Математический анализ 2

Преподаватель:
Михальчук Александр Александрович
доцент кафедры
Высшей математики и математической физики ТПУ

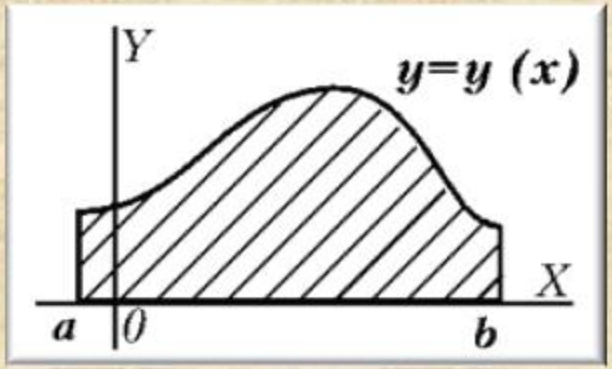
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

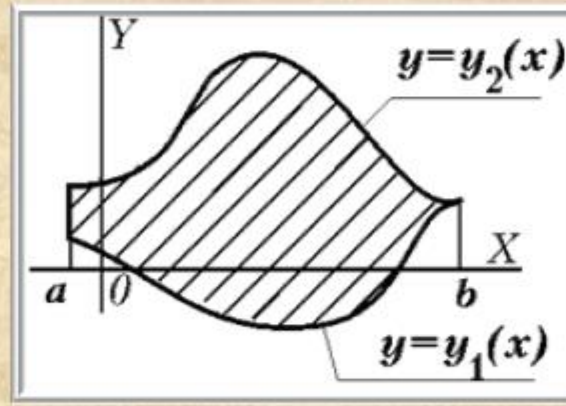
ПРИЛОЖЕНИЯ

Вычисление площадей плоских фигур

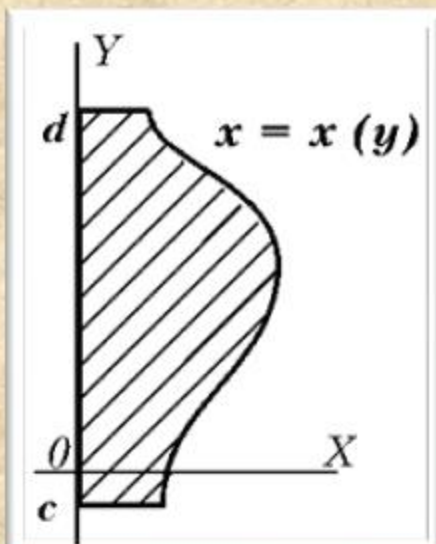
$$S = \int_a^b y(x)\,dx$$

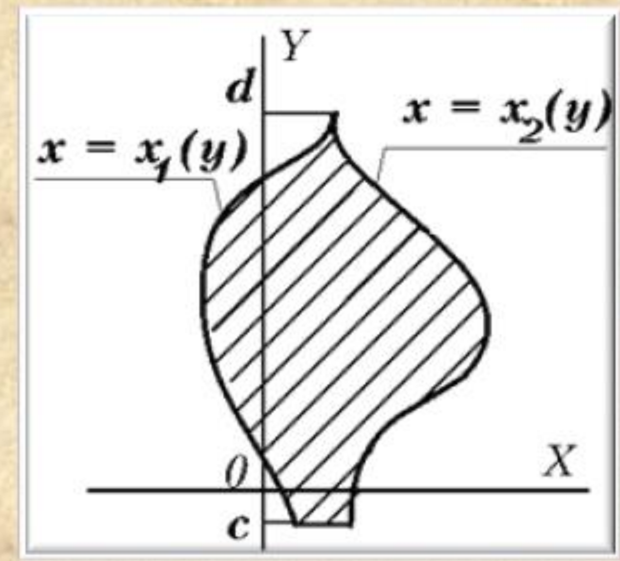


$$S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\,dx$$



$$S = \int_c^d x(y)\,dy$$

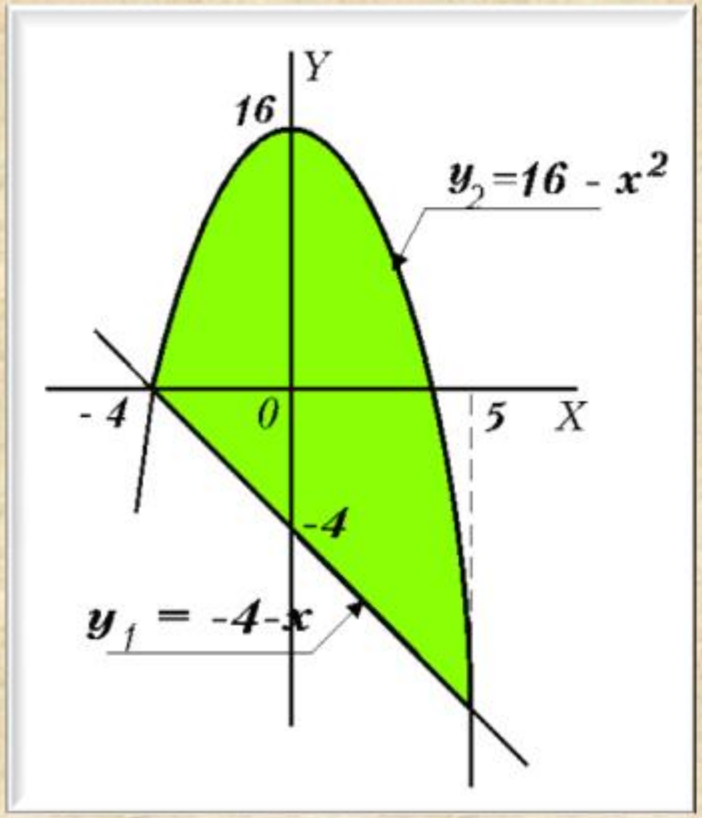




$$S = \int_c^d [x_2(y) - x_1(y)]\,dy$$

- **1.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: параболой

$y = 16 - x^2$ и прямой $x + y + 4 = 0$



Строим фигуру.

