

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
**«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

---

# **ВЕЩЕСТВЕННЫЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

*Рекомендовано в качестве учебного пособия  
Редакционно-издательским советом  
Томского политехнического университета*

Издательство  
Томского политехнического университета  
2009

УДК 681.51.01:519.6(076)

ББК 32.965я73

В40

*Авторы*

А.С. Алексеев, А.А. Антропов,  
В.И. Гончаров, С.В. Замятин, В.А. Рудницкий

**Вещественный интерполяционный метод в задачах автоматического управления:** учебное пособие / А.С. Алексеев, А.А. Антропов, В.И. Гончаров, С.В. Замятин, В.А. Рудницкий; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 219 с.

В учебном пособии изложен вещественный интерполяционный метод расчета систем автоматического управления, ориентированный на численные процедуры и компьютерные технологии. Основное внимание уделено синтезу регуляторов систем нескольких классов: непрерывных, цифровых, двусвязных, с распределенными параметрами, самонастраивающихся.

Пособие разработано в рамках реализации Инновационной образовательной программы ТПУ по направлению «Информационно-коммуникационные системы и технологии». Предназначено для магистрантов, обучающихся по магистерской программе 550201 «Управление в технических системах», а также студентов, обучающихся по направлению 550200 «Автоматизация и управление в технических системах» и близким специальностям.

УДК 681.51.01:519.6(076)

ББК 32.965я73

*Рецензенты*

Доктор технических наук, профессор,  
заведующий кафедрой ТУСУРа  
*А.М. Корилов*

Доктор технических наук,  
заведующий кафедрой ТУСУРа  
*А.Г. Гарганеев*

Доктор технических наук, профессор ТПУ  
*В.И. Сырямкин*

© ГОУ ВПО «Томский политехнический университет», 2009

© Алексеев А.С., Антропов А.А., Гончаров В.И.,  
Замятин С.В., Рудницкий В.А., 2009

© Оформление. Издательство Томского  
политехнического университета, 2009

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано коллективом авторов на основе занятий (лекционных, практических, курсового проектирования), проводимых некоторыми из них для студентов направления 550200 «Автоматизация и управление в технических системах», для студентов специальностей 071800 «Мехатроника», а также на основе результатов, полученных при выполнении ряда проектов по заданиям производственных предприятий. Пособие раскрывает содержание вещественного интерполяционного метода синтеза систем автоматического управления (ВИМ), который относится к группе численных и ориентирован преимущественно на компьютерные технологии выполнения расчетов.

Учебное пособие содержит восемь глав. В первой изложено вещественное интегральное преобразование, позволяющее получать модели систем и сигналов в виде функций-изображений с вещественным аргументом. Там же рассмотрен способ перехода к численным моделям, удобным для представления и действий над ними в среде ЭВМ.

Во второй главе рассмотрены основные задачи, решаемые при синтезе САУ с привлечением ВИМ. Основное внимание уделено следующим задачам: формированию уравнений синтеза регуляторов, получению моделей эталонных САУ по импульсным реакциям, переходным характеристикам, прямым показателям качества, итерационному способу получения приближенного решения.

Третья глава раскрывает применение ВИМ в задачах аппроксимации сложных передаточных функций, которые могут содержать не только дробно-рациональные выражения высокого порядка, но и трансцендентные и иррациональные составляющие. Алгоритмы решения подобных задач распространяются на системы, содержащие объекты управления с распределенными параметрами. Здесь же рассмотрены важные вопросы получения решений на основе равномерного приближения, в том числе наилучшего.

Четвертая глава посвящена задачам синтеза цифровых регуляторов. Наряду со сведениями о типовых преобразованиях цифровых САУ приведены основы вещественного дискретного преобразования, ориентированного на получение цифровых регуляторов.

В пятой главе приведены сведения, напрямую не связанные с основной темой – применением ВИМ в задачах синтеза динамических

систем управления, но позволяют обеспечивать робастность систем, полученных на основе ВИМ, например, при изменении нагрузки. Рассмотрены вопросы создания и исследования систем с интервальными параметрами и обеспечения на этой основе гарантированного качества синтезируемых систем. Представленный в главе подход можно рассматривать как альтернативный и, как показали исследования САУ, он позволяет добиваться примерно тех же результатов, что и ВИМ. Это в свою очередь позволяет, где это допустимо, объединить возможности ВИМ и интервального метода для достижения конечного результата наиболее целесообразным способом.

Шестая глава обобщает ВИМ на многомерные системы. Ввиду ограниченного объема пособия и необходимости изложения достаточно конкретных сведений, позволяющих использовать метод в практических задачах, рассмотрение ограничено двумерными системами. Авторы полагают, что изложенный подход позволит читателю самостоятельно обобщить результаты на системы с большим числом входных и выходных координат.

В седьмой главе базовым направлением являются задачи идентификации, настройки и самонастройки регуляторов САУ, которые на современном уровне развития промышленного производства оказываются чрезвычайно актуальными. Представлены решения задач идентификации объектов управления, возможности ручной, автоматизированной и автоматической настройки регуляторов.

В последней, восьмой, главе работы представлено приложение ВИМ к задачам построения исполнительных систем роботов с самонастройкой. Рассмотрена возможность идентификации управляемых звеньев манипуляторов по переходным процессам на этапах начала и окончания движения, дополненным кинематическими соотношениями.

Предисловие и главы 1–4 написаны В.И. Гончаровым, глава 5 – С.В. Замятиным (за исключением § 5.3, который написан С.А. Гайворонским), глава 6 – А.А. Антроповым, глава 7 – Рудницким В.А. (за исключением § 7.5, который написан В.И. Гончаровым, С.В. Замятиным, Д.А. Плотниковым, и § 7.6 написан Д.А. Плотниковым), глава 8 – А.С. Алексеевым.

Авторы выражают искреннюю благодарность заведующему кафедрой «Автоматизированные системы управления» ТУСУРа профессору А.М. Корикову, заведующему кафедрой «Информационно-измерительная техника» ТУСУРа профессору А.Г. Гарганееву, профессору ТПУ В.И. Сырямкину за рецензирование работы и конструктивные замечания и рекомендации, способствующие улучшению содержания книги.

# ГЛАВА 1. МОДЕЛИ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА

## 1.1. Вещественное интегральное преобразование

Существует большое число классификационных признаков, используемых при структуризации систем автоматического управления (САУ) и их элементов. Это объясняется разнообразием функций, назначений, способов управления, исполнений и другими особенностями систем управления. Одна из наиболее удобных с позиций расчета САУ классификаций в качестве признака использует вид математического описания /1/. Первоначально она была предложена для численных представлений, но по сути является более общей. Выделяют три основных группы:

1. Методы преобразования Лапласа, основанные на отображении моделей в виде совокупности нулей и полюсов на всей комплексной плоскости.
2. Методы, использующие проекцию комплексной плоскости на мнимую ось.
3. Методы, использующие проекцию комплексной плоскости на вещественную положительную полуось.

Первая группа методов пояснений не требует – это классический вариант, используемый при описании САУ, синтезе регуляторов и анализе систем. Вторая группа тоже хорошо известна под общим названием «частотный метод». Третья группа наименее представительна, поэтому приведем основные сведения о ней, опираясь на преобразование Лапласа.

Обратимся к формуле прямого преобразования Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad p = \delta + j\omega. \quad (1.1)$$

В нее входят функция-изображение  $F(p)$ , преобразуемая функция  $f(t)$  и комплексная переменная  $p = \delta + j\omega$ . Выделим главное с позиций математического описания и расчета САУ: функции  $F(p)$  являются изображениями и потому их применение более предпочтительно по сравнению с функциями времени  $f(t)$ . Примерами, подтверждающими этот тезис, могут служить операции интегрирования и дифференцирования. Так, достаточно сложной операции дифференцирования функции времени  $f(t)$  соответствует в области изображений в случае нулевых начальных условий значительно более простая операция умножения

функции  $F(p) = L\{f(t)\}$  на переменную  $p: \frac{d}{dt} f(t) \doteq pF(p)$ . Интегрированию в области оригиналов соответствует деление функции-изображения  $F(p)$  на переменную  $p$ .

Для получения моделей, позволяющих использовать преимущества области изображений, привлекают преобразования Лапласа, Фурье и некоторые другие. Модели в виде функций  $F(p)$  и  $F(j\omega)$  обладают отмеченными выше преимуществами, но в то же время оказываются недостаточно эффективными при численных реализациях. Источником трудностей при таких операциях является мнимая составляющая  $j\omega$  в комплексной переменной  $p = \delta + j\omega$ . Рассмотрим возможность устранения источника указанных трудностей.

Выделим в (1.1) два частных случая:

а)  $\delta = 0$ , когда комплексная переменная  $p$  обращается в чисто мнимую переменную  $p = j\omega$ , а формула (1.1) принимает вид

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt; \quad (1.2)$$

б)  $\omega = 0$ , при этом комплексная переменная  $p$  вырождается в вещественную  $p = \delta$ , а исходная формула (1.1) принимает вид

$$F(\delta) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\delta t} dt. \quad (1.3)$$

Можно видеть, что формула (1.2) определяет прямое преобразование Фурье и является базовой для группы частотных методов.

Второй частный случай, приводящий к формуле (1.3), не столь широко известен, но имеет привлекательные и существенно новые возможности. Выделим главное с позиций математического описания и расчета САУ: во-первых, функции  $F(\delta)$  являются изображениями и потому их использование более предпочтительно по сравнению с функциями времени  $f(t)$ ; во-вторых, переменная в (1.3) не содержит мнимой составляющей.

Условия существования и единственности функции  $F(\delta)$  определяются сходимостью интеграла (1.3). Поэтому наложим ограничение на переменную  $\delta$  и будем рассматривать преобразование

$$F(\delta) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\delta t} dt, \quad \delta \in [C, \infty), \quad C \geq 0. \quad (1.4)$$

В приложении к линейным САУ, когда функция  $f(t)$  представляет собой временную динамическую характеристику, сходимость обеспечивают выбором соответствующего значения параметра  $C$ . Так, для ус-

тойчивой системы, имеющей импульсную переходную характеристику  $k(t) = f(t)$ , можно принять  $C = 0$ . В случае использования переходной характеристики  $h(t) = f(t)$ , соответствующей устойчивой системе, условие сходимости интеграла определяется тоже достаточно просто:  $\delta \in [0, \infty)$  или  $C > 0$ .

В дальнейшем, если не оговаривается иное, будем полагать, что в (1.4) функция-оригинал  $f(t)$  является импульсной реакцией минимально-фазовой системы, так что интеграл в (1.4) сходится уже при  $C = 0$  и всегда можно принять  $\delta \in [0, \infty)$ . Именно такие системы за редким исключением рассматриваются в практических задачах и потому принятое предположение фактически не приводит к снижению общности рассмотрения, но в то же время снимает вопросы ограничения переменной  $\delta$ .

Для эффективного использования вещественных функций  $F(\delta)$  важно знать их положительные особенности и свойства. Приведем наиболее важные:

1. Функции  $F(\delta)$  относятся к области изображений и потому в большинстве случаев выполнение действий над ними оказывается более экономичным по сравнению с соответствующими операциями в области времени.

2. Функции  $F(\delta)$  имеют графические представления, что делает их и действия над ними наглядными.

3. Функции  $F(\delta)$  не содержат мнимой составляющей, поэтому численные способы действий над ними оказываются более экономичными по сравнению с изображениями по Фурье и Лапласу.

## 1.2. Получение вещественных изображений. Вещественные передаточные функции

Для получения вещественных функций-изображений  $F(\delta)$  по функциям времени  $f(t)$  используется формула прямого  $\delta$ -преобразования (1.4). Это очевидный, но не единственный путь решения задачи. Кроме того, он не всегда прост в техническом отношении, а в некоторых случаях им трудно или даже невозможно воспользоваться. Действительно, операция интегрирования в (1.4) при каких-то особенностях функции  $f(t)$  может оказаться чрезмерно трудоемкой. Кроме того, в практических задачах аналитическое представление функции  $f(t)$  может быть неизвестно, например, в случае использования результатов эксперимента, когда  $f(t)$  оказывается заданной таблицей или графиком. Между тем в общем случае эффективность математических моделей во многом оп-

ределяется тем, насколько просто можно получать такие модели, насколько просто осуществляется переход от одной формы описания САУ к другой и т. п. Если эти условия не выполняются, то прямой путь нахождения  $F(\delta)$  не представляет интереса и приходится искать более рациональные способы решения задачи.

Имеется достаточно простой способ получения вещественных изображений  $F(\delta)$ . Он основан на формальной замене комплексной переменной  $p$  на вещественную  $\delta$  в формуле преобразования Лапласа (1.1), который был рассмотрен в разделе 1.1 как частный случай. Из него следует, что вещественное изображение  $F(\delta)$  можно получить по изображению  $F(\delta)$  путем замены переменных:  $p \rightarrow \delta \in [C, \infty)$ ,  $C \geq 0$ . Этот путь является особенно важным потому, что позволяет воспользоваться всем имеющимся богатством соответствий оригиналов и изображений по Лапласу, созданных к настоящему времени.

Оба рассмотренных способа получения вещественных изображений распространяются на задачи определения изображений сигналов САУ и передаточные функции систем и их элементов. В последнем случае функция времени  $f(t)$  должна иметь смысл импульсной переходной характеристики  $k(t)$ . Тогда в соответствии с формулой (1.4) будем иметь

$$W(\delta) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-\delta t} dt.$$

Смысл полученного результата – функция  $W(\delta)$  является вещественной передаточной функцией САУ, имеющей импульсную реакцию  $k(t)$ .

Функция  $W(\delta)$  может быть получена другим путем – на основе определения передаточной функции как отношения изображения выходного сигнала  $Y(\delta)$  к изображению входного сигнала  $X(\delta)$  (при нулевых начальных условиях):

$$W(\delta) = \frac{Y(\delta)}{X(\delta)} = \frac{\int_0^{\infty} y(t) e^{-\delta t} dt}{\int_0^{\infty} x(t) e^{-\delta t} dt}.$$

При этом соотношение «вход-выход» системы принимает вид  $Y(\delta) = W(\delta)X(\delta)$ .

Для систем с сосредоточенными параметрами вещественные передаточные функции остаются дробно-рациональными:

$$W(\delta) = \frac{b_m \delta^m + b_{m-1} \delta^{m-1} + \dots + b_1 \delta + b_0}{a_n \delta^n + a_{n-1} \delta^{n-1} + \dots + a_1 \delta + 1}. \quad (1.5)$$

Для систем с распределенными параметрами получаемые изображения могут содержать не только дроби, но и трансцендентные и иррациональные выражения.

### 1.3. Математические модели динамических систем в форме численных характеристик

Получение и применение вещественных функций-изображений как математических описаний систем управления, их элементов и сигналов создает благоприятные предпосылки для решения задач исследования и расчета САУ. Их реализация в условиях широкого применения цифровой вычислительной техники должна быть осуществлена не только в форме аналитических решений, но и численных процедур, ориентированных на компьютерные технологии. Это означает необходимость иметь модели систем не только в виде аналитических функций, но и в форме числовых последовательностей, однозначно связанных с их непрерывными прототипами.

С целью получения численных моделей и формирования взаимно однозначной связи с исходными непрерывными функциями воспользуемся дискретизацией вещественных изображений и интерполяционным методом. Для вещественной функции  $F(\delta)$ ,  $\delta \in [0, \infty)$  зададим узлы

$$\delta_i, i = 1, 2, \dots \text{ и найдем значения } F(\delta_i), i = \overline{1, \eta}, \eta = m + n + 1. \text{ Множество} \\ \{F(\delta_i)\}_\eta = \{F(\delta_1), F(\delta_2) \dots F(\delta_\eta)\} \quad (1.6)$$

называется численной характеристикой (ЧХ) функции  $F(\delta)$ , а число  $\eta$  ее элементов – размерностью ЧХ.

Выбор узлов интерполирования  $\delta_i$  является первым этапом при переходе к дискретной форме, оказывая существенное влияние на вычислительные особенности и точность решения последующих задач. При их назначении или выборе требуется определить интервал расположения узлов и закон их распределения. В настоящее время не существует алгоритмов получения распределения узлов, отвечающего наилучшим образом тому или иному критерию, обычно соответствующему требованиям по точности. Поэтому на практике в большинстве случаев используют наиболее простой вариант – равномерное распределение узлов. Практика показывает, что интервал  $[\delta_1, \delta_\eta]$  должен охватывать область существенных изменений и значений функции  $F(\delta)$ .

Для пояснения рекомендации обратимся к дробно-рациональной функции вида (1.5) с распространенным соотношением структурных параметров:  $m < n$ . График такой функции показан на рис. 2.1.

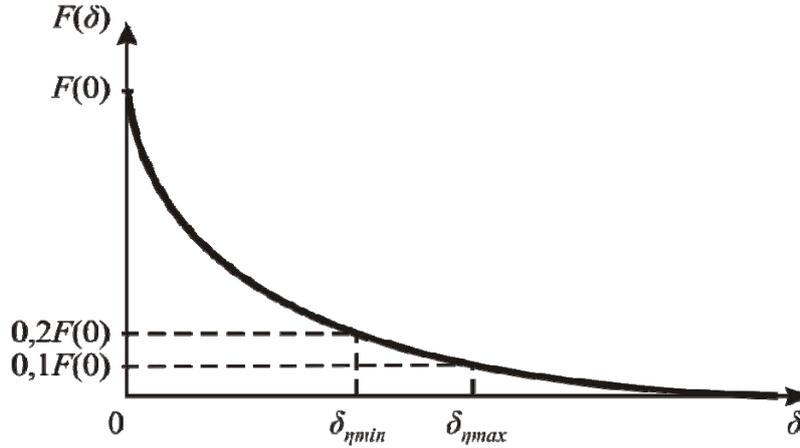


Рис. 2.1. График функции  $F(\delta)$  при  $m < n$

Определение интервала расположения узлов заключается в выборе значений первого  $\delta_1$  и последнего  $\delta_\eta$  узлов интервала. Существует по крайней мере два способа определения узлов. Первый и наиболее простой способ направлен на первоначальное получение узла  $\delta_\eta$ . Рекомендуется выбирать его из следующего условия: он должен ограничивать сверху интервал существенных значений и изменений функции  $F(\delta)$ . Его определение сводится к решению уравнения

$$F(\delta_\eta) = (0,1 \div 0,2)F(0). \quad (1.7)$$

В тех случаях, когда степени полиномов числителя  $m$  и знаменателя  $n$  функции (1.5) совпадают, для вычисления величины  $\delta_\eta$  приходится рассматривать более общее уравнение

$$F(\delta_\eta) = (0,1 \div 0,2)[F(0) - F(\infty)] + F(\infty). \quad (1.8)$$

Графическое пояснение вида функции  $F(\delta)$  при  $m = n$  и смысл входящих в уравнение переменных дано на рис. 2.2.

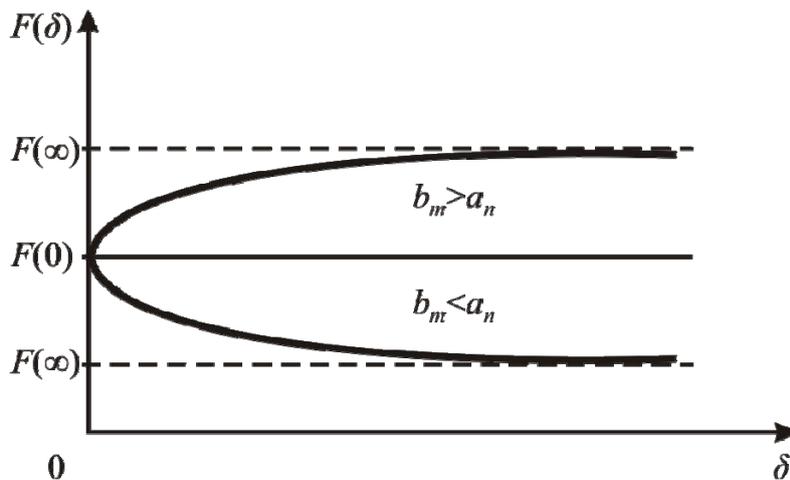


Рис. 2.2. График функции  $F(\delta)$  при  $m = n$

Поиск решения уравнений (1.7) и (1.8) осуществляется итерационным путем и обычно заканчивается за два-четыре шага, так что здесь проблем не возникает.

Узлы внутри интервала  $[\delta_1, \delta_\eta]$  в простейшем случае можно найти на основе равномерной сетки узлов по формуле

$$\delta_i = \delta_1 + \frac{\delta_\eta - \delta_1}{\eta - 1}(i - 1), \quad i = \overline{2, \eta}. \quad (1.9)$$

В практических задачах удобно принимать в качестве первого по порядку узла значение  $\delta_1 = 0$ . Можно убедиться, что этот узел соответствует статическому режиму, описывая его, и, кроме того, обеспечивает максимально высокую вычислительную точность описания как самого режима, так и системы в целом. При этом расчетная формула для узлов упрощается:

$$\delta_i = \frac{\delta_\eta}{\eta - 1}(i - 1), \quad i = \overline{1, \eta}. \quad (1.10)$$

Второй способ определения узлов базируется на ограничении интервала распределения узлов снизу.

