neq 1$ функцию (25.1) можно записать

$$w - c = a(z - c), \quad b = c - ac,$$

откуда следует, что каждый вектор $z - c$, выходящий из точки c , в результате отображения поворачивается на угол, равный $\alpha = \arg a$ и подвергается растяжению в $|a|$ раз, превращаясь в вектор $w - c$, выходящий из той же точки. Это означает, что отображение сводится к повороту всей плоскости как целого вокруг точки $c = b/(1 - a)$ на угол $\alpha = \arg a$ и растяжению относительно этой точки в $|a|$ раз. Обратная функция

$$z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}$$

тоже линейна.

Пример 25.1. Найти функцию, отображающую равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами A, B, C , соответствующих числам $3 + 2i, 7 + 2i, 5 + 4i$, лежащих в плоскости z , на равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами в точках A', B', C' в плоскости w , соответствующих числам $0, -2i, 1 - i$.

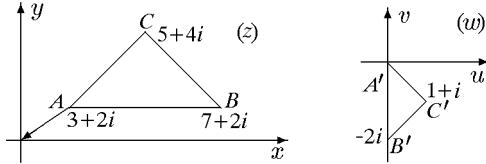


Рис. 54

Решение. Поскольку треугольники подобны, то отображение может быть осуществлено с помощью линейной функции.

Первый способ. Отображение можно разложить на следующие:

а) параллельный перенос, смещающий точку A в начало координат. Этот сдвиг производится вектором \vec{AO} , соответствующий числу $-(3 + 2i)$, и, следовательно, осуществляется функцией (см. рис. 54)

$$w_1 = z - (3 + 2i);$$

б) поворот около начала координат на угол $-\pi/2$, соответствующий преобразованию

$$w_2 = e^{-i\pi/2}w_1 \quad \text{или} \quad w_2 = -iw_1;$$

в) преобразование подобия с центром в начале координат и коэффициентом подобия, равным $1/2$. Это преобразование осуществляется функцией

$$w = \frac{1}{2}w_2.$$

Таким образом,

$$w = -\frac{1}{2}i[z - (3 + 2i)]$$

или окончательно

$$w = -\frac{i}{2}z + \left(\frac{3}{2}i - 1\right). \quad (25.2)$$

Второй способ. Пусть искомая функция есть $w = az + b$, где a и b – пока неопределенные константы. Поскольку точки $z_1 = 3 + 2i$ и $z_2 = 7 + 2i$ должны перейти, соответственно, в точки $w_1 = 0$ и $w_2 = -2i$, получаем систему для вычисления a и b

$$\begin{cases} 0 = a(3 + 2i) + b, \\ -2i = a(7 + 2i) + b, \end{cases}$$

откуда $a = -i/2$, $b = 3i/2 - 1$.

В заключение заметим, что точка

$$z = \frac{b}{1-a} = -\frac{4}{5} + \frac{4}{5}i$$

остается неподвижной. Из явного вида линейной функции (25.2) легко убедиться, что указанное отображение треугольников можно получить поворотом всей плоскости вокруг этой неподвижной точки на $\pi/2$ по часовой стрелке и преобразованием подобия с коэффициентом подобия $b = 1/2$.

26. Инверсия

Как указывалось ранее, любую прямую на комплексной плоскости можно рассматривать как окружность бесконечного радиуса. Дополним понятие симметрии двух точек относительно прямой (окружности бесконечного радиуса) понятием симметрии двух точек относительно окружности конечного радиуса R .

◆ Две точки A и B будем называть взаимно симметричными относительно окружности C_R , если они лежат на одном луче, выходящем из центра окружности, а произведение их расстояний до центра окружности равно квадрату радиуса R окружности, т.е. $OA \cdot OB = R^2$.

◊ Можно показать, что любая окружность или прямая, проходящая через точки A и B , ортогональна данной окружности.

Естественно, что если точка A будет приближаться к окружности, то точка B также приблизится к ней. Следовательно, всякая точка, лежащая на окружности, симметрична самой себе. В свою очередь, точкой, симметричной центру окружности, является бесконечно удаленная точка. Рис. 55 достаточно наглядно иллюстрирует способ построения симметричных точек A и B .

Если центр окружности C_R совпадает с началом координат комплексной плоскости, а точка A соответствует комплексному числу z , то симметричная ей относительно окружности C_R точка B будет соответствовать числу R^2/z^* .

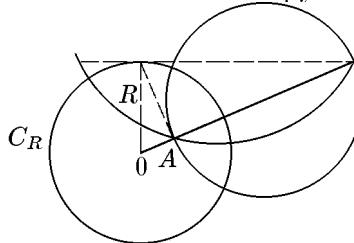


Рис. 55

$$\operatorname{Arg} \frac{R^2}{z^*} = -\operatorname{Arg} z^* = \operatorname{Arg} z.$$

и, кроме того, числа z и R^2/z^* изображаются точками, лежащими на одном луче, выходящем из начала координат, так как

В частности, точки z и $1/z^*$ взаимно симметричны относительно окружности единичного радиуса с центром в начале координат.

◆ Инверсией называется переход от точки z к точке $w = 1/z^*$.

Перейдем к отображению, осуществляющему функцией

$$w = \frac{1}{z}, \quad (26.1)$$

аналитической на полной комплексной плоскости, кроме точки $z = 0$, в которой она имеет полюс первого порядка. В полярных координатах $z = |z|e^{\arg z} = \rho e^{i\varphi}$, $w = |w|e^{i\operatorname{Arg} w} = re^{i\theta}$ отображение (26.1) перепишется в виде

$$r = \frac{1}{\rho}, \quad \theta = -\varphi. \quad (26.2)$$

Удобно рассматривать отображение (26.2) как составленное из двух, геометрически более наглядных

$$r_1 = \frac{1}{\rho}, \quad \theta_1 = \varphi, \quad r = r_1, \quad \theta = -\theta_1.$$

Первое отображение есть преобразование симметрии относительно единичной окружности, а второе – преобразование симметрии относительно действительной оси (см. рис. 56).

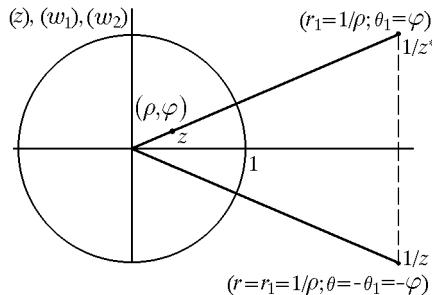


Рис. 56

Таким образом, преобразование, осуществляющееся функцией (26.1), состоит из двух симметричных отображений относительно единичной окружности и действительной оси.

Так как при инверсии единичная окружность $|z| = 1$ отображается в единичную окружность $|w| = 1$, а действительная ось плоскости z отображается в действительную ось плоскости w , то обе плоскости можно разбить на четыре области, изображенных на рис. 57.

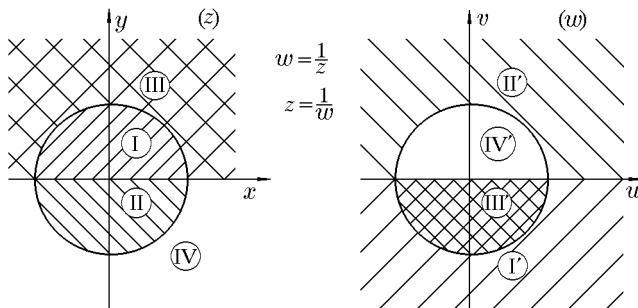


Рис. 57

Рис. 57 наглядно иллюстрирует взаимно однозначное соответствие областей, осуществляющееся функцией $1/z$ (образы и прообразы обозначены одной римской цифрой и одинаковой штриховкой).

Теорема 26.1. *Функция $w = 1/z$ преобразует любую окружность полной комплексной плоскости снова в окружность.*

Доказательство. Напомним, что любую прямую мы условились рассматривать как окружность радиуса $R = \infty$. Очевидно, что уравнение любой прямой или окружности можно представить в виде

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0, \quad (26.3)$$

причем при $A = 0, B^2 + C^2 \neq 0$ уравнение (26.3) описывает прямую, а при $A \neq 0, B^2 + C^2 - AD > 0$ – окружность конечного радиуса. С заменой $x^2 + y^2 = zz^*$, $2x = z + z^*$, $2iy = z - z^*$ уравнение (26.3) примет вид

$$Azz^* + (B - iC)z + (B + iC)z^* + D = 0. \quad (26.4)$$

Чтобы получить образ кривой (26.3) при отображении $w = 1/z$, заменим в (26.4) z на $1/w$, где $w = u + iv$. Получим

$$A \frac{1}{ww^*} + (B - iC) \frac{1}{w} + (B + iC) \frac{1}{w^*} + D = 0$$

или

$$D(u^2 + v^2) + 2Bu - 2Cv + A = 0. \quad (26.5)$$

Уравнение (26.5) имеет тот же вид, что и уравнение (26.3), с заменой A на D и C на $-C$. Отсюда следует, что образом прямой или окружности при инверсии является снова прямая или окружность.

◊ Заметим, что прямые и окружности, проходящие через начало координат ($D = 0$), отображаются только в прямые. Прямые, не проходящие через начало координат ($A = 0, D \neq 0$), преобразуются в окружности, проходящие через начало координат ($\infty \rightarrow 0$). И, наконец, окружности, не проходящие через начало координат, преобразуются снова в окружности.

Для исследования конформности рассматриваемого изображения нам нужно ввести понятие угла в бесконечно удаленной точке, причем можно, очевидно, ограничиться определением угла между двумя прямыми.

◆ Под углом в бесконечно удаленной точке между двумя прямыми понимают взятый с противоположным знаком угол во второй (конечной) точке пересечения этих прямых (на рис. 58, а угол в бесконечности между прямыми I и II отрицателен).

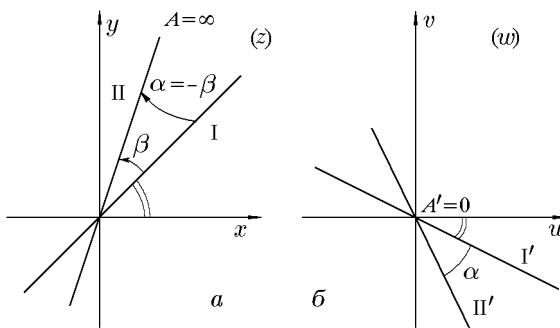


Рис. 58

Теорема 26.2. Функция $w = 1/z$ осуществляет однолистное конформное отображение полной комплексной плоскости z на полную комплексную плоскость w .

Доказательство. Отображение, осуществляющее функцией $w = 1/z$, однолистно, так как обратная функция $z = 1/w$ является однозначной во всей комплексной плоскости, включая и точку $w = 0$, которой соответствует $z = \infty$. Производная

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}$$

существует и отлична от нуля во всех точках, за исключением $z = 0, z = \infty$. Остается показать, что отображение $w = 1/z$ сохраняет углы в точках $z = 0, z = \infty$. Но это видно непосредственно из рис. 58 и принятого нами определения (при отображении $w = 1/z$ прямая $\arg z = \varphi$ переходит в прямую $\arg w = -\varphi$). Следовательно, отображение конформно на всей расширенной плоскости.

Теорема 26.3 (свойство сохранения симметрии). Функция $w = 1/z$ преобразует любую пару точек z_1 и z_2 , симметричных относительно произвольной окружности γ , в пару точек w_1 и w_2 , симметричных относительно окружности Γ – образа окружности γ .

Доказательство. Пусть w_1 и w_2 – образы точек z_1 и z_2 . Так как z_1 и z_2 симметричны относительно окружности γ , то любая окружность или прямая, проведенная через них, ортогональны γ . Поскольку преобразование $w = 1/z$ обладает круговым свойством и свойством конформности, то их образы, проходящие

через точки w_1 и w_2 также будут окружностями, причем перпендикулярными окружности Γ , являющейся образом γ в силу конформности отображения. Но это и означает, что w_1 и w_2 симметричны относительно Γ .

Пример 26.1. Найти образ окружности $|z| = 2$ при отображении $w = 1/z$.

Решение. Первый способ. Из равенства $w = 1/z$ имеем $|w| = 1/|z|$, откуда для $|z| = 2$ получаем $|w| = 1/2$ и, следовательно, образом окружности $|z| = 2$ является окружность $w = 1/2$ (см. рис. 59).

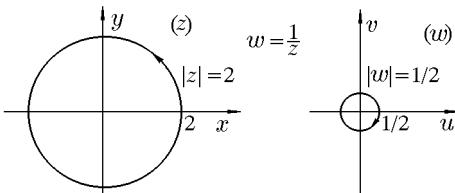


Рис. 59

Второй способ. Запишем z и w в показательной форме $z = \rho e^{i\varphi}$, $w = re^{i\theta}$. Согласно (26.2) $r = 1/2$, $\theta = -\varphi$ и, следовательно,

$$w = \frac{1}{2}e^{-i\varphi}.$$

Поскольку $0 \leq \varphi < 2\pi$, то образом окружности $|z| = 2$ является окружность $|w| = 1/2$ с центром в начале координат, обход которой совершается по часовой стрелке, когда исходная окружность обходится против часовой стрелки.

Третий способ. Запишем уравнение окружности $|z| = 2$ в координатах x, y

$$x^2 + y^2 = 4. \quad (26.6)$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (26.3) с $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -4$. Отсюда, согласно (26.5), получим уравнение в переменных u, v

$$-4(u^2 + v^2) + 1 = 0$$

или

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{4},$$

что соответствует окружности $|w| = 1/2$.

27. Дробно-линейная функция

♦ Дробно-линейной функцией называется функция вида

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (27.1)$$

где a, b, c, d – постоянные, удовлетворяющие условию $ad - bc \neq 0$.

◊ Если условие $ad - bc \neq 0$ не выполняется, то функция (27.1) сводится к постоянной в силу $a/c = b/d$.

Рассмотрим отображение, осуществляющее функцией (27.1). Эта функция определена на полной плоскости z , причем считается, что $w|_{z=-d/c} = \infty$, а

$$w(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} w = \frac{a}{c}.$$

Так как производная

$$w'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \quad (27.2)$$

существует всюду при $z \neq -d/c$, то функция (27.1) аналитична всюду на полной плоскости z , кроме точки $z = -d/c$, в которой она имеет полюс первого порядка. Уравнение (27.1) однозначно разрешимо относительно z :

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}, \quad (27.3)$$

причем функция (27.3) тоже определена на полной плоскости w и выполняет условия $z(a/c) = \infty$, $z(\infty) = \lim_{w \rightarrow \infty} z(w) = -d/c$. Поэтому дробно-линейная функция осуществляет однолистное отображение полной плоскости z на полную плоскость w .

Дробно-линейная функция – единственная функция, обладающая таким свойством. Справедлива следующая

Теорема 27.1. *Если функция $f(z)$ однолистна и аналитична всюду в полной комплексной плоскости z , кроме одной точки, то эта функция – дробно-линейная.*

Доказательство. Пусть такой точкой является точка z_0 . Эта точка не может быть существенно особой точкой функции $f(z)$, ибо по теореме Сохоцкого $f(z)$ была бы заведомо неоднолистной. По теореме Лиувилля z_0 не может быть и устранимой особой точкой. Следовательно, z_0 есть полюс, причем первого порядка, ибо в окрестности полюса высшего порядка функция опять-таки неоднолистна. Если $z_0 \neq \infty$, то главная часть разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности z_0 имеет вид $A/(z - z_0)$. Вычтя эту часть из $f(z)$, получим функцию $\varphi(z) = f(z) - A/(z - z_0)$, не имеющую особенностей в полной плоскости. Следовательно, $\varphi(z) \equiv \text{const}$, и функция $f(z) = \text{const} + A/(z - z_0)$ является дробно-линейной, поскольку исходная формула (27.1) всегда может быть переписана в виде

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + d/c}. \quad (27.4)$$

Если $z_0 = \infty$, то главная часть функции $f(z)$ имеет вид Az , и точно таким же образом доказывается, что $f(z) = Az + \text{const}$.

Ясно, что сложная функция, составленная из дробно-линейных, также является дробно-линейной функцией.

Заметим, что теорема справедлива для $z_0 = 0$, $z_0 = \infty$, т.е. для линейной функции $w = az + b$ и $w = 1/z$, что совершенно естественно, поскольку эти функции являются частными случаями дробно-линейной функции. С другой стороны, очень важно то, что в общем виде дробно-линейная функция, согласно (27.4), может быть представлена суперпозицией линейной функции и функции $w = 1/z$. Действительно,

$$w(z) = A + BT, \quad T = \frac{1}{t}, \quad t = z + \frac{d}{c}, \quad (27.5)$$

где

$$A = \frac{a}{c}, \quad B = \frac{bc - ad}{c^2}.$$

Тогда справедлива

Теорема 27.2. *Произвольная дробно-линейная функция*

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

осуществляет однолистное конформное отображение полной плоскости z на полную плоскость w , обладающее круговым свойством и свойством сохранения симметрии.

Доказательство. Сформулированная теорема для линейной функции очевидна, а для функции $w = 1/z$ доказана в предыдущем параграфе и, следовательно, в силу (27.5) справедлива для дробно-линейной функции.

Рассмотрим несколько свойств дробно-линейной функции, важных для практических задач.

Теорема 27.3. *Существует одно и только одно дробно-линейное отображение полной плоскости z на полную плоскость w , переводящее три произвольные точки z_k в три произвольные точки w_k .*

Доказательство. Так как хотя бы один из коэффициентов формулы (27.1) отличен от нуля, то разделив на него числитель и знаменатель, получим, что дробно-линейное преобразование фактически зависит от трех комплексных или шести действительных параметров. С учетом сказанного выберем на плоскостях z и w точки z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 , соответствующие друг другу при рассматриваемом отображении. Введем вспомогательную плоскость T и построим дробно-линейные отображения плоскостей z и w на эту плоскость, переводящие заданные тройки в $0, 1, \infty$. Такими отображениями будут

$$T = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}, \quad T = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}.$$

Исключив из этой системы T , получим дробно-линейное отображение плоскости z на плоскость w

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}, \quad (27.6)$$

переводящее точки z_1, z_2, z_3 в точки w_1, w_2, w_3 , соответственно. Мы не будем останавливаться на доказательстве единственности формулы (27.6), а отметим другое. Формула (27.6) остается справедливой и в том случае, когда одна из точек z_k и w_k есть бесконечно удаленная, если только в этой формуле заменить единицей числитель и знаменатель отношения, в котором участвует эта точка. Пусть, например, $w_2 = \infty, z_2 = \infty$, тогда (27.6) имеет вид

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} = \frac{z - z_1}{z - z_3}.$$

Из предыдущей теоремы вытекает достаточно очевидная

Теорема 27.4. *Любой круг полной плоскости z с помощью дробно-линейной функции можно преобразовать в любой круг полной плоскости w .*

Пример 27.1. Найти функцию, осуществляющую отображение единичного круга на единичный круг (рис. 60).

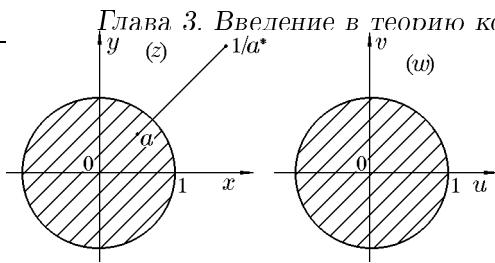


Рис. 60

Решение. Найдем общий вид функций, осуществляющих такое отображение. Отобразим произвольную внутреннюю точку a единичного круга на плоскости z в центр единичного круга на плоскости w , совпадающий с началом координат. Тогда, согласно принципу сохранения симметрии, симметричная ей относительно окружности $|z| = 1$ точка $1/a^*$ должна отобразиться в бесконечно удаленную точку плоскости w . Дробно-линейная функция, удовлетворяющая таким условиям, имеет вид

$$w = k \frac{z - a}{z - 1/a^*} = -ka^* \frac{z - a}{1 - za^*} = k' \frac{z - a}{1 - za^*}, \quad (27.7)$$

где $k' = -ka^*$ – произвольная комплексная постоянная и должна быть определена из условия $|w| = 1$, когда $|z| = 1$. Тогда, согласно (27.7),

$$|w| = |k'| \frac{|z - a|}{|1 - za^*|} = 1, \quad (27.8)$$

откуда с учетом того, что $(1 - za^*) = (1 - z^*a)^*$ и, следовательно, $|1 - za^*| = |1 - z^*a|$, при условии $|z| = 1$ имеем

$$|1 - za^*| = |1 - z^*a| |z| = |z - z^*za| = |z - a|$$

или

$$\frac{|z - a|}{|1 - za^*|} = 1.$$

Равенство (27.8) принимает вид $|k'| = 1$, откуда $k' = e^{i\alpha}$, где α – произвольная действительная величина. Как и следовало ожидать, существует бесконечное множество дробно-линейных функций

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - za^*}, \quad (27.9)$$

отображающих единичный круг на себя и содержащих три действительных параметра.

Пример 27.2. Найти функцию, осуществляющую отображение верхней полуплоскости на круг единичного радиуса (рис. 61).

Решение. Отобразим произвольную точку a верхней полуплоскости в центр единичного круга с центром в начале координат. Тогда, согласно принципу сохранения симметрии симметричная ей относительно оси Ox точка a^* должна отобразиться в бесконечно удаленную точку плоскости w . Дробно-линейная функция, удовлетворяющая таким условиям, имеет вид

$$w = k \frac{z - a}{z - a^*}, \quad (27.10)$$

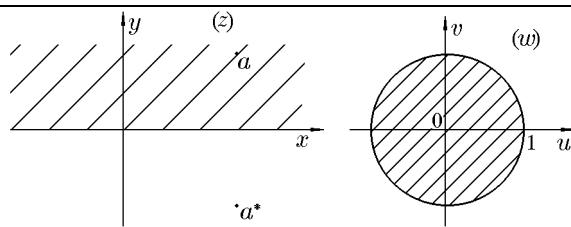


Рис. 61

где k – произвольная комплексная постоянная и должна быть определена из условия $|w| = 1$. Тогда, согласно (27.10),

$$|w| = |k| \frac{|z - a|}{|z - a^*|} = 1,$$

откуда с учетом $|z - a| = |z - a^*|$ ($|x - a| = |x - a^*|$ при вещественных z) имеем $|k| = 1$, и, следовательно, $k = e^{i\alpha}$, где α – произвольная действительная величина. Как и следовало ожидать, ввиду произвольности точки a существует бесконечное множество дробно-линейных функций, осуществляющих требуемое отображение

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{z - a^*}. \quad (27.11)$$

Каждая из этих функций определяется значениями трех действительных параметров: параметра α и двух параметров, определяющих комплексное число a .

Пример 27.3. Найти функцию, осуществляющую отображение верхней полуплоскости на верхнюю полуплоскость.

Решение. Найдем общий вид таких функций. Воспользуемся формулой (27.6), задав две тройки соответствующих точек $z_k = x_k$, $w_k = u_k$ действительных осей x и u . Так как числа z_k и w_k действительны, то после преобразования формула (27.1) примет вид

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (27.12)$$

где a, b, c, d – действительные числа. Наоборот, любая функция (27.12) с действительными коэффициентами преобразует ось Ox в ось Ou и, следовательно, полуплоскость z в одну из полуплоскостей w , верхнюю или нижнюю. Мы получим верхнюю полуплоскость, если потребуем, чтобы производная $w'(z)$ на действительной оси была положительной, т.е.

$$w'(z)|_{z=x} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} > 0,$$

откуда $ad - bc > 0$. Таким образом, формула (27.12) при действительных коэффициентах, удовлетворяющих условию $ad - bc > 0$, дает общий вид линейных функций, отображающих верхнюю полуплоскость на верхнюю полуплоскость.

Пример 27.4. Найти образ G области $E : |z + 1| \leqslant 3$ при отображении

$$w = \frac{z + 3}{z + 1}.$$

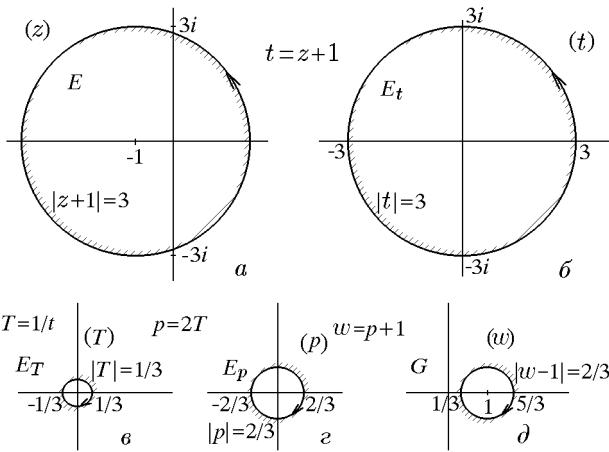


Рис. 62

Решение. Исходную дробно-линейную функцию можно представить в виде следующей суперпозиции отображений:

$$w = 1 + \frac{2}{z+1} = 1 + p; \quad p = 2T; \quad T = \frac{1}{t}; \quad t = z + 1. \quad (27.13)$$

Первое отображение $t = z + 1$ переводит окружность $|z + 1| = 3$ в окружность $|t| = 3$ простейшим параллельным переносом. Направление обхода сохраняется. Прообраз E и образ E_t представляют собой внутренние части указанных окружностей (рис. 62, а, б). Следующее отображение переводит окружность $|t| = 3$ в окружность $|T| = 1/3$. Направление обхода меняется. Согласно принципу соответствия границ, образом E_T является внешняя часть окружности $|T| = 1/3$ (рис. 62, б, в). Продолжая в соответствии с (27.13), окончательно получим $G : |w - 1| \geq 2/3$.

Пример 27.5. Найти образ G области $E : |z - 2| \leq 1$ при отображении

$$w = \frac{1}{z-3}.$$

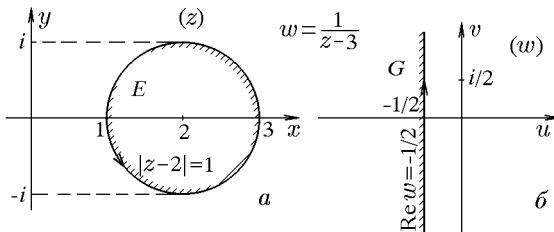


Рис. 63

Решение. Окружность $|z - 2| = 1$ и ось Ox в точках пересечения образуют углы, равные $\pi/2$. Функция $w = 1/(z-3)$ действительную ось Ox переводит в действительную ось Ou , а окружность $|z-2|=1$ — в прямую, так как $w(3) = \infty$. Уравнение прямой имеет вид $\operatorname{Re} w = u = -1/2$, так как $w(1) = -1/2$ и прямая должна быть перпендикулярна оси Ou . Вычислим дополнительно значение w в точке $z = 2 - i$, т.е.

$$w(2 - i) = \frac{1}{2 - i - 3} = -\frac{1}{1 + i} = -\frac{1}{2}(1 - i).$$

Движение от точки $z = 1$ к точке $z = 2 - i$ таково, что область E остается слева. Тогда искомой областью G , согласно принципу соответствия границ, является полуплоскость $\operatorname{Re} w \leq -1/2$, так как именно она остается слева при движении от точки $w = -1/2$ к точке $w = -(1-i)/2$ (рис. 63). Это можно было установить и иначе. Вычислим значение функции в точке $z = 2$, принадлежащей области E . Получим $w(2) = -1$. Точка $w = -1$ принадлежит полуплоскости $\operatorname{Re} w \leq -1/2$, что и требовалось доказать.

Пример 27.6. Найти образ G области $E : |z - 1/\sqrt{2}| \leq 1 \cap |z + 1/\sqrt{2}| \leq 1$ при отображении

$$w = \frac{\sqrt{2}z - i}{\sqrt{2}z + i}.$$

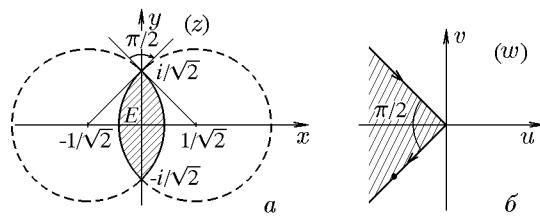


Рис. 64

Решение. Точки пересечения дуг окружностей соответствуют числам $z_1 = i/\sqrt{2}$, $z_2 = -i/\sqrt{2}$. Дробно-линейная функция $w = (\sqrt{2}z - i)/(\sqrt{2}z + i)$ отображает точку z_1 в точку $w_1 = 0$, так как $w(i/\sqrt{2}) = 0$, а точку z_2 в точку $w_2 = \infty$, так как $w(-i/\sqrt{2}) = \infty$, и, следовательно, исходную область E в угол с вершиной в точке $w_1 = 0$. Этот угол равен $\pi/2$, поскольку радиусы, проведенные в точки пересечения окружностей, взаимно перпендикулярны (см. рис. 64, а). Для того чтобы выяснить, как расположен этот угол, достаточно определить хотя бы одну точку на одной из его сторон. Выясним, например, в какую точку отобразится точка $z = 1 - 1/\sqrt{2}$. Находим

$$w\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2} - 1 - i}{\sqrt{2} - 1 + i} = \frac{(1 - \sqrt{2})(1 + i)}{2 - \sqrt{2}}.$$

Эта точка расположена в третьей четверти на биссектрисе координатного угла. Следовательно, дуга окружности $|z + 1/\sqrt{2}| = 1$ отображается в луч, идущий из начала координат по биссектрисе координатного угла третьей четверти. Так как дробно-линейная функция сохраняет углы не только по величине, но и по направлению, дуга окружности $|z - 1/\sqrt{2}| = 1$ отобразится в биссектрису координатного угла второй четверти, что соответствует повороту на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Так как при движении от точки $z_1 = i/\sqrt{2}$ к точке $z = 1 - 1/\sqrt{2}$ область E остается справа, то искомой областью G будет внутренняя часть угла $5\pi/4 \geq \arg w \geq 3\pi/4$, поскольку именно она остается справа при движении от точки $w_1 = 0$ к точке $w = (1 - \sqrt{2})(1 + i)/(2 - \sqrt{2})$ (рис. 64).

28. Степенные функции

Функции $w = z^n$ и $w = \sqrt[n]{z}$ для целых положительных n определены в § 1., там же было установлено, что первая из этих функций однозначна, а вторая n -значна, за исключением точек $z = 0$ и $z = \infty$.

Функция

$$w = z^n \quad (28.1)$$

— аналитическая на всей комплексной плоскости, за исключением точки $z = \infty$, являющейся полюсом n -го порядка. В точке $z = 0$ производная $(z^n)' = nz^{n-1}$ обращается в нуль.

Если в плоскостях z и w ввести полярные координаты (ρ, φ) и (r, θ) , соответственно, то соотношения (28.1) можно переписать

$$r = \rho^n, \quad \theta = n\varphi. \quad (28.2)$$

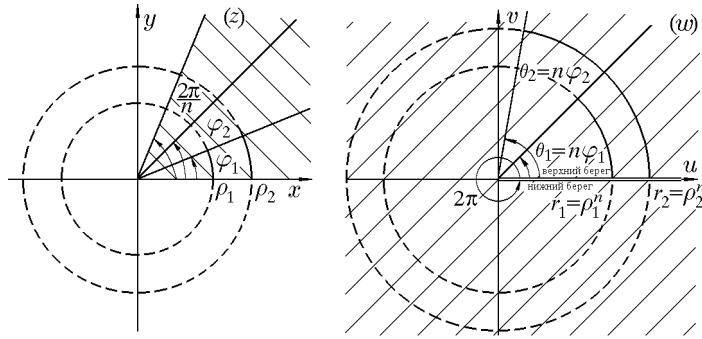


Рис. 65

Пусть z описывает окружность радиуса ρ в положительном направлении, тогда образ w , согласно (28.2), будет описывать окружность радиуса $r = \rho^n$ в том же направлении. При этом если точка z опишет полную окружность ($0 \leq \varphi < 2\pi$), то точка w опишет окружность n раз. Заставим теперь точку z пробегать луч $\arg z = \varphi$ от нуля до ∞ . Согласно (28.2), образ w тоже будет пробегать луч $\arg w = \theta = n\varphi$ в том же направлении от нуля до ∞ , т.е. образ исходного луча повернется на угол $(n - 1)\varphi$ (рис. 65).