Находим абсциссы точек пересечения линий:

$$-4 - x = 16 - x^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = -4, \; x_2 = 5$$

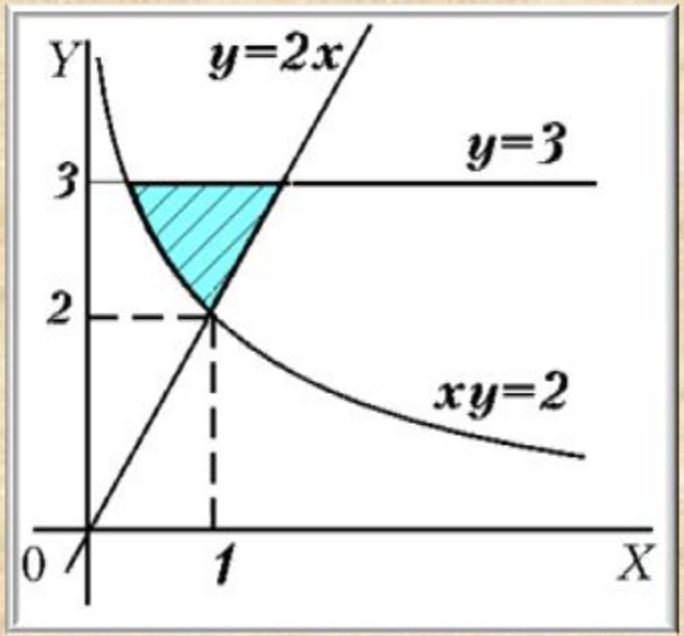
Площадь фигуры $S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\,dx = \int_{-4}^{5} \Big[(16 - x^2) - (-4 - x)\Big]\,dx =$

$$= \int_{-4}^{5} (20 - x^2 + x)\,dx = \left(20x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-4}^{5} = 180 - \frac{189}{3} + \frac{9}{2} = 121{,}5.$$

- 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$xy = 2, \quad y = 2x, \quad y = 3.$$

Строим фигуру.



Искомая площадь

Для решения задачи воспользуемся формулой

$$S = \int_{\text{ñ}}^{d} [x_2(y) - x_1(y)]\, dy.$$

где $x_1(y) = 2/y, \; x_2(y) = y/2,$

Значение $d = 3$ определилось по построению

Значение $c = 2$ получим, решая систему

$$xy = 2, \quad y = 2x \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{2} = 2, \quad y^2 = 4, \qquad y = \pm 2$$

$$S = \int_2^3 \left(\frac{y}{2} - \frac{2}{y} \right) dy = \left(\frac{y^2}{4} - 2\ln y \right) \Big|_2^3 = \frac{9}{4} - \frac{4}{4} - 2(\ln 3 - \ln 2) = \frac{5}{4} - 2\ln\frac{3}{2}.$$

Рассмотрим вычисление площади фигуры, границы которой заданы **параметрически**

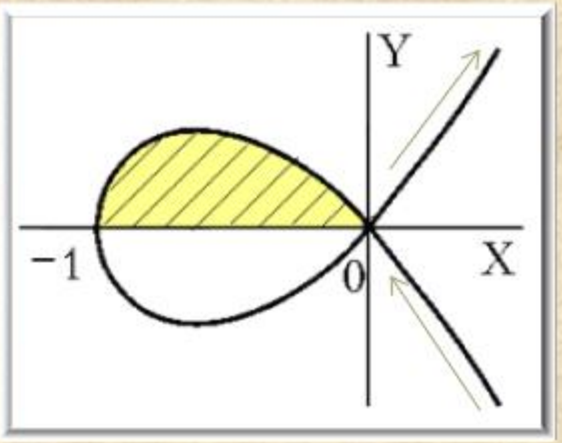
$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

В таких случаях в интеграле для вычисления площади делается замена переменной

Формула $\boxed{S = \int_a^b y(x)\,dx}$ принимает вид $\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt}$

Таким образом , под знак интеграла подставляем выражение для y , находим дифференциал второй функции $dx = x'(t)dt$, а также необходимо знать пределы изменения переменной t.

• **3.** Найти площадь петли кривой $x = t^2 - 1, \quad y = t^3 - t.$



Строим кривую по таблице значений.

t	x	y
-2	3	-6

t	x	y
-1	0	0
0	-1	0
1	0	0

t	x	y
2	3	6

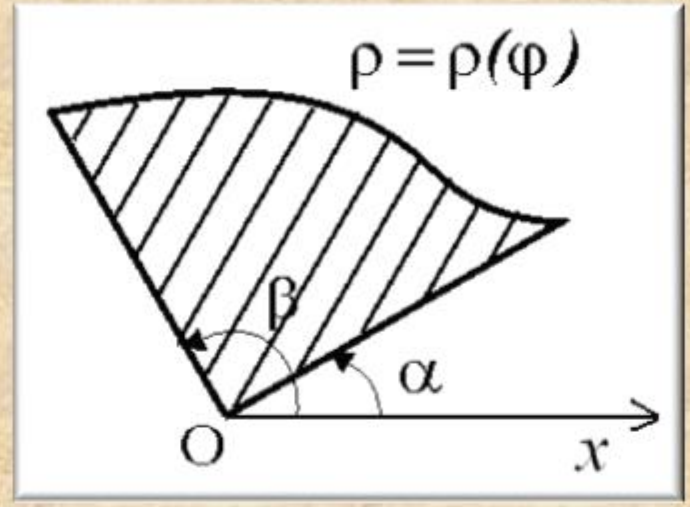
При вычислении площади используем симметрию области $S = 2\int\limits_{x_1}^{x_2} y(x)\,dx = 2\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'_t\,dt.$

Изменению x от -1 до 0

соответствует изменение параметра t от 0 до -1

$$S = 2\int\limits_0^{-1}(t^3 - t)\cdot(t^2 - 1)'\,dt = 2\int\limits_0^{-1}(t^3 - t)\cdot 2t\,dt = 4\int\limits_0^{-1}(t^4 - t^2)\,dt = 4\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{15}.$$