Приведенные здесь рекомендации по выбору узлов интерполирования относятся к весьма широкому кругу задач и условий их решения. В частных случаях, когда размерность ЧХ мала или же существует точное решение задачи синтеза, узлы могут быть выбраны со значительными отступлениями от приведенных соотношений. Следует только помнить, что при этом может возрасти вычислительная погрешность как при получении моделей в форме ЧХ, так и при решении последующих задач с использованием ЧХ. В то же время часто возникают ситуации, когда от упомянутых рекомендаций приходится отходить сознательно. Например, это имеет место при поиске решения приближенных задач, когда необходимо обеспечить повышенную точность на начальном или конечном участке переходного процесса, что будет использовано в дальнейшем.

Модели САУ в форме ЧХ ориентированы на численные технологии расчетов и исследований динамических систем. К примеру, уравнение «вход-выход» системы, записанное для комплексной области

$$Y(p) = W(p)X(p) \quad (1.11)$$

или вещественной области

$$Y(\delta) = W(\delta)X(\delta), \quad (1.12)$$

можно представить в виде соотношения между численными характеристиками  $\{X(\delta_i)\}_\eta$ ,  $\{Y(\delta_i)\}_\eta$ ,  $\{W(\delta_i)\}_\eta$  соответственно входного  $x(t)$  и выходного  $y(t)$  сигналов и передаточной функции  $W(\delta)$ :

$$\{Y(\delta_i)\}_\eta = \{W(\delta_i)\}_\eta \{X(\delta_i)\}_\eta. \quad (1.13)$$

Особенность последнего равенства не только в том, что здесь использованы численные модели системы и сигналов, но и в малом числе операций при вычислениях. Их всего  $\eta = m + n + 1$ , что намного меньше по сравнению с использованием аналитических соотношений (1.11) или (1.12).

Математическая модель в виде ЧХ должна иметь однозначную связь с вещественной передаточной функцией. Такая связь устанавливается с помощью системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$F(\delta_i) = \frac{b_m \delta_i^m + b_{m-1} \delta_i^{m-1} + \dots + b_0}{a_n \delta_i^n + a_{n-1} \delta_i^{n-1} + \dots + a_1 \delta_i + 1}, \quad i = \overline{1, \eta}, \quad (1.14)$$

для решения которой используют каноническую форму

$$\begin{cases} b_m \delta_1^m + \dots + b_{m-1} \delta_1^{m-1} + b_0 - a_n \delta_1^n F(\delta_1) - \dots - a_1 \delta_1 F(\delta_1) = F(\delta_1), \\ b_m \delta_2^m + \dots + b_{m-1} \delta_2^{m-1} + b_0 - a_n \delta_2^n F(\delta_2) - \dots - a_1 \delta_2 F(\delta_2) = F(\delta_2), \\ \dots \\ b_m \delta_\eta^m + \dots + b_{m-1} \delta_\eta^{m-1} + b_0 - a_n \delta_\eta^n F(\delta_\eta) - \dots - a_1 \delta_\eta F(\delta_\eta) = F(\delta_\eta). \end{cases}$$

Основное практическое значение СЛАУ (1.14) состоит в том, что она позволяет найти коэффициенты функции  $F(\delta)$  по ЧХ  $\{F(\delta_i)\}_\eta$ . Обратим здесь внимание на параметр  $\eta$  и его связь с числом неизвестных коэффициентов: упомянутое ранее соотношение

$$\eta = m + n + 1 \quad (1.15)$$

в данной задаче означает равенство между собой числа уравнений СЛАУ и числа искомых коэффициентов, что является необходимым условием существования единственного решения этой системы.

В заключение сделаем два замечания, относящиеся к практическим задачам, в которых порядок передаточной функции невелик, существует точное решение и именно оно ищется.

Передаточная функция имеет низкий порядок, поэтому при выборе узлов интерполирования можно отступить от рекомендаций. Читателю предлагается убедиться самостоятельно в том, что в случае значительного увеличения или уменьшения значений узлов по отношению к рекомендуемому условию, численная характеристика также будет получена, но при очень больших изменениях узлов (например, на несколько порядков) погрешность решения может оказаться значительной из-за погрешностей округления.

Для пояснения методики решения прямой задачи – получения ЧХ – и обратной – вычисления коэффициентов аналитических выражений – рассмотрим пример.

**Пример.** Дана передаточная функция

$$W(p) = \frac{10}{0,01p^2 + 0,1p + 1}.$$

Необходимо получить ЧХ, затем проверить адекватность этой модели, вновь перейдя к дробно-рациональной форме.

Определим размерность ЧХ:  $\eta = m + n + 1 = 0 + 2 + 1 = 3$ . Для вычисления узлов заменим в передаточной функции  $W(p)$  комплексную переменную  $p$  на вещественную  $\delta$ :

$$W(\delta) = \frac{10}{0,01\delta^2 + 0,1\delta + 1}.$$

Учитывая, что все особенности функции  $W(p)$  находятся в левой полуплоскости, можем принять  $\delta = [0, \infty)$ . Отсюда найдется значение первого узла:  $\delta_1 = 0$ . Для определения узла  $\delta_\eta = \delta_3$  вычислим сначала значение  $W(0) = 10$  и запишем в числовой форме:  $W(\delta_3) = (0,1 \div 0,2)W(10) = 1 \div 2$ . Подставляя в выражение для  $W(\delta)$  различные значения  $\delta$ , составим табл. 1.1.

Таблица 1.1

$\delta$	0	1	10	20
$W(p)$	10	10/1,11	10/3	10/7

Как видим, условие (1.6) выполняется при  $\delta = 20$ . Поэтому принимаем  $\delta_3 = 20$ , и найдем значение второго узла:  $\delta_2 = \delta_3 / 2 = 10$ . Теперь можно сформировать численную характеристику  $\{W(\delta_i)\}_3 = \{10; 10/3; 10/7\}$ , которая является машинно-ориентированной моделью исходной передаточной функции и соответствующей системы.

Для проверки адекватности полученной модели решим обратную задачу – найдем коэффициенты передаточной функции. Решение будем искать в виде

$$W(\delta) = \frac{k}{a_2\delta^2 + a_1\delta + 1}.$$

Задача состоит в нахождении значений коэффициентов  $k, a_2, a_1$ . Для их вычисления составим систему уравнений

$$W(\delta_i) = \frac{k}{a_2 \delta_i^2 + a_1 \delta_i + 1}, \quad i = 1, 2 \quad \text{или} \quad \begin{cases} 10 = k, \\ \frac{10}{3} = \frac{k}{a_2 10^2 + a_1 10 + 1}, \\ \frac{10}{7} = \frac{k}{a_2 20^2 + a_1 20 + 1}. \end{cases}$$

Решение СЛАУ:  $k = 10$ ,  $a_2 = 0,01$ ,  $a_1 = 0,1$ . Полученные коэффициенты точно совпадают с коэффициентами исходной модели, следовательно, модель системы в форме численной характеристики точно соответствует исходной передаточной функции. Однако следует отметить, что вычисления в десятичных дробях приведут к приближенному результату за счет погрешности округления.

#### 1.4. Матричная форма представления численных характеристик

Действия над численными характеристиками сводятся к выполнению четырех основных арифметических операций над элементами ЧХ. Этими правилами можно пользоваться для преобразования характеристик. Однако более рациональным является привлечение какой-либо хорошо разработанной системы преобразования массивов чисел. Удобной в этом отношении является матричная алгебра. Для ее использования ЧХ представляют диагональными матрицами

$$F = \text{diag}[F(\delta_1), F(\delta_2), \dots, F(\delta_n)] \quad (1.16)$$

либо матрицами-столбцами

$$F = \text{col}[F(\delta_1), F(\delta_2), \dots, F(\delta_n)]. \quad (1.17)$$

Как показывает практика, диагональную форму (1.16) целесообразно привлекать для представления передаточных функций, т. е. моделей систем и их элементов, а (1.17) – для описания сигналов. Для пояснения их особенностей воспользуемся основным соотношением систем – уравнением «вход-выход» (1.12), которое последовательно можно представить в вещественной форме (1.13), в численной форме (1.14) и, наконец, в матричной форме

$$\begin{bmatrix} Y(\delta_1) \\ Y(\delta_2) \\ \dots \\ Y(\delta_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(\delta_1) & & & \\ & W(\delta_2) & & \\ & & \dots & \\ & & & W(\delta_n) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X(\delta_1) \\ X(\delta_2) \\ \dots \\ X(\delta_n) \end{bmatrix}.$$

Последнее уравнение целесообразно записывать в компактной форме  $Y = WX$ .

Возвращаясь к двум выделенным формам, добавим, что существуют задачи, в которых матричная форма представления сигналов может быть только диагональной. Такие ограничения появляются, в частности, в задачах идентификации. Действительно, получение решения  $W = YX^{-1}$  уравнения  $Y = WX$  требует обращения матрицы-столбца  $X$ , но такая операция в алгебре матриц не предусмотрена. В случае представления моделей сигналов диагональными матрицами операция обращения матрицы существует и решение уравнения может быть найдено.

### 1.5. Перекрестное свойство вещественного интегрального преобразования

При проектировании и исследовании динамических систем в большинстве случаев приходится иметь дело с поиском приближенных решений. Такая ситуация возникает, в частности, при синтезе регуляторов САУ практически любым методом. В этом смысле ВИМ не является исключением.

Необходимость рассмотрения вопросов получения приближенных решений вызвана тем, что при прочих равных условиях требуется найти наилучшие по принятому критерию решения или близкие к ним результаты. В рамках ВИМ эффективным инструментом для оптимизации получаемых решений являются узлы интерполирования. Рассмотрим этот механизм.

Для этой цели воспользуемся формулой вещественного преобразования (1.3), придав переменной  $\delta$  произвольное фиксированное значение  $\delta_j$ :

$$F(\delta_j) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\delta_j t} dt.$$

Положим, что величина  $\delta_j$  принята достаточно большой, настолько, что уже при малых значениях  $t$ , когда функция  $f(t)$  остается еще значимой, ядро  $\exp(-\delta_j t)$  и вместе с ним все подынтегральное выражение становится пренебрежимо малым. Отсюда можно сделать вывод о том, что величина интеграла  $F(\delta_j)$  формируется только за счет начального участка функции  $f(t)$ .

Полученный результат играет существенную роль в алгоритмах получения приближенных решений. Его расширенное толкование позволяет получить правило корректировки узлов: повышение точности решения в области времени при малых значениях переменной  $t$  можно

достичь за счет увеличения значений узлов интерполирования. Можно показать, что справедливо и обратное: для повышения точности решения в области времени при больших значениях переменной  $t$  необходимо уменьшать значения узлов  $\delta_j$ . Таким образом, существует качественная связь между поведением функции-оригинала при малых (больших) значениях аргумента  $t$  и поведением функции-изображения при больших (малых) значениях аргумента  $\delta$ . Она выражает важное свойство математического аппарата ВИМ, которое получило названия перекрестного свойства (или соответствия) вещественного преобразования.

Представленные здесь сведения будут широко использованы при решении разнообразных задач, не имеющих точного решения. При этом целесообразно оставлять закон распределения узлов неизменным и, как было сказано ранее, его целесообразно принимать равномерным. В этих условиях достаточно изменять лишь один параметр – первый узел  $\delta_1$  или последний  $\delta_n$ . Для определения остальных узлов по-прежнему используется формула (1.9) или (1.10).

## **ГЛАВА 2. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

### **2.1. Основные задачи, решаемые при синтезе систем автоматического управления**

Синтез САУ является центральной задачей в построении системы управления. Она является многогранной и обычно непростой задачей, не имеющей точного решения. Для ее решения имеются исходные данные, которые могут быть сгруппированы в три блока.

В первый входит информация о желаемых свойствах создаваемой системы.

Второй блок включает в себя информацию об объекте управления. В расширительном плане этот блок включает не только собственно объект управления, но и совокупность всех функционально необходимых элементов, которые проектировщику заданы либо он сам их выбирает из условий достижения необходимых параметров, в частности, мощности, скорости, момента и т. п. Совокупность выбранных элементов вместе с самим объектом управления принято называть неизменяемой частью системы. Название говорит о том, что параметры элементов, входящих в эту часть САУ, не могут быть изменены в процессе коррекции ее свойств, например, для достижения необходимого запаса устойчивости, требуемого уровня динамических или статических свойств системы и других.

Третий блок определяет возможности и средства системы, используемые для целенаправленного изменения ее свойств. Они реализуются разнообразными корректирующими устройствами, которые принято называть регуляторами, управляющими устройствами, контроллерами и т. п.

В соответствии со сказанным большинство систем управления, в том числе системы управления мехатронных устройств, могут быть представлены укрупненной структурной схемой, которая показана на рис. 2.1.

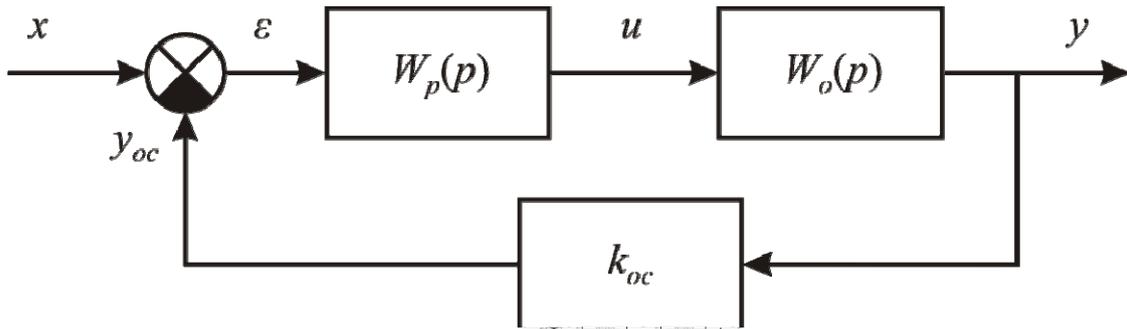


Рис. 2.1. Схема одноконтурной САУ

Система содержит объект управления, контроллер и звено в цепи обратной связи, описываемые функциями соответственно  $W_o(p)$ ,  $W_p(p)$  и  $k_{oc}$ . Задача состоит в определении передаточной функции регулятора  $W_p(p)$  и коэффициента обратной связи  $k_{oc}$ , которые совместно рассматриваются как корректирующие средства системы. Их определение составляет суть задачи синтеза САУ.

В математическом плане эта задача заключается в составлении и решении уравнения синтеза

$$W_{\text{жс}}(p) \cong \frac{W_p(p)W_o(p)}{1 + W_p(p)W_o(p)k_{oc}}. \quad (2.1)$$

Уравнение сформировано на основе равенства желаемой передаточной функции САУ  $W_{\text{жс}}(p)$  и модели синтезируемой системы, представленной в правой части (2.1). В реальных ситуациях невозможно либо нецелесообразно добиться точного равенства левой и правой части соотношения (2.1), поэтому приходится искать приближенное решение. Причины этого связаны не с математическими аспектами задачи, а с физическими и техническими ее особенностями. Действительно, решение уравнения (2.1) направлено на поиск таких неизвестных  $W_p(p)$  и  $k_{oc}$ ,

которые обеспечивают точное равенство в (2.1). Такую задачу нетрудно решить, но существенного практического значения решение иметь не будет. Одна из главных причин этого состоит в том, что получаемая передаточная функция

$$W_p(p) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + 1}, \quad (2.2)$$

обычно имеет полином числителя  $B_m(p)$ , степень которого  $m$  больше, чем степень  $n$  полинома знаменателя  $A_n(p)$ . Такие передаточные функции нельзя осуществить на практике, потому что для них нарушается условие физической реализуемости  $m \leq n$ . Кроме того, значения параметров  $m$  и  $n$  оказываются высокими, что неоправданно усложняет закон управления, повышает вычислительные затраты, снижает надежность системы [7]. Более подробное и конкретное пояснение механизма возникновения подобных ситуаций можно проследить на примере задания степеней полиномов для объекта и желаемой системы, приведенном в конце параграфа.

Отмеченная сложность задачи синтеза – поиск приближенного решения – не является единственной. Еще одна трудность связана с тем, что реальные высококачественные системы управления мехатронными устройствами являются многоконтурными. Действительно, электромеханические системы управления, например, положением инструмента, звеном манипулятора или другим объектом имеют несколько контуров. Основным, естественно, является контур управления положением объекта. В структуре САУ он является внешним. Другие контуры являются вложенными, внутренними. Сигнал управления для каждого из них вырабатывается регулятором контура, который выступает внешним по отношению к рассматриваемому. По этой причине подобные системы называют подчиненными системами управления. Такой принцип управления позволяет достигать высоких показателей качества и точности САУ, так как дополнительно используются возможности управления током или моментом исполнительного двигателя и его скоростью. Схема такой системы с тремя контурами приведена на рис. 2.2. Обозначения на схеме  $W_{pn}(p)$ ,  $W_{pc}(p)$ ,  $W_{pm}(p)$  – передаточные функции регуляторов положения, скорости и тока,  $k_n$ ,  $T_n$  – коэффициент передачи и постоянная времени преобразователя,  $R_y$ ,  $T_y = R_y / L_y$  – сопротивление якорной цепи и электромагнитная постоянная времени,  $C_e$ ,  $C_m$  – конструктивные параметры двигателя,  $J$  – момент инерции движущихся масс, приведенный к

валу двигателя,  $k_p$  – коэффициент передачи редуктора,  $k_{ом}$ ,  $k_{ос}$ ,  $k_{он}$  – коэффициенты обратной связи по току, скорости, положению,  $g$  – входной сигнал,  $M_c$  – момент сопротивления,  $y$  – выходной сигнал.

Очевидно, что подобная система оказывается намного сложнее по сравнению с одноконтурной. По крайней мере число неизвестных может увеличиться в три раза, что уже делает задачу намного сложнее. При этом исходные данные о системе остаются прежними.

На начальных этапах расчета исходная информация о системе может быть задана в виде прямых или косвенных показателей качества. В конечном итоге на их основе обычно формируется передаточная функция желаемой (эталонной) системы или, более кратко, желаемая передаточная функция. Число функций и параметров, которые подлежат определению, как уже было сказано, возрастает, что приводит к возрастанию сложности задачи как в вычислительном плане, так и в алгоритмическом. К неизвестным относятся передаточные функции регуляторов тока, скорости и положения соответственно  $W_{pm}(p)$ ,  $W_{pc}(p)$ ,  $W_{pn}(p)$ , а также коэффициенты обратной связи по этим координатам – току, скорости и положению  $k_{ом}$ ,  $k_{ос}$ ,  $k_{он}$ . На этой основе можно сформировать уравнение синтеза

$$W_{жс}(p) \cong F[W_{pm}(p), W_{pc}(p), W_{pn}(p), k_{pm}, k_{pc}, k_{pn}, W_{нч}(p)], \quad (2.3)$$

которое включает желаемую передаточную функцию системы  $W_{жс}(p)$ , перечисленные выше неизвестные и передаточную функцию неизменяемой части системы  $W_{нч}(p)$ .

Общих методов решения уравнений вида (2.3) не существует. Причины этого различны. Отметим некоторые из них. Во-первых, уравнение содержит до трех неизвестных передаточных функций и, следовательно, большое число неизвестных коэффициентов этих функций. Во-вторых, некоторые коэффициенты входят в уравнение нелинейно, в виде комбинаций их произведений. В-третьих, структуры передаточных функций регуляторов обычно ограничивают первым-вторым порядком, учитывая требования физической реализации. Поэтому точное решение не может существовать (за исключением специально составленных задач). Поэтому приходится искать приближенное решение, которое зависит от принятого критерия, определяющего форму и количественную близость левой и правой части уравнения (2.3).



По этим и другим причинам в инженерной практике уравнение (2.3) упрощают до уровня, допускающего получение решения сравнительно простыми инженерными методами.

Первый и основной шаг в этом направлении – переход от синтеза многоконтурной системы к последовательному расчету отдельных сепаратных контуров /3/. Расчет начинают с внутреннего контура, в котором неизвестными являются математические модели только рассматриваемого контура: передаточная функция регулятора и коэффициент обратной связи. Схема такого контура была приведена на рис. 2.1. Расчет его становится сравнительно простой задачей, поэтому синтез всей многоконтурной САУ также значительно упрощается. Он сводится к синтезу нескольких автономных контуров, таких же, как и изображенные на рис. 2.1. Например, в случае трехконтурной САУ необходимо выполнить синтез трех контуров.