С учетом сказанного заключаем, что, во-первых, любой сектор с углом раствора φ ($0 \leq \varphi < 2\pi/n$) отображается в сектор на плоскости w с углом раствора $\theta = n\varphi$, в n раз большим (поэтому функцию $w = z^n$ используют каждый раз, когда нужно отобразить один угол на другой, больший угол). Во-вторых, осуществляемое отображение конформно во всех точках, за исключением точек $z = 0$ и $z = \infty$, поскольку углы с вершинами в этих точках увеличиваются при таком отображении в n раз. И, в-третьих, точки z_1 и z_2 , имеющие равные модули и различающиеся аргументами на целое кратное $2\pi/n$, и только такие точки переходят при отображении $w = z^n$ в одну точку. Следовательно, для однолистности отображения $w = z^n$ в некоторой области D необходимо и достаточно, чтобы область D не содержала никаких двух точек z_1 и z_2 , связанных соотношениями

$$|z_1| = |z_2|, \quad \arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2\pi k}{n}, \quad (28.3)$$

где $k = \overline{1, n}$ — целое.

Этому условию удовлетворяют, например, секторы

$$k \frac{2\pi}{n} < \varphi < (k + 1) \frac{2\pi}{n}, \quad k = \overline{0, n - 1}, \quad (28.4)$$

каждый из которых функцией $w = z^n$ однолистно и конформно отображается в плоскость w с исключенной положительной полуосью (рис. 65).

Как уже упоминалось, функция

$$w = \sqrt[n]{z}, \quad (28.5)$$

обратная функции $z = w^n$, n -значна во всех точках, за исключением $z = 0$, $z = \infty$, в которых $w = 0$ и $w = \infty$. Из формулы

$$z = w^n \quad \text{или} \quad x + iy = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

которая равносильна (28.5), следует, что прямым $x = x_0$, $y = y_0$ в плоскости z соответствуют кривые, в полярных координатах задаваемые уравнениями

$$r = \sqrt[n]{\frac{x_0}{\cos n\theta}}, \quad r = \sqrt[n]{\frac{y_0}{\sin n\theta}}.$$

При $n = 2$ эти кривые вырождаются в гиперболы. Как вытекает из определения, значение корня $\sqrt[n]{z}$ определяется значением аргумента, выбранным для точки z (что соответствует выбору одной из вершин правильного многоугольника, в которых расположены корни). Обозначим через $\arg z_0$ одно из таких значений. Заставим точку z описывать, начиная с z_0 , некоторую непрерывную линию γ , не проходящую через начало координат. В силу непрерывности $\arg z$ и $|z|$ значение $w = \sqrt[n]{z}$, которое вполне определяется сделанным выбором аргумента, также будет изменяться непрерывно.

Предположим, что кривая γ замкнута и не содержит внутри себя точку $z = 0$. Тогда при полном обходе контура γ точка $w = \sqrt[n]{z}$ описывает некоторую замкнутую кривую Γ , возвращаясь к своему первоначальному положению, ибо $\arg z$ возвращается к начально выбранному значению $\arg z_0$ (рис. 66).

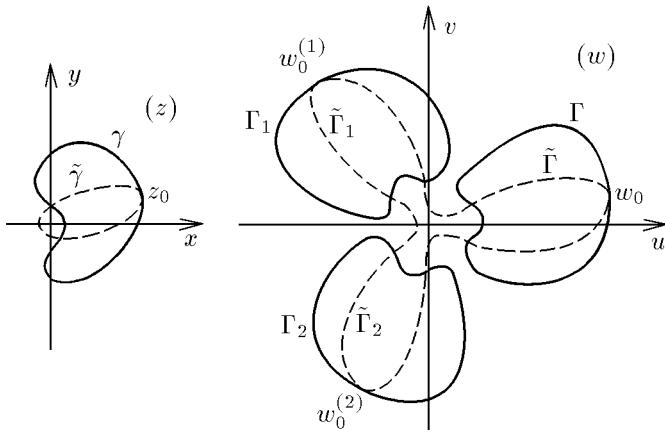


Рис. 66

Значения корня, определяемые другим выбором начального значения $\arg z_0$ (отличающимся на целое кратное 2π) при полном обходе γ , очевидно, также описывают аналогичные замкнутые кривые Γ_k , отличающиеся от кривой Γ только поворотом на угол $2k\pi/n$, $k = 1, n-1$ (для $n = 3$ см. рис. 66, сплошные линии). Рассмотрим теперь случай, когда $\tilde{\gamma}$ — замкнутая линия, по-прежнему проходящая через z_0 , но содержащая внутри себя точку $z = 0$. Тогда при полном обходе $\tilde{\gamma}$ не возвращается в свое первоначальное положение, а занимает новое положение $w_0^{(1)} = w_0 e^{i2\pi/n}$. Это объясняется тем, что $\arg z$ при обходе кривой получает приращение 2π . К своему начальному положению точка $w = \sqrt[n]{z}$ возвратится лишь после n -кратного обхода кривой $\tilde{\gamma}$ (для $n = 3$ см. рис. 66, штриховая линия).

Таким образом, в любой области D , не содержащей ни одной замкнутой кривой, обходящей $z = 0$, можно выделить n непрерывных и однозначных функций, каждая из которых принимает одно из значений $\sqrt[n]{z}$. И, как было показано выше, эти значения в каждой фиксированной точке отличаются друг от друга множителем $e^{i2k\pi/n}$. Очевидно, что каждая такая ветвь будет осуществлять

однолистное отображение области D , причем функция, осуществляющая это отображение, будет аналитической, ибо существует вполне определенное значение производной, равное

$$(z^{1/n})' = \frac{1}{n} z^{1/n-1}.$$

Если же область D содержит хотя бы одну замкнутую кривую, обходящую точку z_0 , то в такой области ветви $\sqrt[n]{z}$ нельзя отделить друг от друга. Следовательно, в такой области мы не можем, как в предыдущем случае, рассматривать функцию $\sqrt[n]{z}$ как совокупность отдельных и однозначных аналитических функций. Точка $z = 0$ в любой окрестности которой нельзя разделить n отдельных ветвей функции $\sqrt[n]{z}$ (ветви как бы соединяются в этой точке), согласно определению, является алгебраической точкой ветвления порядка n .

Очевидно, точка $z = \infty$ также является алгебраической точкой разветвления порядка n функции $\sqrt[n]{z}$, так как каждый обход вокруг нее вдоль окружности сколь угодно большого радиуса с центром в начале координат является вместе с тем и обходом вокруг начала координат. Таким образом, функция $\sqrt[n]{z}$ имеет две алгебраические точки разветвления порядка n : $z = 0$ и $z = \infty$.

Возвращаясь к обсуждаемым выше областям D , отметим, что в качестве примера области D первого типа можно рассматривать плоскости z с вырезанной прямой линией L , идущей от $z = 0$ в бесконечность. Если L совпадает с положительной полуосью, то ветви функции $\sqrt[n]{z}$ отображают область D на секторы

$$k \frac{2\pi}{n} < \arg w < (k + 1) \frac{2\pi}{n}.$$

Эти отображения обратны к рассмотренным выше отображениям функции $w = z^n$. Область D заведомо является областью второго типа, если она содержит внутри себя точку $z = 0$.

Соотношения (28.4) задают условия однолистности функций $w = z^n$ и $z = \sqrt[n]{w}$. Для того чтобы получить взаимно однозначное соответствие между точками z и w , можно воспользоваться римановой поверхностью, построение которой было рассмотрено в разд. 20.

Пример 28.1. Найти

- а) образы декартовой координатной сетки плоскости z ;
- б) прообразы декартовой координатной сетки плоскости w при отображении $w = z^2$.

Решение. а) Рассмотрим прямые $x = a$. Их образами будут линии, определяемые уравнениями $u = a^2 - y^2$, $v = 2ay$. Исключая переменную y , находим

$$u = a^2 - \left(\frac{v}{2a}\right)^2.$$

Следовательно, образами прямых $x = a$ являются параболы $u = a^2 - (v/2a)^2$. Аналогично получаем, что образами прямых $y = b$ являются параболы $u = (v/2b)^2 - b^2$.

б) Пусть $u = A$, $v = B$ – прямые, параллельные координатным осям Ou , Ov . Тогда $x^2 - y^2 = A$, $xy = B/2$, т.е. прообразами прямых являются два семейства гипербол, ортогональных друг другу, за исключением тех кривых, которые проходят через точку $z = 0$ ($w'(0) = 0$), где они пересекаются под углом $\pi/4$.

29. Показательная и логарифмическая функции

Воспользуемся соотношением (7.11), согласно которому показательную функцию можно записать в виде

$$w = e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (29.1)$$

Отображение, осуществляемое функцией (29.1), конформно в каждой точке комплексной плоскости, так как производная этой функции существует и отлична от нуля в любой конечной точке плоскости z . Выражение $\exp(\infty)$ будем считать лишенным смысла, так как предел

$$\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$$

не существует. Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

хотя и в том, и в другом случае $z \rightarrow \infty$. Отсюда, в частности, следует, что $\exp z$ не совпадает ни с одним полиномом, так как всякий полином, не равный постоянной, стремится к бесконечности при $z \rightarrow \infty$, т.е. для e^z точка $z = \infty$ является существенно особой. Легко выяснить особенности отображения, задаваемого показательной функцией, если в плоскости z ввести декартовы, а в плоскости w – полярные координаты, т.е. положить $z = x + iy$, $w = \rho e^{i\varphi}$. Согласно (29.1), получим

$$|w| = \rho = e^x, \quad \arg w = \theta = y. \quad (29.2)$$

Заставим z описывать прямую, параллельную мнимой оси $z = x_0 + iy$ ($x_0 = \text{const}$). Тогда образ w , согласно (29.2), будет находиться в плоскости w на окружности радиуса $|w| = \rho = e^{x_0}$ с центром в начале координат. При этом, когда точка z описывает прямую однократно так, что ордината этой точки непрерывно растет от минус бесконечности до бесконечности, то w описывает соответствующую окружность бесконечно много раз в одном и том же (положительном) направлении.

Если же точка z описывает прямую $z = x + iy_0$ ($y_0 = \text{const}$), параллельную действительной оси, то w , очевидно, пробегает луч, выходящий из начала координат и образующий с положительной частью действительной оси угол $\theta = y_0$. При этом, когда точка z описывает прямую однократно так, что ее абсцисса x непрерывно растет от $-\infty$ до ∞ , то и w описывает соответствующий луч однократно так, что расстояние от точки до начала координат непрерывно растет от нулю до ∞ (оба предельных случая, конечно, исключаются). Отсюда следует, что любая полоса $0 < y < y_0$ на z ($y_0 < 2\pi$) конформно отображается функцией $w = e^z$ на сектор $0 < \theta < y_0$ с вершиной в начале координат на плоскости w .

◊ Показательную функцию используют, когда нужно конформно отобразить некоторую прямолинейную полосу на внутреннюю часть угла.

В частности, полоса $0 < y < \pi$ конформно отображается на верхнюю полуплоскость w , а полоса $0 < y < 2\pi$ – на всю плоскость w с разрезом по положительному действительной полуоси $0 < \theta < 2\pi$ (рис. 67).

Из сказанного выше (а также периодичности показательной функции с периодом $2\pi i$) следует, что отображение, осуществляемое показательной функцией, будет взаимно однозначным в любой полосе шириной $h \leq 2\pi$, параллельной действительной оси плоскости z . С другой стороны, для того чтобы область плоскости z отображалась функцией e^z взаимно однозначно на соответствующую область плоскости w , необходимо и достаточно, чтобы она не содержала

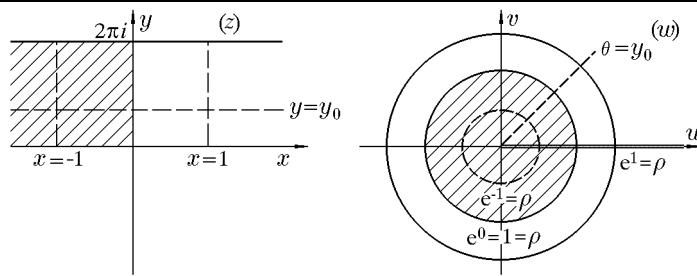


Рис. 67

никаких двух точек, связанных соотношением $z_2 - z_1 = 2\pi k i$ ($k = \overline{-\infty, \infty}$). Такому условию однолистности удовлетворяет всякая область, заключенная в полосе $2k\pi + y_0 < y < 2(k+1)\pi + y_0$. Для того чтобы отображение было взаимно однозначным не только внутри полосы, но и на всей комплексной плоскости z , необходимо вместо одного листа плоскости w построить бесконечномерную риманову поверхность (см. рис. 34) склеиванием нижнего края разреза каждого листа с верхним краем разреза листа, лежащего под данным листом. Тогда если точка z движется параллельно оси Oy вверх, то точка w , вращаясь против часовой стрелки вокруг начала координат, как бы «поднимается» на римановой поверхности по спирали, переходя с одного листа на другой. Таким образом обеспечивается взаимная однозначность отображений, задаваемых показательной функцией, на всей плоскости z .

Логарифмическая функция была определена как обратная показательной:

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + i2k\pi = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z. \quad (29.3)$$

Как и для рассмотренных выше многозначных функций, значение $\operatorname{Ln} z$ определяется значением аргумента, которое приписано точке z . Предположим, что точка z , начиная от положения $z_0 \neq 0$, описывает некоторую кривую γ , не проходящую через начало координат. Как и раньше, через $\arg z$ обозначим однозначную и непрерывную вдоль γ ветвь функции $\operatorname{Arg} z$, определяемую каким-либо фиксированным начальным значением $\arg z_0$. Аналогично через $\ln z$ обозначаем значение $\operatorname{Ln} z$ при выбранном значении $\arg z$. Очевидно, функция $\ln z$, в отличие от $\operatorname{Ln} z$, будет однозначной и непрерывной вдоль γ .

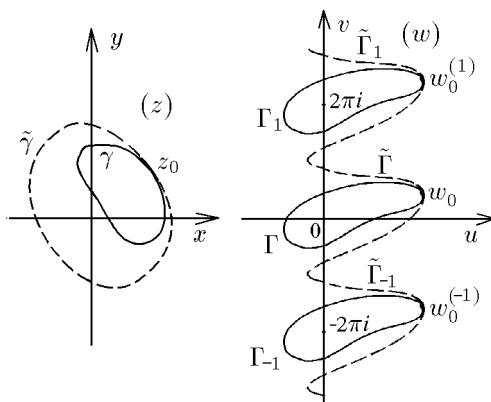


Рис. 68

Предположим, что кривая γ замкнута и не содержит внутри себя точку $z = 0$. Когда z описывает γ , точка $w = \ln z$ пробегает некоторую замкнутую кривую Γ . Другие значения логарифма, определяемые другим начальным значением $\arg z_0$, опишут кривые Γ_k , отличающиеся от Γ сдвигом на вектор $2\pi i k$, $k = \overline{-\infty, \infty}$ (рис. 68, сплошные линии).

Если теперь $\tilde{\gamma}$ – замкнутая кривая без точек самопересечения, содержащая $z = 0$ внутри себя, то при полном ее обходе точкой z в положительном направлении точка $w = \ln z$ не вернется к своему первоначальному положению, а займет новое положение $w_0^{(1)} = w_0 + 2\pi i$ (рис. 68, штриховые линии).

Отсюда следует, что в любой области D , которая не содержит замкнутых кривых, обходящих точку $z = 0$, можно выделить бесконечное множество непрерывных и однозначных ветвей многозначной функции $w = \ln z$, значения которых в каждой фиксированной точке отличаются друг от друга слагаемыми $2k\pi i$. Каждая такая ветвь $\ln z$ будет осуществлять взаимно однозначное отображение области D и, следовательно, по теореме о производной обратной функции будет обладать производной

$$(\ln z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z},$$

Причем производная одна и та же для всех ветвей. Таким образом, все такие ветви функции $\ln z$ будут аналитическими функциями.

Если же область D содержит хотя бы одну замкнутую кривую, охватывающую точку $z = 0$, то в такой области ветви функции $\ln z$ нельзя отделить друг от друга. Точка $z = 0$, в которой как бы «соединяются» все ветви $\ln z$, называется логарифмической точкой разветвления этой функции (хотя $\ln z$ в точке $z = 0$ не определен).

Точка $z = \infty$ – также логарифмическая точка разветвления, так как каждый обход вокруг нее является также обходом вокруг начала координат $z = 0$.

Риманова поверхность логарифма бесконечнолистна. Ее вид показан на рис. 34.

Пример 29.1. Найти образ области E (рис. 69, а) при отображении $w = e^z$.

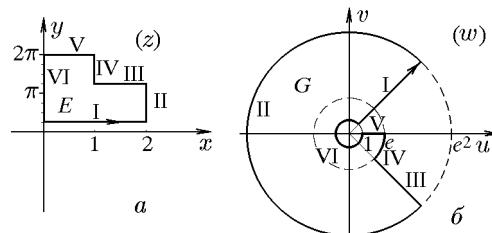


Рис. 69

Решение. Согласно (29.2), декартова координатная сетка отображается в семейства концентрических окружностей и лучей. Рис. 69, б совместно с принципом соответствия границ дает наглядное представление об образе области E .

Пример 29.2. Найти образ комплексной плоскости z с разрезом по отрицательной части действительной оси при отображении $w = \ln z$.

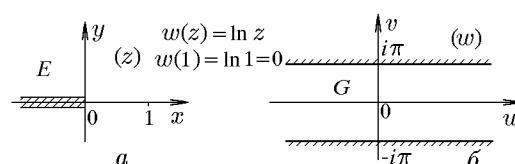


Рис. 70

Решение. При рассмотрении функции $w = e^z$ мы установили, что любая полоса $y_0 < y < y_0 + 2\pi$ отображается этой функцией на полную плоскость с разрезом по лучу $\arg w_0 = y_0$. Положив $y_0 = -\pi$, можно утверждать, что полоса $-\pi < y < \pi$ отобразится на всю плоскость с разрезом по отрицательной части действительной оси. Отсюда следует, что функция $w = \ln z$, обратная к $w = e^z$, отобразит область E (рис. 70, а) в область $G : -\pi < \operatorname{Im} w < \pi$ (рис. 70, б).

30. Функция Жуковского

♦ Функция

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (30.1)$$

называется функцией Жуковского. Функция Жуковского (30.1) определена и аналитична на всей комплексной плоскости, за исключением точек $z_1 = 0$ и $z_2 = \infty$, которые являются простыми полюсами. Так как

$$w' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right),$$

то отображение, осуществляемое функцией (30.1), конформно во всех точках области однолистности и аналитичности, за исключением точек $z = \pm 1$, в которых $w' = 0$.

Найдем области однолистности. Для этого предположим, что z_1 и z_2 переходят в одну точку w , т.е.

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2},$$

откуда

$$(z_1 - z_2) \left(1 - \frac{1}{z_1 z_2} \right) = 0.$$

Следовательно,

$$z_1 = z_2 \quad \text{или} \quad z_1 z_2 = 1.$$

Таким образом, отображение, осуществляемое функцией Жуковского (30.1) в области D будет однолистным, если область D не содержит двух точек, связанных соотношением $z_1 z_2 = 1$. Очевидно, что этому условию удовлетворяет круг единичного радиуса $|z| < 1$ или кольцо $|z| > 1$.

Выясним, как функция (30.1) отображает окружность $|z| = \rho$ и лучи $\arg z = \varphi$. Для этого положим

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad w = u + iv.$$

Тогда из (30.1) имеем

$$u = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi. \quad (30.2)$$

Исключив из (30.2) параметр φ , приходим к уравнению

$$u^2 / \left[\frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \right]^2 + v^2 / \left[\frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \right]^2 = 1, \quad (30.3)$$

которое определяет эллипс с полуосами

$$a_\rho = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right), \quad b_\rho = \frac{1}{2} \left| \rho - \frac{1}{\rho} \right| \quad (30.4)$$

и фокусами в точках $w = -1$ и $w = 1$. Следовательно, концентрические окружности $|z| = \rho$ отображаются в софокусные эллипсы с фокусами в точках $w = -1$, $w = 1$ и с полуосями a_ρ и b_ρ (30.4). При возрастании ρ от нуля до единицы полуоси этих эллипсов монотонно убывают от бесконечности до значений $a_1 = 1$, $b_1 = 0$. При $\rho = 1$ эллипс вырождается в отрезок действительной оси $[-1, 1]$, проходящий дважды. При дальнейшем возрастании радиуса ρ от $\rho = 1$ полуоси эллипсов начинают монотонно возрастать, так как каждый эллипс возникает второй раз. Если направление обхода рассматриваемых окружностей выбрать положительным, то направление обхода соответствующих им эллипсов будет также положительным для радиусов $\rho > 1$ и противоположным для радиусов $\rho < 1$, что непосредственно следует из второй формулы (30.4).

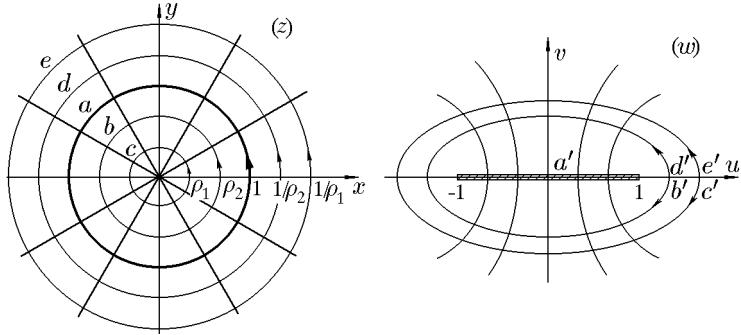


Рис. 71

Таким образом, круг $|z| < 1$ отображается на комплексную плоскость w с вырезанным отрезком $[-1, 1]$ действительной оси, причем верхняя полуокружность $|z| = 1$ отображается в нижний берег разреза, а нижняя – в верхний. Кольцо $|z| > 1$ также отображается на эту плоскость с вырезанным отрезком, с той лишь разницей, что верхняя полуокружность переходит в верхний берег разреза, а нижняя – в нижний (рис. 71).

Аналогично, исключив из уравнений (30.2) параметр ρ , приходим к уравнению

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1, \quad (30.5)$$

которое задает семейство гипербол, софокусных с эллипсами (30.4) и ортогональных с семейством этих эллипсов. Эти гиперболы являются образами лучей $\arg z = \varphi$ при отображении (30.1). Формулы (30.2) позволяют достаточно просто определить направление движения точки w по гиперболам (30.5), если задано направление движения точки по лучу $\arg z = \varphi$ (см. рис. 71).

Обратная к (30.1) функция

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1} \quad (30.6)$$

двузначна. Эта двузначность обусловлена наличием в формуле (30.6) квадратного корня $\sqrt{w^2 - 1}$. Взаимно однозначным образом всей плоскости z при отображении (30.6) является двулистная риманова поверхность, которая склеивается из двух экземпляров плоскости w с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ следующим образом: верхний берег разреза первого листа склеивается с нижним берегом разреза второго листа, а нижний берег разреза первого – с верхним берегом разреза второго (см. разд. «Аналитическое продолжение» и свойства функции $z = w^{1/n}$). По построению римановой поверхности видно, что точки $w = 1$ и $w = -1$ являются для этой функции алгебраическими точками ветвления второго порядка (это видно, впрочем, и прямо из формулы (30.6)).

◊ В заключение отметим, что функция

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

сводится к функции $\tilde{w}(\tilde{z}) = \tilde{z}^2$ с помощью дробно-линейных преобразований, поскольку

$$\tilde{w} = \frac{w(z) - 1}{w(z) + 1} = \left(\frac{z - 1}{z + 1} \right)^2 = \tilde{z}^2.$$

Пример 30.1. Найти образ круга $|z| < 1$ с разрезом $1/2 < x < 1$ по действительной оси Ox при отображении, осуществляющем функцией Жуковского.

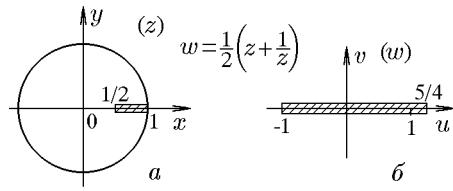


Рис. 72

Решение. Внутренняя часть круга $|z| < 1$ (рис. 72, а) с помощью функции Жуковского отображается на всю комплексную плоскость с разрезом по действительной оси Ou от -1 до 1 . Отрезок $1/2 < x < 1$ действительной оси Ox отобразится в отрезок $1 < u < 5/4$ действительной оси Ou , так как

$$w\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 2 \right) = \frac{5}{4}.$$

Таким образом, исходная область отображается на всю комплексную плоскость w с разрезом по действительной оси от -1 до $5/4$.

Пример 30.2. Найти образ области E , заданной условиями $0 < |z| < 1$ и $0 < \arg z < \pi/4$, при отображении

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

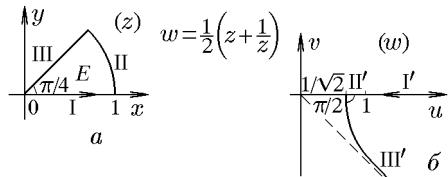


Рис. 73

Решение. Обозначим стороны кругового сектора E через I, II, III (рис. 73, а). Согласно (30.2), линия I отобразится в I' – часть действительной оси Ou от ∞ до единицы, так как $u = (1/2)(\rho + 1/\rho)$, $v = 0$ и $u(0) = \infty$, $u(1) = 1$ (рис. 73, б). Направление обхода от $z = 0$ к $z = 1$ соответствует направлению обхода от $w = \infty$ к $w = 1$ на плоскости w . Дуга единичной окружности II отобразится на часть действительной оси II' от единицы до $1/\sqrt{2}$, так как $u(\rho, \varphi) = (1/2)(\rho + 1/\rho) \cos \varphi$,

$v = 0$, причем $u(1, 0) = 1$, $u(1, \pi/4) = 1/\sqrt{2}$ с тем же направлением обхода. Наконец, луч $\arg z = \pi/4$, согласно (30.5), отобразится в нижнюю половину правой ветви гиперболы $2u^2 - 2v^2 = 1$. Таким образом, сектор E отобразится в область G , заключенную между прямыми Γ' , Π' и частью гиперболы $\Pi\Gamma'$. Отметим, что углы между Π и Γ , Π и Π' – прямые как углы между окружностью Π и радиусами Γ , Π . Угол между Π' и $\Pi\Gamma'$ также прямой, а угол между Π' и Γ' равен π , т.е. в два раза больше. Этот факт объясняется тем, что $z = 1/\sqrt{2}$ – точка конформности, а в точке $z = 1$ конформность нарушается.

31. Тригонометрические и гиперболические функции

Тригонометрические и гиперболические функции были определены в разд. 7.2. Из соотношений (7.11)

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

вытекает, что они аналитичны всюду, за исключением $z = \infty$, являющейся существенно особой точкой, и подчиняются обычным формулам дифференцирования

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

Изучим отображение, осуществляемое функцией $w = \sin z$. Положив

$$z_1 = iz, \quad z_2 = e^{z_1}, \quad z_3 = -iz_2, \quad w = \frac{1}{2} \left(z_3 + \frac{1}{z_3} \right), \quad (31.1)$$

видим, что это отображение можно рассматривать как суперпозицию уже изученных отображений, переводящих область D в D_1 , D_1 в D_2 , D_2 в D_3 и D_3 в D_4 . Первое и третье отображения, будучи линейными, однолистны всюду. Для однолистности второго и четвертого необходимо и достаточно, чтобы D_1 и D_3 не содержали ни одной пары точек $z'_1 - z''_1 = 2\pi ki$ и $z'_3 z''_3 = 1$ (см. разд. 29. и 30.).

Следовательно, для однолистности суммарного отображения $w = \sin z$ в области D необходимо и достаточно, чтобы область D не содержала ни одной пары точек z', z'' , для которых

- a) $z' - z'' = 2k\pi$, $(k \neq 0 \text{ целое})$
- b) $z' + z'' = (2k + 1)\pi$ $(k \text{ целое}).$

Этим условиям удовлетворяет, например, полуполоса $-\pi < x < \pi$, $y > 0$. На рис. 74 границы указанной полуполосы обозначены $1 \Rightarrow x = -\pi$, $y \geq 0$; $2 \Rightarrow y = 0$, $-\pi \leq x \leq \pi$; $3 \Rightarrow x = \pi$, $y \geq 0$, а соответствующие им отображения $-1'$, $2'$, $3'$, которые легко получить, если функцию $w = \sin z = \sin(x + iy)$ представить в алгебраической форме $w = u + iv$, где

$$u = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v = \cos x \operatorname{sh} y. \quad (31.2)$$

Более детальную информацию об отображении $w = \sin z$ можно получить, применив последовательно отображения (31.1). Действительно, отображение z_1 поворачивает полуполосу на $\pi/2$ против часовой стрелки. Отображение z_2 полученную полуполосу $-i\pi < \operatorname{Im} z_1 < i\pi$, $\operatorname{Re} z_1 < 0$ переводит в круг единичного радиуса $|z_2| < 1$ с разрезом по $-1 < \operatorname{Re} z_2 <$

0. Преобразование z_3 поворачивает эту область на $\pi/2$ по часовой стрелке. И, наконец, функция Жуковского переводит полученную область в комплексную плоскость w с вырезанным отрезком $-1 \leq \operatorname{Re} w \leq 1$, $\operatorname{Im} w = 0$ и вырезанной отрицательной полуосью $\operatorname{Re} w = 0$, $\operatorname{Im} w \leq 0$ (см. рис. 74).

Аналогичным образом можно установить, что вдвое более узкая полуполоса $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$, $\operatorname{Im} z > 0$ отображается на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. И в том, и в другом случае семейство лучей $x = x_0$ и отрезков $y = y_0$ переходят, соответственно, в семейство софокусных гипербол и эллипсов:

$$\frac{u^2}{\sin^2 x_0} - \frac{v^2}{\cos^2 x_0} = 1, \quad \frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 y_0} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 y_0} = 1, \quad (31.3)$$

которое легко получить из формул (31.2) с учетом основных тождеств для тригонометрических и гиперболических функций.

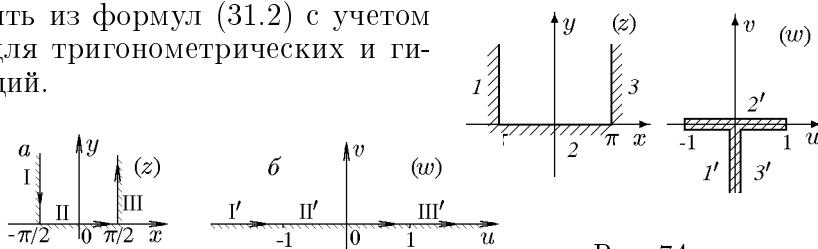


Рис. 75

Рис. 74

Рассмотрим более подробно отображение полуполосы $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$, $\operatorname{Im} z > 0$ с помощью функции $w = \sin z$, обозначив части ее границы через I, II, III (рис. 75, а). Тогда, согласно (31.2), полупрямая I ($0 < y < \infty$, $x = -\pi/2$) отобразится в полупрямую I' ($v = 0$, $-\infty < u < \infty$), так как $u = -\operatorname{ch} y$. Направление обхода на плоскости z от $y = \infty$ к $y = 0$ определяет направление обхода от $w(\infty) = -\infty$ к $w(0) = -1$ на плоскости w (рис. 75, б). Отрезок II ($-\pi/2 < x < \pi/2$, $y = 0$) отобразится в отрезок II' ($-1 < w < 1$) действительной оси Ou , поскольку $u = \sin x$, $v = 0$, причем $w(-\pi/2) = -1$, $w(\pi/2) = 1$. Наконец, в силу нечетности $\sin z$ ($\sin(-\pi/2) = -\sin \pi/2$) полупрямая III перейдет в III' с тем же направлением обхода, что и для I' , II' .