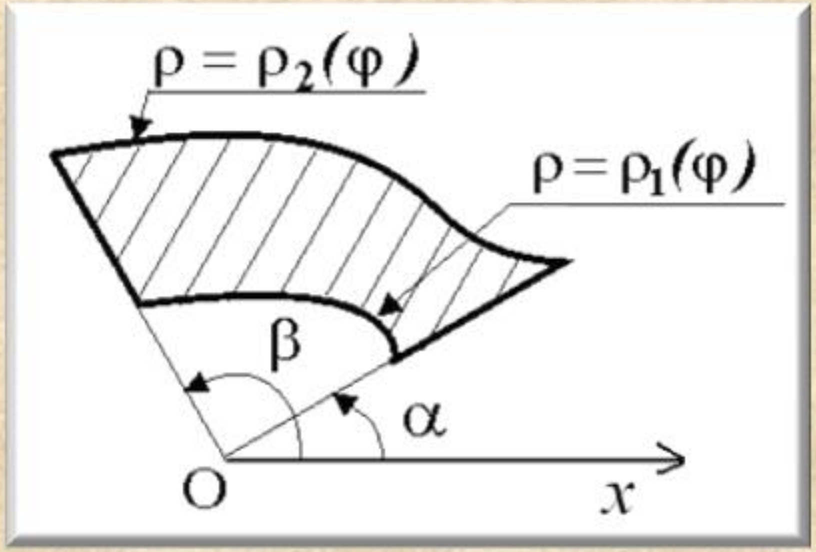
Рассмотрим вычисление площади фигуры, границы которой заданы в **полярной системе координат** уравнением



$$\rho = \rho(\varphi),$$

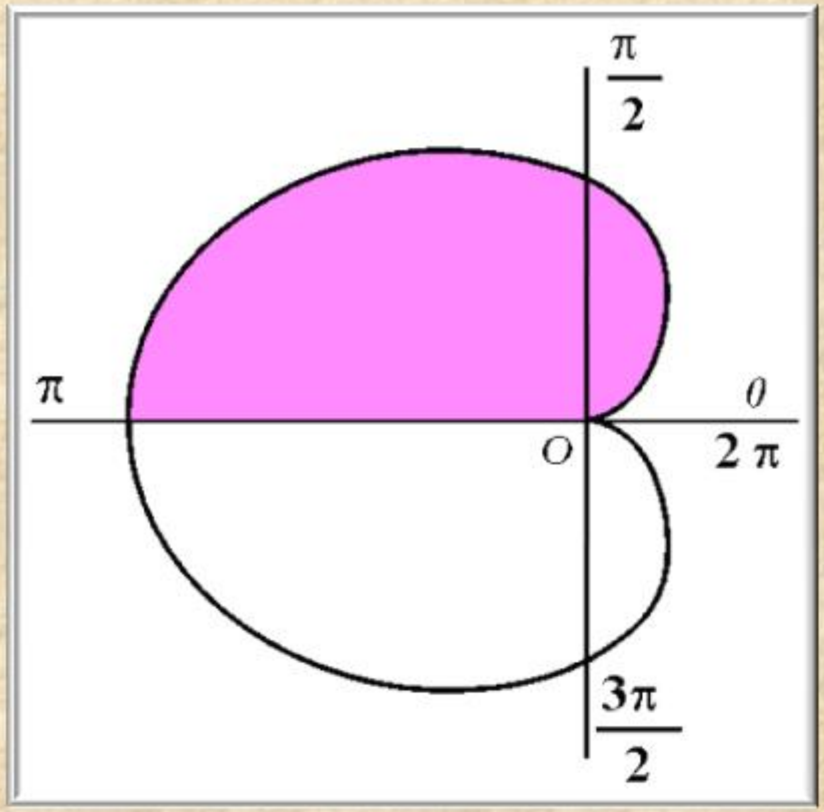
где $\alpha \le \varphi \le \beta$

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi}$$



$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)]\, d\varphi$$

- **4.** Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой



$$\rho = 1 - \cos\varphi.$$

φ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
ρ	0	1	2	1	2

При вычислении площади используем симметрию фигуры

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\pi}(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi = \int_0^{\pi}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

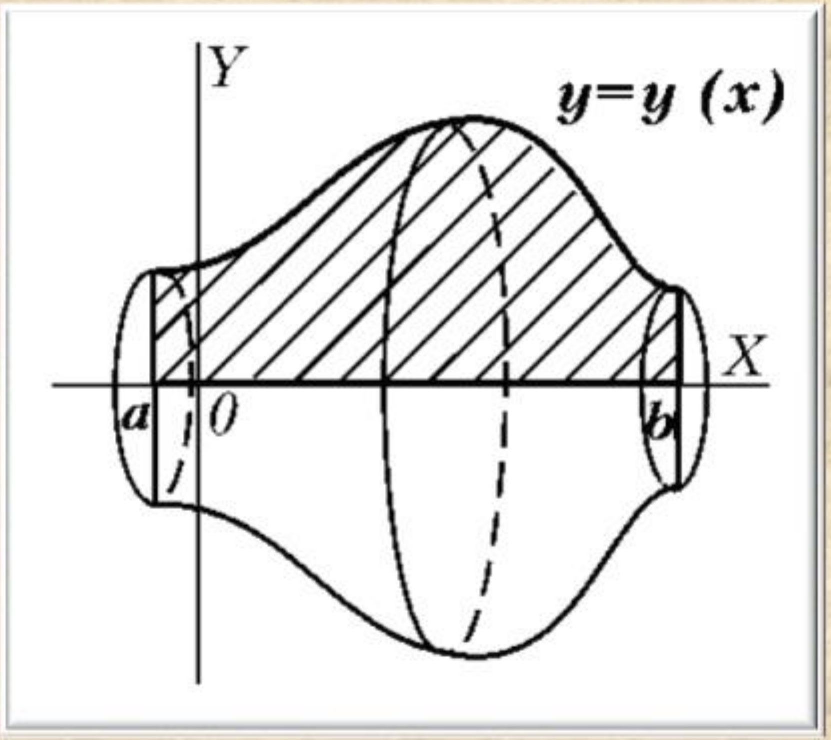
$$= \int_0^{\pi}\left(1-2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = \left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi.$$