Ценой такого упрощения является дополнительная погрешность, вносимая в конечный результат. Источником ее является процедура разбиения требований, предъявляемых ко всей системе, на совокупность требований, предъявляемых к каждому контуру в отдельности. В частности, если требования к САУ сформулированы в виде ее желаемой передаточной функции, то необходимо на ее основе найти желаемые передаточные функции всех внутренних контуров. Эта задача точно не решается, а ее приближенное решение становится упомянутым источником погрешности общей задачи синтеза. Уменьшить его влияние можно путем проверки нескольких вариантов формирования желаемых передаточных функций. Выбор вариантов основывается на знаниях особенностей применяемого исполнительного двигателя, прежде всего его динамики, и опыте проектировщика в решении подобных задач декомпозиции.

Принятые допущения позволяют свести уравнение (2.2) к более простой форме

$$W_{жс}(p) \cong F[W_p(p), k_{oc}, W_{нч}(p)]. \quad (2.4)$$

В правую часть уравнения входят передаточная функция регулятора  $W_p(p)$  и коэффициент обратной связи  $k_{oc}$  соответствующего контура, которые необходимо найти, а также передаточная функция неизменяемой части этого контура  $W_{нч}(p)$ . Левая часть уравнения (2.4) представлена желаемой передаточной функцией контура  $W_{жс}(p)$ .

Уравнение (2.4) можно записать в развернутом виде:

$$W_{\text{сж}}(p) \cong \frac{W_p(p)W_{\text{нч}}(p)}{1 + W_p(p)W_{\text{нч}}(p)k_{\text{ос}}}. \quad (2.5)$$

Итак, первый шаг, направленный на упрощение уравнения синтеза, приводит к решению нескольких уравнений синтеза вида (2.5). Полученная форма уравнения является наглядной, так как она раскрывает в явном виде связь желаемой передаточной функцией контура  $W_{\text{сж}}(p)$  с искомыми моделями контура – функцией  $W_p(p)$  и коэффициентом  $k_{\text{ос}}$ .

Второй шаг на пути упрощения задачи связан с заданием структуры передаточной функции регулятора  $W_p(p)$ . Основания для решения этой промежуточной задачи имеются: с учетом практических соображений максимальный порядок функции  $W_p(p)$  обычно не превышает второго. Поэтому передаточная функция регулятора будет иметь вид не сложнее формы

$$W_p(p) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} \Big|_{m=n=2} = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}. \quad (2.6)$$

Поясним этот выбор. При  $m=2$  регулятор обладает сильными дифференцирующими (форсирующими) свойствами, которые в определенной мере компенсируют инерционные свойства объекта управления (неизменяемой части контура). В математическом плане форсирующие свойства выражаются полиномом числителя  $B_m(p)$ . При  $m=2$  в формировании сигнала управления  $u(t)$  участвуют первая и вторая производные сигнала рассогласования  $\varepsilon(t)$ , что и определяет форсирующие свойства регулятора и прямого канала в целом. Дальнейшее увеличение степени полинома  $B_m(p)$  теоретически возможно, иногда это реализуют на практике, но здесь есть определенные препятствия, связанные с усилением влияния высокочастотных помех, которые всегда присутствуют в составе сигнала  $\varepsilon(t)$ . Кроме того, по условиям физической реализации увеличение степени  $m$  полинома  $B_m(p)$  требует адекватного увеличения степени  $n$  полинома знаменателя  $A_n(p)$ . Все это приводит к увеличению сложности регулятора, что отрицательно влияет на его надежность, повышает требования к быстродействию контроллера. Так что второй порядок функции  $W_p(p)$  можно рассматривать как компромиссный результат при выборе степени сложности регулятора.

Подводя итог в рассмотрении второго шага на пути упрощения уравнения синтеза регулятора, определим полученный результат иными

распространенными терминами: задача синтеза переходит из класса структурных, когда нужно определять и структуру (степени полиномов  $B_m(p)$ ,  $A_n(p)$ ), и коэффициенты этих полиномов, в класс параметрических, где требуется находить только коэффициенты полиномов, то есть параметры этих полиномов.

Третий шаг, направленный на упрощение уравнения (2.5) и поиск его решения, заключается в том, что коэффициент  $k_{oc}$  может быть найден без нахождения общего решения уравнения, исходя из частных требований, предъявляемых к системе – точности, устойчивости, реализуемости и т. д. Обычно используют показатели статики, которые в математическом плане выражаются уравнением статики, получаемом из (2.5) при предельном переходе  $p \rightarrow 0$ .

Четвертый шаг на пути упрощения уравнения базируется на замене эквивалентности желаемой и синтезируемой систем в замкнутом состоянии на их эквивалентность в разомкнутом состоянии. Это означает, что вместо уравнения (2.4) рассматривают уравнение

$$W_{жс}^p(p) \cong W_p(p)W_o(p), \quad (2.7)$$

в котором функция  $W_{жс}^p(p)$  является передаточной функцией разомкнутой желаемой системы. Правомерность перехода от уравнения (2.6) к форме (2.7) очевидна при сопоставлении структурных схем САУ, представленных на рис. 2.1 и рис. 2.3. Первая из них представляет синтезируемую систему, вторая – эталонную. Положим, что коэффициенты обратных связей систем одинаковы, а реакции  $y(t)$  этих систем на одинаковые входные воздействия  $x(t)$  тоже совпадают. При таких условиях должны быть

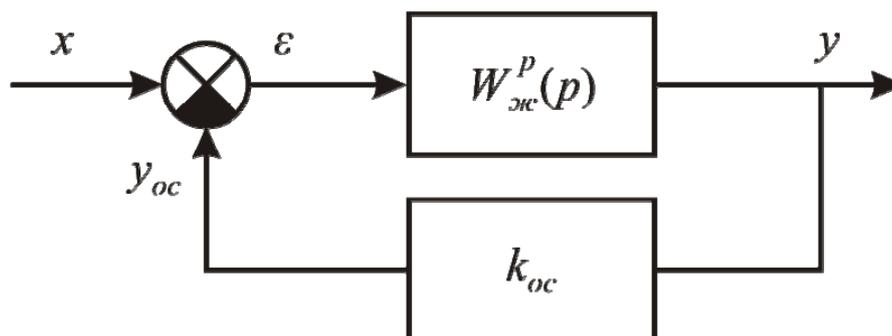


Рис. 2.3. Структурная схема эталонной САУ

эквивалентными прямые каналы рассматриваемых систем, что и фиксирует приближенное соотношение (2.7). Отметим, что знак приближения в нем не относится к операции сопоставления прямых каналов двух

САУ. Он свидетельствует только лишь о том, что в общем случае отсутствует точное решение уравнения (2.7), как и в случае уравнений (2.1), (2.3)–(2.5).

Упрощение исходного уравнения синтеза (2.5) до вида (2.7) дает возможность значительно снизить объем вычислений и, что также существенно для некоторых задач, снизить вычислительную погрешность при поиске решения. Форма (2.7) хорошо известна в теории автоматического управления. Она полностью соответствует теории обратных задач динамики /2/, близка по сути синтезу регуляторов методом логарифмических частотных характеристик /5/, имеет другие приложения.

Простота и наглядность уравнения (2.7) часто помогает понять физические, технические и математические стороны задач коррекции динамических и статических свойств САУ. Воспользуемся этой возможностью для пояснения отмеченной выше ситуации, когда полученное точное решение уравнения синтеза невозможно осуществить. Пусть при решении уравнения (2.5) известны передаточные функции

$$W_{\text{жс}}^p(p) = \frac{B_{\text{жс},1}(p)}{A_{\text{жс},2}(p)}; \quad W_o(p) = \frac{k_o}{A_{o,2}(p)},$$

в которых цифровые индексы обозначают степени соответствующих полиномов. Подставим эти выражения в (2.7) и найдем передаточную функцию регулятора

$$W_p(p) = \frac{B_{\text{жс},1}(p)A_{o,2}(p)}{A_{\text{жс},2}(p)k_o} = \frac{B_{p,3}(p)}{A_{p,2}(p)}.$$

Получили точное решение уравнения (2.7). Его особенность состоит в том, что степень полинома числителя  $m = 3$  оказалась более степени полинома знаменателя  $n = 2$ , что нарушает условие физической реализуемости  $m \leq n$ .

Несмотря на то, казалось бы негативный результат такого способа решения уравнения синтеза, его все-таки можно использовать в практических задачах. Это делается на основе аппроксимации полученной не-

реализуемой функции  $W_p(p) = \frac{B_{p,3}(p)}{A_{p,2}(p)}$  передаточной функцией

$W_p(p) = \frac{B_{p,2}(p)}{A_{p,2}(p)}$ , которая имеет равные степени полиномов и потому

удовлетворяет условию физической осуществимости. Здесь функция

$W_p(p) = \frac{B_{p,3}(p)}{A_{p,2}(p)}$  рассматривается как идеальная, к свойствам которой

должна стремиться реализуемая форма, удовлетворяющая условию  $m \leq n$ . Возможность использования полученного решения и величина сохраняющейся погрешности проверяются исследованием САУ с таким регулятором.

Главным итогом рассмотренных вопросов можно считать получение уравнения синтеза (2.7), решение которого обеспечивает приближенное равенство передаточных функций разомкнутой желаемой и синтезированной систем. Для нахождения решения необходимо иметь передаточные функции объекта управления  $W_o(p)$  и передаточную функцию желаемой системы в разомкнутом состоянии  $W_{жс}^p(p)$ . Первая из них известна или найдется по заданному объекту. Вторая передаточная функция должна быть определена проектировщиком на основе требований, предъявляемых к системе. Эта задача является предметом дальнейшего рассмотрения.

## **2.2. Формирование желаемых передаточных функций**

### **2.2.1. Общие сведения и классификация методов получения желаемых передаточных функций**

Синтез передаточных функций (ПФ) регуляторов заключается в придании проектируемому контуру желаемых статических и динамических свойств. Такие свойства наиболее полно и физически понятно раскрываются функциями времени – переходными и импульсными переходными характеристиками системы или контура. В то же время составлять и решать уравнения синтеза целесообразно в области изображений. Поэтому возникает необходимость перевода математического описания эталонного контура или системы из области времени в область изображений. Обычно такой переход рассматривают как задачу получения желаемой передаточной функции контура по его временным динамическим характеристикам или, что важнее, по его показателям качества.

С позиций составления и решения уравнений синтеза (2.1), (2.7) задача заключается в формировании их левых частей – желаемых передаточных функций  $W_{жс}(p)$ ,  $W_{жс}^p(p)$  контура в замкнутом и разомкнутом состоянии. Существует несколько подходов к ее решению. Их можно классифицировать как прямые и косвенные.

Косвенные методы позволяют получать желаемые передаточные функции, привлекая какие-либо промежуточные модели, характеристики, показатели. Наиболее распространенными долгое время оставались и в определенной мере остается в настоящее время группа частотных методов. Общая схема формирования желаемой передаточной функции

на основе частотного подхода включает получение логарифмической частотной характеристики по заданным показателям качества с последующим переходом к модели в форме передаточной функции. Методы этой группы обладают исключительной наглядностью, хорошей методической поддержкой в виде таблиц типовых передаточных функций, соответствующих им частотных характеристик, различных вспомогательных номограмм и других вспомогательных средств.

Для класса электромеханических исполнительных систем широко используется частотный метод формирования желаемых свойств по критерию симметричного или модульного оптимума [3, 15]. Он обладает практически всеми достоинствами частотных методов, хорошо формализован, его методика доведена, пожалуй, до предельного уровня простоты. Однако метод не позволяет синтезировать контур с заданной величиной перерегулирования, оптимизировать его по критерию быстродействия, увеличивать при необходимости робастность контура. Поэтому метод можно удобно использовать для получения решений синтеза первого приближения, которые затем будут уточняться.

К числу распространенных косвенных методов относится также корневой метод [5]. Он позволяет по косвенным показателям качества – степени устойчивости и колебательности – назначить границы расположения корней характеристического полинома передаточной функции  $W_{жс}(p)$ , при которых переходная характеристика будет соответствовать заданным показателям перерегулирования и быстродействия. Недостатки метода связаны с тем, что не формируется полином числителя, следовательно, не в полной мере используются возможности дробно-рациональной формы, в которой ищется решение. Кроме того, практически всегда косвенные пути получения желаемых передаточных функций приводят к решению задачи с некоторой погрешностью. Корневой метод не является исключением. По этой причине получение, например, перерегулирования в достаточно узких пределах может потребовать итерационного приближения к приемлемому решению.

Другая группа методов получения желаемых передаточных функций получила название прямые методы – они позволяют получать передаточные функции непосредственно по прямым показателям качества или временным динамическим характеристикам – переходной или импульсной переходной. Этот путь формирования желаемых передаточных функций считается наиболее привлекательным. Причина этого связана с тем, что для проектировщика наиболее понятна и наглядна информация о системе, представленная во временной области. Прежде всего, речь идет об упомянутых динамических характеристиках и их ко-

личественных показателях – времени установления переходного процесса (регулирования), времени достижения определенного уровня (обычно 90–95 % от установившегося значения), перерегулировании, максимальной скорости изменения динамической характеристики, числе колебаний и т. д. Выделим методы, входящие в эту группу, которые обладают заметными преимуществами.

Наиболее прост метод стандартных переходных характеристик /5, 9/. Метод основан на том, что имеющемуся ряду переходных характеристик с различными значениями перерегулирования соответствует ряд передаточных функций. Проектировщик имеет возможность выбрать подходящую по величине перерегулирования переходную характеристику и этим фактически осуществляется выбор вида передаточной функции, которой соответствует эта характеристика. Значения коэффициентов передаточной функции находятся по желаемой длительности переходного процесса, так что передаточная функция будет полностью определена. При этом следует обратить внимание на существенное обстоятельство – результат получают в виде желаемой передаточной функции разомкнутой системы. Эта особенность является важной для тех методов синтеза, которые используют уравнения синтеза в терминах разомкнутых систем, как, например, уравнение (2.7). Простоте и наглядности рассматриваемого подхода сопутствуют определенные ограничения и недостатки. Они связаны с небольшим выбором имеющихся переходных характеристик. Кроме того, полином числителя вырожден до коэффициента передач, что снижает возможности передаточной функции и приводит к дополнительным погрешностям синтеза. Имеется еще один недостаток: принятая методика вычисления коэффициентов не обеспечивает минимизацию порядка передаточной функции.

Второй метод из группы, использующей прямые показатели качества, предложен в /2/. Он позволяет получать желаемые модели в виде колебательного звена. В виду простоты модели и имеющихся аналитических решений подход легко использовать в разнообразных задачах с невысокими требованиями к эталонной модели. Однако это же обстоятельство является ограничением метода.

Определенным развитием предыдущего подхода является вариант, предложенный в /6/. Он также оперирует двумя показателями – перерегулированием  $\sigma$  и временем установления  $t_y$  и позволяет получать желаемые модели вида

$$W_d(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}. \quad (2.8)$$

Наличие в числителе дополнительного варьируемого параметра  $b_1$  предоставляет большие возможности по точности. Метод успешно используется при формировании эталонных движений, достаточно прост, нагляден, легко программируется. Его ограничения связаны с тем, что степени полиномов остаются неизменными, хотя в определенных ситуациях желательно или даже необходимо изменять их. Так, в случае переходных характеристик, близких экспоненциальным, достаточно иметь передаточную функцию первого порядка. В других, более сложных случаях, порядок передаточной функции нужно увеличить до третьего. Однако таких возможностей метод не предоставляет.

К числу методов, позволяющих получать желаемые передаточные функции по прямым показателям качества, относится еще один – вещественный интерполяционный метод, основы которого были изложены выше. Особенность метода состоит в большом разнообразии формы задания информации о желаемых свойствах системы. Это может быть какая-либо временная динамическая характеристика – импульсная переходная или переходная, реакция системы на какое-то заданное входное воздействие, отличное от импульсного и ступенчатого, или показатели качества – перерегулирование, время установления, максимальная скорость нарастания и другие. Метод имеет привлекательные возможности в отношении формирования передаточной функции подходящей структуры: имеется возможность назначать порознь степени полиномов числителя и знаменателя, а также степень астатизма.

Среди представленных методов своими возможностями выделяются два последних. Они будут подробно представлены с целью их изучения и практического применения.

### 2.2.2. Метод Коновалова–Орурка

Изложение метода в объеме, необходимым пользователям, дано в /6/. Желаемая передаточная функция замкнутой системы ищется в виде

$$W(p) = \frac{\alpha_1 p + 1}{\alpha_o p^2 + \alpha_1 p + 1} G_0, \quad (2.9)$$

где  $G_0$  – статизм системы,  $\alpha_1, \alpha_o$  – коэффициенты принятой формы, которые определены выражениями:

$$\alpha_o = \frac{\left[ \ln\left(\frac{D_m}{G_0} - 1\right) \right]^2}{\frac{9}{t_y^2} \left\{ \left[ \ln\left(\frac{D_m}{G_0} - 1\right) \right]^2 + \pi^2 \right\}}, \quad \alpha_1 = \frac{6\alpha_o}{t_y}.$$

Значения коэффициентов находятся по исходным параметрам: времени установления  $t_y$  и максимальному отклонению  $D_m$  переходной характеристики.

Как видно, имеются расчетные формулы, которые позволяют получить желаемую модель по двум наиболее наглядным для субъективного восприятия показателям качества САУ – времени установления  $t_y$  и максимальному отклонению  $D_m$ . Последний параметр однозначно связан с перерегулированием:  $\sigma = \frac{D_m - G_0}{G_0} \cdot 100\%$ . Расчетные формулы

имеют аналитическое обоснование, легко программируются и потому удобны в практической работе.

### **2.2.3. Получение желаемых передаточных функций по импульсным переходным характеристикам вещественным интерполяционным методом**

Основы вещественного интерполяционного метода были изложены в главе 2. Здесь рассмотрим его возможности при решении задач синтеза желаемых передаточных функций. Будут представлены алгоритмы формирования эталонных моделей по различным исходным, встречающимся в практических задачах: по импульсным переходным характеристикам, по переходным характеристикам, по реакции САУ на определенное входное воздействие, отличное от ступенчатого, и главное, по прямым показателям качества. Перечисленные возможности в отношении разнообразия исходных сведений и их использование при получении эталонных моделей представляют интерес сами по себе. Однако следует обратить внимание на еще одно важное обстоятельство – они позволяют решать различные задачи расчета САУ на единой математической основе, используя общую форму математического описания САУ – численные характеристики. Это позволяет унифицировать алгоритмы и программы, объединить их в единую библиотеку, позволяющую использовать модульный принцип при конструировании путей достижения той или иной цели.

Рассмотрение различных вариантов построения желаемых передаточных функций начнем со случая формирования желаемых передаточных функций по заданной импульсной переходной характеристике. Выбор объясняется тем, что задача решается наиболее просто, позволяя продемонстрировать достоинства ВИМ.

Пусть задана желаемая импульсная реакция контура  $k(t)$ . Она может быть представлена аналитическим выражением, графиком или таблицей. Требуется определить коэффициенты передаточной функции

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}, \quad (2.10)$$

параметры  $m$  и  $n$  которых известны. Обратимся к формуле прямого преобразования, позволяющей найти по заданной функции  $k(t)$  ее вещественное изображение

$$W(\delta) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-\delta t} dt, \quad \delta \geq C, \quad C > 0. \quad (2.11)$$

Очевидно, характеристика  $k(t)$  является моделью устойчивой системы, поэтому интеграл в (1.4) сходится при всех  $\delta \in [0, \infty)$ , что позволяет принять  $C = 0$ . Соотношение (2.11) позволяет найти математическую модель контура в виде ЧХ  $\{W(\delta_i)\}_\eta$ . Размерность  $\eta$  ЧХ определена формулой (1.15)  $\eta = m + n + 1$ , а значения ее элементов найдутся по формуле

$$W(\delta_i) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-\delta_i t} dt, \quad i = 1, 2, \dots, \eta. \quad (2.12)$$

Узлы интерполирования  $\delta_i$  находятся по стандартной методике: назначается узел  $\delta_1 = 0$ , вычисляется значение последнего узла  $\delta_\eta$ , затем находятся остальные узлы по формуле (1.9).

Во многих случаях характеристика  $k(t)$  может быть задана таблицей или графиком. Тогда интегрирование выполняется численно. Например, в случае правила прямоугольников получим следующую формулу

$$W(\delta_i) \cong \sum_{j=1}^N k(t_j) e^{-\delta_i t_j} \Delta t_j, \quad j = 1, 2, \dots, \eta, \quad (2.13)$$

которая позволяет найти приближенные значения элементов ЧХ. Величина погрешности зависит от нескольких причин, из которых наибольшее влияние оказывает число шагов  $N$ .