Таким образом, согласно принципу соответствия границ, исходная полуполоса отображается на верхнюю полуплоскость, которая остается слева при движении по оси Ou от $-\infty$ к ∞ .

Теперь легко получить отображение всей полосы $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$. Обозначим продолжения прямых I и III, проходимых в том же направлении, через IV и V, соответственно. Отрезок II теперь отсутствует (см. рис. 76, а). Согласно (31.2), прямая IV отобразится в прямую I' , проходящую в обратном направлении, а прямая V – в III' , проходящую также в противоположном направлении (см. рис. 76, б).

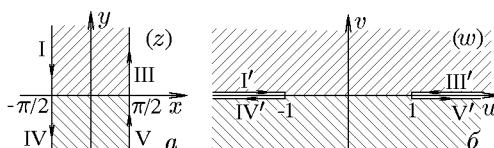


Рис. 76

Таким образом, исходная полоса отображается на всю комплексную плоскость w с двумя разрезами по действительной оси: $] -\infty, -1 [$ и $] 1, \infty [$. При этом верхняя полуполоса отображается на верхнюю полуплоскость (правая штриховка) так, что верхним берегам разрезов соответствуют полупрямые I и III. Соответственно, нижняя полуполоса отображается на нижнюю полуплоскость (левая штриховка) и нижним берегам разрезов IV', V' соответствуют полупрямые

IV и V. Ниже мы покажем, что решение этой задачи можно было упростить, использовав так называемый принцип симметрии конформных отображений.

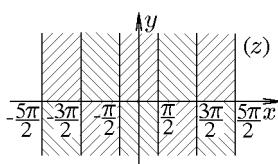


Рис. 77

В силу периодичности функции $\sin z$ очевидно, что полосы $-\pi/2 + 2k\pi < \operatorname{Re} z < \pi/2 + 2k\pi$, $k = -\infty, \infty$, также будут отображаться аналогичным образом. Расположенные между ними полосы $-\pi/2 + k\pi < \operatorname{Re} z < \pi/2 + k\pi$ осуществляют отображение, обусловленное соотношением

$$\sin(z + \pi) = -\sin z. \text{ Области с правой штриховкой (рис. 77) отображаются на верхнюю полуплоскость, с левой — на нижнюю.}$$

Отображение, осуществляемое функцией $\cos z$, в силу соотношения

$$\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$$

отличается от только что рассмотренного лишь сдвигом.

Тригонометрические функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ определены соотношениями (см. разд. 7.2.)

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z}. \quad (31.4)$$

Поскольку $\operatorname{ctg} z$ — инверсия функции $\operatorname{tg} z$, ограничимся исследованием некоторых отображений, реализуемых этой функцией. Отметим, что функция $\operatorname{tg} z$ аналитична всюду, за исключением точек $z = \pi/2 + k\pi$ ($k = -\infty, +\infty$) и может быть представлена суперпозицией следующих отображений:

$$z_1 = 2iz, \quad z_2 = e^{z_1}, \quad w = -i \frac{z_2 - 1}{z_2 + 1}. \quad (31.5)$$

Согласно соотношениям (7.11), гиперболические функции сравнительно просто выражаются через тригонометрические

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= -i \sin iz, & \operatorname{ch} z &= \cos iz, \\ \operatorname{th} z &= -i \operatorname{tg} iz, & \operatorname{cth} z &= i \operatorname{ctg} iz \end{aligned}$$

и поэтому несущественно от них отличаются.

Согласно соотношениям (7.19), обратные тригонометрические и гиперболические функции можно выразить через логарифмические. Так, например, функция

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

осуществляет взаимно однозначное и непрерывное отображение всей конечной плоскости w на бесконечнолистную риманову поверхность с точками ветвления второго порядка над $z = \pm 1$ и логарифмической точкой разветвления над $z = \infty$, составленную из листов, изображенных на рис. 76.

Аналогично функция

$$w = \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z}$$

взаимно однозначно отображает всю комплексную плоскость w на риманову поверхность, аналогичную римановой поверхности логарифмической функции, но имеющую логарифмические точки ветвления над точками $z = i$ и $z = -i$.

Пример 31.1. Найти образы полосы $E : -\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4$ и расположенных в ней прямой $\operatorname{Re} z = \pi/6$ и отрезка $\operatorname{Im} z = \pi/4$ при отображении $w = \operatorname{tg} z$.

Решение. Согласно формуле (31.5), имеем $p = 2iz$, $R = e^p$, $s = (R - 1)/(R + 1)$, $w = -is$. Первое линейное отображение $p = 2iz = 2e^{i\pi/2}z$ поворачивает исходную полосу E на $\pi/2$ против часовой стрелки и расширяет ее в два раза, т.е. переводит в полосу $E_p : -\pi/2 < \operatorname{Im} p < \pi/2$. При этом прямая $\operatorname{Re} z = \pi/6$ переходит в прямую $\operatorname{Im} p = \pi/3$, а отрезок $\operatorname{Im} z = \pi/4$ – в отрезок $\operatorname{Re} p = -\pi/4$ (рис. 78, *a*, *b*).

Следующее отображение $R = e^p$ переводит полосу E_p в правую полуплоскость $E_R : \operatorname{Re} R > 0$, так как $|R|$ меняется от нуля до ∞ , а $\arg R$ – от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Прямая $\operatorname{Im} p = \pi/3$ отображается в луч $\arg R = \pi/3$, отрезок $\operatorname{Re} p = -\pi/4$ – в полуокружность $|R| = e^{-\pi/4}$, лежащую в правой полуплоскости E_R .

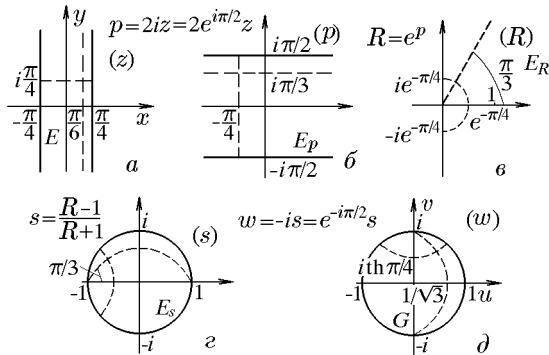


Рис. 78

Дробно-линейная функция $s = (R - 1)/(R + 1)$ конформно и согласно круговому свойству свернет полуплоскость E_R во внутреннюю часть единичного круга $E_s : |s| < 1$. Это объясняется тем, что $s(0) = -1$, $s(\infty) = 1$, а прямые $\operatorname{Re} R = 0$ и $\operatorname{Im} R = 0$ перпендикулярны, следовательно, и их образы должны быть перпендикулярны. Но тогда отрезок $-1 < \operatorname{Re} s < 1$ является диаметром окружности $|s| = 1$. По этой же причине луч $\arg R = \pi/3$ перейдет в часть дуги окружности, проходящей через точки $s = \pm 1$ под углом в $\pi/3$ к действительной оси. Наконец, полуокружность с центром в точке $R = 0$ отобразится в часть дуги окружности с центром в точке $s = -1$ (точка $R = 0$ переходит в точку $s = -1$) и перпендикулярной всем линиям, которые она пересекает (рис. 78, *c*, *d*).

Последнее отображение $w = -is = e^{-i\pi/2}s$ соответствует повороту круга на угол $\pi/2$ по часовой стрелке. Рис. 78, *d* дает наглядное представление о положении образа G исходной области E при отображении $w = \operatorname{tg} z$.

Подводя итог, можно сказать, что полоса $E : -\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4$ отображается в единичный круг $G : |w| < 1$, при этом прямая $\operatorname{Re} z = \pi/6$ отображается в «меридиан» этого круга, проходящий через точки $w = \pm i$ и $w = \operatorname{tg} \pi/6 = 1/\sqrt{3}$, а отрезок $\operatorname{Im} z = \pi/4$ – в «параллель» этого круга, проходящую через точку $w = \operatorname{tg}(i\pi/4) = i \operatorname{th} \pi/4$.

В заключение отметим, что в общем случае декартова координатная сетка, расположенная внутри полосы $-\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4$, отобразится в соответствующие «параллели» и «меридианы», расположенные внутри круга $|w| < 1$.

32. Основная задача теории конформных отображений

Перейдем теперь к основной задаче теории конформных отображений, которая заключается в построении функции $w = f(z)$, осуществляющей конформное отображение одной заданной области E на другую заданную область

G. Алгоритм и структура решения этой задачи существенным образом определяется видом областей E и G . Начнем с некоторых классов задач, для которых достаточно использования изученных уже отображений, осуществляемых элементарными функциями. Рассмотрим ряд примеров.

Пример 32.1. Найти функцию, конформно отображающую область между окружностями $|z| = 1$, $|z - 1| = 2$ на единичный круг $|w| < 1$.

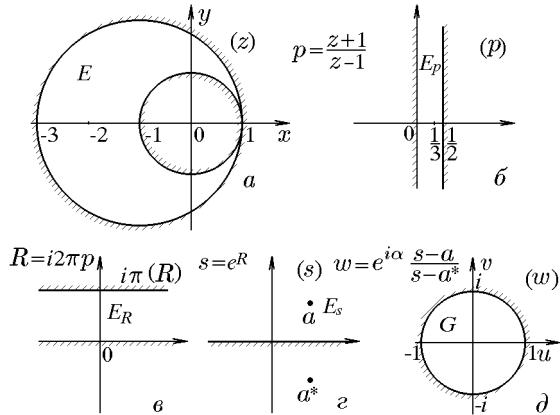


Рис. 79

Решение. Обозначим заданные окружности через γ_1 и γ_2 , а область между ними через E (рис. 79, а). Дробно-линейная функция $p = (z+1)/(z-1)$, согласно круговому свойству (см. пример 27.5), отображает область E в полосу $E_p : 0 < \operatorname{Re} p < 1/2$, так как $p(1) = \infty$, $p(-1) = 0$, $p(-3) = 1/2$, $p(-2) = 1/3$ (рис. 79, б). Линейная функция $R = 2p\pi e^{i\pi/2} = 2ip\pi$ поворачивает полосу E_p на угол $\pi/2$ против часовой стрелки и расширяет ее в 2π раза, т.е. переводит в полосу $E_R : 0 < \operatorname{Im} R < \pi$ (рис. 79, в). Следующее отображение $s = e^R$ переводит полосу E_R в верхнюю полуплоскость E_s : $\operatorname{Re} s > 0$, так как $|s|$ меняется от нуля до бесконечности, а $\arg s$ — от нуля до π . Наконец, дробно-линейная функция (27.11)

$$w = e^{i\alpha} \frac{s - a}{s - a^*}$$

отображает верхнюю полуплоскость E_s на область G — внутреннюю часть единичного круга $|w| < 1$.

Таким образом, имеем цепочку преобразований, которую можно объединить в функцию

$$w = e^{i\alpha} \frac{\exp[2i\pi(z+1)/(z-1)] - a}{\exp[2i\pi(z+1)/(z-1)] - a^*}, \quad (32.1)$$

дающую решение задачи с точностью до произвольных чисел: действительного α и комплексного a .

Существует одно частное решение задачи, которое можно получить, если вместо отображения $R = 2i\pi r$ взять функцию $\tilde{R} = \pi(p - 1/4)$. Эта функция отобразит полосу E_p на полосу $E_{\tilde{R}} : -\pi/4 < \operatorname{Re} E_{\tilde{R}} < \pi/4$, которую функция

$$w = \operatorname{tg} \tilde{R} = \operatorname{tg} \pi \left(\frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{4} \right) \quad (32.2)$$

сворачивает во внутреннюю часть единичного круга $|w| < 1$ (см. пример 31.1). Отображение (32.2) является частным случаем (32.1) при $\alpha = -\pi/2$, $a = i$.

Действительно,

$$\begin{aligned} w &= e^{-i\pi/2} \frac{e^{2i\pi \frac{z+1}{z-1}} - i}{e^{2i\pi \frac{z+1}{z-1}} + i} = -i \frac{e^{2i\pi \left(\frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{4}\right)} - 1}{e^{2i\pi \left(\frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{4}\right)} + 1} = \\ &= \frac{e^{i\pi \left(\frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{4}\right)} - e^{-i\pi \left(\frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{4}\right)}}{i \left[e^{i\pi \left(\frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{4}\right)} + e^{-i\pi \left(\frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{4}\right)} \right]} = \operatorname{tg} \pi \left(\frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Отображение полуплоскости на единичный круг осуществляется стандартным представлением (27.10), поэтому для заданной области достаточно найти функцию, осуществляющую отображение на полуплоскость, а затем воспользоваться функцией (27.11).

Пример 32.2. Найти функцию, отображающую область, принадлежащую двум единичным кругам с центрами в точках 0 и 1 (рис. 80, а), на верхнюю полуплоскость.

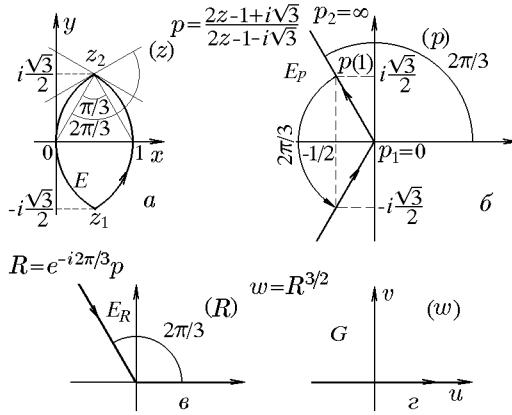


Рис. 80

Решение. Из центров окружностей в точку их пересечения проведем радиусы. Полученный треугольник является правильным с углами $\pi/3$. Тогда один из углов между касательными тоже равен $\pi/3$, а другой, соответствующий углу между окружностями, равен $2\pi/3 = \pi - \pi/3$.

Воспользуемся дробно-линейной функцией

$$p = \frac{z - (1/2 - i\sqrt{3}/2)}{z - (1/2 + i\sqrt{3}/2)} = \frac{2z - 1 + i\sqrt{3}}{2z - 1 - i\sqrt{3}},$$

переводящей точку $z_1 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$ в точку $p_1 = 0$, а точку $z_2 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ в точку $p_2 = \infty$. При таком отображении дуги окружностей перейдут в лучи, расположенные, как и их прообразы, под углом $2\pi/3$ друг к другу. Чтобы выяснить, как этот угол расположен на плоскости p , достаточно найти хотя бы одну точку на одном из его лучей. Поскольку $p(1) = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, то правая дуга окружности отобразится в луч, выходящий из начала координат плоскости p под углом $2\pi/3$. А так как при движении от точки $z_1 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$ к точке $z = 1$ область E остается слева, то ее образом будет область E_p , остающаяся слева при движении от $p = 0$ к $p = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ (рис. 80, б). Линейная функция $R = e^{-ip2\pi/3}$ повернет угол E_p на угол $2\pi/3$ по часовой стрелке так, что верхний

луч совпадет с действительной осью плоскости R (рис. 80, δ), а степенная функция $w = R^{3/2}$ развернет этот угол до величины π , что и соответствует верхней полуплоскости G : $\operatorname{Im} w > 0$.

Таким образом, функция, осуществляющая требуемое отображение, имеет вид

$$w(z) = e^{-i\pi} p^{3/2} = - \left[\frac{2z - 1 + i\sqrt{3}}{2z - 1 - i\sqrt{3}} \right]^{3/2}.$$

Пример 32.3. Найти функцию, отображающую верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по мнимой оси от $z = 0$ до $z = ih$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

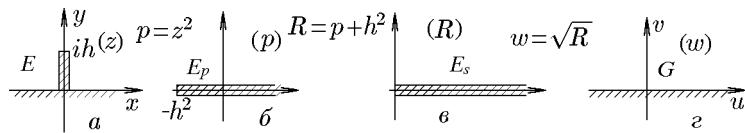


Рис. 81

Решение. Функция $p = z^2$ отображает исходную область E на всю комплексную плоскость с разрезом по действительной оси от $-h^2$ до ∞ , так как она удваивает аргументы прообразов (рис. 81, a, δ). Функция $R = p + h^2$ сдвигает этот разрез вправо на величину h^2 так, что областью E_R становится вся плоскость R с разрезом по положительной части действительной оси (рис. 81, ϵ). Наконец, функция $w = \sqrt{R}$ сворачивает E_R в полуплоскость G : $\operatorname{Im} w > 0$. Тогда $w(z) = \sqrt{z^2 + h^2}$ (рис. 81, ε).

Пример 32.4. Найти функцию, отображающую единичный круг E : $|z| < 1$ с разрезом по действительному диаметру от $z = 1/4$ до $z = 1$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

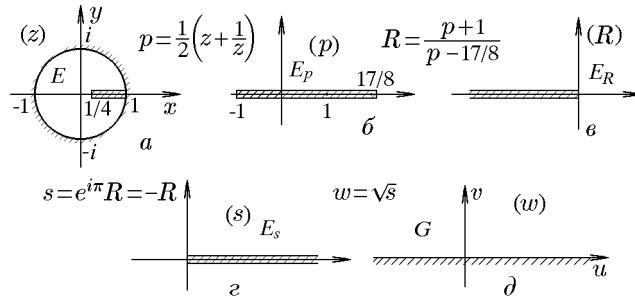


Рис. 82

Решение. Функция Жуковского $p = (z + 1/z)/2$ отображает область E (см. пример 30.1) на всю комплексную плоскость с разрезом от $p = -1$ до $p = 17/8$, так как $p(1/4) = (4 + 1/4)/2 = 17/8$ (рис. 82, a, δ). Дробно-линейная функция $R = (p + 1)/(p - 17/8)$ отображает точки $p_1 = -1$ в $R_1(-1) = 0$, $p_2 = 17/8$ в $R_2(\infty)$, $p_3 = 0$ в $R_3(0) = -8/17$. Это означает, что область E_p отобразится в область E_R , представляющую собой всю плоскость R с разрезом по отрицательной части действительной оси (рис. 82, ϵ). Функция $s = e^{i\pi} R = -R$ переводит разрез с отрицательной части действительной оси плоскости R на положительную часть действительной оси плоскости s (рис. 82, ε). Наконец, отображение $w = \sqrt{s}$ свернет область E_s на верхнюю полуплоскость G : $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 82, ε, δ).

Таким образом, функция, осуществляющая требуемое отображение, имеет вид

$$w = \sqrt{\frac{z^2 + 2z + 1}{17z/4 - z^2 - 1}}.$$

Пример 32.5. Найти функцию, отображающую внешнюю часть единичного круга $|z| > 1$ с разрезом на действительной оси от $z = -2$ до $z = -1$ на верхнюю полуплоскость.

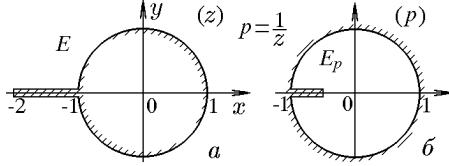


Рис. 83

Решение. Функция $p = 1/z$ переводит внешнюю часть единичного круга E (рис. 83, а) во внутреннюю часть единичного круга $|p| < 1$, а разрез на действительной оси от $z = -2$ до $z = -1$ – в разрез по действительному диаметру от $p = -1$ до $p = -1/2$ (рис. 84, б). Задача отображения области E_p на верхнюю полуплоскость рассмотрена в предыдущем примере. Следуя алгоритму его решения, найдем

$$w(z) = \sqrt{\frac{2z^2 + 5z + 2}{-z^2 + 2z - 1}}.$$

Пример 32.6. Найти функцию, отображающую круг $E: |z - 2| < 1$ на круг $G: |w - 2i| < 2$ так, чтобы $w(2) = i$, $\arg w'(2) = \pi/2$ (рис. 84, а, б).

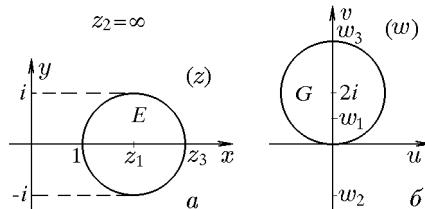


Рис. 84

Решение. При решении примера 27.1 нами было получено соотношение (27.7). Непосредственное применение этого соотношения в данном примере невозможно, однако метод его получения, использующий свойство сохранения симметричных точек (теорема 27.2), позволяет решить задачу.

Действительно, если центр круга $z_1 = 2$ отображается в точку $w_1(z) = i$, то точка $z_2 = \infty$ должна отобразиться в точку w_2 , симметричную точке $w_1 = i$ относительно окружности $|w - 2i| = 2$, т.е. точку $w_2 = -2i$.

Еще одну точку можно найти, если воспользоваться геометрическим смыслом аргумента производной. Из равенства $\arg w'(2) = \pi/2$ следует, что радиус, проведенный из точки $z_1 = 2$ в точку $z_3 = 3$, при заданном отображении повернется на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, т.е. его образом будет отрезок от $w_1 = i$ до $w_3 = 4i$, и, следовательно, образом точки $z_3 = 3$ будет точка $w_3 = 4i$.

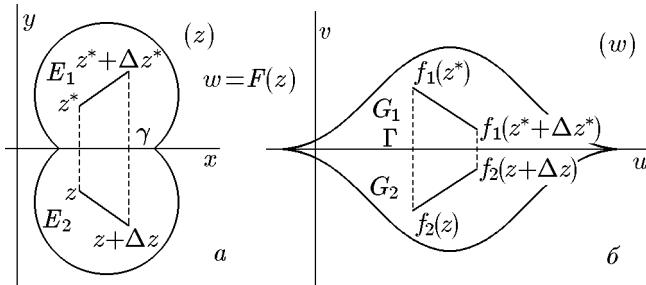


Рис. 85

Поскольку известны три точки z_1, z_2, z_3 и их образы w_1, w_2, w_3 , то можно воспользоваться формулой (27.6). Тогда

$$\frac{(w - i)(-2i - 4i)}{(w - 4i)(-2i - i)} = \frac{z - 2}{z - 3}.$$

Отсюда после упрощений находим

$$w = 2i \frac{1 - z}{z - 4}.$$

Решение этого примера целиком основано на принципе сохранения симметрии точек при дробно-линейном отображении, который, вообще говоря, можно рассматривать как частный случай более общего принципа – принципа симметрии конформных отображений, формулировку которого дает следующая

Теорема 32.1 (принцип симметрии). Пусть граница области E_1 содержит отрезок действительной оси γ (конечный или бесконечный), а функция $w = f_1(z)$ реализует конформное отображение этой области на область G_1 такое, что γ переходит в отрезок действительной оси Γ , являющейся частью границы G_1 . В этих условиях функция $f_1(z)$ допускает аналитическое продолжение $f_2(z) = f_1^*(z^*)$ через дугу γ в область E_2 , симметричную относительно γ , причем функция $w = f_2(z)$ реализует конформное отображение области E_2 на область G_2 , симметричную относительно Γ , а функция

$$w = F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1; \\ f_1(z) = f_2(z), & z \in \gamma; \\ f_2(z), & z \in G_2 \end{cases}$$

реализует конформное отображение области $E_1 + \gamma + E_2$ на область $G_1 + \Gamma + G_2$.

Доказательство. Обозначим через z произвольную точку, принадлежащую области E_2 и симметричную точке $z^* \in E_1$ относительно γ (рис. 85, а). Обозначим соответственно через $f_2(z)$ точку, принадлежащую области G_2 и симметричную точке $f_1(z^*)$ относительно Γ (рис. 85, б). Но точкой, симметричной точке $f_1(z^*)$ относительно Γ , является и точка $f_1^*(z^*)$ (рис. 85, б). Отсюда и следует, что

$$f_2(z) = f_1^*(z^*). \quad (32.3)$$

Покажем теперь, что функция $f_2(z)$ аналитична в области E_2 и конформно отображает ее на область G_2 , т.е. функция $f_2(z)$ в каждой точке области E_2 имеет отличную от нуля производную $f'_2(z)$. Действительно,

$$f'_2(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f_2(z + \Delta z) - f_2(z)}{\Delta z} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f_1^*(z^* + \Delta z^*) - f_2^*(z^*)}{\Delta z} = \\
&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{f_1(z^* + \Delta z^*) - f_2(z^*)}{\Delta z^*} \right]^* = [f'_1(z^*)]^*. \tag{32.4}
\end{aligned}$$

Поскольку, по условию теоремы, функция $f_1(z)$ конформно отображает E_1 на G_1 , то существует отличная от нуля производная $f'_1(z^*)$, а следовательно, в силу (32.4) и производная $f'_2(z)$ для всех $z \in E_2$.

Докажем следующее утверждение теоремы о том, что $f_2(z)$ является аналитическим продолжением $f_1(z)$, т.е. выполняется равенство $f_1(x) = f_2(x)$, означающее совпадение функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ на границе γ .

Действительно, согласно теореме 24.3, существует предел

$$\lim_{z^* \rightarrow x} f_1(z^*) = f_1(x),$$

но, согласно (32.3),

$$f_2(x) = \lim_{z \rightarrow x} f_2(z) = \lim_{z^* \rightarrow x} f_1^*(z^*) = f_1^*(x).$$

Таким образом, $f_2(x) = f_1^*(x)$, а с учетом того, что $f_1(x)$ принадлежит границе Γ , лежащей на действительной оси, имеем $f_1^*(x) = f_1(x)$, откуда и следует $f_2(x) = f_1(x)$. Последнее равенство по принципу непрерывного продолжения означает, что $f_2(z)$ является аналитическим продолжением функции $f_1(z)$. Все сказанное выше доказывает последнее утверждение теоремы: о том, что функция $F(z)$ (32.1) реализует конформное отображение $E_1 + \gamma + E_2$ на $G_1 + \Gamma + G_2$.

◊ Принцип симметрии остается справедливым и в том случае, если в его формулировке отрезки действительных осей заменить на отрезки произвольных прямых и, более того, на части дуг некоторых окружностей. Справедливость такого замечания вытекает из кругового свойства дробно-линейной функции, позволяющего отобразить указанные линии в отрезок действительной оси. Таким образом, в тех случаях, когда отображаемая область симметрична относительно одной из линий, указанных выше, основная задача теории конформных отображений может быть упрощена в «два раза» – отображением одной из ее «половин».

Помимо этого, принцип симметрии можно рассматривать еще и как исключительно простой метод построения аналитического продолжения функции $f(z)$ через границу γ . Действительно, если Γ совпадает с действительной осью, справедлива формула (32.3); если Γ совпадает с мнимой осью, то $f_2(z) = -f_1^*(z^*)$; если Γ совпадает с биссектрисой первой четверти, то $f_2(z) = if_1^*(z^*)$ и т.д.

Сказанное выше можно интерпретировать и как условия для функции $f_1(z)$, допускающей указанные аналитические продолжения. Так, в первом случае условием является

$$\operatorname{Im} f_1(z)|_{z \in \gamma} = \operatorname{Im} f_1(z)|_{z \in x} = 0$$

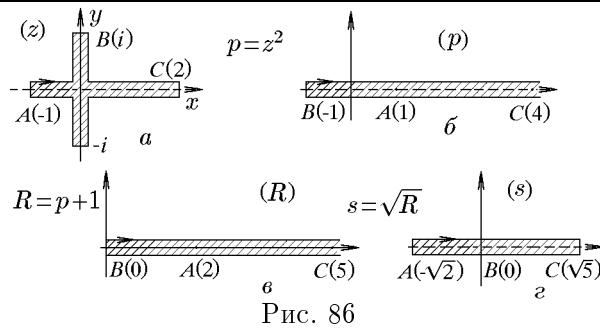
(так как $\Gamma \cap v = 0$); во втором случае –

$$\operatorname{Re} f_1(z)|_{z \in \gamma} = \operatorname{Re} f_1(z)|_{z \in x} = 0$$

(так как $\Gamma \cap u = 0$), и в третьем –

$$\operatorname{Re} f_1(z)|_{z \in \gamma} = \operatorname{Im} f_1(z)|_{z \in \gamma}$$

или $\operatorname{Re} f_1(x) = \operatorname{Im} f_1(x)$ (так как $\Gamma \in u = v$).



Приведем ряд примеров, использующих принцип симметрии. Однако перед этим вернемся к задаче отображения функцией $\sin z$ полуполосы $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$, $\operatorname{Im} z > 0$ и всей полосы $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$. В предыдущем разделе эти задачи решались независимо друг от друга. Использование принципа симметрии позволяет достаточно просто найти решение второй задачи, если известно решение первой.

Действительно, $f_1(z) = \sin z$ отображает указанную полуполосу на верхнюю полуплоскость, при этом отрезок γ : $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y = 0$ отображается в отрезок Γ : $-1 < u < 1$, $v = 0$. Принцип симметрии дает выражение для аналитического продолжения $f_1(z) = \sin z$ через отрезок γ в виде (32.1), т.е.

$$\begin{aligned} f_2(z) &= (\sin z^*)^* = \left(\frac{e^{iz^*} - e^{-iz^*}}{2i} \right)^* = \\ &= -\frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z. \end{aligned}$$

Таким образом, аналитическим продолжением $\sin z$ снова является $\sin z$. Но тогда нижняя полуполоса отобразится на нижнюю полуплоскость, а вся полоса функцией $\sin z$ отобразится на всю комплексную плоскость с разрезами по действительной оси от $-\infty$ до -1 и от 1 до ∞ (см. рис. 76).

Пример 32.7. Найти функции $w(z)$, конформно отображающие внешнюю часть креста (рис. 86, а) на

- верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$;
- внешнюю часть единичного круга $|w| > 1$.

Решение. Поскольку рассматриваемая область обладает симметрией относительно действительной оси, проведем по ней вспомогательный разрез и рассмотрим верхнюю полуплоскость с разрезом по мнимой оси от $z = 0$ до $z = i$. Как показано в примере 32.3, функция $s = \sqrt{z^2 + 1}$ отобразит ее на верхнюю полуплоскость плоскости s , причем точки A, B, C отобразятся в точки действительной оси с координатами, соответственно, $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{5}$ (рис. 86).