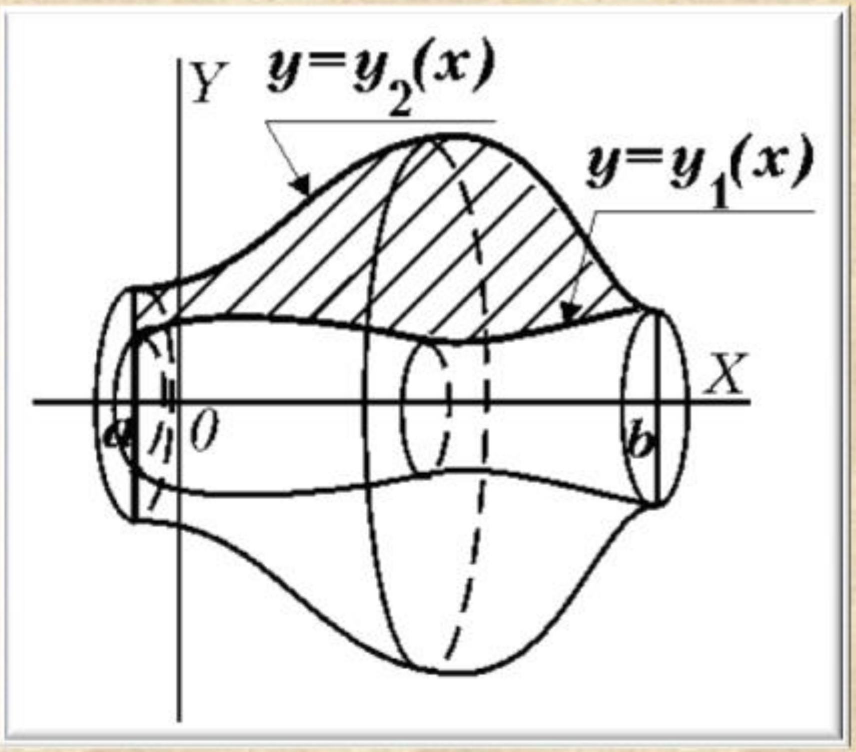
Вычисление объемов тел вращения

Вращение вокруг оси OX

$$V_{ox} = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx$$

$$V_{ox} = \pi \int_a^b [y_2{}^2(x) - y_1{}^2(x)]\,dx$$

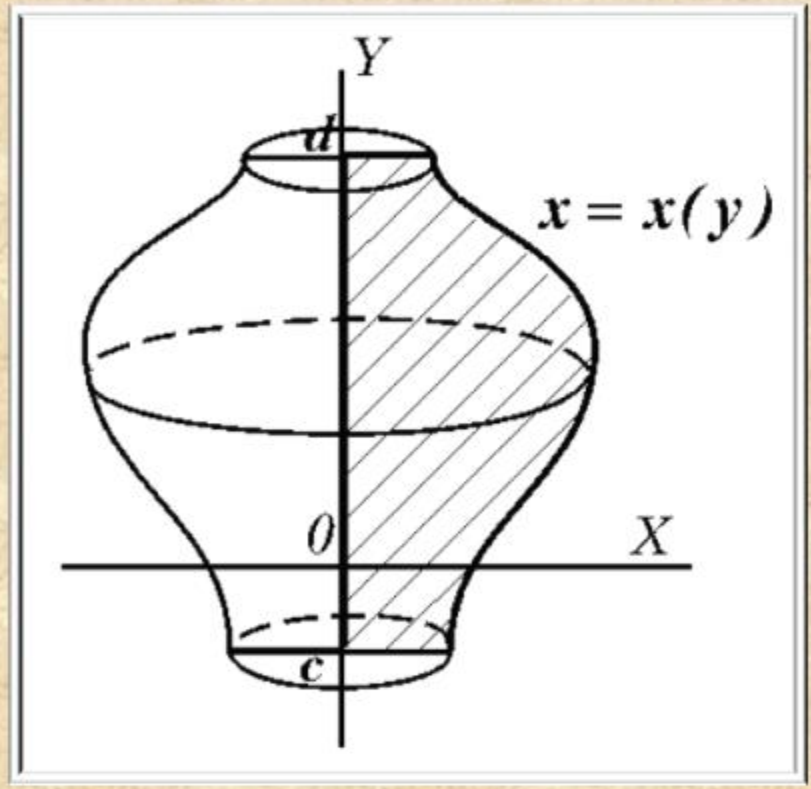


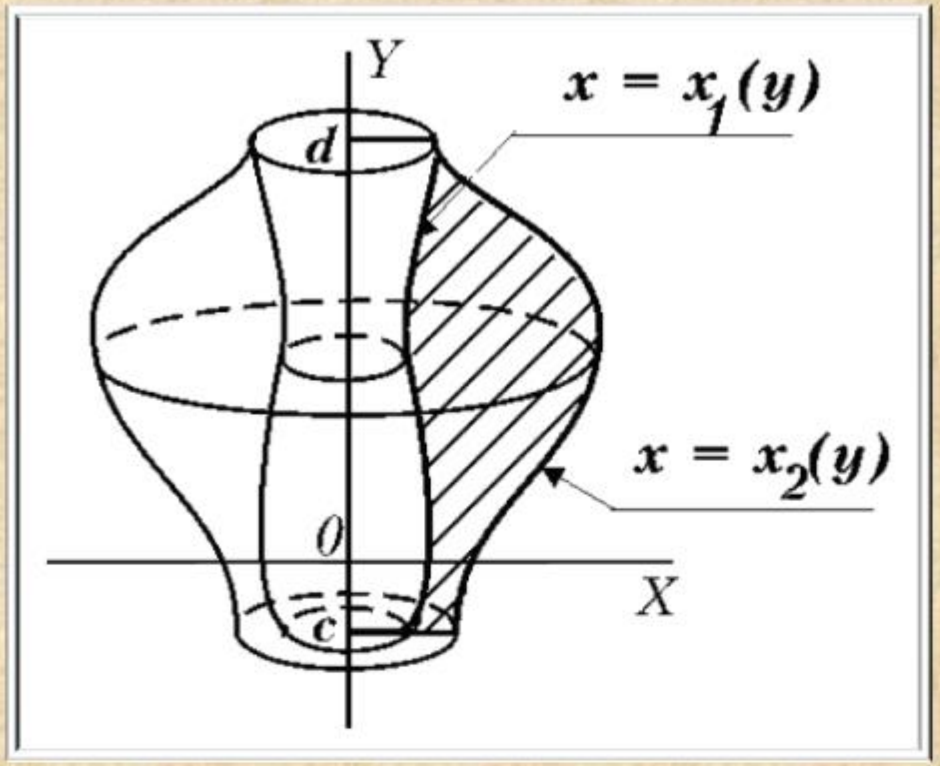