В практических задачах, ориентируясь на программную поддержку компьютерной математики, целесообразно воспользоваться матричной формой представления соотношения (2.13):

$$W = ITK, \quad \text{где } W = [W(\delta_1), W(\delta_2) \dots W(\delta_\eta)], \quad T = \text{diag}[\Delta t_j], \quad j = 1, 2, \dots, \eta,$$

$$K = [k(t_1), k(t_2) \dots k(t_n)], \quad I = \begin{bmatrix} e^{-\delta_1 t_1} & e^{-\delta_1 t_2} & \dots & e^{-\delta_1 t_N} \\ e^{-\delta_2 t_1} & e^{-\delta_2 t_2} & \dots & e^{-\delta_2 t_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{-\delta_\eta t_1} & e^{-\delta_\eta t_2} & \dots & e^{-\delta_\eta t_N} \end{bmatrix}.$$

Дальнейшие действия связаны непосредственно с вычислением коэффициентов передаточной функции (2.10). С этой целью составляется СЛАУ вида:

$$W(\delta_i) = \frac{b_m \delta_i^m + b_{m-1} \delta_i^{m-1} + \dots + b_0}{a_n \delta_i^n + a_{n-1} \delta_i^{n-1} + \dots + a_1 \delta_i + 1}, \quad i = \overline{1, \eta}. \quad (2.14)$$

Левая часть состоит из вычисленных по формуле (2.13) элементов  $W(\delta_i)$ . В правой части содержатся искомые коэффициенты и значения узлов  $\delta_i = 1, 2, \dots, \eta$ . Значения последних известны. Как было установлено в параграфе 1.3, такая система имеет решение, причем единственное.

Полученные в результате решения СЛАУ коэффициенты одновременно являются коэффициентами лапласовой передаточной функции (2.10), так что задача получения желаемой передаточной функции системы по его импульсной реакции в основном закончена. Для окончательного завершения задачи необходимо проверить полученный результат, например, сопоставив его с исходными данными. Такая проверка нужна не только из-за имеющейся погрешности численного интегрирования, но и с целью проверки правильности ввода исходных данных, отсутствия сбоев при выполнении расчетов и т. д. Лучший способ проверки – получение оригинала  $k(t)$  по синтезированной ПФ  $W(p)$ , что является несложной стандартной операцией при использовании, например, пакета Mathcad.

**Пример.** В качестве примера рассмотрим задачу, которая позволяет получить точное решение аналитическим путем. Это дает возможность сравнить получаемое численное решение с точным, оценить погрешность, если нужно, выявить источники погрешностей.

Дана импульсная реакция эталонного контура  $k(t) = 6e^{-2t} - e^{-t}$ . Нужно найти решение в виде

$$W(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}.$$

Техническая сторона задачи заключается в определении коэффициентов  $b_1, b_0, a_2, a_1$ . Она решается в два этапа. На первом вычисляются  $\eta = 4$  элементов ЧХ, на втором – значения коэффициентов вещественной передаточной функции  $W(\delta) = (b_1 \delta + 1) / (a_2 \delta^2 + a_1 \delta + 1)$ , где  $\delta \in [0, \infty)$  в силу устойчивости системы.

Для выполнения первого этапа воспользуемся расчетной формулой (2.12), предназначенной специально для этой цели. Примем  $\delta_1 = 0$ , что позволяет определить первый элемент ЧХ  $W(\delta_1) = W(0) = 2$  по формуле

$$W(\delta_i) = \int_0^{\infty} (6e^{-2t} - e^{-t})e^{-\delta_i t} dt. \quad (2.15)$$

Теперь можно найти узел  $\delta_\eta = \delta_4$ , при  $\delta_4 = 15$  условие выполняется. По формуле (1.9) вычисляются остальные узлы:  $\delta_2 = 5$ ,  $\delta_3 = 10$ , а (2.14) позволяет найти оставшиеся три элемента ЧХ:  $W(\delta_2) = W(5) = 0,69$ ,  $W(\delta_3) = W(10) = 0,4$ ,  $W(\delta_4) = W(15) = 0,29$ . В итоге получаем численную модель  $\{W(\delta_i)\}_4 = \{2; 0,69; 0,4; 0,29\}$  и можем перейти ко второму этапу – вычислению коэффициентов. Для этого составим СЛАУ вида (2.14)

$$\begin{cases} 2 = b_0, \\ 0,69 = (b_1 5 + b_0)/(a_2 5^2 + a_1 5 + 1), \\ 0,4 = (b_1 10 + b_0)/(a_2 10^2 + a_1 10 + 1), \\ 0,29 = (b_1 15 + b_0)/(a_2 15^2 + a_1 15 + 1). \end{cases}$$

Систему можно упростить до трех уравнений, используя равенство  $b_0 = 2$ . В любом случае получим  $b_1 = 2,5$ ;  $a_2 = 0,5$ ;  $a_1 = 1,5$ . Для проверки можно найти точную передаточную функцию как изображение функции  $k(t)$ , используя таблицы преобразования Лапласа, и убедиться в том, что получено точное решение.

#### **2.2.4. Получение желаемых передаточных функций по переходным характеристикам**

Пусть задана желаемая переходная характеристика  $h(t)$  и выбран вид передаточной функции, в котором ищется решение: это дробно-рациональная функция (2.10) с известными значениями степеней  $m$  и  $n$  полиномов числителя и знаменателя. Задача состоит в определении коэффициентов этой функции, число которых  $m + n + 1$ . Это число можно уменьшить на единицу за счет исключения коэффициента  $b_0$ , так как его значение легко находится непосредственно по характеристике  $h(t)$ . Действительно, на основании теоремы о предельном значении функции-изображения по Лапласу /5/ можем получить

$$b_0 = \lim_{p \rightarrow 0} pW(p) \frac{1}{p} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t). \quad (2.16)$$

Как видим, величина коэффициента  $b_0$  равна установившемуся значению переходной характеристики. Теперь число определяемых коэффициентов равно  $\eta = m + n$ .

Связь между переходной характеристикой  $h(t)$  и передаточной функцией  $W(p)$  определена соотношением  $h(p) = W(p)/p$ , где  $h(p) \doteq h(t)$ . Перейдем в вещественную область  $h(\delta) = W(\delta)/\delta$ , откуда получим

$$W(\delta) = \delta h(\delta), \quad (2.17)$$

где функция  $h(\delta)$  определена формулой прямого  $\delta$ -преобразования

$$(1.4): h(\delta) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-\delta t} dt, \quad \delta \in [C, \infty], C > 0. \text{ Подставим } h(\delta) \text{ в (2.17) и по-}$$

лучим нужное нам соотношение:

$$W(\delta) = \delta \int_0^{\infty} h(t)e^{-\delta t} dt, \quad \delta \in [C, \infty], C > 0.$$

Оно позволяет вычислить элементы ЧХ  $\{W(\delta_i)\}_\eta$ :

$$W(\delta_i) = \delta_i \int_0^{\infty} h(t)e^{-\delta_i t} dt, \quad \delta_i \in [C, \infty], C > 0. \quad (2.18)$$

Подчеркнем, что размерность  $\eta$  ЧХ определена числом неизвестных коэффициентов и она известна.

В большинстве случаев функция  $h(t)$  задается проектировщиком не аналитическим выражением, а графиком или таблицей. В этих случаях, как и в предыдущей задаче – при получении передаточных функций по импульсной характеристике, необходимо переходить к численному интегрированию. Впрочем, при программной поддержке Mathcad, это делается самой программной системой.

Практическое применение алгоритма требует рассмотрения еще одного вопроса – назначения узлов интерполирования. Дело в том, что предложенный ранее вариант выбора первого узла  $\delta_1 = 0$  здесь неприемлем, так как  $\lim_{\delta \rightarrow 0} W(\delta) = \infty$  и тогда первый элемент ЧХ обращается в бесконечность, что неприемлемо для численных расчетов. Вследствие этого оказывается невозможным найти и последний узел  $\delta_\eta$ , так как его значение в соответствии с (1.8) определяется через  $W(0)$ .

В этом случае желаемые пределы расположения узлов ищут, начиная с нижней границы, со значения  $\delta_1 > 0$ . Формулу для расчета  $\delta_1$  можно получить, исходя из следующего требования: подынтегральное выражение в (2.18) должно по окончании времени регулирования  $t_y$  уменьшиться до пренебрежимо малой величины  $\Delta = 0,01 \div 0,05$ , то есть

должно выполняться условие  $h(t_i)e^{-\delta_1 t_i} = \Delta$ . Отсюда можно получить выражение для расчета значения узла  $\delta_1$ :

$$\delta_1 = \frac{-\ln[\Delta / h(t_i)]}{t_i}.$$

На практике при выборе значимости подынтегрального выражения можно использовать более простое и очевидное соотношение  $e^{-\delta_1 t_i} = \Delta$ , не связанное с функцией  $h(t)$ , и, следовательно, с условиями конкретной задачи. В этом случае расчетная формула для узла  $\delta_1$  будет несколько проще:

$$\delta_1 = \frac{-\ln \Delta}{t_i}. \quad (2.19)$$

Знание величины узла  $\delta_1$  позволяет найти все другие узлы по обычному правилу равномерной сетки:  $\delta_i = i\delta_1$ ,  $i = 1, 2, \dots, \eta$ .

Заключительный этап расчетов связан с проверкой точности полученного решения. В общем случае считается предпочтительным оценивать близость функций по критерию абсолютного максимального отклонения

$$\Delta h = \max_t |h(t) - h_m(t)|, \quad (2.20)$$

где  $h(t)$ ,  $h_m(t)$  – точная переходная характеристика и ее модельное представление. Если величина погрешности  $\Delta h$  оказывается меньше заданной  $\Delta h_d$ , то задача считается решенной. В ином случае приходится принимать меры, обеспечивающие снижение погрешности. Для этого есть два варианта – использовать параметрические либо структурные возможности коррекции результата. Первый вариант позволяет изменять величину  $\Delta h$  путем смещения узлов интерполирования, основываясь на перекрестном свойстве  $\delta$  – преобразования, рассмотренном в п. 1.5. Его возможности и методика применения позднее будут предметом специального рассмотрения. Второй вариант очевиден. Он базируется на улучшении структурно-дифференциальных возможностей формируемой ПФ при увеличении степеней ее полиномов.

Представленные сведения позволяют сформировать следующую последовательность решения задачи:

1. Определяется величина коэффициента  $b_0$  по установившемуся значению характеристики  $h(t)$ .
2. Находится число неизвестных коэффициентов и размерность ЧХ  $\eta = m + n$ .

3. По формуле (2.19) вычисляется первый узел  $\delta_1$ , затем находятся остальные  $\delta_i$ ,  $i = 2, 3 \dots \eta$ .

4. По формуле (2.18) вычисляются элементы  $W(\delta_i)$  ЧХ искомой передаточной функции.

5. Находятся коэффициенты передаточной функции (2.10) путем решения СЛАУ (2.14).

6. Осуществляется проверка и коррекция решения: оценивается погрешность решения по критерию (2.20); смещаются узлы интерполирования и, если необходимо, увеличиваются значения параметров  $m$  и/или  $n$  искомой передаточной функции.

В заключение рассмотрим применение методики и алгоритма решения задачи на примере получения передаточной функции по переходной характеристике.

**Пример.** Дана переходная характеристика

$$h(t) = 22 - 37,878 e^{-60,241t} \sin(42,982t + 0,62)$$

контура скорости исполнительной подсистемы. Требуется найти передаточную функцию вида  $W(p) = b_0 / (a_2 p^2 + a_1 p + 1)$ .

1. Коэффициент  $b_0$  определим по установившемуся значению переходной характеристики:  $b_0 = 22$ .

2. Найдем размерность ЧХ:  $\eta = m + n = 1 + 1 = 2$ .

3. Найдем значение первого узла  $\delta_1$ . Примем  $\Delta = 0,01$ , зададим длительность переходного процесса  $t_t = 0,1$  с и найдем:

$$\delta_1 = \frac{-\ln 0,1}{0,1} \cong 46.$$

4. По формуле (2.18) найдем элементы ЧХ, приняв для численного интегрирования  $N = 100$  и  $\Delta t_y = 0,001$  с, и сформируем ее:

$$\{W(\delta_i)\}_2 = \{7,5388; 3,6532\}.$$

5. Составим СЛАУ на основе (2.14):

$$\begin{cases} -437,2504a_1 - 25360,5232a_2 = -14,4612, \\ -423,7712a_1 - 49157,4592a_2 = -18,3468. \end{cases}$$

Решение:  $a_1 = 0,0228$ ,  $a_2 = 1,7597 \cdot 10^{-4}$ . В результате получили ПФ

$$W(p) = 22 / (1,7597 \cdot 10^{-4} p^2 + 0,0228 p + 1).$$

Выполним проверку. Для этого найдем переходную характеристику сформированной модели  $h_m(t)$  и сравним ее с исходной функцией  $h(t)$ . Графики функций  $h_m(t)$  и  $h(t)$  показаны на рис. 2.4.

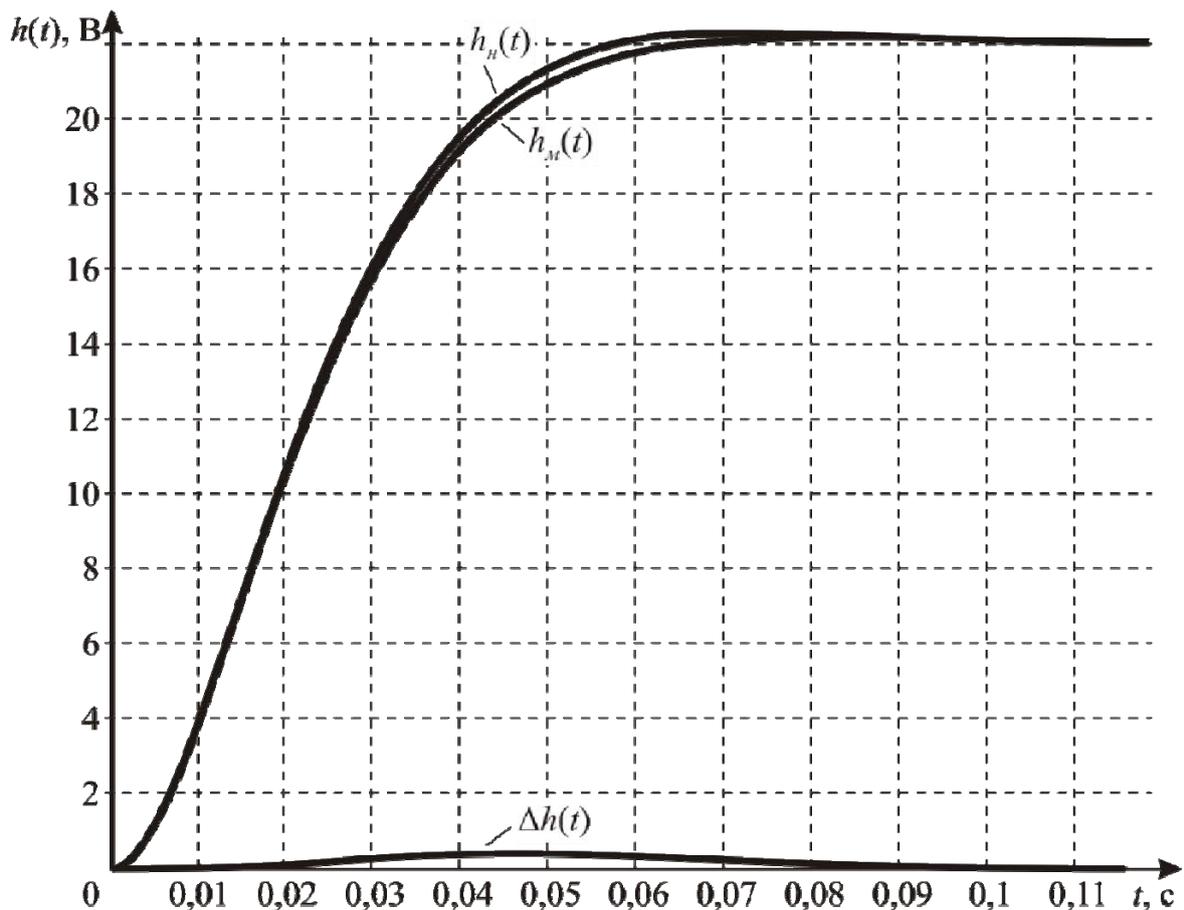


Рис. 2.4. Переходная характеристика  $h(t)$ , ее модель  $h_m(t)$  и погрешность  $\Delta h(t)$

Считаем, что погрешность  $\Delta h = \max_t |h(t) - h_m(t)| = 0,4$  приемлема и поэтому полагаем задачу решенной. При необходимости погрешность решения можно уменьшить параметрическими средствами. Об этом свидетельствует график  $\Delta h(t)$ , который, как будет показано в п. 3.1, в случае достижения наилучшего решения, должен быть осциллирующим.

### 2.2.5. Получение передаточных функций по желаемой реакции контура на заданный входной сигнал

Синтез желаемой передаточной функции системы по его переходной или импульсной переходной характеристике можно рассматривать как задачу получения передаточной функции по его реакции на типовое воздействие – импульсное или ступенчатое. В некоторых случаях приходится решать более общие задачи, когда входное воздействие принадлежит определенному классу. Содержание задачи заключается в получении такой передаточной функции, что реакция системы  $y(t) \doteq W(p)x(p)$  на заданное входное воздействие  $x(t) \doteq x(p)$  с доста-

точной степенью точности будет близка желаемой траектории изменения выходной величины  $y_d(t)$ .

С математической точки зрения задача заключается в следующем. Заданы входной и выходной сигналы  $x(t)$ ,  $y_d(t)$ , а также вид искомой передаточной функции

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}. \quad (2.21)$$

Требуется найти коэффициенты этой функции, обеспечивающие достаточную близость реального выходного сигнала  $y(t)$  к желаемому  $y_{жс}(t)$ . Условие близости может иметь различный смысл. Примем критерий

$$\max_t |y_{жс}(t) - y(t)| \leq \Delta_{жс}, \quad (2.22)$$

который достаточно понятен и в большинстве случаев хорошо согласуется со смыслом задачи. Величина допустимой погрешности  $\Delta_{жс}$  назначается проектировщиком, исходя из условий конкретной задачи.

Поставленная задача обычно решается в области изображений по Лапласу на основе уравнения

$$Y_{жс}(p) = W(p)X(p), \quad (2.23)$$

в котором  $Y_{жс}(p) \doteq y_{жс}(t)$ ,  $X(p) \doteq x(t)$ . Получение изображения функции  $x(t)$  не встречает препятствий, так как имеется обширная справочная литература и, главное, программная поддержка компьютерной математики. Кроме того, сами функции  $x(t)$  в подобных задачах практически всегда достаточно просты. Препятствия возможны при получении функции  $Y_{жс}(p)$ , которая может быть задана сравнительно сложным аналитическим выражением, но чаще – таблицей или графиком.

В первом случае в самой процедуре получения изображений с помощью программных средств поддержки трудности едва ли встретятся, но полученное выражение может иметь высокий порядок. Это обстоятельство может привести к формированию передаточной функции  $W(p)$  высокого порядка и возникновению затруднений при использовании такой передаточной функции в последующих задачах, прежде всего в задачах синтеза.

Во втором случае – при графическом или табличном задании желаемой траектории  $y_{жс}(t)$  – вопрос получения изображения  $Y_{жс}(p)$  усложняется в техническом плане. При любом варианте его рассмотрения необходимым элементом будет этап численного интегрирования и здесь имеется несколько путей решения задачи. Один из них – использование

ВИМ. Этот путь не имеет каких-либо заметных преимуществ или ограничений, но в условиях решения основных задач на основе этого метода его выбор является естественным.

Привлечение ВИМ для определения неизвестной функции  $W(p)$  предусматривает замену функций комплексной переменной, входящих в уравнение (2.21), вещественными функциями и получение эквивалентного уравнения  $Y_{\text{жс}}(\delta) = W(\delta)X(\delta)$ .

Это соотношение в соответствии с технологией ВИМ легко преобразуется в систему уравнений

$$Y_{\text{жс}}(\delta_i) = W(\delta_i)X(\delta_i), \quad i = 1, 2, \dots, \eta. \quad (2.24)$$

Здесь число узлов  $\eta$  должно быть равным числу неизвестных коэффициентов функции (2.21), что является одним из необходимых условий существования единственного решения. По принятой в ВИМ терминологии значения  $Y_{\text{жс}}(\delta_i)$ ,  $X(\delta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, \eta$  являются элементами соответствующих ЧХ. Найти их можно по расчетным формулам

$$Y_{\text{жс}}(\delta_i) \cong \sum_{j=1}^N y_{\text{жс}}(t_j) e^{-\delta_i t_j} \Delta t_j, \quad j = 1, 2, \dots, \eta, \quad (2.25)$$

$$X(\delta_i) \cong \sum_{j=1}^N x(t_j) e^{-\delta_i t_j} \Delta t_j, \quad j = 1, 2, \dots, \eta, \quad (2.26)$$

получаемым на основе формулы прямого  $\delta$ -преобразования (1.3).