Функция $s = \sqrt{z^2 + 1}$ удовлетворяет условиям принципа симметрии $\operatorname{Im} s(x) = \operatorname{Im} \sqrt{x^2 + 1} = 0$ и, следовательно, допускает аналитическое продолжение

$$F(z) = \sqrt{z^2 + 1} = \begin{cases} \sqrt{z^2 + 1}, & \operatorname{Im} z > 0; \\ \sqrt{x^2 + 1}, & \operatorname{Im} z = 0; \\ \sqrt{z^2 + 1}, & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \quad (32.5)$$

которое полную (верхнюю и симметричную ей нижнюю) внешнюю часть креста отображает на комплексную плоскость s с разрезом по действительной оси от точки $A(-\sqrt{2})$ до точки $C(\sqrt{5})$. Причем в (32.5) выбирается та ветвь корня, для которой $F(x + i0) > 0$ при $x > 0$. Далее в случае

а) функция $T = (\sqrt{2} + s)/(\sqrt{5} - s)$ превращает конечный разрез плоскости s в бесконечный разрез по действительной оси плоскости T (рис. ??, а), а функция $w = \sqrt{T}$ сворачивает плоскость T с разрезом в полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. ??, б). Таким образом, искомая функция w имеет вид

$$w(z) = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{z^2 + 1}}{\sqrt{5} - \sqrt{z^2 + 1}}};$$

б) функция $\tilde{T} = (2s + \sqrt{2} - \sqrt{5})/(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ преобразует конечный разрез плоскости s (рис. 86, г) в конечный разрез плоскости \tilde{T} по действительной оси от точки $\tilde{T}_1 = -1$ до точки $\tilde{T}_2 = 1$ (рис. 87, а), а функция $w = \tilde{T} + \sqrt{\tilde{T}^2 - 1}$ ($w(\infty) = \infty$), обратная функции Жуковского, переводит внешнюю часть отрезка плоскости \tilde{T} во внешнюю часть единичного круга плоскости w (рис. 87, б). Окончательный вид функции w дает выражение

$$w(z) = \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} \left[\frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{2} + \sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{z^2 + 1 + (\sqrt{2} - \sqrt{5})\sqrt{z^2 + 1}} \right].$$

Пример 32.8. Плоскость z с разрезом, изображенным на рис. 88, а, отобразить на верхнюю полуплоскость.

Решение. Функцией $p = e^{-i\pi/2}z = -iz$ повернем разрез на $\pi/2$ по часовой стрелке (рис. 88, б) так, чтобы рассматриваемая область была симметрична относительно действительной оси, по которой мы проведем вспомогательный разрез. Рассмотрим верхнюю полуплоскость. Функция Жуковского $R = (p+1/p)/2$ верхнюю полуплоскость отображает на всю плоскость R с разрезом по действительной оси от $-\infty$ до -1 и от 1 до $+\infty$. Разрез по дуге единичной окружности, лежащей во второй четверти, удлинит левый разрез от -1 до нуля (рис. 88, в). Дробно-линейная функция $s = R/(R - 1)$ отобразит плоскость R с указанными разрезами на плоскость s с единственным разрезом по положительной части действительной оси, которую функция $T = \sqrt{s}$ (выбираем однозначную ветвь, для которой $\sqrt{2} = 1$), в свою очередь, свернет на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} T > 0$, причем точки A, B, C отобразятся, соответственно, в точки с координатами $-\sqrt{5}/3, 0, 1$.

Функция $T = \sqrt{p^2 + 1}/(p - 1)$ удовлетворяет условиям принципа симметрии

$$\operatorname{Im} T(p)|_{\operatorname{Im} p=0} = \operatorname{Im} \left[\frac{\sqrt{(\operatorname{Re} p)^2 + 1}}{\operatorname{Re} p - 1} \right] = 0$$

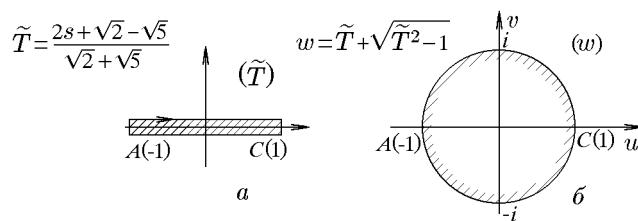


Рис. 87

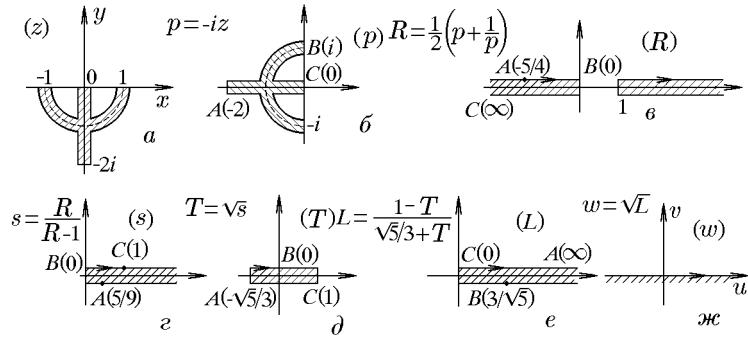


Рис. 88

и, следовательно, допускает аналитическое продолжение $F(x) = \sqrt{p^2 + 1}/(p - 1)$, которое полную (верхнюю и симметричную ей нижнюю) плоскость p с повернутым разрезом отображает на комплексную плоскость T с разрезом по действительной оси от точки $A(-\sqrt{5}/3)$ до точки $C(1)$. Далее функция $L = (1 - T)/(\sqrt{5}/3 + T)$ преобразует его в бесконечный разрез по положительной части действительной оси плоскости L . И, наконец, функция $w = \sqrt{L}$ отображает плоскость L с бесконечным разрезом в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. Собрав все промежуточные обозначения, найдем явный вид функции $w(z)$

$$w(z) = \sqrt{\frac{z - i - \sqrt{z^2 - 1}}{i\sqrt{z^2 - 1} + \sqrt{5}(z - i)/3}}.$$

Пример 32.9. Найти функцию, конформно отображающую область, изображенную на рис. 89, а, на круг $|w| < 1$.

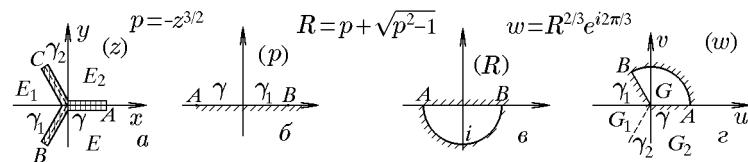


Рис. 89

Решение. Всю плоскость z лучами γ : $\arg z = 0$, γ_1 : $\arg z = e^{-2i\pi/3}$ и γ_2 : $\arg z = e^{-4i\pi/3}$ разобьем на секторы E , E_1 , E_2 . Рассмотрим сектор E (рис. 89, а). Функция $p = -z^{3/2}$ отобразит его на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Re} p > 0$, которую функция $R = p + \sqrt{p^2 - 1}$, обратная функции Жуковского, отобразит в нижний полукруг $|R| < 1$, $\operatorname{Im} R < 0$ (выбирается ветвь $R(\infty) = 0$). Наконец, функция

$$w(z) = e^{i2\pi/3} R^{2/3} = e^{i2\pi/3} (-z^{3/2} + \sqrt{z^3 - 1})^{2/3}$$

отобразит этот полукруг на сектор G (рис. 89, б, в, г).

Следующий сектор E_1 можно получить из E поворотом на угол $2\pi/3$ по часовой стрелке и, соответственно, сектор G_1 из сектора G поворотом на угол $2\pi/3$ против часовой стрелки. Тогда

$$w_1(z) = e^{2i\pi/3} w(e^{2i\pi/3} z), \quad z \in E_1,$$

и, поскольку

$$w_1(z) = w(z), \quad z \in \gamma_1,$$

то $w_1(z)$ можно считать аналитическим продолжением $w(z)$ через луч γ_1 .

Аналогично

$$\begin{aligned} w_2(z) &= e^{i4\pi/3}w(e^{i4\pi/3}z), \quad z \in E_2, \\ w_2(z) &= w_1(z), \quad z \in \gamma_2, \end{aligned}$$

и, следовательно, $w_2(z)$ – аналитическое продолжение $w_1(z)$ через луч γ_2 .

Таким образом, функция

$$F(z) = \begin{cases} w(z), & z \in E; \\ w_1(z) = w(z), & z \in \gamma; \\ w_1(z), & z \in E_1; \\ w_2(z) = w_1(z), & z \in \gamma_1; \\ w_2(z), & z \in E_2; \\ w(z) = w_2(z), & z \in \gamma \end{cases}$$

является аналитическим продолжением функции

$$w(z) = e^{2i\pi/3}(-z^{3/2} + \sqrt{z^3 - 1})^{2/3}$$

на всю комплексную плоскость и конформно отображает заданную область на круг $|w| < 1$.

33. Интеграл Кристоффеля–Шварца

Рассмотрим еще один класс основной задачи теории конформных отображений: отображение полуплоскости на заданный многоугольник. Зададим для определенности на плоскости z верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, а на плоскости w – n -угольник с вершинами в точках A_1, A_2, \dots, A_n с углами $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$ (рис. 90).

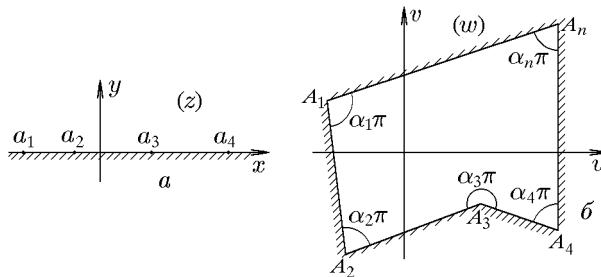


Рис. 90

Если положительное направление обхода n -угольника соответствует возрастанию порядкового номера k точек A_k , то их прообразы a_k , расположенные на границе полуплоскости $\operatorname{Im} z = 0$, согласно принципу соответствия границ, пронумерованы в порядке возрастания самих величин a_k .

Напомним, что сумма углов n -угольника равна $\pi(n - 2)$. Отсюда для значений α_k вытекает условие

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2,$$

из которого, в свою очередь, получаем условие $-2 \leq \alpha_k \leq 0$, ограничивающее значение угла α_k , если его вершина A_k является бесконечно удаленной точкой.

Как правило, рассматриваемое отображение не осуществляется с помощью элементарных функций. Тем не менее, можно получить интегральное представление функции $w = f(z)$, определяющей это отображение.

Теорема 33.1 (Кристоффеля–Шварца). *Если функция $w = f(z)$ реализует конформное отображение верхней полуплоскости на внутреннюю часть ограниченного n -угольника с углами $\alpha_k\pi$ ($k = \overline{1, n}$) в вершинах A_k с прообразами a_k ($-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \infty$), то она представляется интегралом*

$$w = f(z) = C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1-1} (z - a_2)^{\alpha_2-1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n-1} dz + C_1, \quad (33.1)$$

где z_0 , C , C_1 – некоторые постоянные. Интеграл (33.1) называется интегралом Кристоффеля–Шварца.

Перейдем сразу к обсуждению формулы (33.1), опустив доказательство вследствие его громоздкости (см. [35]). Интеграл (33.1) задает функцию $w = f(z)$ только в том случае, если известны прообразы a_k вершин A_k . В противном случае точки a_k , как и постоянные C , C_1 , должны определяться по ходу решения задачи, что и составляет основную трудность использования формулы (33.1).

Справедливости ради следует заметить, что три точки a_1 , a_2 , a_3 можно задать произвольно, а остальные доопределить, например, из условий

$$L_k = |A_{k+1} - A_k|,$$

где L_k – длина стороны между вершинами A_{k+1} и A_k , а

$$A_k = f(a_k) = C \int_{z_0}^{a_k} (z - a_1)^{\alpha_1-1} (z - a_2)^{\alpha_2-1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n-1} dz + C_1.$$

Кроме того, если положить $z_0 = a_1$, то $C_1 = A_1$.

Существуют частные случаи формулы (33.1) – комбинации таких, когда бесконечно удаленной точкой является, во-первых, вершина A_n , во-вторых, – прообраз a_n точки A_n . В первом случае формула (33.1) оказывается справедливой, если под α_n понимать данное ранее определение угла между прямыми в бесконечно удаленной точке. Во втором случае формула (33.1) упрощается к виду

$$w = f(z) = C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1-1} (z - a_2)^{\alpha_2-1} \dots (z - a_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1} dz + C_1. \quad (33.2)$$

Формула (33.2) отличается от (33.1) отсутствием множителя $(z - a_n)^{\alpha_n-1}$, относящегося к бесконечно удаленной точке a_n .

Приведем несколько простых примеров построения функции $w = f(z)$, отображающей полуплоскость на простейший многоугольник – треугольник.

Пример 33.1. Найти функцию, отображающую верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на внутреннюю часть треугольника $A_1A_2A_3$, изображенного на рис. 91.

Решение. Так как три прообраза вершин A_k допускают произвольный выбор, положим $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$. Кроме того, выберем $z_0 = a_1 = 0$. Тогда, согласно (33.2), имеем

$$w = f(z) = C \int_0^z z^{\alpha_1-1} (z - 1)^{\alpha_2-1} dz + C_1. \quad (33.3)$$

Из равенств

$$\begin{aligned} A_1 &= f(a_1) = 0, \\ A_2 &= f(a_2) = C \int_0^1 z^{\alpha_1-1} (z-1)^{\alpha_2-1} dz + C_1, \end{aligned}$$

находим $C_1 = 0$ и

$$C = \frac{1}{\int_0^1 z^{\alpha_1-1} (z-1)^{\alpha_2-1} dz} = \frac{e^{-i\pi(\alpha_2-1)}}{B(\alpha_1, \alpha_2)}, \quad (33.4)$$

где

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 z^{\alpha_1-1} (1-z)^{\alpha_2-1} dz \quad (33.5)$$

– так называемая бета-функция, которая будет рассмотрена позднее (см. разд. «Бета-функция»). Подставив (33.4), (33.5) в (33.3), найдем

$$f(z) = \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)} \int_0^z z^{\alpha_1-1} (1-z)^{\alpha_2-1} dz. \quad (33.6)$$

Пример 33.2. Найти функцию, отображающую верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на внутреннюю часть неограниченного треугольника $A_1 A_2 A_3$, изображенного на рис. 92.

Решение. Из (33.6) при $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 7/6$ найдем

$$f(z) = \frac{1}{B(1/4, 7/6)} \int_0^z z^{-3/4} (1-z)^{-1/6} dz.$$

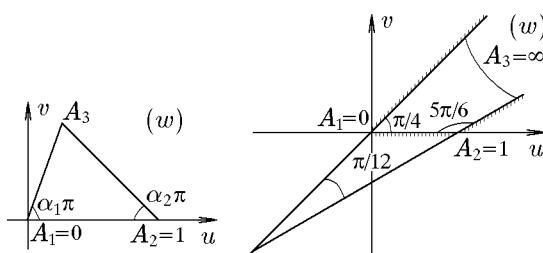


Рис. 91

Рис. 92

ГЛАВА 4

Элементы операционного исчисления

34. Преобразование Лапласа

◆ Преобразованием Лапласа заданной функции $f(t)$ действительного переменного t называется преобразование, ставящее в соответствие функции $f(t)$ функцию $\varphi(p)$ комплексного переменного p с помощью равенства

$$\varphi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (34.1)$$

Интеграл (34.1) называется интегралом Лапласа.

◊ Интеграл Лапласа (34.1) является несобственным интегралом, зависящим от комплексного переменного $p = s + i\sigma$ как от параметра. Несобственный интеграл (34.1) сходится не для всех функций $f(t)$ и не при всех значениям параметра p . Поэтому определим класс функций $f(t)$, для которых преобразование (34.1) имеет смысл.

◆ Функция $f(t)$ называется оригиналом, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;
2. при $t > 0$ функция $f(t)$ на любом конечном участке оси Ot имеет не более чем конечное число точек разрыва первого рода;
3. при $t \rightarrow \infty$ $f(t)$ имеет ограниченную степень роста, т.е. существуют такие $M > 0$ и $s > 0$, что справедливо неравенство

$$|f(t)| \leq M e^{st}. \quad (34.2)$$

◆ Точная нижняя грань ($\inf s = s_0$) тех значений s , для которых имеет место соотношение (34.2), называется показателем степени роста функции $f(t)$.

◊ Отметим, что неравенство (34.2) выполняется при $s = s_0 + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, а при $s = s_0$ оно может и не выполняться.

Пример 34.1. Определить показатели степени роста следующих функций:

$$\text{а)} f(t) = t^n, \quad n = \overline{0, \infty}; \quad \text{б)} f(t) = e^{3t} \sin t, \quad \text{в)} f(t) = \operatorname{tg} t.$$

Решение. а) Для всех $s > 0$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{t^n}{e^{st}} \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{st}}.$$

По правилу Лопитала

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{st}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n!}{s^n e^{st}} = 0.$$

Следовательно, для всех $t \in [0, \infty[$ справедливо

$$\frac{t^n}{e^{st}} < M,$$

откуда

$$|t^n| < M e^{st}$$

для всех $s > 0$. Здесь s – произвольное положительное число. Следовательно, точная нижняя грань $\inf s = 0$ и $s_0 = 0$, хотя при $s = 0$ соотношение (34.2) для $n > 0$ не выполняется.

б) Так как для любого $M \geq 1$ справедливо

$$|e^{3t} \sin t| \leq M e^{3t}, \quad t \rightarrow \infty,$$

то показателем степени роста является $s_0 = 3$.

в) Так как прямая $t = \pi/2$ есть вертикальная асимптота функции $f(t) = \operatorname{tg} t$, то для нее показатель степени роста не существует.

♦ Пусть для заданного оригинала $f(t)$ и для $\operatorname{Re} p > s_0$ существует интеграл (34.1). Тогда интеграл (34.1) определяет функцию $\varphi(p)$ комплексного переменного p

$$\varphi(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \quad (34.3)$$

называемого лапласовским изображением (изображением по Лапласу) функции $f(t)$.

Связь между функциями $f(t)$ и $\varphi(p)$, осуществляемую с помощью преобразования Лапласа (34.3), будем обозначать

$$\varphi(p) \leftarrow f(t), \quad f(t) \rightarrow \varphi(p).$$

Теорема 34.1. Интеграл (34.3) сходится абсолютно в области $\operatorname{Re} p > s_0$, где s_0 – показатель степени роста функции $f(t)$. Причем в области $\operatorname{Re} p \geq \alpha > s_0$ интеграл (34.3) сходится абсолютно и равномерно.

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Для всех $p = s + i\sigma$ и $\operatorname{Re} p = s > s_0 + \varepsilon$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |e^{-pt} f(t)| &= |e^{-(s-i\sigma)t}| |f(t)| \leq \\ &\leq e^{-st} M e^{(s_0+\varepsilon)t} = M e^{-(s-s_0-\varepsilon)t}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что для всех $s > s_0$ справедливо равенство $|e^{-(s-i\sigma)t}| = e^{-st}$, и определением показателя степени роста функции $f(t)$, т.е. условием $|f(t)| < M e^{(s_0+\varepsilon)t}$. В силу этого неравенства интеграл

$$\int_0^\infty e^{-pt} \varphi(t) dt$$

мажорируется абсолютно сходящимся интегралом

$$M \int_0^\infty e^{-(s-s_0-\varepsilon)t} dt = \frac{M}{s - s_0 - \varepsilon}.$$

Следовательно, по признаку сравнения для сходимости несобственных интегралов он тоже сходится абсолютно, причем справедливо

$$|\varphi(p)| \leq \frac{M}{s - s_0}. \quad (34.4)$$

Исследуем теперь интеграл (34.3) на равномерную сходимость. В случае $\operatorname{Re} p \geq \alpha > s_0$ аналогично получим

$$|f(t)e^{-pt}| \leq M e^{-(\alpha-s_0)t}.$$

Следовательно,

$$|\varphi(p)| \leq \int_0^\infty |f(t)e^{-pt}| dt \leq M \int_0^\infty e^{-(\alpha-s_0)t} dt = \frac{M}{\alpha - s_0}.$$

Таким образом, интеграл (34.3) при $\operatorname{Re} p \geq \alpha > s_0$ сходится равномерно, так как он мажорируется сходящимся интегралом, не зависящим от p (признак Вейерштрасса равномерной сходимости интегралов). Следовательно, теорема доказана.

Теорема 34.2. *Функция $\varphi(p)$, определяемая равенством (34.3), является аналитической функцией комплексного переменного p в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq \alpha > s_0$, где s_0 — показатель степени роста функции $f(t)$.*

Доказательство. Действительно, согласно теореме 34.1, при $\operatorname{Re} p \geq \alpha > s_0$ интеграл (34.3) сходится равномерно. Поэтому его можно почленно дифференцировать, если интеграл от производной подынтегральной функции сходится:

$$\left| - \int_0^\infty t f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^\infty M t e^{-(\alpha-s_0)t} dt = \frac{M}{(\alpha - s_0)^2}.$$

Следовательно, интеграл сходится равномерно, что и доказывает теорему.

Теорема 34.3. *Если p стремится к бесконечности так, что $\operatorname{Re} p = s$ неограниченно возрастает, то имеет место равенство*

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} \varphi(p) = 0. \quad (34.5)$$

Доказательство. Действительно, из равенства (34.4) имеем

$$|\varphi(p)| \leq \frac{M}{s - s_0 - \varepsilon}, \quad \operatorname{Re} p = s.$$

Переходя к пределу $s \rightarrow \infty$, получим соотношение (34.5).

Следствие. Если бесконечно удаленная точка является устранимой изолированной особой точкой функции $\varphi(p)$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi(p) = 0. \quad (34.6)$$

Доказательство. По определению устранимой изолированной особой точки $p = \infty$ имеем

$$\varphi(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{p^k}.$$

Отсюда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi(p) = C_0$$

вне зависимости от способа стремления p к бесконечности. В частности,

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} \varphi(p) = C_0 = 0$$

в силу (34.5). Следовательно, $C_0 = 0$, что и требовалось доказать.

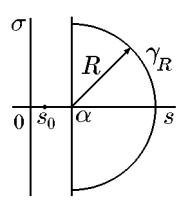
Теорема 34.4 (обращения). Если функция $f(t)$ является оригиналом, а $\varphi(p)$ – ее лапласовским изображением, то для всех t , где оригинал непрерывен,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \varphi(p)e^{pt} dp, \quad (34.7)$$

причем интегрирование производится по всей прямой $\operatorname{Re} p = \alpha > s_0$, где s_0 – показатель степени роста функции $f(t)$, и интеграл понимается в смысле главного значения (23.3), т.е.

$$\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \varphi(p)e^{pt} dp = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\alpha-iR}^{\alpha+iR} \varphi(p)e^{pt} dp.$$

Формула (34.7) называется формулой Меллина.



Доказательство. Рассмотрим функцию $\psi(p)$, являющуюся преобразованием Лапласа функции $f(t)$ (34.7)

$$\psi(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \left[\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{t\omega} \varphi(\omega) d\omega \right] e^{-pt} dt,$$

Рис. 93 где $\varphi(p) \rightarrow f(t)$ и $s_0 < \alpha < \infty$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что $\psi(p) = \varphi(p)$.

В силу равномерной сходимости последнего интеграла можно изменить порядок интегрирования

$$\psi(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} d\omega \int_0^{\infty} dt e^{(t-p)t} \varphi(\omega).$$

В полуплоскости $s_0 < \alpha \leq \operatorname{Re} p$ рассмотрим контур γ_R (см. рис. 93), являющийся частью окружности радиуса R с центром в точке $(\alpha, 0)$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\varphi(\omega)}{\omega - p} d\omega + \right. \\ &\quad \left. + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^+} \frac{\varphi(\omega) d\omega}{\omega - p} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^-} \frac{\varphi(\omega) d\omega}{\omega - p} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{\varphi(\omega) d\omega}{\omega - p} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^-} \frac{\varphi(\omega) d\omega}{\omega - p} \right\}, \end{aligned}$$

где Γ_R состоит из полуокружности γ_R и диаметра этой окружности, лежащего на оси $\operatorname{Re} p = \alpha$. Обход этого контура совершается в положительном направлении. Так как

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega - p} = 0,$$

то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^-} \frac{\varphi(\omega)}{\omega - p} d\omega = 0$$

и, следовательно,

$$\psi(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(\omega)}{\omega - p} d\omega = \varphi(p),$$

поскольку функция $\varphi(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq \alpha$ (см. интегральную формулу Коши (13.1)). Здесь $\Gamma = \lim_{R \rightarrow \infty} \Gamma_R$. Таким образом, теорема доказана.

Теорема 34.5 (единственности). *Если две непрерывные функции имеют одновременно и то же изображение, то они тождественно равны.*

Доказательство. Пусть $\{f(t) \rightarrow \varphi(p), g(t) \rightarrow \varphi(p)\}$. Рассмотрим функцию $\Phi(t) = f(t) - g(t)$. В силу линейности интегралов получим

$$\Phi(t) \rightarrow \varphi(p) - \varphi(p) = 0.$$

Следовательно, по формуле Меллина

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} 0 \cdot e^{pt} dt = 0,$$

т.е.

$$\{g(t) \equiv f(t)\},$$

что и требовалось доказать.

35. Изображения простейших функций

Пример 35.1. Найти изображение θ -функции Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}.$$

Решение. Нетрудно заметить, что показатель степени роста θ -функции равен нулю: $s_0 = 0$. По определению,

$$\theta(t) \rightarrow \int_0^\infty e^{-pt} \theta(t) dt = \int_0^\infty e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

Таким образом,

$$\theta(t) \rightarrow \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \tag{35.1}$$

Пример 35.2. Найти изображение функции $f(t) = \theta(t)e^{\lambda t}$.

Решение. В этом случае $s_0 = \lambda$. Тогда

$$\theta(t)e^{\lambda t} \rightarrow \int_0^\infty e^{-pt}e^{\lambda t}dt = \int_0^\infty e^{(\lambda-p)t}dt = \frac{e^{(\lambda-p)t}}{\lambda-p}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p-\lambda},$$

так как $\operatorname{Re} p > \lambda$, где λ – показатель степени роста функции $e^{\lambda t}$. Следовательно,

$$\theta(t)e^{\lambda t} \rightarrow \frac{1}{p-\lambda}. \quad (35.2)$$

Пример 35.3. Найти изображение функций $f_1(t) = \theta(t) \cos t$, $f_2(t) = \theta(t) \sin t$ и $f_3(t) = \theta(t) \operatorname{tg} t$.

Решение. Так как $|\cos t| < 1$ и, следовательно, $s_0 = 0$, то

$$\theta(t) \cos t \rightarrow \psi(p) = \int_0^\infty \cos t e^{-pt} dt.$$

Проинтегрируем по частям, положив $e^{-pt} = U$, $dV = \cos t dt$, $dU = -pe^{-pt} dt$, $V = \sin t$. Получим

$$\psi(p) = e^{-pt} \sin t \Big|_0^\infty + \int_0^\infty p \sin t e^{-pt} dt.$$

Проинтегрируем еще раз по частям, полагая $e^{-pt} = U$, $dV = \sin t dt$, $dU = -pe^{-pt} dt$, $V = -\cos t$. Получим

$$\begin{aligned} \psi(p) &= -p \cos t e^{-pt} \Big|_0^\infty - p^2 \int_0^\infty \cos t e^{-pt} dt = \\ &= p - p^2 \int_0^\infty \cos t e^{-pt} dt = p - p^2 \psi(p). \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$f_1(t) = \theta(t) \cos t \rightarrow \frac{p}{1+p^2}. \quad (35.3)$$

Аналогично

$$f_2(t) = \theta(t) \sin t \rightarrow \frac{1}{1+p^2}. \quad (35.4)$$

Функция $f_3(t) = \theta(t) \operatorname{tg} t$ не является оригиналом (см. пример 34.1) и, следовательно, не имеет изображения.

Пример 35.4. Найти изображение степенной функции $f(t) = \theta(t)t^n$, n – целое, $n = \overline{1, \infty}$.

Решение. Заметим, что $s_0 = 0$. Тогда

$$\theta(t)t^n \rightarrow \varphi(p) = \int_0^\infty e^{-pt}t^n dt.$$

Проинтегрируем по частям, положив $U = t^n$, $dV = e^{-pt}dt$, $dU = nt^{n-1}dt$, $V = -e^{-pt}/p$. Получим

$$\varphi(p) = -t^n \frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^\infty + \frac{n}{p} \int_0^\infty e^{-pt}t^{n-1} dt.$$

Проинтегрировав еще $n - 1$ раз по частям, получим

$$\varphi(p) = \frac{n!}{p^n} \int_0^\infty e^{-pt} dt = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Таким образом,

$$\theta(t)t^n \rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (35.5)$$

◊ В математической литературе функция $\theta(t)$ зачастую опускается. Тогда соотношения (35.1)–(35.5) примут вид

$$1 \rightarrow \frac{1}{p}; \quad (35.6)$$

$$e^{\lambda t} \rightarrow \frac{1}{p - \lambda}; \quad (35.7)$$

$$\cos t \rightarrow \frac{p}{1 + p^2}; \quad (35.8)$$

$$\sin t \rightarrow \frac{1}{1 + p^2}; \quad (35.9)$$

$$t^n \rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (35.10)$$

В дальнейшем там, где это не приводит к недоразумениям, функцию $\theta(t)$ будем опускать.

36. Свойства преобразования Лапласа

Свойство 1. Линейность преобразования Лапласа

Если

$$f(t) \rightarrow \varphi(p), \quad g(t) \rightarrow \psi(p),$$

то для любых комплексных постоянных C_1 и C_2

$$[C_1 f(t) + C_2 g(t)] \rightarrow [C_1 \varphi(p) + C_2 \psi(p)]. \quad (36.1)$$

Доказательство. По определению имеем

$$\begin{aligned} C_1 f(t) + C_2 g(t) &\stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \int_0^\infty e^{-pt} [C_1 f(t) + C_2 g(t)] dt = \\ &= C_1 \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt + C_2 \int_0^\infty e^{-pt} g(t) dt = C_1 \varphi(p) + C_2 \psi(p), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пример 36.1. Найти изображение функций $f_1(t) = \operatorname{sh} t$ и $f_2(t) = \operatorname{ch} t$.

Решение. В этом случае $s_0 = 1$ и поскольку

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

и

$$e^{at} \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \frac{1}{p-a},$$

то

$$\operatorname{sh} t = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \frac{1}{2} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p^2-1}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{sh} t \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \frac{1}{p^2-1}.$$

Аналогично

$$\operatorname{ch} t \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \frac{p}{p^2-1}.$$

Свойство 2. Теорема подобия

Если $f(t) \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \varphi(p)$ и $a > 0$, то

$$f(at) \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \frac{1}{a} \varphi\left(\frac{p}{a}\right). \quad (36.2)$$

Доказательство. Действительно,

$$f(at) \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \psi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(at) dt.$$

Сделаем в интеграле замену переменных $at = x$. Тогда

$$\psi(p) = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-px/a} f(x) dx = \frac{1}{a} \varphi(p/a),$$

что и требовалось доказать.

Пример 36.2. Найти изображение функции $f(t) = \sin at$, где $a > 0$.

Решение. Известно (см. формулу (35.9)), что

$$\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Следовательно, по теореме подобия

$$\sin at \rightarrow \frac{1}{a} \frac{1}{p^2/a^2 + 1} = \frac{a}{p^2 + a^2},$$

т.е.

$$\sin at \rightarrow \frac{a}{p^2 + a^2}.$$

Свойство 3. Теорема запаздывания. Первая теорема смещения для оригиналов

Если $f(t) \rightarrow \varphi(p)$ и $a > 0$, то

$$f(t - a) \rightarrow e^{-ap} \varphi(p). \quad (36.3)$$

При этом $f(t - a) = 0$ для $t < a$.

Доказательство. Действительно,

$$f(t - a) \rightarrow \int_0^\infty e^{-pt} f(t - a) dt = \int_0^a e^{-pt} f(t - a) dt + \int_a^\infty e^{-pt} f(t - a) dt.$$

Первый интеграл равен нулю, так как $f(t - a) = 0$ при $t - a < 0$. Положив во втором интеграле $\tau = t - a$, получим

$$\begin{aligned} f(t - a) \rightarrow \int_a^\infty e^{-pt} f(t - a) dt &= \int_0^\infty e^{-p(\tau+a)} f(\tau) d\tau = \\ &= e^{-ap} \int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = e^{-ap} \varphi(p), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пример 36.3. Найти изображение функции

$$f(t - \pi) = (t - \pi)^2 \theta(t - \pi)$$

и сравнить с изображением функции

$$g(t) = (t - \pi)^2 \theta(t).$$

Решение. Для функции $f(t) = t^2 \theta(t)$ имеем

$$f(t) = t^2 \theta(t) \rightarrow \frac{2}{p^3}.$$

По теореме запаздывания (свойство 3) для функции $f(t - \pi)$ найдем

$$f(t - \pi) = (t - \pi)^2 \theta(t - \pi) \rightarrow e^{-\pi p} \frac{2}{p^3}.$$

Согласно свойству линейности, для функции $g(t)$ получим

$$g(t) = (t^2 - 2\pi t + \pi^2) \theta(t) \rightarrow \frac{2}{p^3} - \frac{2\pi}{p^2} + \frac{\pi^2}{p}.$$

Пример 36.4. Найти изображение ступенчатой функции, график которой приведен на рис. 94.