Вращение вокруг оси OY

$$V_{oy} = \pi\int_c^d x^2(y)\,dy$$

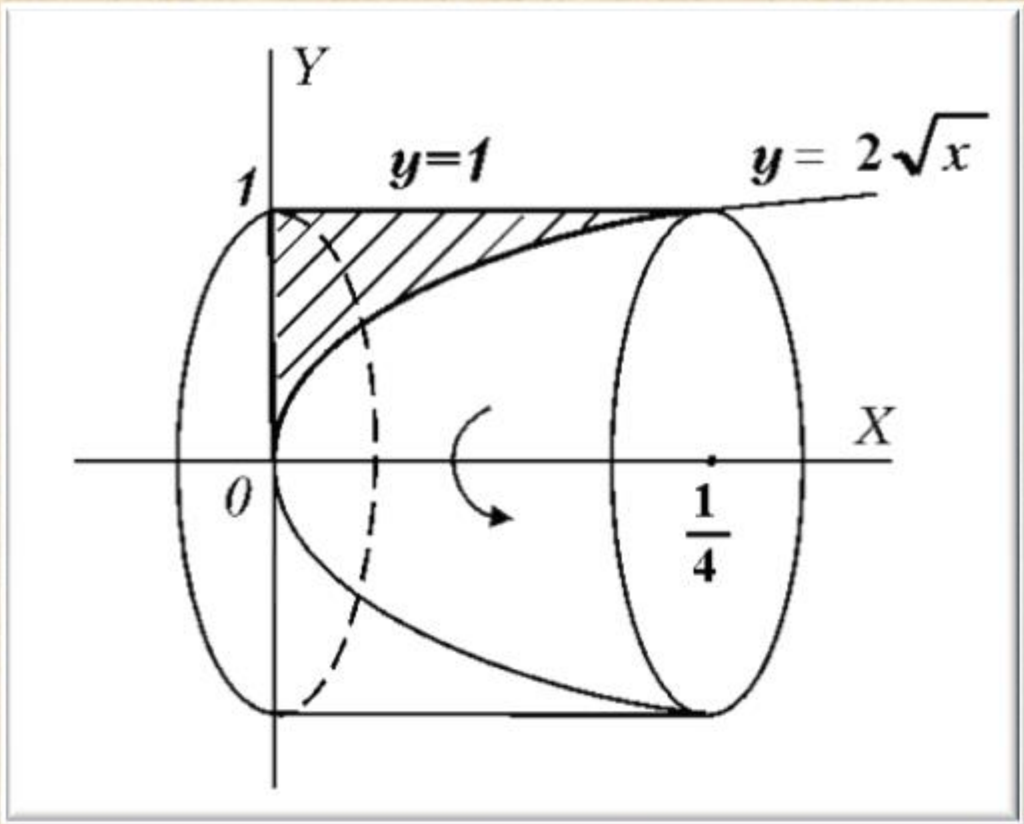
$$V_{oy} = \pi\int_c^d [x_2{}^2(y) - x_1{}^2(y)]\,dy$$





1. Найти объем тела вращения вокруг оси OX

фигуры, ограниченной линиями $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 1, \quad x = 0.$