Применение этих формул связано с выполнением, пожалуй, единственного творческого шага – определением узлов интерполирования  $\delta_i$ ,  $1, 2, \dots, \eta$ . Эта часть задачи подробно рассмотрена в пп. 1.3 и 2.2.4. Другие вопросы, связанные с применением формул (2.25) и (2.26), достаточно просты, поэтому значения  $Y(\delta_i)$ ,  $X(\delta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, \eta$  могут быть найдены без затруднений.

Теперь представляется возможным решить уравнение (2.24) относительно элементов  $W(\delta_i)$  численной характеристики:

$$W(\delta_i) = Y_{\text{жс}}(\delta_i) / X(\delta_i), \quad i = 1, 2, \dots, \eta.$$

Этот результат можно рассматривать как получение желаемой модели САУ в форме ЧХ  $\{W(\delta_i)\}_\eta$ . Переход к искомой, аналитической форме (2.21) заключается в определении коэффициентов этой формы путем решения СЛАУ вида

$$W(\delta_i) = \frac{b_m \delta_i^m + b_{m-1} \delta_i^{m-1} + \dots + b_0}{a_n \delta_i^n + a_{n-1} \delta_i^{n-1} + \dots + a_1 \delta_i + 1}, \quad i = \overline{1, \eta}.$$

Полученные таким образом коэффициенты  $b_k, k = 0, 1 \dots m,$   
 $a_r, r = 1, 2 \dots n$  являются коэффициентами передаточной функции (2.21). Однако этот результат не является окончательным, его следует рассматривать пока как итог первой итерации, который следует проверить по критерию (2.22). С этой целью необходимо найти выходной сигнал сформированной модели  $y(t) \doteq W(p)X(p)$  и оценить выполнение условия (2.22). Может оказаться, что наибольшая величина абсолютного отклонения  $\max_t |y_{\text{жс}}(t) - y(t)| = \Delta$  превышает допустимое значение  $\Delta_{\text{жс}}$ . Эта ситуация возможна, особенно в тех случаях, когда заданы высокие требования по точности, то есть когда значение  $\Delta_{\text{жс}}$  сравнительно мало.

В этом случае следует воспользоваться параметрическим способом коррекции решения, когда степени полиномов числителя и знаменателя передаточной функции (2.21) остаются неизменными; могут изменяться лишь коэффициенты передаточной функции. В основе способа лежит итерационный механизм приближения к желаемому решению, реализующий перекрестное свойство  $\delta$ -преобразования, рассмотренное в п. 1.5. Напомним, что в этом случае можно уменьшить погрешность, которая имеется на начальном или конечном участке интервала  $[0, t_y]$ , за счет смещения узлов интерполирования соответственно в область их больших или меньших значений. Более подробные сведения можно получить в пп. 2.4.3 и 3.1.

Параметрический способ коррекции решения позволяет уменьшить погрешность  $\Delta$ , по крайней мере, по сравнению с результатом первой итерации. Однако это не означает, что будет достигнуто интересующее нас неравенство  $\Delta < \Delta_{\text{жс}}$ , так как при заданных структурных параметрах  $m$  и  $n$  поставленная задача вообще может не иметь решения. В реальных условиях такая ситуация маловероятна (она возможна, как уже говорилось, при очень малых значениях  $\Delta_{\text{жс}}$ ), однако, если она возникла и решение необходимо найти, следует увеличивать параметры  $m$  и/или  $n$  и на каждом шаге увеличения значений  $m$  или  $n$  по-прежнему использовать параметрическую итерационную процедуру уменьшения текущей погрешности  $\Delta$ .

### **2.2.6. Получение желаемых передаточных функций по прямым показателям качества**

Задача формирования ПФ по прямым показателям качества является более значимой по сравнению с предыдущими. Основанием для такого заключения является следующее. При создании эталонных моделей систем или контуров проектировщик в редких случаях может задать пе-

реходную характеристику в виде функциональной зависимости  $h(t)$ ,  $t \in [0, t_t]$ . Более того, во многих случаях в этом нет необходимости, так как обычно требуется, чтобы  $h(t)$  лишь удовлетворяла определенным требованиям. Они могут быть заданы в форме ограничений, например, границ запретных зон, которые не должна пересекать  $h(t)$ , или в виде системы показателей, которым должна удовлетворять переходная характеристика. В последнем случае, который можно рассматривать в качестве развития предыдущего, используются такие параметры как перерегулирование, время установления, время нарастания, максимальные скорости и ускорения, колебательность и др. Ниже рассмотрена наиболее распространенная задача, когда заданы только два параметра, но они всегда являются ведущими – перерегулирование  $\sigma$  и время регулирования  $t_t$ . Полученный алгоритм решения может быть обобщен на задачи с увеличенным числом показателей.

Пусть требуется сформировать желаемую передаточную функцию по следующим данным:

1. Перерегулирование должно удовлетворять условию

$$\sigma = \sigma_{жс} \pm \Delta\sigma_{жс},$$

где  $\sigma_{жс}$  и  $\Delta\sigma_{жс}$  – заданное значение перерегулирования и допустимый предел отклонения.

2. Известно время регулирования  $t_y$ .
3. Задано установившееся значение выходной координаты

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h_t.$$

4. Известен вид желаемой передаточной функции

$$W(p) = (b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0) / (a_n p^n + \dots + a_1 p + 1). \quad (2.27)$$

По условиям задачи сразу можно установить значение коэффициента  $b_0$ :  $b_0 = h_y$ , так что определению подлежит  $\eta = m + n$  коэффициентов.

Для пояснения методики решения задачи изобразим на рис. 2.5 переходную характеристику, которая удовлетворяет исходным требованиям, а в остальном является произвольной функцией времени. Выделим на графике  $h(t)$  характерные точки, обозначив их соответствующими значениями функции. Две точки очевидны:  $h(t_\sigma)$  и  $h(t_y)$  определены исходными данными. Еще две точки  $h(t_{\sigma-})$  и  $h(t_{\sigma+})$  являются дополнительными – они локализуют экстремум функции, определяющий заданное перерегулирование. Соединим полученные точки последовательно, начиная с точки  $(0, 0)$ , отрезками прямых вида

$h_y^r(t) = k_r t + b_r$ ,  $r = 0, 1, 2, 3$  и найдем элементы ЧХ путем интегрирования с помощью аппроксимирующих прямых. Используем формулу

$$W(\delta_i) = \delta_i \int_0^{t_i} h(t) e^{-\delta_i t} dt, \quad i = 1, 2, \dots, \eta, \quad (2.28)$$

в которой  $\eta$ -размерность ЧХ, определяемая числом неизвестных коэффициентов передаточной функции. Значения узлов  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \eta$  назначаются по рекомендациям, изложенным в п. 2.24: по формуле (2.19) вычисляется значение  $\delta_1$ , затем находятся остальные узлы  $\delta_i = i \delta_1$ ,  $i = 2, 3, \dots, \eta$ .

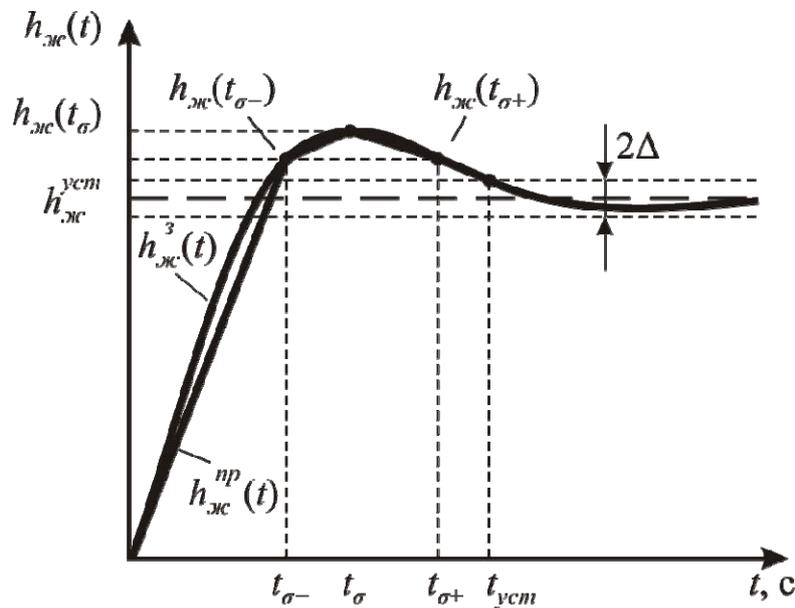


Рис. 2.5. График желаемой переходной характеристики  $h(t)$

с характерными точками и ее аппроксимированное представление  $h_{жс}^{np}(t)$

Принятая форма аппроксимации исходной характеристики отрезками прямых позволяет достаточно просто выполнить численное интегрирование. В результате будет получена ЧХ  $\{W(\delta_i)\}_\eta$ , которая совместно с дробно-рациональной формой искомой передаточной функции позволяет составить СЛАУ

$$W(\delta_i) = \frac{b_m \delta_i^m + b_{m-1} \delta_i^{m-1} + \dots + b_0}{a_n \delta_i^n + a_{n-1} \delta_i^{n-1} + \dots + a_1 \delta_i + 1}, \quad i = \overline{1, \eta}.$$

Необходимые и достаточные условия существования единственного решения при заданной форме сводятся к назначению всех узлов ин-

терполирования некратными, что уже предусмотрено в формулах вычисления узлов.

Полученные таким образом коэффициенты  $b_1, b_2 \dots b_m, a_1, a_2 \dots a_n$  дают возможность сформировать желаемую передаточную функцию. Однако такое решение, как правило, не в полной мере соответствует предъявляемым к системе требованиям, в частности, по ведущему параметру – перерегулированию  $\sigma$ . Это вполне закономерный итог использования неполных исходных данных о системе и приближенного интегрирования. Будем его рассматривать как результат выполнения первого этапа решения задачи, а полученные значения перерегулирования и времени установления будем обозначать как  $\sigma^1$  и  $t_y^1$ , подчеркивая их принадлежность первой итерации.

Вторым этапом является настройка решения на требуемые значения параметров. Эта процедура базируется на перекрестном свойстве  $\delta$  – преобразования, которое изложено в п. 1.5. Напомним, оно устанавливает качественную связь между распределением погрешности решения в области времени на интервале  $[0, t_y]$  и верхней границей  $\delta_\eta$  расположения узлов интерполирования. В приложении к данной задаче перекрестное свойство позволяет сформулировать следующие рекомендации по настройке решения: если полученное на первом этапе значение перерегулирования  $\sigma^1$  превышает допустимую величину  $\sigma = \sigma_{\text{жс}} + \Delta\sigma_{\text{жс}}$ , то значение  $\delta_\eta$  следует уменьшить, приняв  $\delta_\eta^2 < \delta_\eta^1$ , где  $\delta_\eta^1$  относится к первому этапу; при  $\sigma^1 < \sigma_{\text{жс}} - \Delta\sigma_{\text{жс}}$  следует выбрать  $\delta_\eta^2 > \delta_\eta^1$ .

Такая алгоритмическая основа позволяет на каждом  $j$ -м шаге определить по известной величине  $\sigma^j$  значение  $\delta_\eta^{j+1}$  изменяемого параметра  $\delta_\eta$  для  $(j+1)$ -го шага. Обычно требуемая величина перерегулирования достигается за три-четыре итерации.

**Пример.** Требуется получить эталонную модель системы по следующим исходным данным:

- перерегулирование (в абсолютных единицах)  $\sigma_d = 0,2 \pm 0,03$ ;
- время регулирования  $t_y^d \geq 10$  с;
- установившееся значение переходной характеристики  $h_t = 1$  рад;
- вид передаточной функции  $W(p) = (b_1 p + b_0) / (a_2 p^2 + a_1 p + 1)$ .

Процесс итерационного поиска решения представлен в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Результаты итерационного приближения к решению,  
удовлетворяющему условиям задачи

№№ итераций	Значение $\delta_\eta^j$	Значения коэффициентов			Показатели качества	
		$b_1$	$a_2$	$a_1$	$\sigma$	$t_b, c$
1	4	11,027	37,159	2,743	1,3	100
2	2	1,871	6,587	2,271	0,29	11,5
3	1,5	0,954	3,666	2,028	0,17	9,2
4	1	-0,419	-0,385	-1,372	$\infty$	$\infty$

При значении  $\delta_\eta = 1,5$  решение удовлетворяет требованиям по перерегулированию и времени установления. При желании этот результат можно улучшить, то есть найти такое значение  $\delta_\eta$ , при котором перерегулирование  $\sigma$  получаемой модели приближается к заданному значению  $\sigma_{жс} = 0,2$  с большей точностью. Так, при  $\delta_\eta^5 = 1,58$  величина перерегулирования становится равной 0,195 при практически неизменном времени установления. Можно добиваться и более высокой точности, если это будет целесообразно.

### 2.3. Получение желаемых передаточных функций разомкнутых систем

Уравнения синтеза (2.5), (2.7) содержат информацию об эталонной системе в виде его передаточных функций соответственно в замкнутом  $W_{жс}(p)$  или разомкнутом  $W_{жс}^P(p)$  состоянии. Во многих случаях предпочтительным с точки зрения техники получения решения является второе из этих уравнений, использующее передаточную функцию разомкнутого контура. Между тем эталонная система обычно задана передаточной функцией  $W_{жс}(p)$ , описывающей поведение контура в замкнутом состоянии. Поэтому возникает задача перехода от передаточной функции  $W_{жс}(p)$  модели системы в разомкнутом состоянии  $W_{жс}^P(p)$ . Для упрощения обозначений далее индексы принадлежности передаточных функций к желаемым моделям указывать не будем.

Задачу рассматривают в двух вариантах, определяемых наличием или отсутствием требований в отношении свойства астатизма контура. Это вызвано особенностями алгоритмов решения задачи в случае астатической САУ. Рассмотрение начнем с более простого случая статической системы.

### 2.3.1. Получение желаемых передаточных функций разомкнутых статических систем

Положим, что известна функция  $W(p)$ , описывающая замкнутую САУ или контур. Искомая передаточная функция  $W^p(p)$  связана с исходной  $W(p)$  известным соотношением

$$W^p(p) = \frac{W(p)}{1 - W(p)k_{oc}}, \quad (2.29)$$

где  $k_{oc}$  – пока неизвестный коэффициент обратной связи. Для определения величины  $k_{oc}$  нужно иметь дополнительную информация о системе, которая характеризует его статический режим. Зададим ее:  $x$  – величина входного сигнала;  $y_{жс}$  – требуемое значение выходного сигнала;  $\Delta x = y - y_{жс}$  – статическая погрешность системы – отклонение величины выходного сигнала  $y$  от требуемого значения  $y_{жс}$ .

Ранее на рис. 2.3 были показаны структурная схема системы и введенные обозначения. Они позволяют описать статический режим САУ системой уравнений

$$\begin{cases} x - y_{oc} = \varepsilon, \\ y = k\varepsilon, \\ y_{oc} = k_{oc}y, \\ y = y_{жс} - \Delta y, \end{cases}$$

в которой  $k = \lim_{p \rightarrow 0} W^p(p)$  является коэффициентом передачи разомкнутой системы. Из СЛАУ можно найти взаимосвязь двух неизвестных параметров –  $k$  и  $k_{oc}$ :

$$k = \frac{y_{жс} - \Delta y}{x - k_{oc}(y_{жс} - \Delta y)}. \quad (2.30)$$

Решение уравнения (2.30) можно найти, задавшись одним из неизвестных. Обычно задают значение  $k_{oc}$ . Однако здесь необходимо соблюдать определенные ограничения. Величина  $k$  должна быть, очевидно, положительной, поэтому обязательным является выполнение условия, определяющего положительность знаменателя в (2.30):  $x - k_{oc}(y_{жс} - \Delta y) > 0$ . Отсюда найдется верхняя граница значений коэффициента  $k_{oc}^{жс}$ , позволяющая выбрать значение этого коэффициента с учетом по крайней мере двух факторов. Во-первых, нужно обеспечить неравенство  $k_{oc}^{жс} > k_{oc}$  с не-

которым запасом, аналогичным запасу устойчивости. Во-вторых, следует учесть характеристики реальных датчиков: крутизна характеристики выбранного датчика не должна быть меньше расчетного значения.

На этом процедура расчета величины коэффициента обратной связи заканчивается, что дает возможность найти передаточную функцию  $W^p(p)$ , воспользовавшись формулой (2.29). Поэтому задачу получения передаточной функции  $W^o(p)$  в целом считаем решенной.

### **2.3.2. Получение желаемых передаточных функций разомкнутых астатических систем**

Теперь перейдем к рассмотрению второй задачи формирования желаемой передаточной функции, когда система обладает свойством астатизма. Как и прежде, считаем известной желаемую передаточную функцию  $W(p)$  замкнутой системы, а переход к искомой передаточной функции осуществляется по формуле (2.29). Рассмотрим ограничим, хотя и частным, но наиболее распространенным случаем: система имеет астатизм первого порядка. Кроме того, для простоты рассмотрения положим, что желаемая передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{\beta_1 p + \beta_0}{\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + 1}. \quad (2.31)$$

Последнее условие практически не снижает общности результатов и тем более не является принципиальным, позволяя в то же время оперировать компактными и конкретными записями.

При поиске решения будем учитывать два обстоятельства: передаточная функция  $W^p(p)$  должна иметь второй порядок и содержать полюс  $p = 0$ . В соответствии с этим решение будем искать в виде

$$W^p(p) = \frac{b_1 p + b_0}{p(a_1 p + 1)}. \quad (2.32)$$

Подставим развернутое выражение передаточной функции  $W(p)$  (2.31) в формулу замыкания (2.29), что дает

$$W^p(p) = \frac{\beta_1 p + \beta_0}{\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + 1 - (\beta_1 p + \beta_0)k_{oc}} = \frac{\beta_1 p + \beta_0}{\alpha_2 p^2 + (\alpha_1 - \beta_1 k_{oc})p + (1 - \beta_0 k_{oc})}.$$

Полученная передаточная функция при выполнении условия

$$1 - \beta_0 k = 0 \quad (2.33)$$

будет содержать полюс первого порядка в начале координат, определяя тем самым астатизм первого порядка. Таким образом, удовлетворены структурные требования, предъявляемые к передаточной функции  $W^p(p)$ , и могут быть определены значения ее коэффициентов:

$$b_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1 k_{oc}}, \quad b_0 = \frac{\beta_0}{\alpha_1 - \beta_1 k_{oc}}, \quad a_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1 k_{oc}}.$$

На этом задачу можно было бы считать решенной, но практика расчетов свидетельствует о необходимости проверки каждой решаемой задачи с целью повышения достоверности результатов. Рассматриваемая задача не только не является исключением, но, напротив, может служить примером, когда такая проверка совершенно необходима. Покажем это на конкретной задаче.

По заданным значениям перерегулирования  $\sigma_{жс} = 36\%$  и времени установления  $t_i = 3,5$  с по формуле Коновалова–Орурка (п. 2.2.1) получена передаточная функция замкнутой системы

$$W(p) = \frac{0,01p + 1}{0,001p^2 + 0,02p + 1}.$$

От этой модели перейдем к интересующей передаточной функции разомкнутой системы при условии обеспечения астатизма первого порядка. Получим

$$W^p(p) = \frac{p + 100}{p(0,1p + 1)}.$$

Для анализа результата воспользуемся методом логарифмических амплитудно-частотных характеристик (ЛАЧХ), который обладает простотой и исключительной наглядностью. Построим асимптотическую ЛАЧХ  $L(\omega) = 20 \lg |W^o(j\omega)|$ . Она показана на рис. 2.6, а. Наклон асим-

птоты в окрестности частоты среза  $\omega_c$  составляет  $-40 \frac{\partial B}{\partial \text{дек}}$ . Известно [5],

что в этом случае замкнутая система будет неустойчива либо будет иметь недопустимо малый запас устойчивости. В рассматриваемой задаче сомнений в устойчивости контура нет, так как выполняется необходимое и достаточное условие устойчивости систем второго порядка – коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы положительны. Поэтому можно предположить, что желаемая САУ имеет недостаточный запас устойчивости и это негативно отразится на запасе устойчивости системы, которая будет синтезирована на основе такой желаемой модели.