Решение. Согласно графику, функция $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = A\{\theta(t) + \theta(t - \tau) + \theta(t - 2\tau) + \dots\} = A \sum_{n=0}^{\infty} \theta(t - n\tau).$$

Следовательно, по теореме запаздывания

$$f(t) \xrightarrow{A} A\left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{p}e^{-\tau p} + \frac{1}{p}e^{-2\tau p} + \dots\right\} = \frac{A}{p} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\tau p}.$$

Поскольку

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1,$$

то, положив $q = e^{-\tau p}$, с учетом $|e^{-\tau p}| < 1$ для $\operatorname{Re} p > 0$, $\tau > 0$ получим

$$f(t) \xrightarrow{A} \frac{A}{p} \frac{1}{1 - e^{-\tau p}} = \frac{A}{2p} \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{p\tau}{2}\right).$$

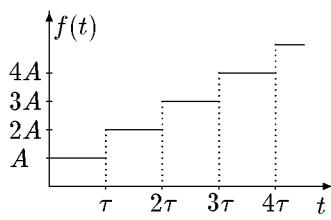


Рис. 94

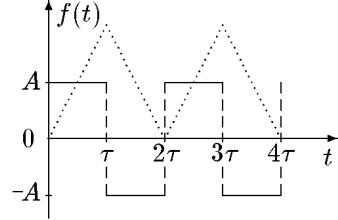


Рис. 95

Пример 36.5. Найти изображение периодической функции $f(t+T) = f(t)$ (см. рис. 95).

Решение. Согласно (34.1), для изображения $\varphi(p) \xrightarrow{A} f(t)$ имеем выражение

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \\ &= \int_0^T e^{-pt} f(t) dt + \int_T^{2T} e^{-pt} f(t) dt + \dots + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-pt} f(t) dt + \dots, \end{aligned}$$

которое заменами $\tau_n = t - nT$, $n = \overline{1, \infty}$, можно привести к виду

$$\varphi(p) = (1 + e^{-pT} + \dots + e^{-npT} + \dots) \int_0^T f(t) e^{-pt} dt.$$

Учтя, что $pT > 0$, $|e^{-pT}| < 1$, как и в предыдущем примере, получим

$$\varphi(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t)e^{-pt} dt.$$

Если ввести функцию

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T; \\ 0, & t > T, \end{cases}$$

то в силу равенства

$$\int_0^T e^{-pt} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-pt} g(t) dt$$

изображение $\varphi(p)$ можно записать еще и как

$$\varphi(p) = \frac{h(p)}{1 - e^{-pT}},$$

где $h(p)$ – изображение функции $g(t)$.

Пример 36.6. Найти изображение прямоугольного импульса $f(t)$, график которого задан сплошными линиями на рис. 95.

Решение. Так как функция $f(t)$, изображенная на рис. 95, периодическая с периодом $T = 2\tau$, причем

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \tau; \\ -A, & \tau < t < 2\tau, \end{cases}$$

то

$$\int_0^{2\tau} e^{-pt} f(t) dt = A \int_0^\tau e^{-pt} dt - A \int_\tau^{2\tau} e^{-pt} dt = \frac{A}{p} (1 - e^{-\tau p})^2,$$

откуда

$$\varphi(p) = \frac{A}{p} \frac{(1 - e^{-p\tau})^2}{1 - e^{-2p\tau}} = \frac{A}{p} \frac{1 - e^{-p\tau}}{1 + e^{-p\tau}} = \frac{A}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}.$$

С другой стороны, $g(t)$ можно записать как

$$f(t) = A [\theta(t) - 2\theta(t - \tau) + \theta(t - 2\tau)].$$

Тогда

$$h(p) = \frac{A}{p} [1 - 2e^{-\tau p} + e^{-2\tau p}] = \frac{A}{p} (1 - e^{-\tau p})^2$$

и

$$\varphi(p) = \frac{A}{p} \frac{(1 - e^{-p\tau})^2}{1 - e^{-2p\tau}} = \frac{A}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}.$$

Свойство 4. Теорема смещения для изображений

Если $f(t) \rightarrow \varphi(p)$, то при любом комплексном α

$$e^{-\alpha t} f(t) \rightarrow \varphi(p + \alpha). \quad (36.4)$$

Доказательство. Действительно,

$$e^{-\alpha t} f(t) \rightleftharpoons \int_0^\infty e^{-pt} e^{-\alpha t} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(p+\alpha)t} f(t) dt = \varphi(p + \alpha),$$

что и требовалось доказать.

Пример 36.7. Найти изображение функции $e^{-\alpha t} \cos bt$.

Решение. Так как $\cos bt \rightleftharpoons p/(p^2 + b^2)$, то

$$e^{-\alpha t} \cos bt \rightleftharpoons \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + b^2}.$$

Пример 36.8. Найти изображение функции

$$f(t) = t^4 e^{-5t}.$$

Решение. Функция $f(t)$ является оригиналом с показателем степени роста $s_0 = -5$. Согласно (35.6),

$$t^4 \rightleftharpoons \frac{4!}{p^5}.$$

Тогда по теореме смещения (свойство 4)

$$f(t) = t^4 e^{-5t} \rightleftharpoons \varphi(p) = \frac{4!}{(p + 5)^5}.$$

Пример 36.9. Найти оригинал функции

$$\varphi(p) = \frac{p + 4}{p^2 + 4p + 5}.$$

Решение. Разложим функцию $\varphi(p)$ на элементарные дроби

$$\varphi(p) = \frac{p + 4}{(p + 2)^2 - 4 + 5} = \frac{p + 2}{(p + 2)^2 + 1} + \frac{2}{(p + 2)^2 + 1}.$$

По теореме смещения (свойство 4) найдем

$$\begin{aligned} \frac{p + 2}{(p + 2)^2 + 1} &\rightleftharpoons e^{-2t} \cos t, \\ \frac{2}{(p + 2)^2 + 1} &\rightleftharpoons 2e^{-2t} \sin t. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\varphi(p) \rightleftharpoons f(t) = e^{-2t} (\cos t + 2 \sin t).$$

Свойство 5. Вторая теорема смещения для оригиналов

Если $f(t) \rightleftharpoons \varphi(p)$, то

$$f(t + a) \rightleftharpoons e^{ap} \left[\varphi(p) - \int_0^a e^{-pt} f(t) dt \right], \quad a > 0. \quad (36.5)$$

Доказательство. По определению,

$$f(t+a) \dot{\rightarrow} \psi(p) = \int_0^\infty f(t+a)e^{-pt}dt, \quad a > 0.$$

Сделав в интеграле замену переменных $\tau = t + a$, получим

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \int_a^\infty f(\tau)e^{-p(\tau-a)}d\tau + e^{ap} \int_0^a f(\tau)e^{-p\tau}d\tau - \\ &- e^{ap} \int_0^a e^{-p\tau}f(\tau)d\tau = e^{pa} \int_0^\infty e^{-p\tau}f(\tau)d\tau - e^{ap} \int_0^a e^{-p\tau}f(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Свойство 6. Теорема дифференцирования для оригиналлов

Если функция $f(t)$ – оригинал, причем $f(t) \dot{\rightarrow} \varphi(p)$ и существует (по крайней мере при $t \neq 0$) производная $f'(t)$, являющаяся оригиналлом, то

$$f'(t) \dot{\rightarrow} p\varphi(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > s_0, \quad (36.6)$$

где s_0 – показатель степени роста функции $f(t)$, а

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t).$$

Доказательство. При $\operatorname{Re} p = \alpha > s_0$

$$f'(t) \dot{\rightarrow} \psi(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f'(t)dt.$$

Проинтегрируем по частям, положив $U = e^{-pt}$, $dV = f'(t)dt$, $dU = -pe^{-pt}dt$, $V = f(t)$. Тогда

$$\psi(p) = e^{-pt}f(t) \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt = p\varphi(p) - f(0),$$

что и требовалось доказать.

Пример 36.10. С помощью теоремы дифференцирования для оригиналлов найти изображение функций $f(t) = \sin t$ и $g(t) = \cos t$.

Решение. Обозначим через $\varphi(p)$ лапласовское изображение функции $f(t)$, т.е.

$$f(t) = \sin t \dot{\rightarrow} \varphi(p),$$

тогда

$$\begin{aligned} f'(t) &= \cos t \dot{\rightarrow} p\varphi(p) - \sin 0 = p\varphi(p); \\ f''(t) &= -\sin t \dot{\rightarrow} p^2\varphi(p) - \cos 0 = p^2\varphi(p) - 1. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$f''(t) = -f(t).$$

Следовательно,

$$p^2\varphi(p) - 1 = -\varphi(p),$$

откуда

$$\varphi(p) = \frac{1}{1+p^2} \Leftrightarrow \sin t.$$

Аналогично

$$\cos t \Leftrightarrow \frac{p}{1+p^2}.$$

Свойство 7. Теорема дифференцирования для изображений

Если $f(t) \rightarrow \varphi(p)$, то для $\operatorname{Re} p = s > s_0$

$$\begin{aligned} -tf(t) &\rightarrow \varphi'(p), \\ t^2 f(t) &\rightarrow \varphi''(p), \\ \dots & \\ (-1)^n t^n f(t) &\rightarrow \varphi^{(n)}(p) \end{aligned} \tag{36.7}$$

Доказательство легко получить путем дифференцирования под знаком интеграла. Последнее возможно, так как интеграл определяет аналитическую функцию от p .

Пример 36.11. Найти изображение функции $t \sin t$.

Решение. Так как

$$\sin t \rightarrow \frac{1}{1+p^2},$$

то

$$t \sin t \rightarrow (-1) \frac{d}{dp} \frac{1}{1+p^2} = \frac{2p}{(1+p^2)^2}.$$

Таким образом,

$$t \sin t \rightarrow \frac{2p}{(1+p^2)^2}.$$

Свойство 8. Теорема интегрирования для оригиналов

Если функция $f(t)$ является оригиналом и $f(t) \rightarrow \varphi(p)$, то функция $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ – также оригинал, причем

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{\varphi(p)}{p}. \tag{36.8}$$

Доказательство. Функция $\int_0^t f(\tau) d\tau$ удовлетворяет первому и второму условиям определения оригинала. Для третьего условия при $\alpha > s_0$ [где s_0 – показатель степени роста функции $f(t)$] имеем

$$\left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau < \int_0^t M e^{\alpha t} dt = \frac{M}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) < \tilde{M} e^{\alpha t}.$$

Далее

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \Rightarrow \psi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] dt.$$

Интегрируем полученное выражение по частям, обозначив

$$U = \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad dV = e^{-pt} dt, \quad dU = f(t) dt \quad V = -\frac{1}{p} e^{-pt}.$$

Тогда

$$\psi(p) = -\frac{1}{p} e^{-pt} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] \Big|_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \frac{\varphi(p)}{p},$$

что и требовалось доказать.

Свойство 9. Теорема интегрирования для изображений

Если $f(t)/t$ – оригинал с показателем степени роста s_0 и если $f(t) \Rightarrow \varphi(p)$, то

$$\frac{f(t)}{t} \Rightarrow \int_p^\infty \varphi(p) dp, \quad \operatorname{Re} p > s_0. \quad (36.9)$$

Доказательство. Обозначим через $\psi(p)$ изображение функции $f(t)/t$, т.е.

$$\frac{f(t)}{t} \Rightarrow \psi(p).$$

Тогда по правилу дифференцирования

$$f(t) \Rightarrow -\psi'(p) \quad \text{т.е.} \quad \varphi(p) = -\psi'(p).$$

Проинтегрировав последнее равенство от p до ∞ , получим

$$-\left[\psi(\infty) - \psi(p) \right] = \int_p^\infty \varphi(\omega) d\omega,$$

что и требовалось доказать.

Пример 36.12. Найти изображение функции

$$f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}.$$

Решение. Так как $\sin^2 t = (1 - \cos 2t)/2$ и

$$\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2p}, \quad \cos 2t \Rightarrow \frac{p}{p^2 + 4},$$

то из свойства линейности следует

$$\sin^2 t \Rightarrow \frac{1}{2p} - \frac{p}{2(p^2 + 4)} = \frac{2}{p(p^2 + 4)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 t}{t} \stackrel{\rightarrow}{\rightarrow} & \int_p^\infty \frac{2dp}{p(p^2 + 4)} = \int_p^\infty \frac{2dp}{p^3(1 + 4/p^2)} = \\ & = -\frac{1}{4} \ln \left(1 + \frac{4}{p^2} \right) \Big|_p^\infty = \frac{1}{4} \ln \frac{p^2 + 4}{p^2}. \end{aligned}$$

При выборе ветви логарифма мы воспользовались результатами примера 12.4. Окончательно запишем

$$\frac{\sin^2 t}{t} \stackrel{\rightarrow}{\rightarrow} \frac{1}{4} \ln \frac{p^2 + 4}{p^2}.$$

Пример 36.13. Найти лапласовское изображение треугольного импульса $g(t)$, показанного пунктиром на рис. 95.

Решение. Поскольку

$$g(t) = \int_0^t f(t)dt \quad \text{и} \quad f(t) \stackrel{\rightarrow}{\rightarrow} \varphi(p) = \frac{A}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2},$$

где $f(t)$ – ступенчатая функция (рис. 95), то по свойству 8 (теорема об интегрировании оригинала) имеем

$$g(t) \stackrel{\rightarrow}{\rightarrow} \frac{g(p)}{p} = \frac{A}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2} / p = \frac{A}{p^2} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}.$$

Свойство 10. Теорема умножения изображений (теорема Бореля)

Если $f(t) \stackrel{\rightarrow}{\rightarrow} \varphi(p)$ и $g(t) \stackrel{\rightarrow}{\rightarrow} \psi(p)$, тогда

$$\Phi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \stackrel{\rightarrow}{\rightarrow} \varphi(p)\psi(p). \quad (36.10)$$

Доказательство. Пусть s_1 – показатель степени роста функции $f(t)$, а s_2 – показатель степени роста функции $g(t)$. Тогда если $s_1 \neq s_2$, то

$$\begin{aligned} J &= \left| \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right| \leq M_1 M_2 \int_0^t e^{s_1 \tau} e^{s_2(t-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{M_1 M_2}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \leq \frac{2M_1 M_2}{|s_1 - s_2|} e^{st}, \end{aligned}$$

где $s = \max\{s_1, s_2\}$. Если же $s_1 = s_2 = s \neq 0$, то

$$J < \frac{2M_1 M_2}{s} e^{st} t,$$

т.е. показатель степени роста функции $\Phi(t)$ также равен s . Аналогично для $s_1 = s_2 = 0$. Нетрудно убедиться, что $\Phi(t)$ удовлетворяет и остальным условиям существования изображения. Для вычисления изображения воспользуемся определением (34.1). Получим

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Изменив порядок интегрирования, найдем

$$F(p) = \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} g(t - \tau) dt.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменных $t - \tau = t'$. Получим

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-pt'} g(t') dt' = \varphi(p)\psi(p),$$

что и требовалось доказать.

♦ Функция вида

$$\Phi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \quad (36.11)$$

называется сверткой функций $f(t)$ и $g(t)$ и обозначается $f(t) * g(t)$, т.е.

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau. \quad (36.12)$$

◊ Можно показать, что $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

Пример 36.14. Найти оригинал функции

$$\varphi(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)}.$$

Решение. Так как

$$\frac{1}{p-1} \leftrightarrow e^t, \quad \frac{1}{p-2} \leftrightarrow e^{2t},$$

то из (36.10) получим

$$\begin{aligned} \varphi(p) \leftrightarrow & \int_0^t e^\tau e^{2(t-\tau)} d\tau = e^{2t} \int_0^t e^{-\tau} d\tau = \\ & = e^{2t}(1 - e^{-t}) = e^{2t} - e^t. \end{aligned}$$

Пример 36.15. Найти изображение функции

$$\Phi(t) = \int_0^t \tau^2 \cos(t - \tau) d\tau.$$

Решение. Функция $\Phi(t)$ – оригинал с показателем степени роста $s_0 = 0$. По теореме умножения изображений (свойство 10)

$$\Phi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \rightarrow \varphi(p)\psi(p),$$

где

$$f(\tau) \rightarrow \varphi(p), \quad g(t) \rightarrow \psi(p).$$

Положив

$$f(t) = t^2 \rightarrow \frac{2!}{p^3}, \quad g(t) = \cos t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 1},$$

получим

$$\Phi(t) \rightarrow \varphi(p)\psi(p) = \frac{2p}{p^3(p^2 + 1)} = \frac{2}{p^2(p^2 + 1)}.$$

Пример 36.16. Показать, что если $f(t)$ – оригинал, то справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \\ & = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{36.13}$$

Соотношение (36.13) называется формулой Коши.

Решение. Обозначим через $\varphi(p)$ изображение функции $f(t)$. Тогда, согласно (36.10), с учетом теоремы Бореля получим

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{1}{p^n} \varphi(p).$$

С другой стороны, из теоремы интегрирования для оригиналов (см. формулу (36.8)) следует

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \rightarrow \frac{\varphi(p)}{p^n}.$$

В силу теоремы о единственности изображения соотношение (36.13) доказано.

Свойство 11. Теорема умножения оригиналов

Если $f(t) \rightarrow \varphi(p)$ ($\operatorname{Re} p > s_1$), $g(t) \rightarrow \psi(p)$, $\operatorname{Re} p > s_2$, то произведение $f(t)g(t)$ также является оригиналом и

$$f(t)g(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \varphi(q)\psi(p-q) dq, \tag{36.14}$$

где $\operatorname{Re} q = \alpha > s_1$, $\operatorname{Re} p > s_1 + s_2$.

Доказательство. Произведение оригиналов $f(t)g(t)$, очевидно, удовлетворяет условиям 1–3 и является оригиналом. По определению

$$f(t)g(t) \rightarrow F(p) = \int_0^\infty f(t)g(t)e^{-pt} dt.$$

Возьмем α , удовлетворяющее условиям $\alpha > s_1$, $\alpha > s_2$, где s_1 и s_2 – показатели степени роста функций $f(t)$ и $g(t)$, соответственно. Тогда по формуле Меллина (34.7) для $f(t)$ получим

$$\begin{aligned} f(t)g(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \varphi(q) e^{qt} dq \right\} g(t) e^{-pt} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \left\{ \varphi(q) \int_0^{\infty} g(t) e^{-(p-q)t} dt \right\} dq. \end{aligned}$$

Положим $\operatorname{Re} p > s_2 + \alpha$. Тогда $\operatorname{Re}(p - q) > s_2$, так как $\operatorname{Re} q = \alpha$ и внутренний интеграл можно заменить на $\psi(p - q)$, что и требовалось доказать.

Свойство 12. Первая теорема разложения

Если функция $\varphi(p)$ регулярна в бесконечно удаленной точке и равна в ней нулю и если ее лорановское разложение в окрестности бесконечно удаленной точки ($|p| \geq R$) имеет вид

$$\varphi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+1}}{p^{n+1}}, \quad (36.15)$$

то функция

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+1}}{n!} t^n, \quad t > 0, \quad (36.16)$$

является оригиналом, имеющим изображение $\varphi(p)$, $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(p)$, причем ряд (36.15) сходится для всех t .

Доказательство. Положим $p = 1/q$ и обозначим $\varphi(1/q) = \psi(q)$. Функция $\psi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} q^{n+1}$ аналитична в круге $|q| \leq 1/R$. Согласно неравенству Коши (которое непосредственно следует из (16.7)), $|C_n| < MR^n$. Следовательно,

$$|f(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |C_{n+1}| \frac{|t|^n}{n!} \leq MR \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n |t|^n}{n!} = M R e^{R|t|}.$$

Из полученного неравенства следует, что

1. ряд сходится для всех комплексных t ;
2. для положительных t справедливо условие $|f(t)| < Ce^{Rt}$, т.е. функция $f(t)$ является оригиналом. В силу равномерной сходимости ряда (36.16) в любом конечном круге его можно умножить на e^{-pt} и почленно проинтегрировать по t от нуля до ∞ для $\operatorname{Re} p > R$. Воспользовавшись соотношением (35.5), получим (36.15), что и требовалось доказать.

Пример 36.17. Найти преобразование Лапласа функции $f(t) = J_0(t)$, заданной абсолютно сходящимся рядом

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} t^{2k}, \quad (36.17)$$

где

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!)^2}.$$

◊ Функция $J_0(t)$ называется функцией Бесселя первого рода нулевого индекса. Свойства функций Бесселя подробно рассматриваются в главе «Цилиндрические функции» части III.

Решение. Согласно первой теореме разложения (свойство 12)

$$f(t) \Rightarrow \varphi(p) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} \frac{(2k)!}{p^{2k+1}}.$$

Рассмотрим $(2k)! = (2k)!!(2k-1)!! = 2^k k!(2k-1)!!$. Тогда

$$C_{2k}(2k)! = \frac{(-1)^k}{2^k(k!)^2} 2^k k!(2k-1)!!$$

и, следовательно,

$$\varphi(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k(k!)^2} \frac{1}{p^{2k+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Таким образом,

$$J_0(t) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Пример 36.18. Найти изображение функции

$$f(t) = J_0(2\sqrt{t}),$$

где функция $J_0(t)$ определена формулой (36.17).

Решение. Из (36.17) следует

$$f(t) = J_0(2\sqrt{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{(k!)^2}.$$

Согласно первой теореме разложения,

$$f(t) \Rightarrow = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! p^{k+1}} = \frac{1}{p} e^{-1/p}.$$

Таким образом,

$$J_0(2\sqrt{t}) \Rightarrow \frac{1}{p} e^{-1/p}. \quad (36.18)$$

Свойство 13. Вторая теорема разложения

Пусть $\varphi(p)$ – изображение функции $f(t)$. Тогда, если $\varphi(p)$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, за исключением конечного числа изолированных особых точек p_k , $k = 1, n$, и это аналитическое продолжение в полуплоскости $\operatorname{Re} p < \alpha$ удовлетворяет условиям леммы Жордана (в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$ функция $\varphi(p)$ аналитична), то для $t > 0$

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p=p_k} \varphi(p) e^{pt}, \quad (36.19)$$

Доказательство. В силу формулы Меллина (34.7) для любого α из области аналитичности функции $\varphi(p)$ имеем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \varphi(p)e^{pt} dp.$$

Согласно теореме 23.4 и лемме Жордана, вычисление этого интеграла дает

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \varphi(p)e^{pt} dp = \theta(t) \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p=p_k} [\varphi(p)e^{pt}],$$

откуда для $t > 0$ и следует (36.19).

Пример 36.19. Найти оригинал $f(t)$ функции

$$\varphi(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Решение. Функция $\varphi(p)$ аналитична во всей комплексной плоскости за исключением полюсов $p_{1,2} = \pm i\omega$ и удовлетворяет условиям леммы Жордана. Тогда по формуле (36.19) имеем

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{Res}_{p=i\omega} \frac{\omega e^{pt}}{p^2 + \omega^2} + \operatorname{Res}_{p=-i\omega} \frac{\omega e^{pt}}{p^2 + \omega^2} = \\ &= \lim_{p \rightarrow i\omega} \frac{\omega e^{pt}}{p + i\omega} + \lim_{p \rightarrow -i\omega} \frac{\omega e^{pt}}{p - i\omega} = \sin \omega t \end{aligned}$$

(см. также пример 23.7).

◊ Формула (36.19) допускает обобщение на случай бесконечного числа особых точек, т.е. на случай, когда аналитическое продолжение является мероморфной функцией. Действительно, если в доказательстве теоремы Бромвича–Вагнера 23.4 под γ_R понимать правильную систему окружностей γ_n (см. разд. «Разложение мероморфной функции на простейшие дроби»), то

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \operatorname{Res}_{p=p_k}^{(\gamma_n)} [\varphi(p)e^{pt}]. \quad (36.20)$$

Здесь суммирование проводится по всем особым точкам, лежащим внутри γ_n .

Пример 36.20. Найти изображение функции

$$\psi(p) = \frac{\operatorname{sh} ap}{p \operatorname{sh} bp}.$$

Решение. Функция $\psi(p)$ – мероморфная функция с полюсами, расположеными на прямой $\operatorname{Re} p = 0$. Согласно (36.20),

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \operatorname{Res}_{p=p_k}^{(\gamma_n)} e^{pt} \frac{\operatorname{sh} ap}{p \operatorname{sh} bp}.$$

Точки $p_k = \pm\pi ki/b$ являются простыми полюсами функции $\psi(p)$. Поэтому при $p_k = \pi ki/b$, $k = \overline{1, \infty}$, получим

$$\begin{aligned} \text{Res}_{p=p_k} \psi(p) &= \lim_{p \rightarrow p_k} (p - p_k) \psi(p) = \\ &= \lim_{p \rightarrow p_k} e^{pt} \frac{\sin ap}{p} \frac{p - p_k}{\sin p} = \frac{e^{i\pi kt/b}}{\pi k(-1)^k} \sin \frac{\pi ka}{b}. \end{aligned}$$

Аналогично при $p_k = -\pi ki/b$, $k = \overline{1, \infty}$, получим

$$\text{Res}_{p=p_k} \psi(p) = \frac{e^{-i\pi kt/b}}{\pi k(-1)^k} \sin \frac{\pi ka}{b}.$$

Точка $p = 0$ также является простым полюсом функции $\psi(p)$. Следовательно,

$$\text{Res}_{p=0} \psi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \psi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} e^{pt} \frac{\sin ap}{\sin bp} = \frac{a}{b}.$$

Тогда

$$\varphi(p) \leftarrow f(t) = \frac{a}{b} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k} (e^{i\pi kt/b} + e^{-i\pi kt/b}) \sin \frac{\pi ka}{b}.$$

Окончательно получим

$$\frac{\sin ap}{p \sin bp} \leftarrow \frac{a}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cos \frac{\pi kt}{b} \sin \frac{\pi ka}{b}. \quad (36.21)$$

Свойство 14 (формула Дюамеля)

Пусть $f(t) \leftarrow \varphi(p)$ ($\text{Re } p > s_1$) и $g(t) \leftarrow \psi(p)$ ($\text{Re } p > s_2$), а функция $g'(t)$ является оригиналом. Тогда справедливо соотношение

$$p\varphi(p)\psi(p) \leftarrow f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau, \quad \text{Re } p > \max\{s_1, s_2\}. \quad (36.22)$$

Соотношение (36.22) называется формулой Дюамеля.

Доказательство. По теореме умножения изображений (36.10) найдем

$$\varphi(p)\psi(p) \leftarrow \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \Phi(t).$$

Применим к последнему соотношению теорему дифференцирования оригинала (36.6). Найдем

$$p\varphi(p)\psi(p) \leftarrow \Phi'(t) + \Phi(0) = f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau,$$

что и требовалось доказать.

В заключение приведем ряд свойств, полезных при использовании операционного метода.

Свойство 15*. Предельные соотношения

Пусть $f(t) \rightarrow \varphi(p)$ и функция $f'(t)$ также является оригиналом. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p\varphi(p), \quad |\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \delta > 0, \quad (36.23)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varphi(p) \quad (36.24)$$

при условии, что пределы, стоящие в левых и правых частях равенств (36.23) и (36.24), существуют.

Доказательство. Пусть $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = f(0)$. Из теоремы о дифференцировании оригинала следует, что функция $\psi(p) = p\varphi(p) - f(0)$ является изображением функции $f'(t)$, т.е. $f'(t) \rightarrow \psi(p)$. Тогда, согласно (34.3),

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} \psi(p) = 0$$

и, следовательно, $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} p\varphi(p) = f(0)$. Таким образом, соотношение (36.23) доказано.

2. Пусть существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$. Тогда функция $f(t)$ ограничена и ее показатель степени роста $s_0 = 0$. Следовательно, функция $\varphi(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. Тогда по теореме о дифференцировании оригинала

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt} dt = p\varphi(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (36.25)$$

Перейдем в соотношении (36.25) к пределу $p \rightarrow 0$ в секторе $|\arg p| < \pi/2 - \delta$, $\delta > 0$ и получим

$$\int_0^\infty f'(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} p\varphi(p) - f(0).$$

Таким образом, соотношение (36.24) доказано.

◊ Мы продолжим рассмотрение свойств преобразований Лапласа после того, как введем понятие обобщенного оригинала.

37. Приложения операционного исчисления

37.1. Интегрирование линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x &= f(t), \\ x^{(n-1)}(0) = \cdots = x'(0) = x(0) &= 0. \end{aligned} \quad (37.1)$$

Пусть $f(t) \rightarrow \varphi(p)$ и $x(t) \rightarrow y(p)$. По теореме о дифференцировании оригинала

$$x'(t) \rightarrow py(p) - x(0) = py(p),$$

$$x''(y) \rightarrow p^2 y(p) - x'(0) = p^2 y(p),$$

.....

$$x^{(n)} \rightarrow p^n y(p) - x^{(n-1)}(0) = p^n y(p).$$

Тогда уравнение примет вид

$$\sum_{k=0}^n a_k p^k y(p) = \varphi(p).$$

Следовательно,

$$y(p) = \frac{\varphi(p)}{\sum_{k=0}^n a_k p^k}. \quad (37.2)$$

Для нахождения функции $x(t)$ необходимо найти оригинал функции $y(p)$.