Для нахождения объема воспользуемся формулой

$$V_{ox} = \pi\int_a^b [y_2{}^2(x) - y_1{}^2(x)]\, dx.$$

В нашем случае

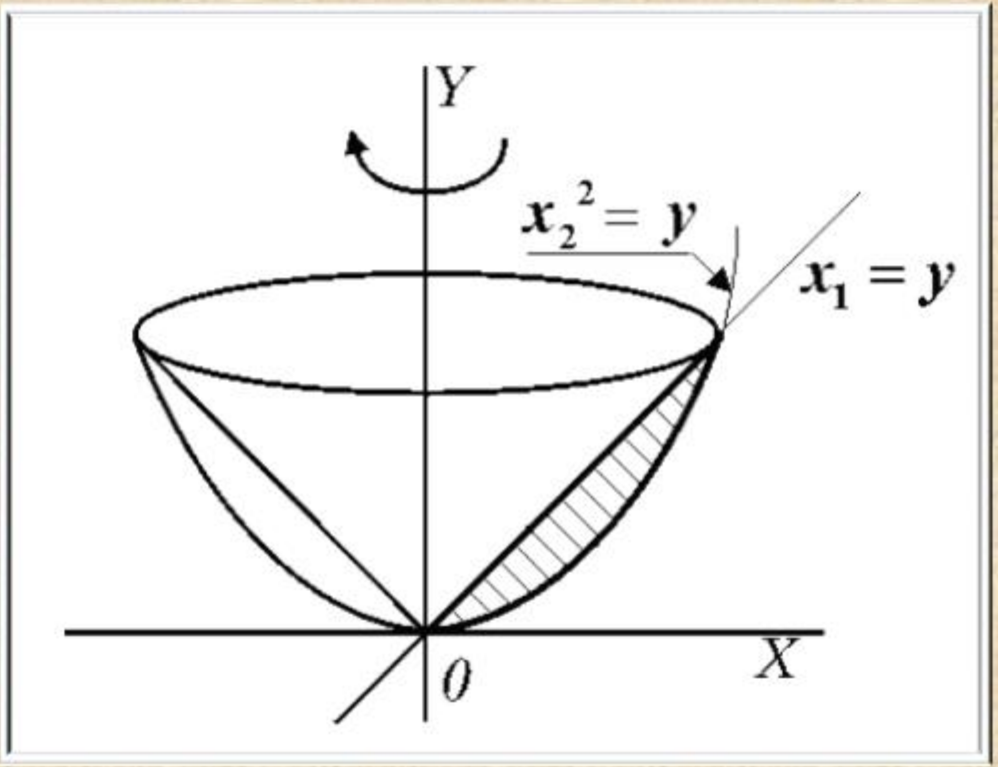
$$y_2(x) = 1, \; y_1(x) = 2\sqrt{x}.$$

Находим пределы интегрирования из условия

$$2\sqrt{x} = 1, \;\Rightarrow\; x = 1/4.$$

$$V_{ox} = \pi\int_0^{1/4} [1^2 - (2\sqrt{x})^2]\, dx = \pi\int_0^{1/4} (1 - 4x)\, dx = \pi(x - 2x^2)\Big|_0^{1/4} = \frac{\pi}{8}.$$

2. Найти объем тела вращения вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, \quad y = x.$



Для нахождения объема воспользуемся формулой

$$V_{oy} = \pi\int_c^d [x_2^{\ 2}(y) - x_1^{\ 2}(y)]\,dy.$$

Пределы интегрирования находим из равенства

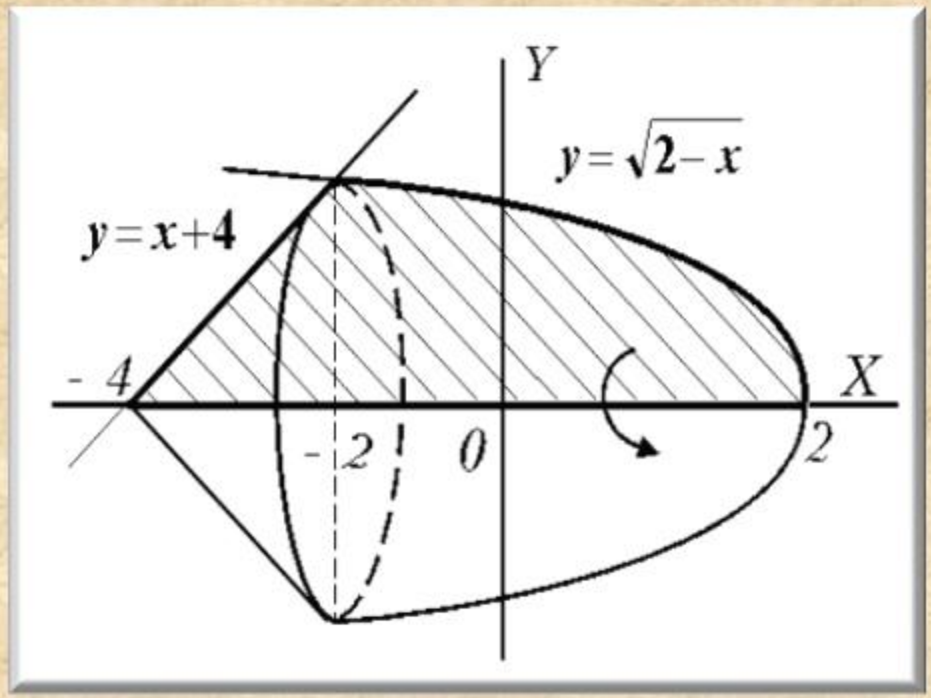
$$x^2 = x \;\Rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = 1$$

$$y_1 = c = 0,\; y_2 = d = 1.$$

$$V_{oy} = \pi\int_0^1 (y - y^2)\,dy = \pi\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

3. Найти объем тела вращения вокруг оси OX

фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{2 - x}, \quad y = x + 4, \quad y = 0.$



Фигура сверху ограничена двумя линиями, и объем тела вращения будет равен сумме объемов.

Найдем координаты точки пересечения прямой и параболы

$$x + 4 = \sqrt{2 - x} \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 2 - x$$

$$x^2 + 9x + 14 = 0 \Rightarrow x_1 = -7, \; x_2 = -2$$

Объем нахождении по формуле

$$V_{ox} = \pi \int_a^b y^2(x)\, dx$$

Линия, ограничивающая фигуру сверху, задана составной функцией, т.е. системой

$$y(x) = \begin{cases} x + 4, & x \in [-4; -2], \\ \sqrt{2 - x}, & x \in [-2; 2]. \end{cases}$$

Поэтому необходимо разбить интеграл на два интеграла, в каждом из которых будет своя подынтегральная функция

$$V_{ox} = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx = V_{ЛЕВЫЙ} + V_{ПРАВЫЙ} =$$

$$= \pi \int_{-4}^{-2} (x+4)^2\,dx + \pi \int_{-2}^{2} (\sqrt{2-x})^2\,dx = \pi \int_{-4}^{-2} (x^2 + 8x + 16)\,dx +$$

$$+ \pi \int_{-2}^{2} (2-x)\,dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} + 4x^2 + 16x\right)\Big|_{-4}^{-2} + \pi\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{32\pi}{3}.$$

Вычисление длин дуг плоских кривых

Пусть дана линия L, заданная в декартовой системе координат уравнениями $y = y(x)$ или $x = x(y)$, И требуется найти

длину участка линии, заключенного между двумя точками.