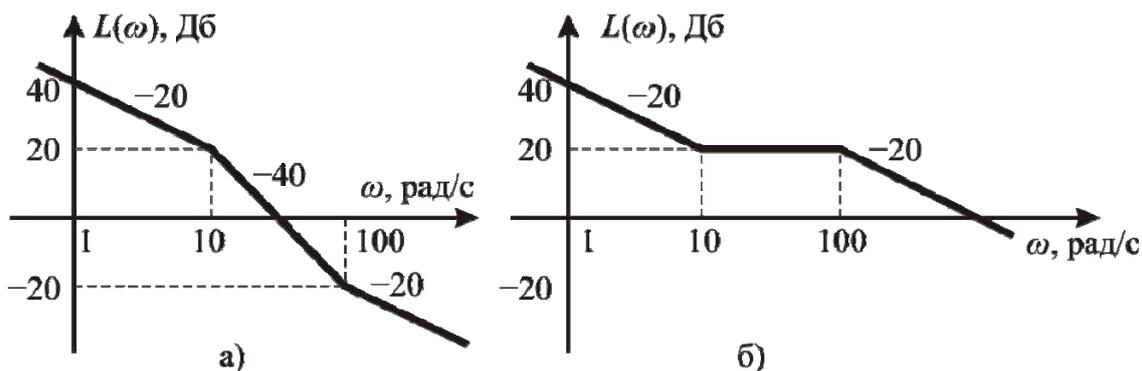


Рис. 2.6. Логарифмические амплитудные характеристики

С целью более детального пояснения ситуации на рис. 2.6, б показана ЛАЧХ, соответствующая передаточной функции

$$W^p(p) = 100 \frac{0,1p + 1}{p(0,01p + 1)},$$

которая имеет ту же структуру: порядок астатизм первый,  $m = 1$ ,  $n = 2$ . Отличие – только в значениях двух коэффициентов. Однако свойства системы меняются существенно. В окрестности частоты среза наклон асимптоты составляет  $-20$  дБ/дек и потому проблемы запаса устойчивости не существует.

Сравнение двух типов ЛАЧХ и соответствующих им систем позволяет выработать критерий выделения допустимых по условию устойчивости передаточных функций  $W^p(p)$ . Он оперирует коэффициентами  $b_1$  и  $a_1$  передаточной функции разомкнутой системы

$$W^p(p) = \frac{b_0(b_1'p + 1)}{p(a_1p + 1)}$$

и заключается в следующем: если выполняется условие  $b_1' > a_1$ , то система обладает необходимыми возможностями для обеспечения требуемых запасов устойчивости; при  $b_1' < a_1$  такие возможности могут отсутствовать.

С точки зрения физики процессов этим ситуациям можно дать следующее объяснение. Полином числителя передаточной функции  $W^p(p)$  выражает дифференцирующие свойства системы, полином знаменателя – инерционные, которые замедляют протекающие в системе процессы. Коэффициенты являются количественными показателями указанных свойств. В рассматриваемом случае с позиций быстродействия необходимо, чтобы форсирующие свойства преобладали, следовательно, коэффициент  $b_1'$  должен быть больше коэффициента  $a_1$ , что приводит к неравенству  $b_1' > a_1$ .

Значение рассматриваемого вопроса не ограничивается собственно задачей получения желаемой передаточной функции. Неудачное формирование желаемой передаточной функции  $W(p)$  и отсутствие проверки может повлечь за собой проблемы при последующем решении уравнения синтеза. Это проявляется в том, что синтезированный контур или система может оказываться неустойчивым и никакие параметрические или структурные изменения регулятора не приведут к положительным результатам. Этот итог закономерен: такова эталонная модель, а синтезируемая система обязана стремиться к эталону, что определено уравнением синтеза.

## 2.4. Синтез передаточных функций регуляторов

### 2.4.1. Постановка задачи синтеза

Синтез регулятора любого контура или системы можно свести, как было установлено, к решению уравнения (2.1) либо (2.7). В вычислительном отношении более простым оказывается второе, оно и будет использоваться в дальнейшем.

Будем считать, что в уравнении (2.7) известны передаточная функция неизменяемой части  $W_{нч}(p)$  и желаемая передаточная функция разомкнутой системы  $W_{жс}^p(p)$ . Об искомой модели регулятора известно, что она представляет собой дробно-рациональную функцию

$$W_p(p) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + 1}, \quad (2.34)$$

с заданными параметрами  $m$  и  $n$ . Задача состоит в нахождении коэффициентов  $b_m, b_{m-1} \dots b_0, a_n, a_{n-1} \dots a_1$ , таких, чтобы желаемая передаточная функция  $W_{жс}^p(p)$  и передаточная функция синтезированной системы

$$W_c^p(p) = W_p(p)W_{нч}(p) \quad (2.35)$$

были бы близки между собой по какому-либо принятому критерию.

Приведенная формулировка отражает математическую сторону задачи, однако она не в полной мере соответствует ее исходной постановке, связанной со свойствами замкнутой системы. Напомним, что при синтезе наибольший интерес представляют временные динамические характеристики, чаще всего – переходные характеристики. Формируемый при этом критерий близости желаемой и синтезируемой систем должен учитывать все предъявляемые к системе требования. Однако поиск решения в этом случае оказывается весьма сложным. С целью упрощения задачи критерий близости конструируют на основе одного из показателей качества, который в данной задаче считают важнейшим.

Во многих случаях, в том числе при расчете исполнительных мехатронных систем, таким показателем выбирают перерегулирование [7], если возможности принятого метода расчета позволяют достаточно просто его находить, контролировать и изменять. Расчет САУ на базе ВИМ такую возможность предоставляет, поэтому примем следующий критерий

$$\sigma_s - \Delta\sigma \leq \sigma \leq \sigma_s + \Delta\sigma, \quad (2.36)$$

где  $\sigma_s$  – заданное значение перерегулирования,  $\Delta\sigma$  – допустимое отклонение от величины  $\sigma_s$ .

Условие (2.36) будем рассматривать как основное при синтезе регулятора. Однако нужно будет выполнить и другие требования, предъявляемые к синтезируемой САУ. Наиболее распространенные из них: время установления, время нарастания, максимальные скорости и ускорения, робастность, запас устойчивости, колебательность и другие. Рассмотрение задачи ограничим основным условием (2.36) и двумя дополнительными условиями из перечисленных – быстродействием системы, которое определено показателем качества системы – заданным временем установления  $t_y^3$ , и робастностью. Быстродействие САУ задается в форме

$$t_y \leq t_y^3, \quad (2.37)$$

где  $t_y$  – длительность переходного процесса синтезированной системы.

И наконец, о последнем свойстве, которым должна обладать синтезируемая САУ, – о ее робастности. Это важнейшее свойство системы и к нему придется обращаться при решении многих частных задач, связанных с созданием систем управления. В связи с этим вопросы количественного оценивания робастности и способы достижения заданных показателей будут предметом специального рассмотрения при решении нескольких задач. Поэтому в рамках решения уравнения синтеза (2.35) относительно коэффициентов передаточной функции регулятора (2.34) в качестве исходных требований будем принимать условия (2.36) и (2.37).

#### 2.4.2. Решение уравнения синтеза

Перейдем к решению уравнения (2.35), которое для этой цели переведем в вещественную форму

$$W_{эс}^p(\delta) \cong W_p(\delta)W_{нч}(\delta). \quad (2.38)$$

Последовательность решения удобно представить в виде трех этапов. На первом определяется ЧХ регулятора, на втором вычисляются коэффициенты передаточной функции регулятора  $W_p(p)$ , на третьем осуществляется итерационное приближение к искомому решению.

В рамках первого этапа от уравнения (2.37) перейдем к уравнению в терминах ЧХ:

$$\{W_{жс}^p(\delta_i)\}_\eta = \{W_p(\delta_i)\}_\eta \{W_{нч}(\delta_i)\}_\eta. \quad (2.39)$$

В этом переходе есть два важных элемента, связанных с выбором узлов  $\delta_i$ . Во-первых, все численные характеристики должны иметь одинаковые узлы. Во-вторых, узлы должны вычисляться по желаемой передаточной функции, так как целевыми являются свойства этой функции, но никак не неизменяемой части  $W_{нч}(p)$ .

Уравнение (2.39) можно записать в виде системы уравнений

$$W_{жс}^p(\delta_i) = W_p(\delta_i)W_{нч}(\delta_i), \quad i = 1, 2, \dots, \eta, \quad (2.40)$$

в развернутой матричной форме

$$\begin{bmatrix} W_{жс}^p(\delta_1) & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & W_{жс}^p(\delta_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & W_{жс}^p(\delta_\eta) & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p(\delta_1) & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & W_p(\delta_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & W_p(\delta_\eta) & \dots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_{нч}(\delta_1) & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & W_{нч}(\delta_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & W_{нч}(\delta_\eta) & \dots \end{bmatrix}$$

или в компактной форме

$$W_{жс}^p = W_p W_{нч}.$$

Решение можно искать в любой из представленных форм. В этих случаях будем иметь соответственно:

$$\begin{aligned} \{W_p(\delta_i)\}_\eta &= \{W_{жс}^p(\delta_i)\}_\eta / \{W_{нч}(\delta_i)\}_\eta, \\ W_p(\delta_i) &= W_{жс}^p(\delta_i) / W_{нч}(\delta_i), \quad i = 1, 2, \dots, \eta, \\ W_p &= W_{жс}^p W_{нч}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

где  $W_p, W_{жс}^p, W_{нч}$  – соответствующие матрицы,  $W_{нч}^{-1}$  – обратная матрица. На этом заканчивается этап вычисления элементов  $W_p(\delta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, \eta$  ЧХ регулятора.

Решение задачи второго этапа – определение коэффициентов передаточной функции регулятора (2.34) – основано на понятии ЧХ вещественного изображения, введенном в п. 1.3. Там же дана СЛАУ (1.14), определяющая переход от моделей в форме ЧХ к дробно-рациональным описаниям. В обозначениях рассматриваемой задачи система уравнений (1.14) принимает вид

$$W_p(\delta_i) = \frac{b_m \delta_i^m + b_{m-1} \delta_i^{m-1} + \dots + b_0}{a_n \delta_i^n + a_{n-1} \delta_i^{n-1} + \dots + a_1 \delta_i + 1}, \quad i = \overline{1, \eta}. \quad (2.42)$$

Значения  $W_p(\delta_i)$  левой части системы известны: они определены по формуле (2.41) при выполнении первого этапа. Можно показать, что СЛАУ (2.42) имеет решение и оно единственное. Поэтому второй этап – вычисление коэффициентов  $b_m, b_{m-1} \dots b_0, a_n, a_{n-1} \dots a_1$  – можно считать выполнимым.

Несмотря на кажущуюся сложность СЛАУ, представленную в общем виде, поиск ее решения не представляет заметных трудностей. Объяснение состоит в том, что в реальных задачах порядок передаточных функций регуляторов не превышает второго, так что общее число искомых коэффициентов не более пяти. Кроме того, коэффициент  $b_0$  целесообразно находить из уравнения статики, выводя его из СЛАУ, что на единицу понижает число неизвестных и размерность системы снижается до четырех. Последнее означает, что СЛАУ (2.42) распадается на уравнение статики  $W_p(\delta_1) = b_0$  и систему уравнений

$$W_p(\delta_i) = \frac{b_m \delta_i^m + b_{m-1} \delta_i^{m-1} + \dots + b_0}{a_n \delta_i^n + a_{n-1} \delta_i^{n-1} + \dots + a_1 \delta_i + 1}, \quad i = \overline{2, \eta}. \quad (2.43)$$

В последней системе уравнений нумерация узлов может быть изменена с уменьшением на единицу:  $i = 1, 2 \dots \eta - 1$ .

В результате завершения второго этапа найдена вещественная передаточная функция регулятора  $W_p(\delta)$ , которая формальной заменой переменной  $\delta$  на комплексную  $p$  может быть представлена в виде лапласовой передаточной функции  $W_p(p)$ . Это позволяет сформировать передаточные функции синтезированной системы в разомкнутом состоянии  $W^p(p) = W_p(\delta_1)W_{нч}(p)$  и замкнутом

$$W_c(p) = \frac{W_p(p)W_{нч}(p)}{1 + W_p(p)W_{нч}(p)K_{oc}}. \quad (2.44)$$

Полученный результат необходимо оценить на его соответствие заданным требованиям, в частности, условию (2.36) и, если это необходимо, обеспечить итерационное приближение к решению, которое удовлетворяет заданию. В этом заключается суть третьего этапа. Его можно не выполнять, если существует точное решение уравнения (2.38) и оно найдено. Этот случай возможен при выборе соответствующей структуры регулятора, но в реальных задачах маловероятен. Практически всегда возникает другая ситуация, когда принятые значения структурных параметров  $m$  и  $n$  передаточной функции регулятора  $W_p(p)$  исключают существование точного решения. Тогда речь идет о поиске приближенного решения, которое наилучшим образом отвечает требо-

ваниям задачи. В этом случае решение ищется итерационным способом, а его содержание составляет содержание упомянутого третьего этапа. Первый шаг в его выполнении связан с получением переходной характеристики  $h_c(t) \doteq W_c(p)/p$ , определением по ней величины перерегулирования  $\sigma$ , проверкой выполнения условия (2.36) и других требований, предъявляемых к системе. Операция получения характеристики  $h_c(t)$  при помощи системы Mathcad, Matlab или иной компьютерной поддержки трудностей не представляет.

Содержание третьего этапа будет подробно рассмотрено ниже, в п. 2.4.3. Здесь же продолжим рассмотрение случая, когда выбранные структурные параметры регулятора обеспечивают существование точного решения. Рассмотрение продолжим в виде расчетного примера синтеза регулятора. Задача настолько проста, что все вычисления можно выполнить вручную. Это позволяет выделить особенности методики, не сопровождая ее техническими подробностями.

**Пример.** Имеется контур с единичной обратной связью. Известны передаточные функции соответственно его неизменяемой части, желаемая ПФ разомкнутого контура и структура ПФ регулятора:

$$W_{нч}(p) = \frac{1}{p+1}, \quad W_{жс}^p(p) = \frac{10}{0,2p+1}, \quad W_p(p) = \frac{b_1 + b_0}{a_1p + 1}.$$

Нужно найти коэффициенты передаточной функции регулятора, обеспечивающие минимальную величину оценки  $\max_t |h_{жс}(t) - h_c(t)|$  отклонения синтезированной переходной характеристики замкнутого контура  $h_c(t)$  от желаемой  $h_{жс}(t)$ .

Заменим в передаточной функции переменную  $p$  на вещественную  $\delta$ , составим уравнение синтеза (2.35) и запишем его в развернутой форме

$$\frac{10}{0,2p+1} = \frac{b_1p + b_0}{a_1p + 1} \frac{1}{p+1}.$$

Найдем ЧХ желаемого контура и неизменяемой части. Размерность всех ЧХ определяется параметрами искомой передаточной функции:  $\eta = m + n + 1 = 3$ . При нахождении нижней  $\delta_1$  и верхней  $\delta_3$  границ интервала расположения узлов  $\delta_i$  учтем следующее. Все передаточные функции, входящие в уравнение, имеют полюсы только в левой полуплоскости, поэтому можно принять  $\delta \in [0, \infty)$  и  $\delta_1 = 0$ . Значение узла  $\delta_3$  вычисляется по желаемой передаточной функции:  $\delta_3 = 40$ . Принятая равномерная сетка узлов позволяет найти  $\delta_2 = \delta_3/2 = 20$ . Теперь можно найти ЧХ функций

$W_{\text{жс}}^p(\delta)$  и  $W_{\text{нч}}(\delta)$ :  $\{W_{\text{жс}}^p(\delta_i)\}_3 = \{10; 2; 10/9\}$ ,  $\{W_{\text{нч}}(\delta_i)\}_3 = \{1; 1/11; 1/21\}$ , а также ЧХ искомой передаточной функции регулятора  $W_p(\delta)$ :  $\{W_p(\delta_i)\}_3 = \{W_{\text{жс}}^p(\delta_i)\}_3 / \{W_{\text{нч}}(\delta_i)\}_3 = \{10; 22; 70/3\}$ . На этом закончен первый этап решения уравнения синтеза.

Перейдем ко второму этапу – получению коэффициентов передаточной функции регулятора. Составляем СЛАУ вида

$$W_p(\delta_i) = \frac{b_1\delta_i + b_0}{a_1\delta_i + 1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для наглядности запишем эту систему уравнений в развернутом виде, подставляя значения узлов и элементов ЧХ:

$$\begin{cases} 10 = b_0, \\ 22 = \frac{20b_1 + b_0}{20a_1 + 1}, \\ \frac{70}{3} = \frac{40b_1 + b_0}{40a_1 + 1}. \end{cases}$$

Решение системы:  $b_0 = 10$ ,  $b_1 = 5$ ,  $a_1 = 0,2$ . Полученная передаточная функция регулятора имеет вид:  $W_p(p) = (5p + 10)/(0,2p + 1)^{-1}$ . Для оценивания результата найдем передаточную функцию синтезированного контура в разомкнутом состоянии:

$$W_c^p(p) = W_p(p)W_{\text{нч}}(p) = \frac{5p + 10}{0,2p + 1} \frac{1}{0,5p + 1} = \frac{10}{0,2p + 1}.$$

Передаточная функция  $W_c^p(p)$  совпадает с желаемой функцией  $W_{\text{жс}}^p(p)$ . Это означает, что существует точное решение и оно найдено.

На этом примере читатель может убедиться в том, что точное решение, когда оно существует, найдется при выборе узлов, отличающихся от рекомендуемых даже на несколько порядков. При этом можно убедиться и в том, что по мере отклонения от рекомендуемых значений узлов, погрешность вычислений будет возрастать.

### 2.4.3. Итерационный способ получения приближенного решения уравнения синтеза

Будем рассматривать уравнение синтеза (2.37), когда оно не имеет точного решения. Еще раз отметим, что этот вариант задачи возникает в тех случаях, когда степени полиномов числителя и знаменателя левой

части уравнения не совпадают со значениями этих же параметров правой, синтезируемой части уравнения. Причиной такого несовпадения является желание получить регулятор низкого порядка.

При рассмотрении задачи будем полагать, что выполнены первые два этапа поиска ее решения по алгоритму и методике, изложенной в п. 2.4.2. Найдены передаточные функции регулятора, разомкнутой и замкнутой САУ. Считаем также, что полученные результаты не являются удовлетворительными и их необходимо улучшить. Поэтому будем их рассматривать как результаты первой итерации, снабжая их верхними индексами «1». В частности, для ведущего параметра синтеза – перерегулирования – обозначение имеет вид  $\sigma^1$ .

Необходимость организации итерационного процесса вызвана, как уже сказано, несоответствием полученных на первой итерации результатов исходным требованиям, предъявляемым к синтезируемой САУ. Требования были отражены в постановке задачи в п. 2.4.1. Это заданные ограничения на перерегулирование и быстродействие в виде неравенств соответственно (2.36) и (2.37), а также требования по робастности, выполнение которого будет рассмотрено позднее.

Пусть при выполнении первой итерации найдена передаточная функция регулятора и, следовательно, система синтезирована. Полученный результат можно представить передаточными функциями  $W_p^1(p)$ ,  $W_c^p(p)$ ,  $W_c^1(p)$  и показателями  $\sigma^1$ ,  $t_y^1$ . Положим, что полученные показатели не удовлетворяют условиям (2.36), (2.37). Необходимо, оставаясь в рамках параметрического синтеза, найти такие коэффициенты  $b_m, b_{m-1} \dots b_0, a_n, a_{n-1} \dots a_1$  регулятора, при которых значения показателей  $\sigma^1$  и  $t_y^1$  изменятся в направлении выполнения условий (2.36), (2.37).

Оперировать одновременно двумя показателями –  $\sigma^1$  и  $t_y^1$  – затруднительно. Поэтому с целью упрощения задачи достижение заданных условий целесообразно организовать в виде двухэтапной процедуры. На первом этапе целью будет выполнение условия по параметру  $\sigma$ , который будем считать приоритетным, ведущим. На втором этапе целью работы является достижение заданного быстродействия САУ, определяемое неравенством (2.37). Можно предполагать, что оба этапа будут реализованы в виде итерационного приближения к цели.

Итак, первая часть задачи состоит в удовлетворении требований по перерегулированию в условиях, когда полученное в рамках первой итерации значение  $\sigma^1$  не удовлетворяет условию (2.36). Для ее решения воспользуемся перекрестным свойством  $\delta$ -преобразования, которое рассмотрено в п. 1.5. В его основе лежит качественная связь между пе-

перерегулированием и значениями узлов  $\delta_i, i = \overline{1, \eta}$ . Такая связь позволяет целенаправленно корректировать решение уравнения синтеза (2.42), изменяя узлы  $\delta_i, i = \overline{1, \eta}$ . Правило изменения вытекает из перекрестного свойства, которое в приложении к данной задаче синтеза трансформируется в следующие рекомендации: если величина перерегулирования  $\sigma$  оказалась больше допустимого значения  $\sigma_s + \Delta\sigma$ , т. е.

$$\sigma > \sigma_s + \Delta\sigma, \quad (2.45)$$

то значения узлов нужно уменьшать; в случае, если

$$\sigma < \sigma_s - \Delta\sigma, \quad (2.46)$$

значения узлов следует увеличивать.