37.2. Интегрирование линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} x''(t) + ax'(t) + bx(t) &= f(t), \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) &= x'_0. \end{aligned} \quad (37.3)$$

Обозначим $f(t) \rightarrow \varphi(p)$, $x(t) \rightarrow y(p)$. Тогда

$$\begin{aligned} x'(t) &\rightarrow py(p) - x(0), \\ x''(t) &= \frac{d}{dt}x'(t) \rightarrow p[py(p) - x_0] - x'_0. \end{aligned}$$

Уравнение (37.3) после умножения на e^{-pt} и интегрирования по t от нуля до бесконечности примет вид

$$p^2 y - px_0 - x'_0 + a(py - x_0) + by = \varphi(p)$$

или

$$y(p^2 + ap + b) = \varphi(p) + x_0(a + p) + x'_0.$$

Следовательно,

$$y(p) = \frac{\varphi(p) + x_0(a + p) + x'_0}{p^2 + ap + b}. \quad (37.4)$$

Пример 37.1. Проинтегрировать уравнение

$$x'' + 4x = 2, \quad x_0 = x'_0 = 0.$$

Решение. По формуле (37.4) получим

$$y(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4} \right).$$

Так как оригиналом функции $1/p$ является единица, а функции $p/(p^2 + 4) = \cos 2t$, окончательно получим

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t, \quad t > 0.$$

Пример 37.2. Проинтегрировать уравнение

$$x'' - 2x' + x = 4, \quad x'(0) = x'_0 = 2, \quad x(0) = x_0 = 4.$$

Решение. По формуле (37.7) получим

$$\begin{aligned} y(p) &= \frac{4/p + 4(-2+p) + 2}{p^2 - 2p + 1} = \frac{4 - 6p + 4p^2}{p(p-1)^2} = \\ &= \frac{2}{(p-1)^2} + \frac{4}{p}. \end{aligned}$$

Оригиналом последнего выражения является функция

$$x(t) = 2te^t + 4, \quad t > 0.$$

Пример 37.3. Операторным методом найти решение задачи Коши

$$x'' + 2x = 2 + e^t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = -2.$$

Решение. Обозначим

$$x(t) \leftrightarrow y(p).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x'(t) \leftrightarrow py(p) - x(0) &= py(p) + 1, \\ x''(t) \leftrightarrow p[py(p) + 1] - x'(0) &= p^2y(p) + p + 2 \end{aligned}$$

и

$$f(t) = 2 + e^t \leftrightarrow \varphi(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{p-1}.$$

В результате исходное уравнение преобразуется к виду

$$\begin{aligned} p^2y(p) + p + 2 + 2y(p) &= \frac{2}{p} + \frac{1}{p-1}, \\ y(p)[p^2 + 2] &= \frac{2}{p} + \frac{1}{p-1} - p - 2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$y(p) = \frac{2}{p(p^2 + 2)} + \frac{1}{(p-1)(p^2 + 2)} - \frac{p+2}{p^2 + 2}. \quad (37.5)$$

Из теоремы подобия (36.2) следует

$$\frac{p}{p^2 + 2} \leftrightarrow \cos \sqrt{2}t, \quad \frac{1}{p^2 + 2} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t.$$

С учетом теоремы об интегрировании оригиналов (36.8) имеем

$$\frac{1}{p} \frac{1}{p^2 + 2} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \sin \sqrt{2}\tau d\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \sqrt{2}t - 1).$$

С учетом (35.7) из теоремы умножения изображений (36.10) следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{p-1} \frac{1}{p^2 + 2} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t e^{t-\tau} \sin \sqrt{2}\tau d\tau &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \frac{e^\tau}{3} (-\sin \sqrt{2}\tau - \sqrt{2} \cos \sqrt{2}\tau) \Big|_0^t = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} \sin \sqrt{2}t - \frac{1}{3} \cos \sqrt{2}t + \frac{1}{3} e^t. \end{aligned}$$

В результате для оригинала функции (37.5) найдем

$$\begin{aligned} y(p) \doteq x(t) &= \sqrt{2} \cos \sqrt{2}t - \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} \sin \sqrt{2}t - \\ &- \frac{1}{3} \cos \sqrt{2}t + \frac{1}{3} e^t - \cos \sqrt{2}t - \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t. \end{aligned}$$

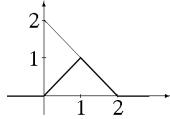
Окончательно получим

$$x(t) = \frac{1}{3} e^t + \left(\sqrt{2} - \frac{4}{3} \right) \cos \sqrt{2}t - \frac{7\sqrt{2}}{6} \sin \sqrt{2}t - \sqrt{2}.$$

Пример 37.4. Решить задачу Коши

$$\begin{aligned} x'' + 4x &= t[\theta(t) - \theta(t-1)] + (2-t)[\theta(t-1) - \theta(t-2)], \\ x(0) &= x'(0) = 0, \end{aligned}$$

где $\theta(t)$ – θ -функция Хевисайда.



Решение. График функции $f(t)$ имеет вид

Найдем лапласовское изображение функции $f(t)$

$$\begin{aligned} f(t) \doteq \varphi(p) &= \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-pt} \{t[\theta(t) - \theta(t-1)] + (2-t)[\theta(t-1) - \theta(t-2)]\} dt = \\ &= \int_0^1 e^{-pt} t dt + \int_1^2 (2-t) e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Проинтегрируем по частям, положив

$$U = t, \quad dU = dt, \quad dV = e^{-pt} dt, \quad V = -\frac{1}{p} e^{-pt}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= -t \frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^1 + \frac{1}{p} \int_0^1 e^{-pt} dt - \frac{2-t}{p} e^{-pt} \Big|_1^2 - \frac{1}{p} \int_1^2 e^{-pt} dt = \\ &= -\frac{e^{-p}}{p} - \frac{1}{p^2} e^{-pt} \Big|_0^1 + \frac{1}{p} e^{-p} + \frac{1}{p^2} e^{-pt} \Big|_1^2 = \\ &= -\frac{1}{p^2} [e^{-p} - 1] + \frac{1}{p^2} [e^{-2p} - e^{-p}]. \end{aligned}$$

В результате исходная задача преобразуется к виду

$$\begin{aligned} p^2 y(p) + 4y(p) &= -\frac{e^{-p} - 1}{p^2} + \frac{e^{-2p} - e^{-p}}{p^2}, \\ y(p) &= -\frac{e^{-p} - 1}{p^2(p^2 + 4)} + \frac{e^{-2p} - e^{-p}}{p^2(p^2 + 4)} = \frac{-2e^{-p} + e^{-2p} + 1}{p^2(p^2 + 4)}. \end{aligned}$$

Проведем разложение на элементарные дроби

$$\frac{1}{p^2(p^2 + 4)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{Cp + D}{p^2 + 4}.$$

Вычислив стандартным образом коэффициенты A, B, C, D , с учетом соотношения

$$\frac{1}{4p^2} - \frac{2}{8(p^2 + 4)} \leftarrow \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \sin 2t$$

и теоремы запаздывания окончательно получим

$$\begin{aligned} y(p) &= -(2e^{-p} - 1 - e^{-2p}) \left[\frac{1}{4p^2} - \frac{1}{4(p^2 + 4)} \right] \leftarrow \\ &\leftarrow 2 \left[\frac{t-1}{4} - \frac{\sin(2t-2)}{8} \right] \theta(t-1) - \frac{t}{4} + \\ &+ \frac{\sin 2t}{8} - \left[\frac{t-2}{4} - \frac{\sin 2(t-2)}{8} \right] \theta(t-2). \end{aligned}$$

37.3. Интеграл Дюамеля

Отметим особо роль интеграла (формулы) Дюамеля. Пусть требуется решить уравнение (37.1), если известно решение уравнения

$$\begin{aligned} a_n x_1^{(n)} + a_{n-1} x_1^{(n-1)} + \cdots + a_1 x_1' + a_0 x_1 &= 1, \\ x_1^{(n-1)}(0) = \cdots = x_1'(0) = x_1(0) &= 0 \end{aligned} \tag{37.6}$$

с той же левой частью и правой частью, равной единице, при нулевых начальных условиях. Интеграл Дюамеля позволяет записать решение уравнения (37.1) достаточно просто.

Действительно, решения соответствующих операторных уравнений имеют вид

$$y(p) = \frac{\varphi(p)}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} \quad \text{и} \quad y_1(p) = \frac{1/p}{\sum_{k=0}^n a_k p^k},$$

где $y_1(p)$ – изображение функции $x_1(t)$. Отсюда

$$y(p) = p\varphi(p)y_1(p),$$

и по формуле Дюамеля получим

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) x_1'(t-\tau) d\tau = \int_0^t x_1(\tau) f'(\tau) d\tau. \tag{37.7}$$

Пример 37.5. Решить уравнение $x'' - a^2 x = b e^{-t^2}$ с нулевыми начальными условиями.

Решение. Предварительно рассмотрим уравнение $x_1'' - a^2 x_1 = 1$ с теми же начальными условиями. Решение этого уравнения имеет вид

$$y_1(p) = \frac{1}{p(p^2 - a^2)} \leftarrow x_1(t) = \frac{1}{a^2} (\operatorname{ch} at - 1).$$

Согласно (37.7) искомое решение $x(t)$ определится соотношением

$$x(t) = \frac{b}{a} \int_0^t e^{-\tau^2} \operatorname{sh} a(t-\tau) d\tau,$$

которое после простых преобразований принимает вид

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{b\sqrt{\pi}}{4a} e^{a^2/4} \left\{ e^{at} \operatorname{erf} \left(t + \frac{a}{2} \right) - \right. \\ & \left. - e^{-at} \operatorname{erf} \left(t - \frac{a}{2} \right) - 2 \operatorname{erf} \left(\frac{a}{2} \right) \operatorname{ch} at \right\}. \end{aligned}$$

Здесь через $\operatorname{erf} z$ обозначена функция вероятности или интеграл ошибок, определяемый выражением

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau.$$

Более подробно свойства функции $\operatorname{erf} z$ рассмотрены ниже в разд. «Интеграл ошибок».

Пример 37.6. Найти решение задачи Коши

$$x'' + x = \frac{1}{(1+e^t)^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Решение. Решим вспомогательную задачу

$$x_1'' + x_1 = 1, \quad x_1(0) = x_1'(0) = 0.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} x_1(t) &\rightarrow y_1(p), \\ x_1'(t) &\rightarrow py_1(p) + x_0 = py_1(p), \\ x_1'' &\rightarrow ppy_1(p) + x_0' = p^2y_1(p) \end{aligned}$$

и получим

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow \frac{1}{p}, \\ p^2y_1 + y_1 &= \frac{1}{p}, \\ y_1(p) &= \frac{1}{p(p^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Разложим функцию $y_1(p)$ на элементарные дроби

$$y_1(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + c}{p^2 + 1} = \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 1} \leftarrow 1 - \cos t = x_1(t).$$

Решение исходной задачи найдем по формуле Дюамеля

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t x'_1(\tau) f(t - \tau) d\tau = \int_0^t \sin \tau \frac{1}{(1 + e^{t-\tau})^2} d\tau = \\ &= \int_0^t \sin \tau \frac{1}{(1 + e^t/e^\tau)^2} d\tau. \end{aligned}$$

◊ Если начальные условия (37.6) ненулевые

$$x(0) = x_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)},$$

то сделаем замену

$$z(t) = x(t) - x_0 - tx'_0 - \dots - x_0^{(n-1)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (37.8)$$

Выразим из (37.8) $x(t)$:

$$x(t) = z(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} x_0^{(k)}$$

и подставим в уравнение (37.6). Тогда для функции $z(t)$ получим задачу Коши с нулевыми начальными условиями, и, следовательно, для определения функции $z(t)$ можно использовать интеграл Дюамеля.

37.4. Интегрирование линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

В заключение отметим, что операционный метод может оказаться полезным и при решении линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, лапласовское изображение которых проще исходных уравнений. Действительно, пусть $x(t) \rightarrow y(p)$. По теоремам дифференцирования оригиналов и изображений имеем

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow y(p), \quad x'(t) \rightarrow py(p) - x(0), \quad (37.9) \\ x''(t) &\rightarrow p^2y(p) - px(0) - x'(0); \\ tx(t) &\rightarrow -\dot{y}(p), \quad t^2x(t) \rightarrow \ddot{y}(p), \quad \dots; \\ tx'(t) &\rightarrow -\frac{d}{dp}[py(p)] = -p\dot{y}(p) - y(p), \\ t^2x'(t) &\rightarrow \frac{d^2}{dp^2}[py(p)] = p\ddot{y}(p) + 2\dot{y}(p), \quad \dots; \\ tx''(t) &\rightarrow -\frac{d}{dp}[p^2y(p)] + x(0) = -p^2\dot{y}(p) - 2py(p) + x(0), \\ t^2x''(t) &\rightarrow \frac{d^2}{dp^2}[p^2y(p)] = p^2\ddot{y}(p) + 4p\dot{y}(p) + 2y(p), \quad \dots \end{aligned}$$

и т.д. Здесь обозначено $\dot{y} = dy/dp$. Переход к изображениям позволяет иногда упростить дифференциальные уравнения, содержащие слагаемые подобного вида.

Пример 37.7. Найти общее решение уравнения

$$tx'' - 2(3t + 1)x' + (9t + 6)x = 0. \quad (37.10)$$

Решение. Обозначим

$$x(t) \rightarrow y(p), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0.$$

Тогда согласно формулам (37.10)

$$\begin{aligned} x' &\rightarrow py - x_0, \\ x'' &\rightarrow p^2y - px_0 - x'_0, \\ tx &\rightarrow -\dot{y}, \\ tx' &\rightarrow -\frac{d}{dp}[py - x_0] = -y - p\dot{y}, \\ tx'' &\rightarrow -\frac{d}{dp}[p^2y - px_0 - x'_0] = -2py - p^2\dot{y} + x_0. \end{aligned}$$

Тогда для операторного уравнения, отвечающего (37.10), получим

$$\dot{y} + \frac{4}{p-3}y = -\frac{2x_0}{(p-3)^2}. \quad (37.11)$$

Решение уравнения (37.11) будем искать методом Бернулли $y(p) = u(p)v(p)$. Тогда для функций $u(p)$ и $v(p)$ получим уравнения с разделяющимися переменными

$$\dot{v} + \frac{4}{p-3}v = 0, \quad \dot{u} = -\frac{2x_0}{(p-3)^2} \frac{1}{v}.$$

Следовательно,

$$v(p) = \frac{1}{(p-3)^4}, \quad u(p) = -\frac{2}{3}x_0(p-3)^3 + C,$$

где $C = \text{const}$, и решение уравнения (37.11) имеет вид

$$y(p) = \frac{2}{3} \frac{x_0}{p-3} + \frac{C}{(p-3)^4}.$$

Обозначим $C_1 = -3x_0/2$, $C_2 = 3!C$. Тогда с учетом теоремы смещения (36.4) для общего решения уравнения (37.10) получим

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t^3 e^{3t}.$$

Пример 37.8. Решить уравнение

$$tx'' - (1+t)x' + x = 0, \quad x(0) = 0.$$

Решение. Аналогично предыдущему примеру, для изображения $y(p)$ получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$\dot{y}(p) = \frac{2-3p}{p(p-1)}y(p).$$

Его общее решение имеет вид

$$y(p) = -C \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p-1} \right),$$

где C – произвольная постоянная, а соответствующий оригинал определится соотношением

$$x(t) = -C(1-t-e^t).$$

37.5. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\vec{x}}(t) + A\vec{x}(t) = \vec{f}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad (37.12)$$

где

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и $a_{kj} = \text{const}$, $k, j = \overline{1, n}$. Пусть $\vec{f}(t) \rightarrow \vec{\varphi}(p)$, $\vec{x}(t) \rightarrow \vec{y}(p)$. Обе части уравнения умножим на e^{-pt} и проинтегрируем от нуля до ∞ . Получим

$$[p\vec{y}(p) - \vec{x}_0] + A\vec{y}(p) = \vec{\varphi}(p). \quad (37.13)$$

◆ Система (37.13) называется системой операторных уравнений

$$(A + p)\vec{y}(p) = \vec{\varphi}(p) + \vec{x}_0. \quad (37.14)$$

Разрешив систему (37.14) относительно $\vec{y}(p)$, получим изображение искомой функции $\vec{y}(p) = \vec{\Phi}(p)$, по которому находим оригинал $\vec{x}(t) \rightarrow \vec{y}(p)$.

Пример 37.9. Операторным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'_1 - 2x_1 - 4x_2 = \cos t, \\ x'_2 + x_1 + 2x_2 = \sin t \end{cases}$$

с нулевыми начальными условиями.

Решение. Найдем изображения левых и правых частей обоих уравнений системы. Получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y_1(p-2) - 4y_2 = \frac{p}{p^2+1}, \\ y_1 + (2+p)y_2 = \frac{1}{p^2+1}. \end{cases}$$

Найдем определитель матрицы системы

$$\Delta = (p-2)(p+2) + 4 = p^2.$$

Так как определитель не равен тождественно нулю, система имеет единственное решение. Из первого уравнения выразим

$$y_1(p) = \frac{1}{p^2+1} - (2+p)y_2(p).$$

Подставив полученное соотношение во второе уравнение системы, найдем

$$\left\{ \frac{p-2}{p^2+1} - (p^2-4)y_2 \right\} - 4y_2 = \frac{p}{p^2+1};$$

$$\frac{p-2}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1} = p^2y_2.$$

откуда

$$y_2(p) = -\frac{2}{p^2(p^2 + 1)}.$$

Следовательно,

$$y_1(p) = \frac{p^2}{p^2(p^2 + 1)} + \frac{(2+p)2}{p^2(p^2 + 1)} = \frac{p^2 + 2p + 4}{p^2(p^2 + 1)}.$$

Разложив полученные выражения на элементарные дроби, получим

$$\begin{aligned} y_1(p) &= \frac{4}{p^2} + \frac{2}{p} - \frac{2p+3}{p^2+1}, \\ y_2(p) &= -\frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^2+1}. \end{aligned}$$

Возвратившись к оригиналам, запишем решение исходной системы

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 4t + 2 - 2 \cos t - 3 \sin t, \\ x_2(t) &= -2t + 2 \sin t. \end{aligned}$$

37.6. Вычисление несобственных интегралов

Теорема 37.1 (формула Парсеваля). Пусть

$$f(t) \rightarrow \varphi(p),$$

$g(t) \rightarrow \psi(p)$ и несобственные интегралы

$$\int_0^\infty f(t)\psi(t)dt \quad u \quad \int_0^\infty g(t)\varphi(t)dt$$

сходятся. Тогда справедливо

$$\int_0^\infty f(t)\psi(t)dt = \int_0^\infty g(t)\varphi(t)dt. \quad (37.15)$$

Соотношение (37.15) называется формулой Парсеваля.

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t)\psi(t)dt &= \int_0^\infty dt f(t) \int_0^\infty du e^{-ut} g(u) = \\ &= \int_0^\infty du g(u) \int_0^\infty f(t)e^{-ut} dt = \int_0^\infty g(u)\varphi(u)du, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пример 37.10. Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt.$$

Решение. Положим

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos at - \cos bt, & \psi(p) &= 1/p; \\ \varphi(p) &= \frac{p}{p^2 + a^2} - \frac{p}{p^2 + b^2}, & g(t) &= 1. \end{aligned}$$

Следовательно, по формуле Парсеваля (37.15) получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{t^2 + a^2} - \frac{t}{t^2 + b^2} \right) dt = \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \ln(t^2 + a^2) - \frac{1}{2} \ln(t^2 + b^2) \right\} \Big|_0^\infty = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t^2 + a^2}{t^2 + b^2} \right) \Big|_0^\infty = -\frac{1}{2} \ln \frac{a^2}{b^2} = \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Пример 37.11. Вычислить

$$\int_0^\infty \frac{\sin at}{t} dt, \quad a > 0.$$

Решение. Обозначим

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin at, & \psi(p) &= 1/p; \\ \varphi(p) &= \frac{a}{p^2 + a^2}, & g(t) &= 1. \end{aligned}$$

Тогда по формуле Парсеваля (37.15)

$$\int_0^\infty \frac{\sin at}{t} dt = \int_0^\infty \frac{a}{t^2 + a^2} dt = \arctg \frac{t}{a} \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

38. Гамма-функция

◊ Для изучения некоторых свойств преобразования Лапласа нам потребуется ввести гамма- и бета-функции. Гамма- и бета-функции являются представителями класса специальных функций, и их применение не ограничивается только приложением к преобразованиям Лапласа.

♦ В области $\operatorname{Re} z > 0$ гамма-функция (или эйлеров интеграл второго рода) определяется абсолютно сходящимся интегралом

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (38.1)$$

Здесь для функции $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$ выбирается однозначная ветвь, такая что $\ln t = \ln t$.

◊ Характер аналитического продолжения функции (38.1) в область $\operatorname{Re} z < 0$ будет исследован ниже (см. свойство 4). Поведение функции $\Gamma(z)$ для действительного аргумента иллюстрирует рис. 96, а поведение модуля Г-функции для комплексных z – рис. 97.

◊ Следует отметить, что иногда в качестве определения гамма функции вместо (38.1) используют интегральное представление вида

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^\infty e^{-\tau^2} \tau^{2z-1} d\tau. \quad (38.2)$$

Кроме того, Вейерштрассом было показано, что все свойства гамма функции, вытекающие из (38.1), (38.2) могут быть получены представлением $\Gamma(z)$ в виде бесконечного произведения

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}, \quad (38.3)$$

где

$$\gamma = -\lim_{z \rightarrow 1} \frac{d\Gamma(z)}{dz} = -\int_0^\infty e^{-t} \ln t dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \quad (38.4)$$

– постоянная Эйлера, приближенное значение которой равно 0,5772...

Если эквивалентность определений (38.1), (38.2) очевидна, поскольку переменные интегрирования связаны соотношением $\sqrt{t} = \tau$, то их эквивалентность представлению (38.3) будет показана ниже.

◊ Набор определений $\Gamma(z)$ в виде (38.1), (38.2), (38.3) удобен в конкретных приложениях, использующих гамма-функцию.

Свойства гамма-функции

Свойство 1. Функция $\Gamma(z)$ аналитична в области $\operatorname{Re} z > 0$.

Доказательство. Представим интеграл (38.1) в виде

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z),$$

где

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt, \quad Q(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Так как в полосе $0 < \alpha < \operatorname{Re} z \leq A$ функции $|P(z)|$, $|Q(z)|$ мажорируются сходящимися интегралами

$$|P(z)| \leq \int_0^1 t^{\alpha-1} dt, \quad |Q(z)| \leq \int_1^\infty e^{-t} t^{A-1} dt,$$

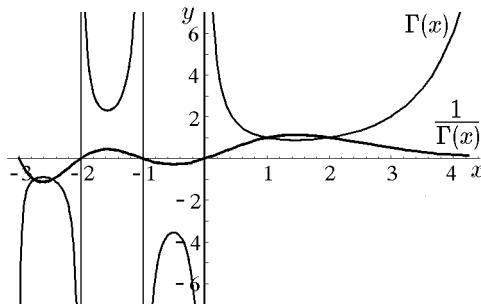


Рис. 96

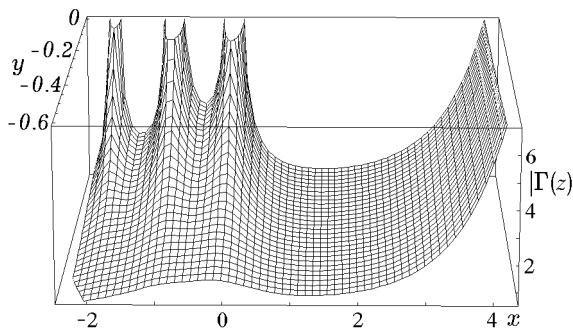


Рис. 97

то интеграл $\Gamma(z)$ также сходится, причем равномерно.

Пусть C – произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Рассмотрим интеграл

$$J = \int_C \Gamma(z) dz = \int_C \left(\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \right) dz.$$

Изменение порядка интегрирования возможно, так как интеграл $\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ сходится равномерно в области $\operatorname{Re} z \geq \alpha > 0$. Тогда

$$J = \int_0^\infty e^{-t} \left(\int_C t^{z-1} dz \right) dt.$$

По теореме Коши интеграл в скобках равен нулю, поэтому $J = 0$.

Интеграл $\int_C \Gamma(z) dz$ не зависит от пути интегрирования. Следовательно, по теореме Морера 15.1 $\Gamma(z)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, что и требовалось доказать.

◊ Следует отметить, что свойство 1 с достаточной очевидностью вытекает из определения (38.3).

Свойство 2 (основное функциональное соотношение). Для всех z , таких что $\operatorname{Re} z > 0$, справедливо

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (38.5)$$

Доказательство. Действительно, воспользуемся определением (38.1)

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt,$$

которое проинтегрируем один раз по частям, полагая $U = t^z$, $dU = zt^{z-1} dt$, $V = -e^{-t}$, $dV = e^{-t} dt$. Тогда

$$\Gamma(z+1) = -t^z e^{-t} \Big|_0^\infty + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z),$$

что и требовалось доказать.

Основное функциональное соотношение можно получить, если воспользоваться определением (38.3). Действительно, если $z \neq -j$, $j = \overline{0, \infty}$, то

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma(z)} &= \frac{ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} (1+z/k)e^{-z/k}}{(1+z)e^{\gamma(1+z)} \prod_{n=1}^{\infty} [1+(1+z)/n]e^{-(z+1)/n}} = \\ &= \frac{1}{1+z} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{(1+1/n)^{z+1}}{1+(1+z)/n} z \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N \frac{1+z/k}{(1+1/k)^z} = \\ &= \frac{1}{1+z} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{(1+1/n)(z+n)}{z+n+1} = z \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{N+1+z} = z, \end{aligned}$$

что и доказывает эквивалентность определений (38.1) и (38.3).

Свойство 3. Для натуральных n справедливо соотношение

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (38.6)$$

Доказательство. Положим в (38.5) $z = n$. Тогда

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \dots = n!\Gamma(1).$$

Поскольку

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1,$$

соотношение (38.6) доказано.

Свойство 4. Функцию $\Gamma(z)$ можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость z , кроме точек $z = -n$, $n = \overline{0, \infty}$, в которых $\Gamma(z)$ имеет полюсы первого порядка с вычетами, равными

$$\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (38.7)$$

Доказательство. Действительно,

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = P(z) + Q(z).$$

Функция $Q(z)$ – аналитическая, так как $t \neq 0$.

$$\begin{aligned} P(z) &= \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z-1+n} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{t^{z+n}}{z+n} \Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция имеет простые полюсы в точках $z = -n$, причем

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)P(z) = \frac{(-1)^n}{n!},$$

откуда следует справедливость соотношения (38.7).

Свойство 5 (формула дополнения). Справедливо соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (38.8)$$

Доказательство. Достаточно доказать справедливость формулы (38.8) для $z = x$ и произвольного интервала $a < x < b$, откуда по теореме о единственности аналитической функции получим требуемое утверждение.

Согласно формуле (38.2)

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= 2 \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1} du, \\ \Gamma(1-x) &= 2 \int_0^\infty e^{-v^2} v^{1-2x} dv. \end{aligned}$$

Следовательно, при $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= 4 \int_0^\infty u^{2x-1} e^{-u^2} du \int_0^\infty v^{1-2x} e^{-v^2} dv = \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} \left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1} dudv. \end{aligned}$$

Перейдем в полярную систему координат: $u = \rho \cos \varphi$, $v = \rho \sin \varphi$, $dudv = \rho d\rho d\varphi$. Тогда

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = 4 \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho d\rho \int_0^{\pi/2} (\operatorname{ctg} \varphi)^{2x-1} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} (\operatorname{ctg} \varphi)^{2x-1} d\varphi.$$

Последний интеграл заменой $\operatorname{tg}^2 \varphi = \tau$ приводится к виду

$$I = 2 \int_0^{\pi/2} (\operatorname{ctg} \varphi)^{2x-1} d\varphi = \int_0^1 \frac{\tau^{(1-x)-1}}{1+\tau} d\tau,$$

соответствующему интегралу (23.58) с $\alpha = 1-x$, и, следовательно,

$$I = \frac{\pi}{\sin[\pi(1-x)]} = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

что и требовалось доказать (см. также пример 40.4).

◊ Формулу дополнения можно доказать проще, если воспользоваться определением (38.3). Действительно, для всех $z \neq n$, $n = \overline{-\infty, \infty}$, имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(-z) &= -\frac{1}{z^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right]^{-1} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k} \right]^{-1} = \\ &= -\frac{1}{z^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

С помощью формулы (??) для разложения целой функции в виде произведения

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

найдем

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin \pi z},$$

откуда с учетом основного функционального соотношения

$$-z\Gamma(-z) = \Gamma(1-z)$$

приходим к (38.8).

Свойство 6. Функция $\Gamma(z)$ не имеет нулей, т.е. для всех z

$$\Gamma(z) \neq 0. \quad (38.9)$$

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Пусть z_0 — нуль функции $\Gamma(z)$. Тогда $z_0 \neq -j$, $j = \overline{0, \infty}$, так как в этих точках $\Gamma(z)$ имеет полюсы 1-го порядка, и $z_0 \neq j$, $j = \overline{0, \infty}$, так как $\Gamma(n+1) = n!$. Рассмотрим предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Gamma(1-z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\pi}{\Gamma(z) \sin \pi z} = \frac{\pi}{\sin \pi z_0 \lim_{z \rightarrow z_0} \Gamma(z)} = \infty,$$

поскольку $\sin \pi z_0 \neq 0$. Следовательно, $\Gamma(1-z)$ имеет в точке z_0 полюс, что противоречит свойству 4. Полученное противоречие и доказывает свойство 6.

Свойство 7. Справедливы соотношения

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} (2n-1)!! \sqrt{\pi} \quad (38.10)$$

и

$$\Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right) = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} 2^n}{(2n-1)!!}. \quad (38.11)$$

для $n = \overline{0, \infty}$.

Доказательство. Положим в соотношении (38.5) $z = (2n-1)/2$. Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) &= \frac{2n-1}{2} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2} - 1\right) = \\ &= \frac{2n-1}{2} \Gamma\left(\frac{2(n-1)+1}{2}\right) = \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)}{2^2} \Gamma\left(\frac{2(n-2)+1}{2}\right) = \dots = \\ &= \frac{1}{2^n} (2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Положив в (38.8) $z = 1/2$, получим

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \pi/2} = \pi$$

или

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

т.е. соотношение (38.10) справедливо. Подставив в (38.8) $z = n + 1/2$, с учетом (38.10) получим

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) &= \frac{\pi}{\Gamma(1/2 + n) \sin(n\pi + \pi/2)} = \\ &= \frac{(-1)^n \pi}{\Gamma(1/2 + n)} = \frac{(-1)^n \pi 2^n}{(2n - 1)!! \sqrt{\pi}},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Справедливо соотношение

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = (-1)^n \pi. \quad (38.12)$$

Доказательство. Воспользовавшись соотношениями (38.10) и (38.11), получим

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{1}{2^n} (2n - 1)!! \sqrt{\pi} \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} 2^n}{(2n - 1)!!} = (-1)^n \pi,$$

что и требовалось доказать.

Свойство 8 (формула Эйлера). Для натуральных n справедливо соотношение

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma(1) = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{(n-1)/2}. \quad (38.13)$$

Соотношение (38.13) называется формулой Эйлера.

Доказательство. Обозначим

$$f(n) = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

и напишем это произведение в обратном порядке

$$f(n) = \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Составим

$$f^2(n) = \left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \right] \left[\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \right] \cdots \left[\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \right].$$

Применим формулу $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$, тогда

$$f^2(n) = \frac{\pi}{\sin(\pi/n)} \frac{\pi}{\sin(2\pi/n)} \cdots \frac{\pi}{\sin[(n-1)\pi/n]} = \frac{\pi^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n)}.$$

Числа $e^{2i\pi k/n}$, $k = \overline{0, n-1}$, – корни n -ой степени из единицы. Поэтому можно записать

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - e^{2i\pi/n})(z - e^{4i\pi/n}) \cdots (z - e^{(n-1)2i\pi/n}).$$

Отсюда

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{2ik\pi/n}).$$

Перейдя к пределу при $z \rightarrow 1$, найдем

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}}).$$

Но

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}}) \right| &= \prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}} \right| = \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \left| e^{ik\frac{\pi}{n}} \right| \left| e^{-ik\frac{\pi}{n}} - e^{ik\frac{\pi}{n}} \right| = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}. \end{aligned}$$

Приходим к равенству

$$n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n},$$

откуда

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Тогда

$$f^2(n) = \frac{\pi^{n-1} 2^{n-1}}{n}, \quad f(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{(n-1)/2},$$

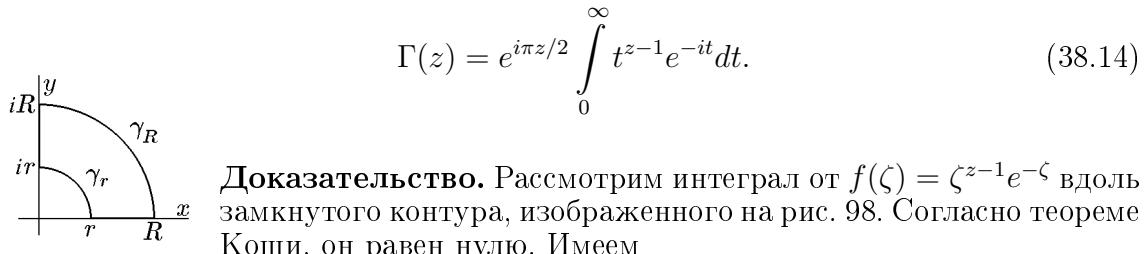
что и требовалось доказать.