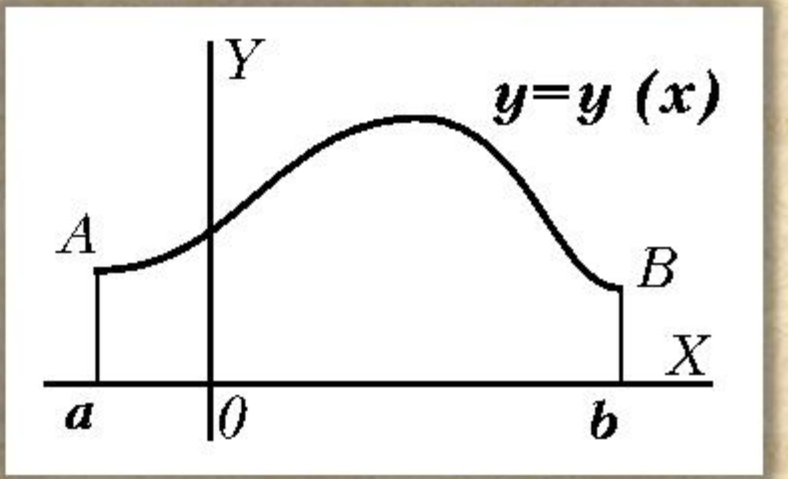
Длина участка кривой находится по формулам

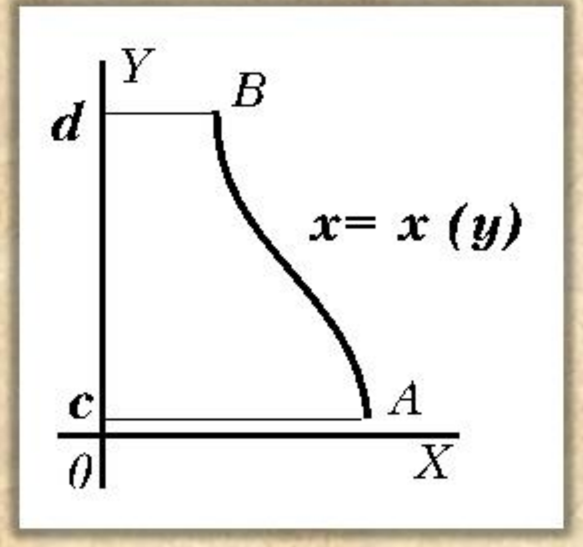
1) $y = y(x)$,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'_x\right)^2}\, dx.$$

2) $x = x(y)$,

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(x'_y\right)^2}\, dy.$$





Если кривая задана параметрически, то формула вычисления длины дуги кривой принимает вид

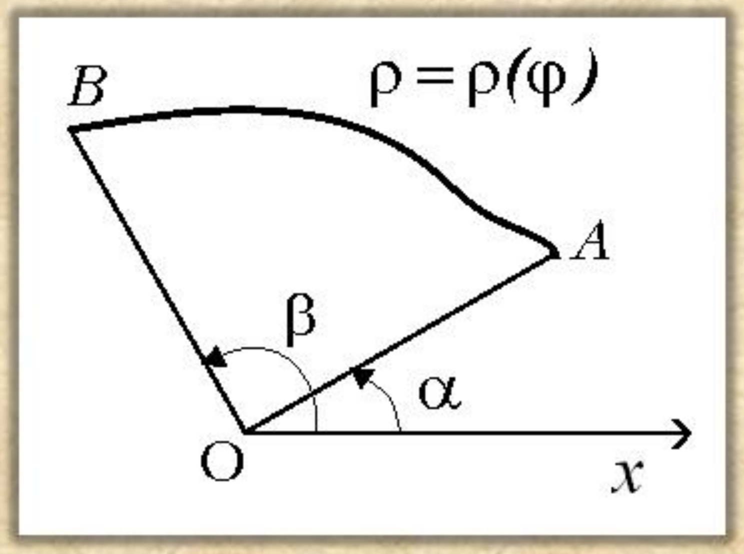
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$$

$$\boxed{L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt.}$$

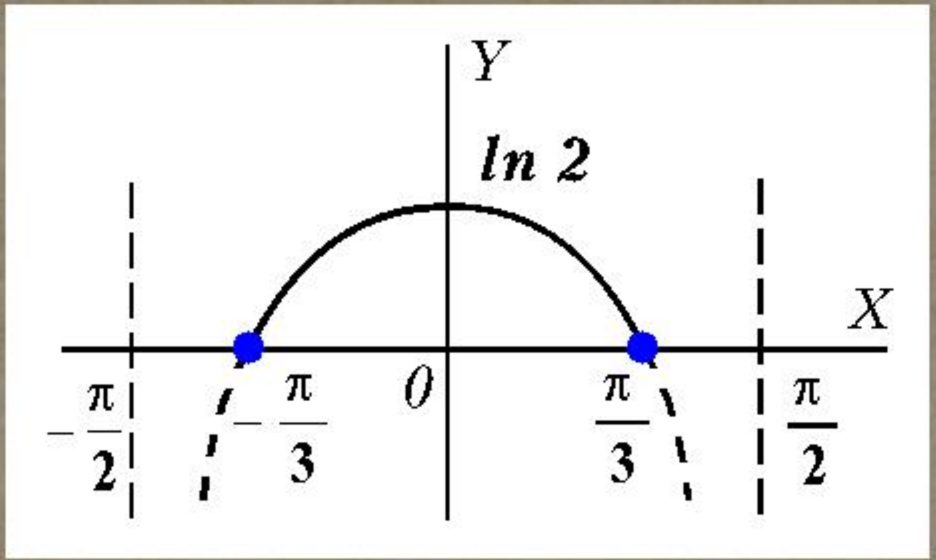
Если кривая задана в полярной системе координат, то формула вычисления длины дуги кривой принимает вид

$$\rho = \rho(\varphi),$$

$$\boxed{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\, d\varphi.}$$



1) Найти длину линии $y = \ln(2\cos x)$ между соседними точками пересечения с осью OX.