В этом месте сделаем два примечания. Во-первых, выбор новой системы узлов связан с отступлением от первоначальных рекомендаций по их выбору. Во-вторых, на любой итерации могут быть получены отрицательные значения коэффициентов передаточной регулятора. Такое решение следует признать неприемлемым, так как в этом случае система практически всегда будет по меньшей мере неминимально-фазовой, в самом плохом случае – неустойчивой. В любом случае за этой особенностью будут следовать негативные свойства САУ. С алгоритмической точки зрения этот результат следует оценить как получение системы с перерегулированием, которое превышает заданное значение и тогда справедливо заключение (2.45) о его недопустимо большом значении.

Результаты второй и последующих итераций оцениваются с помощью прежних неравенств (2.45), (2.46), которые позволяют составить суждение о направлении изменения узлов  $\delta_i, i = \overline{1, \eta}$ . Технические вопросы смещения узлов в условиях принятой равномерной сетки сводятся к изменению верхней границы  $\delta_\eta$  интервала  $(\delta_1, \delta_\eta)$ , в котором расположены узлы. Расчет значений промежуточных узлов осуществляется по стандартной схеме.

Из сказанного следует, что в основе изменения узлов лежит процедура смещения верхней границы их расположения или, что то же самое, смещение последнего узла  $\delta_\eta$ . Это обстоятельство дает возможность воспользоваться наглядной графической зависимостью настраиваемого параметра  $\sigma$  от значения узла  $\delta_\eta$ . Типичные примеры графиков  $\sigma = f(\delta_\eta)$  показаны на рис. 2.7.

Каждый из приведенных графиков имеет характерную форму: с увеличением значения  $\delta_\eta$  величина перерегулирования  $\sigma$  сначала падает до некоторого уровня, затем вновь возрастает. На рисунке приве-

дены три идеализированных графика  $\sigma = f(\delta_\eta)$ , которые соответствуют решениям уравнения синтеза при различных значениях желаемого времени установления:  $t_{y1}^{жс} < t_{y2}^{жс} < t_{y3}^{жс}$ .

Рассмотрение начнем с графика, соответствующего наибольшему значению времени регулирования  $t_{y3}^{жс}$ . График имеет две точки пересечения с прямой  $\sigma = \sigma_3$ , следовательно, при двух значениях  $\delta_{\eta3}^*$  и  $\delta_{\eta3}^{**}$  переменной  $\delta_\eta$  синтезируемая система будет иметь заданное значение перерегулирования  $\sigma_3$ . Однако, несмотря на два казалось бы найденных варианта решений, ни одно из них принимать не следует, так как оба они не придают контуру свойства робастности по перерегулированию. Объяснение этому будет дано позднее, при рассмотрении оценок робастности и их использовании при синтезе регуляторов.

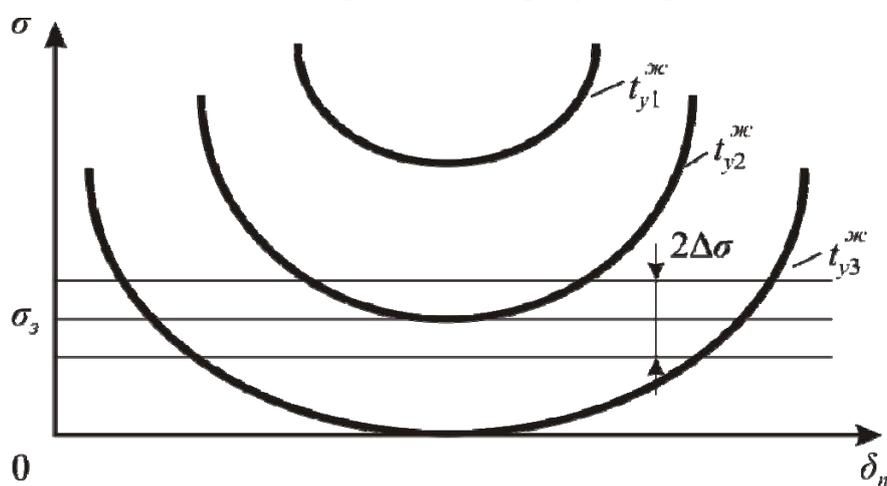


Рис. 2.7. График зависимости перерегулирования  $\sigma$  от параметра  $\delta_\eta$

Теперь обратимся к графику, который соответствует минимальному времени регулирования  $t_{y1}^{жс}$  желаемой системы. Как видим, график при любом значении  $\delta_\eta$  не достигает заданного уровня перерегулирования  $\sigma_3$ , что позволяет говорить об отсутствии приемлемого решения задачи. В то же время сравнение двух рассмотренных графиков позволяет сделать вывод о том, каким образом должны быть изменены условия задачи для обеспечения существования ее решений. Очевидно, необходимо уменьшить требования по быстродействию системы, т. е. принять  $t_y^{жс} > t_{y1}^{жс}$ . При этом новая кривая  $\sigma = f(\delta_\eta)$  будет расположена ниже предыдущей, соответствующей  $t_{y1}^{жс}$ . Дальнейшее увеличение значения  $t_y^{жс}$  позволяют зафиксировать положение графика функции  $\sigma = f(\delta_\eta)$  на

желаемом уровне относительно прямой  $\sigma_3 = const$ . Отметим, что в частном случае может быть задано  $\sigma_3 = 0$ . Последнее важно при синтезе контура положения, для которого отсутствие перерегулирования как правило является обязательным.

Лучшим из числа представленных на рис. 2.7 следует считать вариант  $t_{y2}^{жс}$ . Такой вывод основан на том, что в этом случае обеспечивается максимальное быстродействие системы. В самом деле, попытка уменьшить  $t_y^{жс}$ , т. е. сделать величину этого параметра меньше  $t_{y2}^{жс}$ , приведет к смещению графика  $\sigma = f(\delta_\eta)$  вверх и сделает нерациональным его положение внутри допустимой зоны  $\sigma_3 \pm 2\Delta\sigma$  или даже выведет его из этой зоны. Изменение  $t_y^{жс}$  в сторону увеличения его значения приведет, во-первых, к снижению быстродействия системы и, во-вторых, вновь нерационально будет использована зона  $2\Delta\sigma$ . На этом основании можем считать, что в данном случае отклонение параметра  $t_y^{жс}$  от значения  $t_{y2}^{жс}$  в любую сторону ухудшает решение. В то же время нужно понимать, что это не всеобщее правило. Например, в некоторых задачах вводят ограничение на перерегулирование только сверху. Поэтому специфика задачи будет проявляться в виде каких-то особенностей размещения графика  $\sigma = f(\delta_\eta)$  и ограничений, накладываемых на допустимые значения перерегулирования.

Рассмотрим еще одну часто встречающуюся ситуацию. Может оказаться, что при заданных значениях  $\sigma_3$  и  $t_y^{жс}$  график функции  $\sigma = f(\delta_\eta)$  располагается выше прямой  $\sigma_3 = const$ , как, например, в случае  $t_{y1}^{жс}$  на рис. 2.7. Отсутствие пересечения графика  $\sigma = f(\delta_\eta)$  и прямой  $\sigma_3 = 0$  свидетельствует о том, что решение задачи в классе принятой структуры передаточной функции регулятора  $W_p(p)$  не существует. Поясним эту ситуацию с целью ее правильного понимания и принятия соответствующих решений.

В уравнение синтеза (2.35) входят передаточные функции  $W_{нч}(p)$ ,  $W_{жс}^p(p)$ , и  $W_p(p)$ , свойства которых могут оказаться недостаточно согласованными между собой, так как их получают из различных посылок.

Действительно, при формировании неизменяемой части системы исходными требованиями являются максимальные моменты, усилия, скорости и другие параметры, которые должен развивать привод. Эти требования лежат в основе выбора двигателя и некоторых дру-

гих элементов силовой части привода, определяя в конечном итоге функцию  $W_{нч}(p)$ .

Вторая передаточная функция – модель эталонной системы  $W_{жс}^p(p)$  – формируется на основе желаемых динамических свойств создаваемой системы. Требования в отношении этих свойств, прежде всего по быстродействию, обычно бывают завышенными.

Наконец, третий элемент уравнения синтеза – передаточная функция  $W_p(p)$  – формируется проектировщиком из условия согласования, сближения динамических свойств моделей, описываемых левой  $W_{жс}^p(p)$  и правой  $W_p(p)W_{нч}(p)$  частями уравнения синтеза (2.38). Но эти возможности функции  $W_p(p)$  ограничены практически вторым порядком. Поэтому возникает ситуация, когда задаются высокие требования по быстродействию в условиях значительных инерционных свойств силовой части системы и сравнительно низкого порядка передаточной функции регулятора  $W_p(p)$ . В этом случае решение поставленной задачи вообще может не существовать и это проявляется в виде отсутствия общих точек функции  $\sigma = f(\delta_\eta)$  с прямой  $\sigma_s = const$ .

Для получения решения необходимо внести изменения в исходные данные задачи. Они могут быть сделаны на структурном уровне в виде повышения значений параметров  $m$  и/или  $n$  регулятора или на параметрическом – за счет снижения требований, предъявляемых к синтезируемой системе. В последнем случае приходится снижать быстродействия системы, т. е. увеличивать время установления  $t_y^{жс}$ , величина которого определяет параметры желаемой передаточной функции. Отмеченные меры – структурная и параметрическая – являются способом согласования свойств левой и правой частей уравнения синтеза (2.35) или иначе – способом поиска компромиссного результата при решении уравнения.

В заключение отметим два обстоятельства, которые следует иметь в виду при решении практических задач. Во-первых, изображенные на рис. 2.7 графики являются идеализированными. Реальные зависимости более разнообразны. Например, функция  $\sigma(\delta_\eta)$  при  $\delta \rightarrow 0$  может асимптотически приближаться к оси абсцисс, она может иметь разрывы непрерывности и т. д. Во-вторых, следует различать асимптотическое поведение функции  $\sigma(\delta_\eta)$  при  $\delta \rightarrow 0$  и  $\delta \rightarrow \infty$  и те результаты, которые будут получены при наличии вычислительных ошибок округления. Очевидно, что влияние погрешностей неограниченно возрастает при  $\delta \rightarrow 0$  или  $\delta \rightarrow \infty$ , поэтому, анализируя результаты, следует представ-

лять грань, за которой поведение функции будет существенно искажаться погрешностями вычислений. К этому добавим: интегральные преобразования (Лапласа, Фурье и другие) приводят к так называемым некорректным задачам, что в свою очередь усиливает искажения.

#### 2.4.4. Особенности синтеза астатических систем управления

Астатической называют систему, в которой статическая ошибка равна нулю. Для придания САУ такого свойства в ее состав, в частности, могут вводить интегрирующие звенья. При синтезе астатических систем с помощью ВИМ имеются особенности, знание которых позволяет упростить задачу получения передаточной функции регулятора.

Для рассмотрения особенностей обратимся к уравнению синтеза (2.35)  $W_{ж}^p(p) \cong W_p(p)W_{нч}(p)$ . Положим, что в прямой цепи системы содержится интегрирующее звено. Оно может быть естественным элементом неизменяемой части или вводится специально в состав регулятора с целью создания астатизма. Для определенности примем первый вариант. Это означает, что функция  $W_{нч}(p)$  будет иметь полюс первого порядка в начале координат. Его наличие выделим специальной формой записи  $W_{нч}(p) = W_{нч,o}(p)/p$ , в которой индекс  $o$  свидетельствует об отсутствии в функции  $W_{нч,o}(p)$  нулей и полюсов в начале координат.

Используем принятые обозначения для выделения структурных особенностей правой части уравнения (2.35) с учетом того, что в прямом канале имеется интегрирующее звено:  $W_p(p)W_{нч}(p) = W_{p,o}(p)W_{нч,o}(p)/p$ . С позиций формирования и решения уравнения (2.35) естественно предположить, что условия для достижения наибольшей точности будут обеспечены при совпадении структур левой и правой частей уравнения. Поэтому формируемая функция  $W_{ж}^p(p)$  также должна содержать нулевой полюс, т. е. иметь вид  $W_{ж,o}^p(p)/p$ , а уравнение (2.35) примет вид

$$W_{ж,o}^p(p)/p \cong W_{p,o}(p)W_{нч,o}(p)/p.$$

Заменим его эквивалентным

$$W_{ж,o}^p(p) \cong W_{p,o}(p)W_{нч,o}(p). \quad (2.47)$$

Оно с точностью до обозначений структурных особенностей совпадает с уравнением синтеза, решение которого было рассмотрено в настоящем параграфе. Поэтому дальнейший ход поиска приемлемого решения является стандартным.

## ГЛАВА 3. АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ: ОЦЕНИВАНИЕ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЙ, ПРИБЛИЖЕНИЕ К НАИЛУЧШИМ РЕШЕНИЯМ

При проектировании и исследовании динамических систем управления в большинстве случаев приходится иметь дело с поиском приближенных решений. К ним относятся некоторые задачи, связанные с синтезом регуляторов САУ, выделим две из них.

Первая возникает при использовании очевидного пути получения регуляторов: сначала находится точное решение задачи, т. е. передаточная функция регулятора, которая является точным решением уравнений синтеза (2.5) или (2.7); затем осуществляется аппроксимация полученного результата передаточной функцией низкого порядка.

Вторая задача возникает в тех случаях, когда передаточная функция неизменяемой части САУ оказывается сложной. К таким принято относить функции, которые содержат иррациональные, трансцендентные или дробно-рациональные выражения высокого порядка. К примеру, наличие в системе достаточно часто встречающегося звена запаздывания вносит в состав ее передаточной функции трансцендентную составляющую  $e^{-\tau p}$ , где  $\tau$  – время запаздывания. Оперировать моделями, в которые входит такой элемент, для большинства методов синтеза затруднительно или вообще невозможно. Сказанное относится не только к звену запаздывания, но и ко всем сложным передаточным функциям. Поэтому такие передаточные функции упрощают, аппроксимируя функциями низкого порядка либо всю сложную передаточную функцию, либо ее отдельные составляющие.

Ниже будут рассмотрены несколько задач, связанных с синтезом САУ и аппроксимацией передаточных функций, относящихся к классу сложных. Для отыскания решений будет привлечен ВИМ, который имеет определенные вычислительные преимущества. Основное внимание уделяется трем наиболее важным для практики задачам:

- получению оценок точности в области времени;
- приближению к наилучшим решениям;
- аппроксимации сложных передаточных функций.

### 3.1. Оценивание точности приближенных решений

Положим, что в результате решения какой-либо задачи получено приближенное решение  $W_{np}(p)$ . Точное решение задачи  $W(p)$  тоже известно. Такая ситуация возникает, например, при аппроксимации передаточных функций. Это может быть задача получения реализуемой передаточной функции низкого порядка регулятора по известному точному решению, которое представлено сложной передаточной функцией.

При решении таких задачи в вещественной области рассматривают передаточные функции  $W_{np}(\delta)$  и  $W(\delta)$ , переход к которым на основе замены  $p \rightarrow \delta$  справедлив, так как и точная, и приближенная функции не могут содержать полюсов в правой полуплоскости, а описываемые ими объекты, элементы или системы должны быть устойчивы. Заметим, что условие устойчивости здесь привлекается для простоты перехода к вещественным моделям, но в общем случае оно не имеет принципиального значения.

Решение приближенных задач на основе ВИМ базируется на равенстве ЧХ функций  $W_{np}(\delta)$  и  $W(\delta)$ , которое записывается в виде соотношения  $\{W(\delta_i)\}_\eta = \{W_{np}(\delta_i)\}_\eta$ . Суть равенства состоит в требовании совпадения точной и приближенной функции на принятой системе узлов  $\delta_i, i = 1, 2, \dots, \eta$ . Это иллюстрирует рис. 3.1.

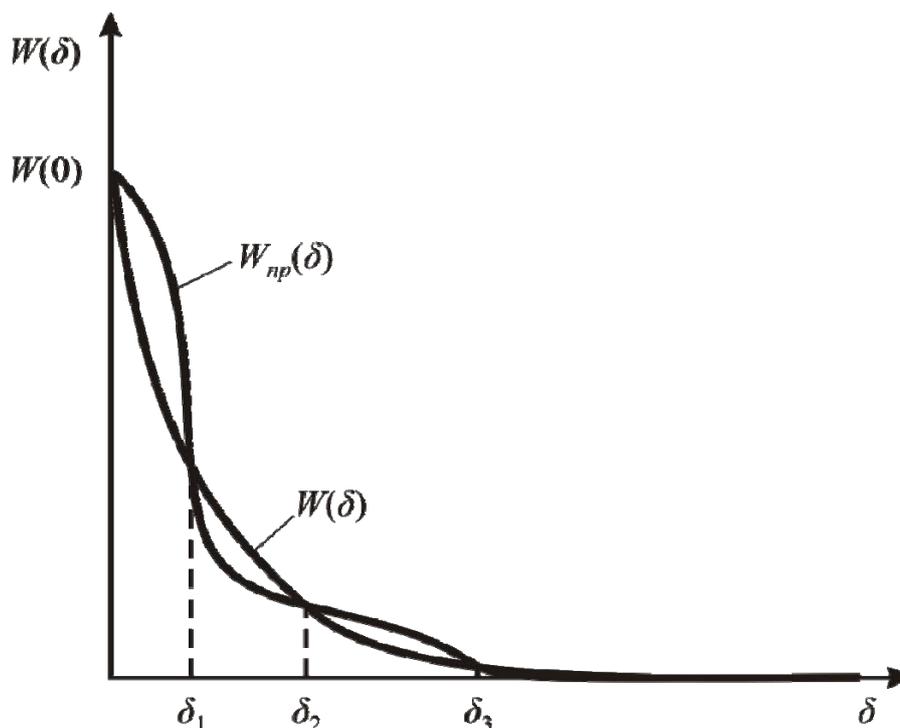


Рис. 3.1. Графики точной  $W(p)$  и приближенной  $W_{np}$  вещественных передаточных функций

О точности полученного решения можно судить по отклонению

$$\Delta W(\delta) = W(\delta) - W_{np}(\delta) \quad (3.1)$$

и оценкам, которые имеется возможность сформировать на основе этой функции. Однако еще до перехода к количественным показателям, только на качественном уровне возможно наметить меры по повыше-

нию точности решения. Основой здесь является расстояние  $\Delta\delta_i = \delta_i - \delta_{i-1}$  между соседними узлами  $\delta_i$  и  $\delta_{i-1}$ , которое во многом определяет погрешность  $\max_{\delta} |\Delta W_i(\delta)| = \max_{\delta} |W_i(\delta) - W_{i_{np}}(\delta)|$  на  $i$ -м интервале. Можно предположить, что при уменьшении расстояния между узлами  $\Delta\delta_i$  величина погрешности  $\max_{\delta \in [\delta_{i-1}, \delta_i]} |\Delta W_i(\delta)|$  на этом интервале также уменьшается.

Приведенные соображения относятся к области изображений. Но человеку более понятны характеристики и оценки в области времени, поэтому перейдем к рассмотрению результатов приближения и их оцениванию в области времени. Для этой цели установим связь между погрешностями в области изображений и времени. За основу примем соотношение (3.1), которое позволяет установить такую связь:

$$\Delta W(\delta) = \int_0^{\infty} k(t)e^{-\delta t} dt - \int_0^{\infty} k_{np}(t)e^{-\delta t} dt = \int_0^{\infty} \Delta k(t)e^{-\delta t} dt.$$

В этом соотношении функция  $\Delta k(t) = k(t) - k_{np}(t)$  показывает отклонение полученной импульсной реакции  $k_{np}(t) \doteq W_{np}(p)$  от точной  $k(t) \doteq W(p)$ . Формулу можно трансформировать в более наглядную, упростив ее до зависимости

$$\Delta W_i(\delta_j) = \int_0^{\infty} \Delta k(t)e^{-\delta_j t} dt, \quad i = 1, 2, \dots, \eta, \quad (3.2)$$

где  $i$  – номер участка интерполяции,  $\delta_j^i$  – произвольное значение переменной  $\delta$  внутри  $i$ -го интервала:  $\delta_j^i \in [\delta_i, \delta_{i+1}]$ . Смысл формы (3.2) в том, что общая информация об отклонении  $\Delta W(\delta)$  разбита по участкам интерполяции и это позволяет выделить те участки или участок, где отклонение оказывается большим, в том числе самым большим. Полученная декомпозиция в свою очередь позволяет сформировать меру точности решения задачи и использовать ее для снижения погрешности.