Свойство 9 (формула удвоения). Справедливо соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z).$$

Доказательство проведем позднее, используя свойства бета-функции [см. формулу (40.8)].

Свойство 10. Пусть z удовлетворяет условию $0 < \operatorname{Re} z < 1$. Тогда для гамма-функции справедливо следующее интегральное представление:



Доказательство. Рассмотрим интеграл от $f(\zeta) = \zeta^{z-1} e^{-\zeta}$ вдоль замкнутого контура, изображенного на рис. 98. Согласно теореме Коши, он равен нулю. Имеем

Рис. 98

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma_R} \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta + \int_{ir}^{iR} \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta + \\ &+ \int_{\gamma_r^-} \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta + \int_r^R x^{z-1} e^{-x} dx = 0. \end{aligned}$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$. Тогда по лемме Жордана

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta = 0.$$

Действительно, $|\zeta^{z-1}| \leq R$, $\zeta \in \gamma_R$ и при условии $0 < \operatorname{Re} z < 1$ стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Оценим интеграл

$$J_r = \int_{\gamma_r} \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta.$$

Имеем

$$|J_r| = \left| \int_{\gamma_r} \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta \right| \leq r^{x-1} \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi}{2} r^x.$$

Следовательно, $\lim_{r \rightarrow 0} J_r = 0$, если $x > 0$. Переходя к пределу, получим

$$\int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx + \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{iR}^{ir} \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta = 0$$

или

$$\begin{aligned} \Gamma(z) + i \int_{\infty}^0 (iy)^{z-1} e^{-iy} dy &= 0, & \Gamma(z) &= i^z \int_0^\infty y^{z-1} e^{-iy} dy, \\ \Gamma(z) &= e^{i\pi z/2} \int_0^\infty y^{z-1} e^{-iy} dy, & 0 < \operatorname{Re} z < 1, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{2n} &= \int_0^\infty \sin t^n dt, \\ \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{2n} &= \int_0^\infty \cos t^n dt. \end{aligned} \tag{38.15}$$

Доказательство. Положим в (38.14) $z = n^{-1}$ ($n > 1$) и сделаем замену переменных $t^{1/n} = y$. Тогда $dt = ny^{n-1} dy$ и

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) e^{-i\pi/(2n)} = n \int_0^\infty e^{-ity} dt.$$

Отделяя действительные и мнимые части, приходим к равенствам (38.15).

◊ При $n = 2$ из (38.15) получим соотношения

$$\int_0^\infty \sin t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_0^\infty \cos t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

или $S(\infty) = C(\infty) = 1/2$, где

$$S(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}} dt, \quad C(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}} dt$$

– интегралы Френеля. Подстановка $t = u^2$ дает

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \sin u^2 du, \quad C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \cos u^2 du.$$

Пример 38.1. Показать, что гамма-функцию можно определить интегралами

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left[\ln \frac{1}{t} \right]^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (38.16)$$

Решение. Сделаем в интеграле (38.16) замену переменных $t = e^{-u}$. Тогда $dt = -e^{-u} du$, $\ln \frac{1}{t} = u$ и u будет пробегать значения от ∞ до нуля, в то время как t меняется от нуля до единицы. Следовательно,

$$\int_0^1 \left[\ln \frac{1}{t} \right]^{z-1} dt = \int_{\infty}^0 u^{z-1} (-e^{-u}) du = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du = \Gamma(z),$$

что и требовалось показать.

Пример 38.2. Показать, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x^4} dx = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right). \quad (38.17)$$

Решение. Сделаем в интеграле (38.17) замену переменных $x^4 = u$. Тогда $x = u^{1/4}$ и $dx = \frac{1}{4}u^{-3/4} du$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x^4} dx &= \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{1}{4}u^{-3/4} du = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{4}-1} du = \\ &= \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{4} + 1\right), \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Пример 38.3. Используя гамма-функцию, показать, что

$$\int_0^1 x^k \ln x dx = -\frac{1}{(k+1)^2}, \quad k > -1.$$

Решение. Подстановка $\ln x = t$ дает

$$\int_0^1 x^k \ln x dx = \int_{-\infty}^0 t e^{(k+1)t} dt.$$

Полагаем $(k+1)t = -u$. При $k+1 > 0$ получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^k \ln x dx &= -\frac{1}{(k+1)^2} \int_0^\infty u e^{-u} du = \\ &= -\frac{1}{(k+1)^2} \Gamma(2) = -\frac{1}{(k+1)^2}, \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Пример 38.4. Вычислить интеграл

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx, \quad a > 0.$$

Решение. Используем четность подынтегральной функции и положим $ax^2 = t$ ($a > 0$). Тогда

$$\begin{aligned} J &= 2 \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{a^{n+1/2}} \int_0^{\infty} t^{n-1/2} e^{-t} dt = \\ &= \frac{1}{a^{n+1/2}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n a^{n+1/2}} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Пример 38.5. Доказать соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-x^n} dx = 1.$$

Доказательство. Сделаем в этом интеграле замену переменных $x = t^{1/n}$ и $dx = \frac{1}{n} t^{1/n-1} dt$. Получим

$$\int_0^{\infty} e^{-x^n} dx = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1/n-1} dt = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{n} + 1\right).$$

В силу непрерывности гамма-функции $\Gamma(x)$ при $x > 0$ найдем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-x^n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma\left(\frac{1}{n} + 1\right) = \Gamma(1) = 1.$$

39. Обобщенные оригиналы

Определение функции $f(t)$ как оригинала можно обобщить, если во втором условии определения конечные разрывы заменить бесконечными, но такими, чтобы интеграл (34.1) по-прежнему оставался сходящимся. К числу таких обобщенных оригиналов можно отнести все функции $f(t)$, которые в точке t_0 удовлетворяют критерию сходимости интеграла (34.1) (см. Приложение «Несобственные интегралы. Сходимость и главное значение»):

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (t - t_0)^\nu f(t) = 0 \quad (39.1)$$

при некоторых $\nu < 1$, а вне точки t_0 удовлетворяют остальным условиям, при которых их можно считать оригиналами.

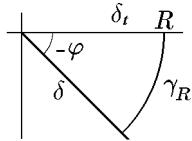
На практике наиболее важными обобщенными оригиналами являются степенная функция $f(t) = t^\mu$, $\mu > -1$, логарифмическая функция $f(t) = \ln t$ и некоторые другие.

Начнем со степенной функции. Для нее справедлива

Теорема 39.1. *Изображение степенной функции определяется соотношением*

$$t^\mu \rightarrow \frac{\Gamma(\mu + 1)}{p^{\mu+1}}, \quad \mu > -1. \quad (39.2)$$

Здесь и в дальнейшем выбирается однозначная ветвь функции $p^{\mu+1}$, например такая что $1^{\mu+1} = 1$.



Доказательство. По определению

$$\Gamma(\mu + 1) = \int_0^\infty t^\mu e^{-t} dt.$$

Рис. 99

Пусть $p = \rho e^{i\varphi}$ – произвольное комплексное число в правой полуплоскости $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Сделаем в интеграле замену $t = pq$, где p и q – комплексные числа. Тогда

$$\Gamma(\mu + 1) = p^{\mu+1} \int_\delta^\infty e^{-pq} q^\mu dq, \quad (39.3)$$

где δ – луч $\arg q = -\varphi$, так как $qp = t$. Рассмотрим интеграл $\int_{\gamma_R} e^{-pq} q^\mu dq$, где γ_R – дуга окружности радиуса R , лежащая в секторе $-\varphi < \arg q < 0$ (см. рис. 99). В этом случае $q = Re^{i\alpha}$ и справедливо

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} e^{-pq} q^\mu dq \right| &\leqslant \left| \int_{-\varphi}^0 e^{-pRe^{i\alpha}} R^{\mu+1} e^{i\alpha(\mu+1)} i d\alpha \right| \leqslant \\ &\leqslant R^{\mu+1} \left| \int_{-\varphi}^0 e^{-\rho R \cos(\varphi+\alpha)} d\alpha \right|, \end{aligned}$$

так как $\cos(\alpha + \varphi) > 0$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, $-\varphi < \alpha < 0$. Поэтому

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_R^-} e^{-pq} q^\mu dq \right| = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^-} e^{-pq} q^\mu dq = 0.$$

Рассмотрим контур $\gamma = \delta^- + \gamma_R^- + \delta_t$ (см. рис. 99), на котором

$$\int_{\gamma} e^{-pq} q^\mu dq = 0,$$

так как внутри контура подынтегральное выражение не содержит особых точек. Здесь δ_t – отрезок $[0, R]$ оси $0x$. Следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^\mu dt = - \int_{\delta^-} e^{-pq} q^\mu dq - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^-} e^{-pq} q^\mu dq = \int_\delta^\infty e^{-pq} q^\mu dq.$$

Подставив полученное соотношение в (39.3), получим

$$\Gamma(\mu + 1) = p^{\mu+1} \int_0^\infty e^{-pt} t^\mu dt.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^\mu dt = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{p^{\mu+1}}.$$

◊ Доказательство теоремы 39.1 можно упростить, если воспользоваться теоремой о единственности аналитического продолжения. Действительно, в интеграле

$$t^\mu \varphi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t^\mu dt, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad \mu > -1 \quad (39.4)$$

будем считать p действительным и положительным. В этом случае замена $pt = \tau$ дает

$$\varphi(p) = \frac{1}{p^{\mu+1}} \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^\mu d\tau = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{p^{\mu+1}}, \quad \mu > -1. \quad (39.5)$$

Но функция, определяемая соотношением (39.4), аналитична в области $\operatorname{Re} p > 0$ и принимает на положительной части действительной оси значения, задаваемые равенством (39.5). Тогда в силу единственности аналитического продолжения для функции $\varphi(p)$ в области $\operatorname{Re} p > 0$ при $\mu > -1$ справедлива формула (39.5) и, следовательно, (39.2).

Формулу (35.10) можно рассматривать как частный случай формулы (39.2) при $\mu = n$, поскольку

$$\Gamma(\mu + 1) = \Gamma(n + 1) = n!.$$

Пример 39.1. Найти изображения функций \sqrt{t} и $1/\sqrt{t}$.

Решение. Согласно (39.2) и (38.10), получим

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \sqrt{t} &= t^{1/2} \stackrel{\rightarrow}{\div} \frac{\Gamma(3/2)}{p^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}}, \\ \text{б)} \quad \frac{1}{\sqrt{t}} &= t^{-1/2} \stackrel{\rightarrow}{\div} \frac{\Gamma(1/2)}{p^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}. \end{aligned}$$

Пример 39.2. Найти изображения функций

$$\text{a)} \quad f_1(t) = \sin 2\sqrt{at}, \quad \text{б)} \quad f_2(t) = \frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{t}}.$$

Решение. а) По определению (7.4), функцию $f_1(t)$ можно представить в виде

$$f_1(t) = \sin 2\sqrt{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4a)^{k+1/2}}{(2k+1)!} t^{k+1/2}.$$

Согласно (39.2) и (38.10),

$$t^{k+1/2} \stackrel{\rightarrow}{\div} \Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right) \frac{1}{p^{k+3/2}} = \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{p^{k+3/2}},$$

откуда аналогично тому, как это делалось в доказательстве первой теоремы разложения, получим

$$\begin{aligned} f_1(t) &\stackrel{\rightarrow}{\div} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4a)^{k+1/2}}{(2k+1)! 2^{k+1}} \frac{(2k+1)!!}{p^{k+3/2}} \sqrt{\pi} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi a}{p^3}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^k}{k! p^k} = \sqrt{\frac{\pi a}{p^3}} e^{-a/p}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f_1(t) = \sin 2\sqrt{at} \stackrel{\rightarrow}{\div} \sqrt{\frac{\pi a}{p^3}} e^{-a/p}. \quad (39.6)$$

б) Аналогично

$$f_2(t) = \frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{t}} \stackrel{\rightarrow}{\div} \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-a/p}. \quad (39.7)$$

Теорема 39.2. Изображение функции $\ln t$ определяется соотношением

$$\ln t \stackrel{\rightarrow}{\div} -\frac{\gamma + \ln p}{p}, \quad (39.8)$$

где γ – постоянная Эйлера.

Доказательство. Продифференцировав выражение соответствия (39.2) по параметру μ , найдем

$$t^\mu \ln t \dot{\div} \frac{1}{p^{\mu+1}} [\Gamma'(\mu+1) - \Gamma(\mu+1) \ln p]. \quad (39.9)$$

Положив здесь $\mu = 0$, с учетом того, что $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma'(1) = -\gamma$ (см. разд. «Гамма-функция»), получим

$$\ln t \dot{\div} -\frac{\gamma + \ln p}{p},$$

что и требовалось доказать.

Пример 39.3. Найти изображение функции

$$\frac{t^\mu e^{\alpha t} \ln t}{\Gamma(\mu+1)}, \quad \mu > -1.$$

Решение. Согласно (39.9), имеем

$$\frac{t^\mu \ln t}{\Gamma(\mu+1)} \dot{\div} \frac{1}{p^{\mu+1}} \left[\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)} - \ln p \right].$$

Отсюда с учетом теоремы смещения для изображений получим

$$\frac{t^\mu \ln t}{\Gamma(\mu+1)} e^{\alpha t} \dot{\div} \frac{1}{(p-\alpha)^{\mu+1}} \left[\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)} - \ln(p-\alpha) \right].$$

Изучив обобщенные оригиналы, продолжим рассмотрение свойств преобразования Лапласа.

Свойство 16*. Обобщенная теорема умножения оригиналов (теорема Эфроса)

Теорема 39.3 (Эфроса). Пусть $f(t) \dot{\div} \varphi(p)$ и пусть $\psi(p)$ и $q(p)$ – аналитические функции, такие что

$$\psi(p)e^{-\tau q(p)} \dot{\div} g(t, \tau). \quad (39.10)$$

Тогда

$$\varphi(q(p))\psi(p) \dot{\div} \int_0^\infty f(\tau)g(t, \tau)d\tau. \quad (39.11)$$

Доказательство. Рассмотрим изображение правой части соотношения (39.11)

$$\int_0^\infty f(\tau)g(t, \tau)d\tau \dot{\div} \int_0^\infty e^{-pt} \left(\int_0^\infty f(\tau)g(t, \tau)d\tau \right) dt.$$

Изменим порядок интегрирования (мы предполагаем, что функции $f(\tau)$ и $g(t, \tau)$ таковы, что это можно сделать) и получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(\tau)g(t, \tau)d\tau &\stackrel{\leftrightarrow}{=} \int_0^\infty d\tau f(\tau) \int_0^\infty e^{-pt}g(t, \tau)dt = \\ &= \int_0^\infty d\tau f(\tau)\psi(p)e^{-\tau q(p)} = \psi(p)\varphi(q(p)). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношением (39.10). Таким образом, соотношение (39.11) доказано.

Следствие 39.3.1. При $q(p) = p$ теорема Эфроса переходит в теорему умножения оригиналов.

Доказательство. Положим $q(p) = p$. Тогда по теореме запаздывания $g(t, \tau) = g(t - \tau) \stackrel{\leftrightarrow}{=} e^{-\tau p}\psi(p)$ и соотношение (39.11) примет вид

$$\varphi(p)\psi(p) \stackrel{\leftrightarrow}{=} \int_0^\infty f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (39.12)$$

Здесь мы воспользовались свойством 1 оригиналов, т.е. $g(t - \tau) \equiv 0$ при $\tau > t$.

Для дальнейшего изложения нам потребуется изображение следующей функции.

Пример 39.4. Найти изображение функции

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-a/t}.$$

Решение. По определению,

$$\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-a/t} \stackrel{\leftrightarrow}{=} \varphi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-a/t} dt.$$

Сделаем в интеграле замену переменных $t = x^2$. Тогда

$$\varphi(p) = 2 \int_0^\infty e^{-px^2 - a/x^2} dx.$$

Воспользовавшись известным значением интеграла (см., например, [1, ?])

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2 - \beta^2/x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-2\alpha\beta}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0),$$

получим

$$\varphi(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} e^{-2\sqrt{ap}}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-a/t} \stackrel{\rightarrow}{\rightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-2\sqrt{ap}}.$$

В частности, положив $a = \tau^2/4$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\tau^2/4t} \stackrel{\rightarrow}{\rightarrow} \frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}. \quad (39.13)$$

Следствие 39.3.2. Пусть $f(t) \stackrel{\rightarrow}{\rightarrow} \varphi(p)$, тогда справедливо соотношение

$$\frac{\varphi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \stackrel{\rightarrow}{\rightarrow} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\tau) e^{-\tau^2/4t} d\tau. \quad (39.14)$$

Доказательство. Положим в соотношениях (39.10) и (39.11)

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad q(p) = \sqrt{p},$$

тогда, выбрав левую часть формулы (39.13) в качестве функции $g(t, \tau)$, найдем

$$g(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\tau^2/4t} \stackrel{\rightarrow}{\rightarrow} \frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}. \quad (39.15)$$

Подставив (39.15) в (39.11), получим (39.14).

Следствие 39.3.3. Пусть $f(t) \stackrel{\rightarrow}{\rightarrow} \varphi(p)$. Тогда справедливы соотношения

$$\frac{1}{\sqrt{p^3}} \varphi\left(\frac{1}{p}\right) \stackrel{\rightarrow}{\rightarrow} \int_0^\infty \frac{\sin 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} f(\tau) d\tau, \quad (39.16)$$

$$\sqrt{p} \varphi\left(\frac{1}{p}\right) \stackrel{\rightarrow}{\rightarrow} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \cos 2\sqrt{t\tau} f(\tau) d\tau. \quad (39.17)$$

Доказательство. Представим соотношение (39.6) в следующем виде:

$$\frac{\sin 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} \stackrel{\rightarrow}{\rightarrow} \frac{1}{\sqrt{p^3}} e^{-\tau/p}.$$

Правую часть этого соотношения можно принять за функцию $g(t, \tau)$, положив

$$q(p) = \frac{1}{p}, \quad \psi(p) = \frac{1}{\sqrt{p^3}}.$$

Тогда из (39.11) получим (39.16). Аналогично из (39.7) при

$$q(p) = \frac{1}{p}, \quad \psi(p) = \sqrt{p}$$

получим (39.17).

Следствие 39.3.4. Пусть $f(t) \rightarrow \varphi(p)$, тогда справедливо соотношение

$$\frac{1}{p} \varphi\left(\frac{1}{p}\right) \leftarrow \int_0^\infty f(\tau) J_0(2\sqrt{t\tau}) d\tau. \quad (39.18)$$

Здесь $J_0(z)$ – функция Бесселя нулевого порядка (36.17).

Доказательство. Положим в условии теоремы Эфроса $\psi(p) = 1/p$, $q(p) = 1/p$. Тогда с помощью теоремы подобия из соотношения (36.18)

$$\frac{1}{p} e^{-1/p} \leftarrow J_0(2\sqrt{t})$$

получим

$$g(t, \tau) = J_0(2\sqrt{t\tau}) \leftarrow \frac{1}{p} e^{-\tau/p}. \quad (39.19)$$

Подставив (39.19) в (39.11), получим (39.18).

Следствие 39.3.5. Пусть $f(t) \rightarrow \varphi(p)$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \varphi(\sqrt{p^2 + 1}) \leftarrow \int_0^t f(\tau) J_0(\sqrt{t^2 - \tau^2}) d\tau; \quad (39.20)$$

$$\frac{1}{p} \varphi\left(p + \frac{1}{p}\right) \leftarrow \int_0^t f(\tau) J_0(2\sqrt{\tau(t - \tau)}) d\tau; \quad (39.21)$$

$$\frac{1}{p^{n+1}} \varphi\left(\frac{1}{p}\right) \leftarrow \int_0^\infty f(\tau) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{t\tau}) d\tau; \quad (39.22)$$

$$\frac{1}{p^{n+1}} \varphi\left(p + \frac{1}{p}\right) \leftarrow \int_0^t f(\tau) \left(\frac{t - \tau}{t}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{\tau(t - \tau)}) d\tau; \quad (39.23)$$

Здесь функция $J_n(z)$ определяется рядом

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n},$$

абсолютно сходящимся для всех конечных z . Функция $J_n(z)$ называется функцией Бесселя индекса n (см. разд. «Функции Бесселя» части III).

Доказательство аналогично доказательству соотношений (39.14)–(39.18) и основывается на соотношениях

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} e^{-\tau\sqrt{p^2 + 1}} \leftarrow \theta(t - \tau) J_0(\sqrt{t^2 - \tau^2}) \quad (39.24)$$

(в этом случае $q(p) = \sqrt{p^2 + 1}$, $\psi(p) = 1/\sqrt{p^2 + 1}$);

$$\frac{1}{p^{n+1}} e^{-\tau(p+1/p)} \leftarrow \theta(t - \tau) \left(\frac{t - \tau}{t}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{\tau(t - \tau)}) \quad (39.25)$$

(тогда $q(p) = p + 1/p$, $\psi(p) = 1/p^{n+1}$);

$$\frac{1}{p^{n+1}} e^{-\tau/p} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{t\tau}) \quad (39.26)$$

(тогда $q(p) = 1/p$, $\psi(p) = 1/p^{n+1}$).

Здесь $\theta(t-\tau)$ – тета-функция Хевисайда (подробнее см. раздел, посвященный обобщенным функциям).

◊ Частные случаи теоремы Эфроса (см. формулы (39.14), (39.18), (39.20)–(39.23)) могут оказаться полезными, если известен оригинал функции $\varphi(p)$ и требуется найти оригиналы функций $\varphi(1/p)$, $\varphi(\sqrt{p})$, $\varphi(p+1/p)$, $\varphi(\sqrt{1+p^2})$.

Пример 39.5. Вычислить интеграл

$$g(t) = \int_0^t J_0(\sqrt{t^2 - \tau^2}) d\tau.$$

Решение. Найдем изображение функции $g(t)$. Согласно частному случаю теоремы Эфроса (см. формулу (39.20)), получим

$$g(t) \xrightarrow{\psi} \psi(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Поскольку в нашем случае надо положить

$$f(t) = 1, \quad \varphi(p) = \frac{1}{p}, \quad \varphi(\sqrt{p^2 + 1}) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}},$$

следовательно,

$$\psi(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \leftarrow \sin t.$$

Таким образом, $g(t) = \sin t$.

◊ Примеры применения частных случаев теоремы Эфроса будут рассмотрены в разд. «Интегральные преобразования бесселевых функций» части III и в главе «Интегральные уравнения» части IV.

40. Бета-функция

♦ Бета-функцией (или эйлеровым интегралом первого рода) называется интеграл

$$B(z, \omega) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{\omega-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} \omega > 0. \quad (40.1)$$

Наряду с определением (40.1) достаточно распространенным является представление бета-функции в виде

$$B(z, w) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \tau)^{2z-1} (\cos \tau)^{2w-1} d\tau, \quad (40.2)$$

следующем из (40.1) заменой $t = \sin^2 \tau$.

Свойства бета-функции

Свойство 1. Справедливо соотношение

$$B(z, \omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z + \omega)}. \quad (40.3)$$

Доказательство. Вместо (40.1) рассмотрим интеграл

$$\varphi(\tau) = \int_0^\tau t^{z-1}(\tau - t)^{\omega-1} dt = (\tau^{\omega-1} * \tau^{z-1}), \quad (40.4)$$

который является сверткой функций τ^{z-1} и $\tau^{\omega-1}$ и при $\tau = 1$ совпадает с (40.1). Проведем преобразование Лапласа правой и левой частей равенства (40.4). По теореме о свертке

$$\varphi(\tau) = (\tau^{\omega-1} * \tau^{z-1}) \Rightarrow \Phi(p) = \frac{\Gamma(\omega)}{p^\omega} \frac{\Gamma(z)}{p^z} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{p^{\omega+z}}$$

найдем оригинал правой части

$$\Phi(p) \Leftarrow \Gamma(z)\Gamma(\omega) \frac{\tau^{\omega+z-1}}{\Gamma(\omega+z)}.$$

Таким образом,

$$(\tau^{\omega-1} * \tau^{z-1}) = \int_0^\tau t^{z-1}(\tau - t)^{\omega-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(\omega+z)} \tau^{\omega+z-1}.$$

Положив $\tau = 1$, получим (40.3).

◊ Свойство 1 достаточно очевидно вытекает из формул (38.3) и (40.2). Действительно, используя представление (38.3), запишем произведение

$$\Gamma(z)\Gamma(\omega) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(y^2+x^2)} y^{2z-1} x^{2\omega-1} dy dx$$

в виде двойного интеграла по первой четверти плоскости xOy в полярной системе координат $y = r \sin \varphi$, $x = r \cos \varphi$

$$\Gamma(z)\Gamma(\omega) = 4 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(z+\omega)-1} dr \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi)^{2z-1} (\cos \varphi)^{2\omega-1} d\varphi.$$

Отсюда с учетом (38.3) и (40.2) найдем

$$\Gamma(z)\Gamma(\omega) = \Gamma(z + \omega)B(z, \omega),$$

откуда и следует (40.3).

◊ Если z и w – целые положительные числа ($z = n$, $\omega = m$), то формулу (40.3) можно записать в виде

$$B(n, m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m+1)}{m\Gamma(n+m)} = 1 / \left[m \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!} \right] = \frac{1}{mC_{m+n-1}^{n-1}},$$

где

$$C_s^l = \frac{s!}{l!(s-l)!}$$

– биномиальные коэффициенты.

Таким образом, если гамма-функцию можно рассматривать как обобщение факториала на случай произвольного аргумента, то бета-функцию – как обобщение биномиальных коэффициентов (см. также разд. «Биномиальные коэффициенты»).

Свойство 2. Справедливо соотношение

$$B(z, \omega) = B(\omega, z). \quad (40.5)$$

Доказательство следует непосредственно из (40.3).

Свойство 3. Справедливы соотношения

$$B(z, \omega + 1) = \frac{\omega}{z} B(z + 1, \omega) = \frac{\omega}{\omega + z} B(z, \omega); \quad (40.6)$$

$$B(z, 1) = \frac{1}{z}; \quad (40.7)$$

$$B(z, z) = 2^{1-2z} B\left(\frac{1}{2}, z\right); \quad (40.8)$$

$$B(z, 1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (40.9)$$

Доказательство следует из соотношений (38.5) и (40.3). Легко увидеть, что соотношение (40.7) является аналогом основного функционального соотношения; (40.8) – аналогом формулы удвоения, а (40.9) – аналогом формулы дополнения.

Проведем доказательство формулы удвоения, так как ранее она не была доказана. Рассмотрим интеграл

$$B(z, z) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{z-1} dt = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t \right)^2 \right]^{z-1} dt.$$

Так как парабола $y = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t \right)^2$ симметрична относительно прямой $t = 1/2$, можно записать

$$B(z, z) = 2 \int_0^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t \right)^2 \right]^{z-1} dt.$$

Сделаем замену $1/2 - t = \sqrt{u}/2$ и получим

$$B(z, z) = \frac{2}{4^z} \int_0^1 u^{-1/2} (1-u)^{z-1} du = \frac{1}{2^{2z-1}} B\left(\frac{1}{2}, z\right).$$

Переходя к гамма-функции, найдем

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \frac{1}{2^{2z-1}} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(z)}{\Gamma(z+1/2)},$$

откуда

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z).$$

Пример 40.1. Показать, что

$$\frac{e^{-\mu t}}{(1 - e^{-bt})^{1-\nu}} \div \frac{1}{b} B\left(\frac{p+\mu}{b}, \nu\right). \quad (40.10)$$

Решение. По определению преобразования Лапласа

$$\frac{e^{-\mu t}}{(1 - e^{-bt})^{\nu-1}} \div \int_0^\infty e^{-(p+\mu)t} \frac{dt}{(1 - e^{-bt})^{1-\nu}}.$$

Сделав в интеграле замену переменных

$$t = -\frac{1}{b} \ln \tau, \quad dt = -\frac{1}{b} \frac{d\tau}{\tau},$$

получим

$$\frac{1}{b} \int_0^1 \tau^{(p+\mu)/b} (1 - \tau)^{\nu-1} \frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{b} B\left(\frac{p+\mu}{b}, \nu\right).$$

Пример 40.2. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad (n > 1).$$

Решение. Сделаем в интеграле замену переменных $x = t^{1/n}$ ($t > 0$) и получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} &= \frac{1}{n} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1} (1-t)^{-1/n} dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой дополнения.

Пример 40.3. Доказать соотношение

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}. \quad (40.11)$$

Решение. Подстановкой $x^4 = t$ преобразуем интегралы к виду

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} &= \frac{1}{4} \int_0^1 t^{-3/4} (1-t)^{-1/2} dt = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \sqrt{\pi}}{4 \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}, \\ \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} &= \frac{1}{4} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \sqrt{\pi}}{4 \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}. \end{aligned}$$

Перемножив интегралы, получим формулу (40.11).

Пример 40.4. Вычислить интеграл

$$J = \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^\alpha x dx, \quad \alpha \neq n, \quad n = \overline{-\infty, \infty}.$$

Решение. Сделаем в интеграле замену переменных $\operatorname{tg} x = \sqrt{t}$ ($t > 0$) и получим

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{1+t} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2}, 1 - \frac{\alpha+1}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2\Gamma(1)} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{\pi}{2 \cos(\pi\alpha/2)}. \end{aligned}$$

Заметим, что этот результат также можно получить непосредственно из формулы (40.12).

Пример 40.5. Показать, что

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right). \quad (40.12)$$

Решение. Положим $\sin x = \sqrt{t}$ ($t > 0$). Тогда

$$\frac{1}{2} \int_0^1 t^{(m-1)/2} (1-t)^{(n-1)/2} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

Пример 40.6. Вычислить интеграл

$$J = \int_{-1}^1 (1+x)^a (1-x)^b dx, \quad a > -1, \quad b > -1. \quad (40.13)$$

Решение. Подстановкой $1-x = 2t$ интеграл преобразуется к виду

$$J = 2^{a+b+1} \int_0^1 t^b (1-t)^a dt = 2^{a+b+1} B(a+1, b+1).$$

◊ Можно сделать в интеграле (40.13) замену переменных $x = \cos 2\varphi$.

Пример 40.7. Вычислить интеграл Дирихле

$$J = \iint_D x^q y^p d\sigma,$$

где D – треугольник, ограниченный полуосами и прямой $x+y=1$, $p > -1$, $q > -1$.

Решение. Переидем от двойного интеграла к повторному

$$J = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^p y^q dy.$$

Так как $q \neq -1$,

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{q+1} \int_0^1 x^p (1-x)^{q+1} dx = \frac{1}{q+1} B(p+1, q+2) = \\ &= \frac{1}{q+1} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+2)}{\Gamma(p+q+3)} = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{(p+q+2)\Gamma(p+q+2)} = \\ &= \frac{B(p+1, q+1)}{p+q+2}. \end{aligned}$$

Пример 40.8. Вычислить интеграл

$$J = \int_0^a t^{2n} \sqrt{a^2 - t^2} dt, \quad a > 0.$$

Решение. Полагаем $t = a \sin x$, $a > 0$. Получим

$$J = a^{2n+2} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \cos^2 x dx.$$

Воспользовавшись соотношением (40.12), найдем

$$\begin{aligned} J &= a^{2n+2} \frac{1}{2} B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = a^{2n+2} \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(3/2)}{2\Gamma(n+2)} = \\ &= \frac{(2n-1)!! a^{2n+2}}{2^{n+2}(n+1)!} \pi. \end{aligned}$$

Пример 40.9. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $|x|^n + |y|^n = a^n$ ($n > 0$, $a > 0$).