Пределы интегрирования находим из условия

$$y = 0 \Rightarrow \ln(2\cos x) = 0 \Rightarrow$$

$$2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = 1/2 \Rightarrow$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{3}, \qquad x_2 = \frac{\pi}{3}.$$

Найдем предварительно

$$y'_x = \frac{1}{2\cos x}(-2\sin x) = -\operatorname{tg} x,$$

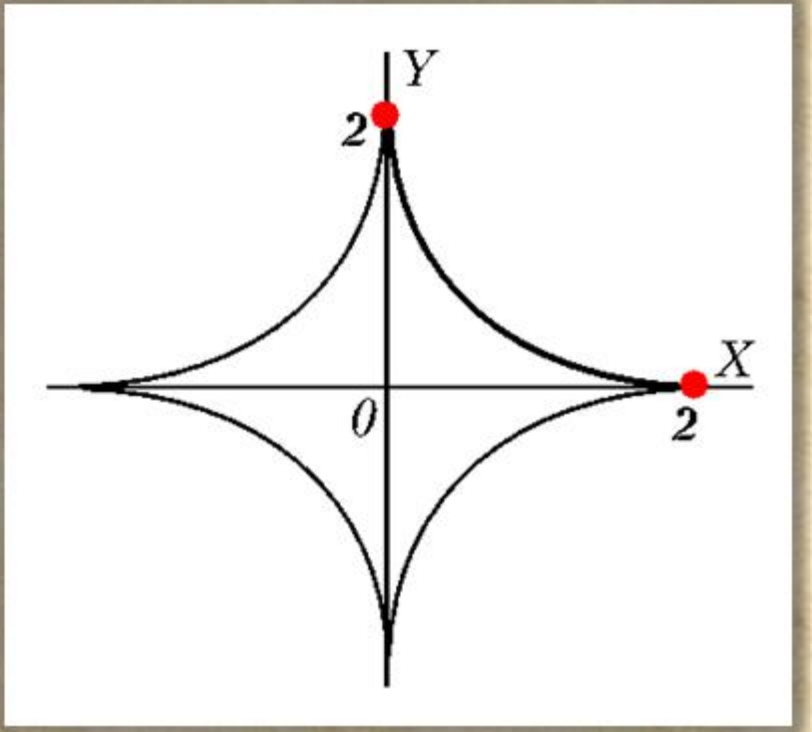
$$1 + y'^2_x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2_x}\, dx = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sqrt{1/\cos^2 x}\, dx = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg}\left|\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| \Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\right| \approx 2{,}6.$$

2) Найти длину части астроиды $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi/2$.

Предварительно находим



$$x'_t = -6\cos^2 t\, \sin t, \quad y'_t = 6\sin^2 t\, \cos t,$$

$$x'^2_t + y'^2_t = 36\cos^4 t\, \sin^2 t + 36\sin^4 t\, \cos^2 t =$$

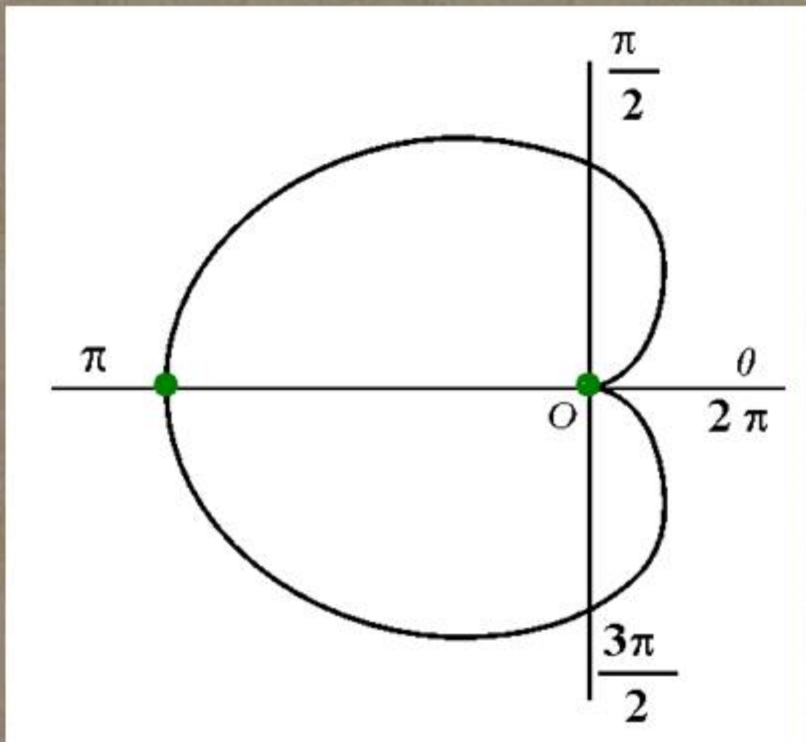
$$= 36\sin^2 t\, \cos^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) =$$

$$= 36\sin^2 t\, \cos^2 t = 9\sin^2 2t.$$

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{9\sin^2 2t} = 3|\sin 2t|.$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\, dt = 3\int_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt = -\frac{3}{2}\cos 2t\, \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{3}{2}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{3}{2}(-1-1) = 3.$$

3) Найти длину кардиоиды $\rho = 1 - \cos\varphi.$



Находим производную

$$\rho' = (1 - cos\,\varphi)' = sin\,\varphi$$

Вычисляем выражение

$$\rho^2 + \rho'^2 = (1 - cos\,\varphi)^2 + sin^2\varphi =$$

$$= 2(1 - cos\,\varphi) = 4\,sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Находим длину, используя симметрию кривой

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho_{\varphi}'^2}\, d\varphi = 2 \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{4\,sin^2\frac{\varphi}{2}} \cdot d\varphi = 4 \cdot \int_0^{\pi} sin\frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi =$$

$$= -8\,cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = -8 \cdot (cos\frac{\pi}{2} - cos\,0) = -8 \cdot (0 - 1) = 8.$$

спасибо

за

внимание