Решение. Ввиду центральной симметрии кривой относительно начала координат будем рассматривать только ее часть, расположенную в первом квадранте ($x \geq 0$, $y \geq 0$). В этом случае $y = (a^n - x^n)^{1/n}$, $0 \leq x \leq a$. Тогда для площади фигуры получим

$$S = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_0^a (a^n - x^n)^{1/n} dx.$$

Сделаем в интеграле замену переменных

$$x = at^{1/n}, \quad dx = (a/n)t^{1/n-1} dt.$$

Получим

$$S = \frac{4a^2}{n} \int_0^1 (1-t)^{1/n} t^{1/n-1} dt = \frac{4a^2}{n} B\left(\frac{1}{n} + 1, \frac{1}{n}\right) = \frac{2a^2}{n} \frac{\Gamma^2(1/n)}{\Gamma(2/n)}.$$

Пример 40.10. Вычислить интеграл

$$J = \int_0^\pi \sin^\alpha \varphi e^{i\beta\varphi} d\varphi, \quad \operatorname{Re} \alpha > -1, \quad \beta > 0. \quad (40.14)$$

Решение. Рассмотрим интеграл

$$\oint_{\gamma} \left(\frac{1}{z} - z\right)^\alpha z^{\beta-1} dz, \quad (40.15)$$

где γ – замкнутый контур, состоящий из кривой $\tilde{\gamma}$ – верхней полуокружности $|z| = 1$ – и ее диаметра с вырезами в точках $-1, 0, 1$, имеющими радиус ε (рис. 100). Очевидно, что интеграл (40.15) равен нулю, так как подынтегральная функция аналитична внутри области, границей которой является контур γ . Устремив ε к нулю, получим

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \left(\frac{1}{z} - z\right)^\alpha z^{\beta-1} dz &= \\ &= \int_{\tilde{\gamma}} \left(\frac{1}{z} - z\right)^\alpha z^{\beta-1} dz + \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{z} - z\right)^\alpha z^{\beta-1} dz = 0. \end{aligned}$$

Проведя в первом интеграле замену $z = e^{i\varphi}$, найдем

$$\begin{aligned} i \int_0^\pi (e^{-i\varphi} - e^{i\varphi})^\alpha e^{i\beta\varphi} d\varphi &= - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t} - t\right)^\alpha t^{\beta-1} dt = \\ &= - \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha t^{\beta-\alpha-1} dt. \end{aligned} \quad (40.16)$$

В последнем интеграле интервал интегрирования разбиваем на два $] -1, 0[$ и $] 0, 1[$ и на интервале $] -1, 0[$ делаем замену $t \rightarrow -t$. Тогда из (40.16) получим

$$\begin{aligned} i(-2i)^\alpha \int_0^\pi \sin^\alpha \varphi e^{i\beta\varphi} d\varphi &= \\ &= [(-1)^{\beta-\alpha} - 1] \int_0^1 (1-t^2)^\alpha t^{\beta-\alpha-1} dt. \end{aligned} \quad (40.17)$$

Проведя в последнем интеграле замену $t = \sqrt{x}$ и учитя равенства

$$\begin{aligned} (-i)^\alpha &= e^{-i\alpha\pi/2}, \quad (-1)^{\beta-\alpha} = e^{i\pi(\beta-\alpha)}, \\ (-1)^{\beta-\alpha} - 1 &= e^{i\pi(\beta-\alpha)} - 1 = \\ &= e^{i(\beta-\alpha)\pi/2} [e^{i(\beta-\alpha)\pi/2} - e^{-i(\beta-\alpha)\pi/2}] = \\ &= 2ie^{-i(\beta-\alpha)\pi/2} \sin \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha), \end{aligned}$$

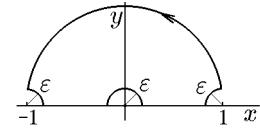


Рис. 100

окончательно из (40.17) получим

$$\begin{aligned}
 & 2^\alpha \int_0^\pi \sin^\alpha \varphi e^{i\beta\varphi} d\varphi = \\
 & = e^{i\beta\pi/2} \sin \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha) \int_0^1 (1-x)^\alpha x^{(\beta-\alpha)/2-1} dx = \\
 & = e^{i\beta\pi/2} \sin \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha) B\left(\alpha + 1, \frac{\beta - \alpha}{2}\right) = \\
 & = e^{i\beta\pi/2} \frac{\sin(\pi[\beta - \alpha]/2)\Gamma(\alpha + 1)\Gamma([\beta - \alpha]/2)}{\Gamma(1 + [\beta + \alpha]/2)} = \\
 & = e^{i\beta\pi/2} \frac{\Gamma(\alpha + 1)\sin(\pi[\beta - \alpha]/2)\Gamma([\beta - \alpha]/2)\Gamma(1 - [\beta - \alpha]/2)}{\Gamma(1 + [\beta + \alpha]/2)\Gamma(1 - [\beta - \alpha]/2)} = \\
 & = e^{i\beta\pi/2} \frac{\pi\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(1 + [\alpha + \beta]/2)\Gamma(1 + [\alpha - \beta]/2)}.
 \end{aligned}$$

На последнем этапе преобразований мы использовали формулу дополнения. Итак, для $\operatorname{Re} \alpha > -1$ окончательно имеем

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \sin^\alpha \varphi e^{i\beta\varphi} d\varphi = \\
 & = \frac{\pi}{2^\alpha} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(1 + [\alpha + \beta]/2)\Gamma(1 + [\alpha - \beta]/2)} e^{i\beta\pi/2}.
 \end{aligned} \tag{40.18}$$

Отсюда вытекают простейшие следствия

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \sin^\alpha \varphi \cos \beta\varphi d\varphi = \\
 & = \frac{\pi}{2^\alpha} \frac{\Gamma(\alpha + 1) \cos \beta\pi/2}{\Gamma(1 + [\alpha + \beta]/2)\Gamma(1 + [\alpha - \beta]/2)};
 \end{aligned} \tag{40.19}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \sin^\alpha \varphi \sin \beta\varphi d\varphi = \\
 & = \frac{\pi}{2^\alpha} \frac{\Gamma(\alpha + 1) \sin \beta\pi/2}{\Gamma(1 + [\alpha + \beta]/2)\Gamma(1 + [\alpha - \beta]/2)}.
 \end{aligned} \tag{40.20}$$

Разбив в (40.18) интервал интегрирования на два

$$\int_0^\pi g(\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi/2} g(\varphi) d\varphi + \int_{\pi/2}^\pi g(\varphi) d\varphi$$

и заменив в первом интеграле φ на $\pi/2 - \varphi$, а во втором φ на $\pi/2 + \varphi$, найдем

$$\begin{aligned} e^{i\beta\pi/2} & \left[\int_0^{\pi/2} \cos^\alpha \varphi e^{-i\beta\varphi} d\varphi + \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha \varphi e^{i\beta\varphi} d\varphi \right] = \\ & = 2e^{i\beta\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha \varphi \cos \beta\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

С учетом этого соотношения из (40.18) получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha \varphi \cos \beta\varphi d\varphi & = \\ & = \frac{\pi}{2^{\alpha-1}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1 + [\alpha+\beta]/2)\Gamma(1 + [\alpha-\beta]/2)}. \end{aligned} \quad (40.21)$$

41. Биномиальные коэффициенты

Для исследования некоторых свойств специальных функций удобно использовать биномиальные коэффициенты.

♦ Биномиальными коэффициентами называются выражения вида

$$\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\alpha-\nu+1)} = \frac{1}{(\alpha+1)\text{B}(\nu+1, \alpha-\nu+1)}. \quad (41.1)$$

◊ Биномиальные коэффициенты определены при любых ν и α , когда правая часть имеет смысл. В частности при $\nu = -n$, $n = 1, \infty$ биномиальные коэффициенты равны нулю.

Пример 41.1. Найти явный вид биномиальных коэффициентов при целых $\nu = n$, $n = 0, 1$.

Решение. Из свойств гамма-функции вытекает, что $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Тогда

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{1} = \alpha, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}. \quad (41.2)$$

Рассмотрим некоторые полезные свойства биномиальных коэффициентов.

Свойство 1. Справедливо соотношение

$$\binom{\alpha+\nu}{\nu} = \frac{\sin \alpha\pi}{\sin(\alpha+\nu)\pi} \binom{-1-\alpha}{\nu}. \quad (41.3)$$

Доказательство. С учетом свойств гамма-функции получим

$$\begin{aligned} \binom{\alpha+\nu}{\nu} & = \frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\nu+1)} = \\ & = \frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)\Gamma(-\alpha-\nu)\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\alpha-\nu)} = \\ & = \frac{-\pi}{\sin(\alpha+\nu)\pi} \frac{-\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\alpha-\nu)} = \\ & = \frac{\sin \alpha\pi}{\sin(\alpha+\nu)\pi} \binom{-1-\alpha}{\nu}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Свойство 2. Если n – целое, то справедливо соотношение

$$\binom{\alpha + n}{n} = (-1)^n \binom{-\alpha - 1}{n}. \quad (41.4)$$

Доказательство. Положим в (??) $\nu = n$, $n = \overline{0, \infty}$. С учетом формулы приведения $\sin(\varphi + \pi n) = (-1)^n \sin \varphi$ получим (41.4).

Свойство 3. Справедливо соотношение

$$\sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha + \beta}{n}. \quad (41.5)$$

Доказательство. С помощью биномиальных коэффициентов разложение функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ в ряд Тейлора по степеням x (справедливое при $|x| < 1$) можно записать в виде

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad (1+x)^\beta = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\beta}{m} x^m; \quad (41.6)$$

$$(1+x)^{\alpha+\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha + \beta}{n} x^n = (1+x)^\alpha (1+x)^\beta. \quad (41.7)$$

Подставив (41.6) в (41.7), найдем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha + \beta}{n} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{m} x^{k+m}.$$

Сделав замену индексов суммирования $k+m = n$, окончательно получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha + \beta}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} x^n,$$

откуда с учетом того, что

$$\binom{\beta}{n-k} = 0$$

при $k > n$, следует (41.5).

Наряду с биномиальными коэффициентами для компактной записи коэффициентов рядов Тейлора и Фурье зачастую используются символы Похгаммера.

◆ Символом Похгаммера называется величина

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad (41.8)$$

где a – комплексная постоянная, а $n = \overline{0, \infty}$.

◊ Используя свойства гамма-функции, нетрудно получить основное функциональное соотношение для символа Похгаммера

$$(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n. \quad (41.9)$$

42. Интеграл ошибок

◆ Интегралом (функцией) вероятности или интегралом ошибок называется функция

$$\Phi(t) = \operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx. \quad (42.1)$$

Непосредственно из определения следует, что функция $\operatorname{erf}(t)$ непрерывна и монотонно возрастает от нуля до $\operatorname{erf}(\infty) = 1$, так как

$$\operatorname{erf}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \quad (42.2)$$

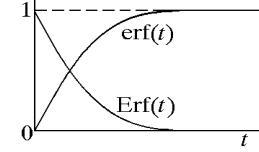


Рис. 101

Наряду с функцией $\operatorname{erf}(t)$ рассматривают функцию

$$\operatorname{Erf}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^t e^{-x^2} dx \right]$$

или с учетом (42.2)

$$\operatorname{Erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^\infty e^{-x^2} dx - \int_0^t e^{-x^2} dx \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-x^2} dx. \quad (42.3)$$

Функция $\operatorname{Erf}(t)$ непрерывна и монотонно убывает от $\operatorname{Erf}(0) = 1$ до $\operatorname{Erf}(\infty) = 0$ (см. рис. 101).

Пример 42.1. Для интеграла ошибок найти представление в виде ряда по степеням t .

Решение. Согласно (42.1), имеем

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)(k-1)!}.$$

Заметив, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)(k-1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{l!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^s t^{2s+1}}{(2s+1)!!},$$

получим

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^s t^{2s+1}}{(2s+1)!!}.$$

Задания для самоконтроля

Теоретические вопросы

Часть I. Основы комплексного анализа

Глава 1. Введение в теорию функций комплексного переменного

1. Комплексные числа и действия над ними
2. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Геометрическая интерпретация операций над комплексными числами
3. Основные понятия множеств на комплексной плоскости. Геометрический смысл
4. Предел последовательности. Бесконечно удаленная точка. Расширенная комплексная плоскость
5. Ряды комплексных чисел. Необходимый и достаточные признаки сходимости. Абсолютная и условная сходимость
6. Понятие функции комплексного переменного и ее геометрическая интерпретация. Однозначные и однолистные функции
7. Предел и непрерывность функции комплексного переменного
8. Функциональные и степенные ряды. Теорема Абеля. Равномерная сходимость
9. Степенная и общая степенная функции
10. Тригонометрические и гиперболические функции, связь между ними
11. Логарифмическая функция. Обратные тригонометрические и гиперболические функции
12. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши–Римана. Понятие аналитической функции
13. Гармонические функции. Связь аналитических и гармонических функций. Сопряженные гармонические функции
14. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства
15. Теорема Коши для односвязной области. Понятие первообразной. Формула Ньютона–Лейбница
16. Теорема Коши для многосвязной области
17. Теорема Коши и теорема Морера
18. Теорема Коши и теорема Лиувилля
19. Интеграл Коши для односвязной области. Теорема о среднем
20. Интеграл Коши для многосвязной области
21. Интеграл Коши и принцип максимума модуля
22. Интеграл Коши для производных аналитической функции
23. Интеграл типа Коши

Глава 2. Теория вычетов и ее приложения

1. Область сходимости функционального ряда на комплексной плоскости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса
2. Теорема Вейерштрасса для равномерно сходящихся рядов

3. Степенные ряды в комплексной области. Теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Теорема о сумме степенного ряда
4. Ряд Тейлора. Единственность разложения функции в ряд Тейлора. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Тейлора
5. Ряды Тейлора элементарных функций
6. Ряд Лорана. Кольцо сходимости. Единственность разложения функции в ряд Лорана. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана
7. Изолированные особые точки аналитических функций и их классификация. Определение целых и мероморфных функций
8. Устранимая особая точка
9. Полюс, порядок полюса. Связь нулей и полюсов функций $f(z)$ и $1/f(z)$
10. Существенно особая точка.
Теорема Сохоцкого–Вейерштрасса
11. Бесконечно удаленная изолированная особая точка. Обобщение теоремы Лиувилля
12. Аналитическое продолжение. Теорема о единственности аналитического продолжения
13. Непосредственное аналитическое продолжение через дугу и принцип непрерывного продолжения
14. Аналитическое продолжение вдоль цепочки областей
15. Аналитическое продолжение методом Вейерштрасса.
Полная аналитическая функция
16. Понятие римановой поверхности. Точки ветвления
17. Понятие вычета. Основная теорема о вычетах в конечной области
18. Вычеты в устранимой и существенно особой точках
19. Вычисление вычета в полюсе
20. Вычет в бесконечно удаленной точке. Теорема о вычетах в расширенной комплексной плоскости
21. Вычисление вычета в бесконечно удаленной особой точке
22. Понятие логарифмического вычета. Логарифмические вычеты в нулях и полюсах аналитической функции
23. Логарифмический вычет мероморфной функции
24. Принцип аргумента и теорема Руше
25. Основная теорема алгебры
26. Задача Рауса–Гурвица
27. Вычисление определенных интегралов, содержащих рациональные функции от тригонометрических функций, с помощью вычетов
28. Несобственные интегралы в комплексной плоскости. Критерии сходимости и главное значение
29. Вычисление несобственных определенных интегралов от осцилирующих функций с помощью вычетов и леммы Жордана
30. Лемма Жордана
31. Вычисление несобственных определенных интегралов от осцилирующих функций с помощью вычетов и леммы Жордана
32. Лемма Жордана и интегралы Бромвича–Вагнера
33. Вычисление несобственных интегралов типа интегралов Эйлера с помощью вычетов
34. Вычисление несобственных интегралов, имеющих особенности на контуре интегрирования, с помощью вычетов

35. Суммирование рядов с помощью вычетов
36. Целые и мероморфные функции. Теорема о разложении мероморфные функции с конечным числом полюсов на простейшие дроби
37. Теорема Миттаг–Леффлера для мероморфной функции
38. Бесконечные произведения, критерий сходимости. Абсолютная и равномерная сходимость
39. Разложение целой функции в бесконечное произведение

Глава 3. Введение в теорию конформных отображений

1. Производная функции комплексного переменного. Геометрический смысл модуля производной
2. Понятие конформного отображения. Принцип соответствия границ. Теорема Римана
3. Отображение, задаваемое линейной функцией
4. Отображение, задаваемое функцией $w = 1/z$. Круговое свойство и свойство сохранения симметрии
5. Отображение, задаваемое дробно-линейной функцией
6. Отображение, задаваемое степенной функцией
7. Отображение, задаваемое показательной и логарифмической функциями
8. Отображение, задаваемое тригонометрическими и обратными тригонометрическими функциями
9. Отображение, задаваемое гиперболическими и обратными гиперболическими функциями
10. Отображение, осуществляющее функцией Жуковского
11. Принцип симметрии в конформных отображениях
12. Принцип симметрии как метод аналитического продолжения
13. Интеграл Кристоффеля–Шварца

Глава 4. Элементы операционного исчисления

1. Преобразование Лапласа. Оригиналы и обобщенные оригиналы. Изображения: существование и аналитичность
2. Теорема обращения и формула Меллина. Единственность обращения
3. Изображение простейших функций
4. Свойства преобразования Лапласа: линейность, подобие, теоремы смещения
5. Дифференцирование оригинала и изображения
6. Интегрирование оригинала и изображения
7. Свертка функций. Теоремы умножения оригиналов и изображений
8. Отыскание оригинала по заданному изображению. Теорема единственности. Первая и вторая теоремы разложения
9. Формула Диамеля
10. Теорема Эфроса
11. Интегрирование систем дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа и интеграла Диамеля
12. Интегрирование некоторых дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами операционным методом
13. Вычисление некоторых несобственных интегралов операционным методом. Формула Парсеваля
14. Основные определения гамма-функции. Аналитичность

15. Аналитическое продолжение гамма-функции в область $\operatorname{Re} z < 0$. Полюсы гамма-функции
16. Основные свойства гамма-функции: основное функциональное соотношение, формулы дополнения и удвоения
17. Бета-функция, связь бета- и гамма-функций. Основные свойства бета-функции
18. Биномиальные коэффициенты и бета-функция
19. Интегралы Френеля и ошибок

Индивидуальные задания

Вариант № 30

30.1. Найти все значения корня

а) $\sqrt[4]{i/256}$; б) $\sqrt[3]{500\sqrt{3} - 500i}$.

30.2. Представить в алгебраической форме

а) $\ln(1 + i\sqrt{3})$; б) $(-12 + 5i)^{-i}$.

30.3. Исходя из определения тригонометрических и гиперболических функций, доказать $\operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 = [\operatorname{ch}(z_1 + z_2) + \operatorname{ch}(z_1 - z_2)]/2$.

30.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n + 2^n i}.$$

30.5. Найти угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = -2 + 3i$ при отображении $w = 1/(z - 1)^3$.

30.6. Найти аналитическую функцию $f(z) = u + iv$ по известной действительной (или мнимой) части и значению $f(z_0)$

а) $u = -y^3 + 3x^2y + 2x$, $f(1) = 2 + 2i$;
б) $v = x^2 - y^2 + 4xy - y - 2x$, $f(i) = 1 - 2i$.

30.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} |z| z dz,$$

где Γ : $\{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \leq 0\}$.

30.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z(z - \pi)} dz,$$

где Γ : а) $|z - 3| = 1$, б) $|z| = 3$, в) $|z| = 4$.

30.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+i) \left(\frac{z}{1+i}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{z^n}.$$

30.10. Найти первые три члена разложения функции $f(z) = \exp(\cos 2z)$ в ряд по степеням $z + \pi/4$.

30.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z - z_0$

а) $\frac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = -3 + i$;
б) $\frac{6z - 144}{72z^2 + 6z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$;
в) $z \sin \pi \frac{z-1}{z-2}$, $z_0 = 2$.

30.12. Для функции $1/(e^z + 1)$ найти изолированные особые точки и определить их тип.

30.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а) $\frac{z+3}{z^2+1} \sin(z+i)$, $z = -i$; б) $\frac{z^3-1}{(z+1)(z-2i)^3}$, $z = 2i$;
в) $z^3 \exp(7/z^2)$, $z = 0$; г) $\frac{e^{z^2}-1-z^2}{\sin z - z + z^3/6}$, $z = 0$;
д) $\frac{2z+i}{z^2+4} \sin \pi \frac{z+3}{2z}$, $z = \infty$; е) $z^2 \sin \frac{2\pi+i}{z}$, $z = \infty$.

30.14. Вычислить интегралы

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \int\limits_{|z|=2} z^3 \cos(2i/z) dz; & \text{б)} \int\limits_{|z|=1/4} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{z \operatorname{ch}(\pi iz)} dz; \\ \text{в)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 10x^2 + 9} dx; & \text{г)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x/2}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx; \\ \text{д)} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{6 + \sqrt{35} \sin t} dt; & \text{е)} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{7} + \sqrt{2} \cos t)^2} dt. \end{array}$$

30.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

- а) $E : \{0 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \operatorname{Im} z > 0\}, w = \cos z;$
- б) $E : \{|z| = 2, \operatorname{Im} z < 0\}, w = \ln z;$
- в) $E : \{\operatorname{Re} z > 1\}, w = (z - 3 + i)/(z + 1 + i).$

30.16. Конформно отобразить область $D : \{\operatorname{Re} z > -1\}$ на область $D^* : \{|w| < 1\}$ при условиях $w(0) = 0, \arg w'(0) = \pi$.

30.17. Найти изображение указанных функций

$$\begin{array}{ll} \text{а)} t^4 e^{-5t}; & \text{б)} \int\limits_0^t \tau^2 \cos(t - \tau) d\tau. \end{array}$$

30.18. Найти оригинал по заданному изображению

$$\text{а)} \frac{2}{p^3 - 8}; \quad \text{б)} \frac{p + 4}{p^2 + 4p + 5}.$$

30.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \dot{x} = \frac{1}{(1 + e^t)^2}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

30.20. Операционным методом решить задачу Коши

- а) $\ddot{x} + 2x = e^t, \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 2;$
- б) $\ddot{x} + 3\dot{x} - 10x = -\sin 3t, \quad x_0 = 3, \quad \dot{x}_0 = -1;$
- в) $\ddot{x} + 4x = t\theta(t)\theta(1-t) + (2-t)\theta(t-1)\theta(2-t),$
 $x_0 = \dot{x}_0 = 0.$

30.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} - 2(3t + 1)\dot{x} + (9t + 6)x = 0.$$

30.22. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = 5x/2 - y + 2, \end{cases} \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1.$$

Список литературы

1. Анго А. *Математика для электро и радиоинженеров.* – М.: Наука, 1964. – 772 с.
2. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. *Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход.* – М.: Мир, 1976. – 311 с.
3. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эстгольц Л.Э. *Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости.* – М.: Наука, 1965. – 288 с.
4. Багров В.Г., Бордовицын В.А. Классическая теория спина // Изв. вузов. Физика. – 1980. – № 2. – С. 67-76.
5. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. *Задачи по математической физике.* – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 350 с.
6. Боярчук А.К. *Справочное пособие по высшей математике. Т. 4: Функции комплексного переменного (теория и практика).* – М.: Изд-во УРСС, 1997. – 352 с.
7. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. *Сборник задач по математической физике.* – М.: Наука, 1972. – 688 с.
8. Буслаев В.С. *Вариационное исчисление.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. – 288 с.
9. Вазов В. *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1968. – 464 с.
10. Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике.* – М.: Наука, 1976. – 280 с.
11. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1981. – 512 с.
12. Владимиров В.С. *Сборник задач по уравнениям математической физики.* – М.: Наука, 1981. – 270 с.
13. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1975. – 320 с.
14. Гельфанд И.М., Фомин С.В. *Вариационное исчисление.* – М.: ГИФМЛ, 1961. – 228 с.
15. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Обобщенные функции и действия над ними.* – М.: Физматгиз, 1959. – 440 с.
16. Грищенко А.Е., Нагнибеда Н.И., Настасиев П.П. *Функции комплексного переменного. Решение задач.* – Киев: Вища школа, 1986. – 334 с.
17. Гурвиц А., Курант Р. *Теория функций.* – М.: Наука, 1968. – 618 с.
18. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. *Высшая математика в упражнениях и задачах.* Т. 2. – М.: Наука, 1980. – 366 с.
19. ДеБрейн Н.Г. *Асимптотические методы в анализе.* – М.: Изд-во иностр. литературы, 1961. – 248 с.
20. Дёч Г. *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа.* – М.: Наука, 1965. – 288 с.
21. Джейфрис Г., Свирлс Б. *Методы математической физики.* – М.: Мир, 1969 (Т. 1) – 424 с.; 1970 (Т. 2) – 352 с; 1970 (Т. 3) – 344 с.
22. Диткин В.А. Прудников А.П. *Интегральные преобразования и операционное исчисление.* – М.: Наука, 1974. – 544 с.
23. Евграфов М.А. *Аналитические функции.* – М.: Наука, 1968. – 472 с.

24. Евграфов М.А. *Асимптотические оценки и целые функции*. – М.: Наука, 1976. – 202 с.
25. Ефимов А.В. *Математический анализ (специальные разделы)*: Ч. I. – М.: Высшая школа, 1980. – 280 с.
26. Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г., Терпигорева В.М. *Математический анализ (специальные разделы)*: Ч. II. – М.: Высшая школа, 1980. – 296 с.
27. Зельдович Я.В., Яглом И.М. *Высшая математика для начинающих физиков и техников*. – М.: Наука, 1982. – 512 с.
28. Канторович М.И. *Операционное исчисление и процессы в электрических цепях*. – М.: Сов. радио, 1975. – 320 с.
29. Кеч В., Теодореску П. *Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике*. – М.: Мир, 1978. – 518 с.
30. Киселев А.И., Краснов М.Л., Макаренко Г.И. *Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости*. – М.: Наука, 1981. – 302 с.
31. Копсон Э. *Асимптотические разложения*. – М.: Мир, 1966. – 160 с.
32. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. *Интегральные уравнения*. – М.: Наука, 1976. – 216 с.
33. Курант Р., Гильберт Д. *Методы математической физики*. В 2-х т. – М.-Л.: Гостехиздат, 1951. – Т. 1, 476 с.; Т. 2, 544 с.
34. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. *Курс вариационного исчисления*. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 296 с.
35. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
36. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика*. – М.: Наука, 1965. – 204 с.
37. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля*. – М.: Наука, 1960. – 400 с.
38. Левинштейн М.Л. *Операционное исчисление и его приложение к задачам электротехники*. – М.-Л.: Энергия, 1964. – 466 с.
39. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций*. – В 2-х т. – Т. 1 М.: Наука, 1967. – 488 с.; Т. 2 М.: Наука, 1968. – 624 с.
40. Морс Ф.М., Фешбах Г. *Методы теоретической физики*. – М.: Мир, 1958 (Т. 1) – 930 с.; 1960 (Т. 2) – 886 с.
41. Мышкис А.Д. *Математика для втузов. Специальные курсы*. – М.: Наука, 1971. – 632 с.
42. Олвер Ф. *Асимптотики и специальные функции*. – М.: Наука, 1990. – 528 с.
43. Петровский И.Г. *Лекции об уравнениях в частных производных*. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
44. Привалов И.И. *Введение в теорию функций комплексного переменного*. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
45. Пчелин Б.К. *Специальные разделы высшей математики*. – М.: Наука, 1973. – 460 с.
46. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики*: Т. 1. *Функциональный анализ*. – М.: Мир, 1977. – 358 с.; Т. 2. *Гармонический анализ. Самосопряженность*. – М.: Мир, 1978. – 400 с.; Т. 3. *Теория рассеяния*. – М.: Мир, 1982. – 448 с.; Т. 4. *Анализ операторов*. – М.: Мир, 1982. – 432 с.
47. Рихтмайер Р. *Принципы современной математической физики*. – М.: Мир, 1982 (Т. 1) – 488 с.; 1984 (Т. 2) – 384 с.

48. Романовский П.И. *Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа.* – М.: Наука, 1964. – 304 с.
49. *Сборник задач по теории аналитических функций /* Под ред. М.А. Евграфова. – М.: Наука, 1972. – 387 с.
50. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. *Теория функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1974. – 320 с.
51. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. *Лекции по математической физике.* – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 352 с.
52. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. *Лекции по теории функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1973. – 408 с.
53. Смирнов В.И. *Курс высшей математики.* – Т. 3, ч. 2. – М.: Наука, 1969. – 672 с.
54. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* – М.: Наука, 1988. – 336 с.
55. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1977. – 736 с.
56. Федорюк М.В. *Асимптотика интегралы и ряды.* – М.: Наука, 1987. – 544 с.
57. Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1983. – 352 с.
58. Федорюк М.В. *Метод перевала.* – М.: Наука, 1977. – 368 с.
59. Френкель Я.И. Электродинамика вращающегося электрона // Собр. избранных трудов. Т. 2. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1958. – С. 460-476.
60. Харди Г.Х. *Расходящиеся ряды.* – М.: ИЛ, 1951. – 504 с.
61. Чудесенко В.Ф. *Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты).* – М.: Высшая школа, 1983. – 112 с.
62. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ.* Т. 1. – М.: Наука, 1985. – 336 с.
63. Шварц Л. *Математические методы для физических наук.* – М.: Мир, 1965. – 412 с.
64. Шелковников Ф.А., Тайкашвили К.Г. *Сборник упражнений по операционному исчислению.* – М.: Высшая школа, 1976. – 184 с.
65. Шилов Г.Е. *Математический анализ (специальный курс).* – М.: Физматгиз, 1960. – 388 с.
66. Шилов Г.Е. *Математический анализ (второй специальный курс).* – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 208 с.
67. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* – М.: Наука, 1969. – 424 с.
68. Эрдейи А. *Асимптотические разложения.* – М.: Физматгиз, 1962. – 128 с.

Издательство НТЛ
выпускает в 2002 году
второй том учебного пособия

Багров В. Г., Белов В. В., Задорожный В. Н., Трифонов А. Ю.
МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том включает в себя
часть III «Специальные функции»,
часть IV «Уравнения математической физики».

Пособие посвящено изложению теории специальных функций, а также методов решения интегральных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных первого и второго порядка. Оно содержит теоретический материал в объеме, предусмотренном ныне действующей программой курса высшей математики для инженерно-физических и физических специальностей университетов. Теоретический курс дополнен индивидуальными заданиями (30 вариантов) для самостоятельного решения по разделам «Специальные и обобщенные функции» и «Уравнения математической физики» курса «Высшая математика и математическая физика».

По вопросам приобретения книги обращаться в издательство

Россия, 634050, г. Томск,
пл. Ново-Соборная, 1
тел.: (3822) 53-35-77
факс: (3822) 52-67-68
e-mail: physics@ic.tsu.ru

*Багров Владислав Гавриилович,
Белов Владимир Владимирович,
Задорожный Валерий Николаевич,
Трифонов Андрей Юрьевич*

**Методы математической физики
Основы комплексного анализа.
Элементы вариационного исчисления
и теория обобщенных функций**

Учебное пособие

Научный редактор *профессор, д.ф.-м.н. С.П. Гулько*
Технический редактор *В.Н. Романенко*

Набор и верстка выполнены на компьютерной технике
в издательской системе *TeX – L^AT_EX*
с использованием семейства шрифтов Computer Modern