Формула (3.2) имеет геометрический смысл, который помогает раскрыть связь функций  $\Delta W(\delta^j)$  и  $\Delta k(t)$  для любого произвольного значения переменной  $\delta^j$ : величина  $\Delta W(\delta^j)$  равна площади, ограниченной графиком функции  $\Delta k(t)$  с весом  $\exp(-\delta^j t)$ . Характер изменения функции  $\Delta W(\delta)$  внутри любого интервала можно проследить по графикам, подобным представленным на рис. 3.1. Функция  $\Delta W_i(\delta^j)$  будет начинаться от нуля, при каком-то значении переменной  $\delta$  функция достигает

ет максимального значения  $\max_{\delta \in [\delta_{i-1}, \delta_i]} |\Delta W_i(\delta)|$ , затем вновь уменьшается до нуля. Нас интересует главным образом максимальное отклонение и возможность его уменьшения. Для получения этой возможности под  $\delta_i^j$  будем понимать такое значение переменной  $\delta$ , при котором функция  $|\Delta W(\delta)|$  на  $i$ -ом интервале будет принимать максимальное значение:

$$\max_{\delta_j \in [\delta_i, \delta_{i+1}]} |\Delta W_i(\delta)|, \quad \delta \in [\delta_{i-1}, \delta_i], \quad i = \overline{1, \eta}.$$

Очевидно, что для уменьшения интегральной оценки погрешности – отклонения функции  $\Delta k(t)$  от нуля – следует снижать величины  $\Delta W_i(\delta_j)$ . Эта возможность имеет важное практическое значение, позволяя не только оценивать величину погрешности, но использовать такую оценку в процедуре повышения точности решения задачи. Рассмотрим эту возможность в применении к задачам синтеза САУ.

Показатели вида  $\max_{\delta} |W(\delta)|$  предназначены для оценивания погрешности приближенных решений, полученных с привлечением ВИМ. Они ориентированы на получение количественных оценок в области изображений. В то же время они могут служить косвенными показателями и характеристиками точности решений в области времени, как это показывает соотношение (3.2). Однако для области времени более значимы прямые оценки, которые базируются на функциях времени. Такие оценки могут формироваться различным образом: интегральные, интегральные квадратичные, точечные, среднеквадратичные, и т. д.

Среди них во многих случаях предпочтительными являются характеристики вида  $|\Delta k(t)|$ ,  $t \in [0, \infty]$ . Их удобно использовать для достижения решения, отклонение которого от точного не будет превосходить допустимой величины  $\varepsilon_\delta$ :

$$|\Delta k(t)| < \varepsilon_\delta, \quad t \in [0, \infty]. \quad (3.3)$$

В этом случае говорят, что функция  $k_{np}(t)$  равномерно аппроксимирует функцию  $k(t)$  с точностью  $\varepsilon_\delta$ .

В теории и практике используется также понятие абсолютного отклонения аппроксимирующей функции  $k_{np}(t)$  от точной  $k(t)$  и оценка на его основе:

$$\max_t |\Delta k(t)| = \Delta. \quad (3.4)$$

Она показывает максимальное значение абсолютной разности рассматриваемых функций и потому является наглядным и понятным показателем точности решения задачи.

Логичным развитием такого подхода к оцениванию точности является понятие наилучшего равномерного приближения. В этом случае в рамках заданной структуры приближающей функции  $k_{np}(t)$  находятся такие ее параметры, при которых величина  $\Delta$  была бы минимальной. Тогда условие (3.4) принимает вид

$$\max_t |\Delta k(t)| = \Delta_{\min}. \quad (3.5)$$

Приведенные оценки можно использовать в задачах аппроксимации передаточных функций. Рассмотрим некоторые технологии и алгоритмы решения задач приближения передаточных функций, построенные на основе приведенных сведений.

### 3.2. Приближение к наилучшим равномерным решениям

Аппроксимация передаточных функций по критериям равномерного приближения привлекает своими возможностями, но столь же сильно ограничивает их трудностями реализации. Первое препятствие состоит уже в том, что в общем случае не существует методов достижения наилучшего равномерного приближения. Поэтому на практике ищут решения, отличающиеся от наилучшего на заданную величину  $\varepsilon_0$  в соответствии с условием (3.3).

Теоретической основой решения задач о равномерном наилучшем приближении являются теорема Валле–Пуссена об альтернансе и теорема Чебышева о наилучшем приближении. Для дальнейшей работы воспользуемся двумя важнейшими результатами теории наилучших приближений. Они позволяют получать решения, близкие к наилучшим.

Первый говорит о необходимости существования альтернанса Валле–Пуссена (франц. alternance – чередование), что означает обязательное чередование положительных и отрицательных отклонений функции  $\Delta k(t)$  от оси абсцисс. Суть альтернанса поясняет рис. 3.2, где показаны значения

$$L_j = \max_{t \in [t_j, t_{j+1}]} \Delta k(t), \quad (3.6)$$

которые должны чередовать свои знаки.

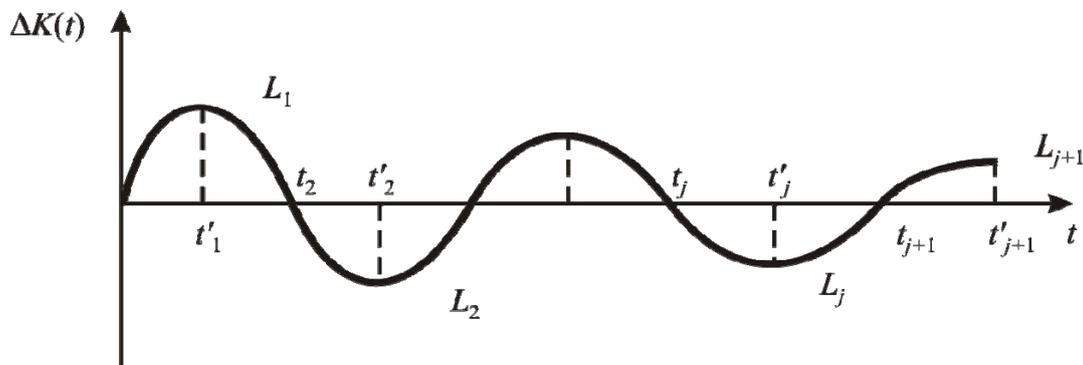


Рис. 3.2. График функции  $\Delta k(t)$ , демонстрирующий альтернанс

Второй результат, сформулированный П.Л. Чебышевым в виде теоремы о наилучшем приближении, требует, чтобы функция  $\Delta k(t)$  принимала поочередно значения  $+L_j$  и  $-L_j$  не менее  $\eta = m + n + 1$  раз на заданном интервале. Это означает, что все отклонения  $L_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, \eta$  должны иметь чередующиеся знаки и равные абсолютные значения:  $|L_j| = L$ ,  $j = 1, 2, \dots, \eta$ .

Методов получения наилучших решений, как уже говорилось, не существует. Приближенные методы базируются на алгоритмах, из которых наиболее употребительны предложенные Е.Я. Ремезом. Более подробные сведения по этому вопросу можно найти в работах основоположников теории наилучших приближений, на которых сделаны ссылки, их учеников и последователей. Здесь приведем лишь частные сведения, позволяющие в ограниченной мере использовать идеи таких приближений и возможности ВИМ для снижения погрешности  $\max_i |\Delta k(t)|$ .

Приближение исходной передаточной функции  $W(\delta)$  более простой функцией  $W_{np}(\delta)$  осуществляется на основе равенства их ЧХ:

$$\{W(\delta_i)\}_\eta = \{W_{np}(\delta_i)\}_\eta. \quad (3.7)$$

Это обеспечивает существование альтернанса в области изображений. Графическим подтверждением и иллюстрацией могут служить рис. 3.1 и рис. 3.2. Более того, можно заметить, что интерполяционный подход и равенства (3.2) сами по себе создают условия существования альтернанса, то есть альтернанс является органичным свойством интерполяционного подхода. В [4] показано, что явление альтернанса при выполнении несложных требований будет иметь место и в области времени. Этим создаются необходимые условия для приближения к наилучшему равномерному решению.

Процесс приближения основан на перекрестном свойстве  $\delta$ -преобразования, которое состоит в том, что существует сравнительно сильная связь, в частности, между начальным участком функции времени и конечным участком ее функции-изображения. Использование этой связи заключается в следующем.

Предположим, в результате выполнения первой итерации в решении какой-либо приближенной задачи получен результат, при котором ошибка на начальном участке интервала  $[0, t_y]$  оказалась недопустимо большой. На основании перекрестного свойства полагаем, что в области изображений велика ошибка на конечном участке функции  $W_{np}(\delta)$ . Для ее уменьшения нужно, очевидно, более точно представить инфор-

мацию об этом участке. Здесь можно поступить различным образом: увеличить верхнюю границу узлов, уменьшить шаг на рассматриваемом участке, увеличить общее число узлов. Самый простой вариант – первый, состоящий в увеличении интервала расположения узлов  $[\delta_1, \delta_\eta]$  за счет смещения узла  $\delta_\eta$  в сторону их больших значений. Достоинство варианта состоит в том, что в условиях равномерной сетки цель достигается без изменения закона распределения узлов – за счет масштабирования их значений. Итерационная процедура смещения узлов продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто примерное равенство погрешностей на начальном и конечном участках интервала  $[0, t_y]$ :

$$\max_{t \in [0, \frac{t_y}{2}]} |\Delta k(t)| \cong \max_{t \in [\frac{t_y}{2}, t_y]} |\Delta k(t)|. \quad (3.8)$$

При наличии значительной погрешности на конечном участке интервала  $[0, t_y]$  ее уменьшение достигается смещением узлов в сторону их меньших значений. Окончание итерационного процесса по-прежнему определяется приближенным равенством (3.8).

При создании и исследовании САУ возникают задачи, в которых необходимо минимизировать ошибку не на всем интервале, а лишь на его части. Обычно речь идет об области больших либо малых значений переменной  $t$ . Получать такие решения можно. Процедура их итерационного поиска по-прежнему связана со смещением узлов по правилу, определенному перекрестным свойством вещественного преобразования. Нужно только иметь в виду, что минимизация погрешности на начальной или конечной части интервала  $[0, t_y]$  влечет за собой обязательное возрастание погрешности на другой его части.

Особое внимание нужно проявлять в случае понижения погрешности при  $t \in [0, t_y/2]$ . Дело в том, что предъявление очень высоких требований точности при малых  $t$  приводят к увеличению перерегулирования и в конечном итоге – к расходящемуся процессу. Это закономерное явление и потому его следует правильно воспринимать. Более того, в некоторых случаях на это идут специально, так как получаемые модели позволяют исследовать «быстрые движения» объекта. В других случаях, когда узлы уменьшают во много раз относительно их значений на первой итерации, модели используют для исследования «медленных движений». Здесь часто допустима сколь угодно большая погрешность в области малых  $t$ .

В качестве итогов настоящего параграфа выделим следующее. При использовании ВИМ для решения приближенных задач имеется возможность перераспределять погрешность, оцениваемую в области вре-

мени, по интервалу  $[0, t_y]$  путем смещения узлов интерполирования. Важно, что такое изменение происходит в виде масштабирования отрезка оси абсцисс, сохраняя неизменным закон распределения узлов.

### 3.3. Аппроксимация сложных передаточных функций

Напомним, что под сложными передаточными функциями условилось понимать такие, которые содержат дробно-рациональные выражения высокого порядка либо иррациональные и трансцендентные составляющие. Необходимость замены исходной передаточной функции более простой возникает достаточно часто, а именно тогда, когда задача в принципе не может быть решена точно, либо полученное решение не может быть точно реализовано и тогда трудоемкий поиск точного решения теряет смысл.

В области автоматического управления самой заметной задачей, где используется процедура аппроксимации, возможно, является, синтез регуляторов. Один из вариантов решения задачи синтеза, как уже было отмечено ранее, непосредственно использует эту процедуру: сначала находится точная передаточная функция регулятора, затем она заменяется приближенной функцией низкого порядка. Недостатки и достоинства этого подхода известны, они были отмечены. Главное, что такой путь существует и часто успешно применяется, а в случае описания объекта сложной передаточной функцией он является чуть ли не единственным.

Решение задачи аппроксимации с привлечением ВИМ базируется на равенстве (3.7), в которое входят ЧХ точной передаточной функции  $W(p)$  и ее аппроксимирующего выражения

$$W_{np}(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1},$$

то есть выражения  $\{W(\delta_i)\}_\eta$ ,  $\{W_{np}(\delta_i)\}_\eta$ .

При составлении равенства (3.7) необходимо иметь в виду два основных обстоятельства, связанных с определением размерности ЧХ  $\eta$  и узлов  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \eta$ . Во-первых, размерности обеих ЧХ должны быть одинаковы. Величина размерности однозначно определена числом неизвестных коэффициентов аппроксимирующей ПФ:  $\eta = m + n + 1$ . В некоторых задачах часть коэффициентов может быть задана, известна или найдена из каких-то условий. При этом в расчетной формуле для параметра  $\eta$  вновь учитываются только неизвестные коэффициенты. Во-вторых, размерность  $\eta$  не зависит от сложности исходной передаточной

функции. Это означает, что этап собственно аппроксимации состоит в переходе от вещественной передаточной функции  $W(\delta)$  к ее ЧХ. Этот переход, содержание которого заключается в выполнении нескольких арифметических операций, определяет простоту решения задачи аппроксимации в целом.

Значения узлов  $\delta_i, i=1,2,\dots,\eta$  находятся стандартным для ВИМ образом. Узлы первой итерации рассчитываются по типовым формулам. На последующих итерациях узлы изменяются по известным правилам так, чтобы достичь желаемого распределения погрешности в области времени. Рекомендации по изменению узлов были даны при п. 2.4.

Начальные сведения по решению задач аппроксимации (выбор узлов, определение коэффициентов аппроксимирующего выражения, оценивание точности, итерационное приближение к приемлемому решению) были приведены ранее. Это позволяет перейти к конечному результату – последовательности решения задачи.

Рекомендуется следующая последовательность действий при решении задачи аппроксимации:

1. Исходная передаточными функциями  $W(p)$  переводится в вещественную форму  $W(\delta), \delta \in [C, \infty), C \geq 0$ . При условии устойчивости рассматриваемого объекта можно принять  $C=0$ . В случае решения специфических задач, например, когда объект неустойчив, определяют значение параметра  $C$  из условия  $C > \text{Re } p_k$ , где  $p_k$  – корни характеристического полинома функции  $W(p)$ .

2. Принимается решение о выборе значений структурных параметров  $m, n$  и определяется размерность ЧХ  $\eta = m + n + 1$ . Эта часть задачи решается оператором с учетом опыта, интуиции и априорных сведений.

3. Находят значения узлов  $\delta_i, i=1,2,\dots,\eta$ . Узел  $\delta_1$  принимается как  $\delta_1 = C = 0$  либо вычисляется по формуле (2.19). Узел  $\delta_\eta$  вычисляется по формуле (1.8), остальные – по условию равномерной сетки (1.10).

4. Вычисляют элементы  $W(\delta_i)$  ЧХ исходной передаточной функции.

5. Составляют и решают систему уравнений вида (3.7) относительно неизвестных коэффициентов функции  $W_{np}(\delta)$ .

6. Переходят от вещественной передаточной функции  $W_{np}(\delta)$  к ласпласовой  $W_{np}(p)$ , находят переходную характеристику  $h_{np}(t) \doteq W_{np}(p)/p$ , сравнивают с точной  $h(t) \doteq W(p)/p$  и, если необходимо, изменяют вели-

чину погрешности  $\max_{t \in [0, t_p]} |h(t) - h_{np}(t)|$  и ее положение на интервале  $[0, t_y]$ .

В некоторых случаях целесообразно использовать импульсные переходные характеристики  $k(t)$ ,  $k_{np}(t)$  и оценку точности  $\max_{t \in [0, t_y]} |k(t) - k_{np}(t)|$ , что не изменяет сути вопроса и мало отражается на результате, но может более соответствовать условиям задачи.

Для пояснения алгоритмической основы и методики решения задачи приближения передаточных функций рассмотрим пример. Он является максимально наглядным, так как не требует объемных расчетов, но в то же время с позиций аппроксимации представляет собой весьма сложную задачу.

**Пример.** Дана передаточная функция звена запаздывания  $W(p) = \exp(-\tau p)$ , где  $\tau$  – время запаздывания, которое для простоты принято равным 1 секунде. Необходимо получить аппроксимирующую передаточную функцию вида

$$W_{np}(p) = \frac{b}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}.$$

Будем придерживаться приведенной выше последовательности действий, хотя некоторые операции настолько просты, что в реальных задачах в виде самостоятельных этапов не выделяются.

1. Перейдем к вещественной форме точной передаточной функции. Функция  $\exp(-p)$  не имеет полюсов в правой полуплоскости, поэтому справедлива замена  $p \rightarrow \delta$ , приводящая к вещественной функции  $W(\delta) = \exp(-\delta)$ ,  $\delta \in [0, \infty)$ .

2. Параметры  $m = 2$ ,  $n = 0$  позволяют найти размерность  $\eta = m + n + 1 = 3$ .

3. Принимаем  $\delta_1 = 0$ , по формуле (1.8) находим значение узла  $\delta_\eta = \delta_3 = 2$ , затем определяем  $\delta_2 = 1$ .

4. Вычисляем элементы ЧХ:

$$W(\delta_1) = 1; \quad W(\delta_2) = 0,3679; \quad W(\delta_3) = 0,1353.$$

5. Составляем СЛАУ

$$W_{np}(\delta_i) = \frac{b}{a_2 \delta_i^2 + a_1 \delta_i + 1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

6. Коэффициент  $b = 1$  найдется из первого уравнения без решения системы. Оставшиеся два коэффициента определятся в результате решения СЛАУ

$$\begin{cases} 0,3679 = \frac{1}{a_2 + a_1 + 1}, \\ 0,1353 = \frac{1}{2^2 a_2 + 2a_1 + 1} \end{cases}.$$

7. Далее находим коэффициенты:  $a_1 = 0,24$ ,  $a_2 = 1,48$ . Получили модель звена запаздывания  $W_{np}^1(p) = \frac{1}{1,48p^2 + 0,24p + 1}$ .

8. Для проверки результата найдем переходную характеристику  $h_{np}^1(t)$ . Она показана на рис. 3.3.

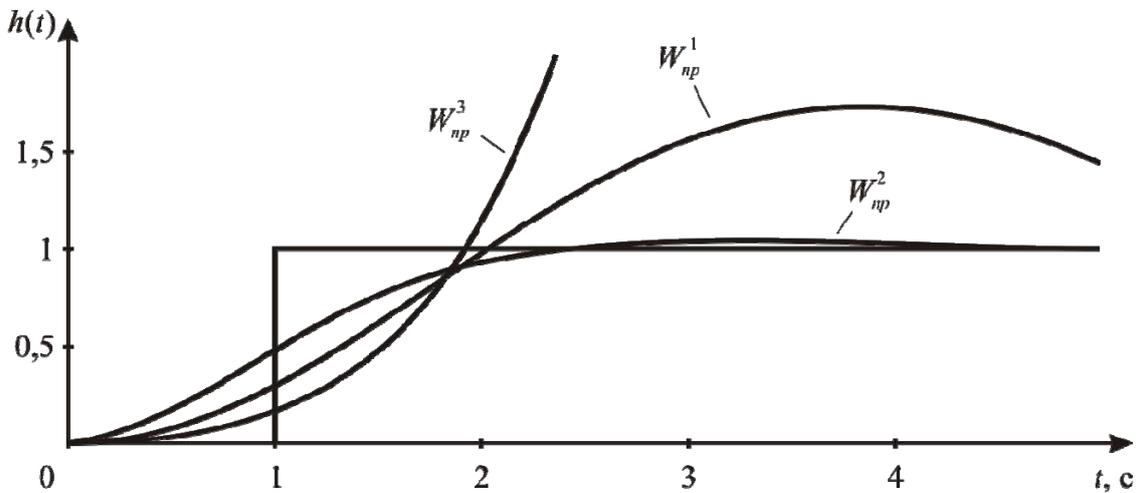


Рис. 3.3. Графики переходных процессов

На этом же рисунке приведены еще две характеристики:  $h_{np}^2(t)$  и  $h_{np}^3(t)$ . Они соответствуют моделям

$$W_{np}^2(p) = \frac{1}{0,5p^2 + p + 1} \text{ и } W_{np}^3(p) = \frac{1}{p^2 + 0,9p + 1},$$

полученным по узлам, смещенным в сторону их уменьшения:  $\delta_2^2 = 0,1$ ;  $\delta_3^2 = 0,2$  и  $\delta_2^3 = 0,01$ ;  $\delta_3^3 = 0,02$ . Анализ полученных решений показывает, что уменьшение значений узлов приводит к снижению погрешности при  $t \in [0; 0,5]$ , но одновременно ухудшается точность при  $t \in [1, \infty)$ . Можно предвидеть, что в соответствии с перекрестным свойством смещение узлов в сторону их увеличения будет улучшать свойства модели в области малых значений  $t$ , но ошибка при  $t > 1$  будет возрастать. В пределе переходный процесс может стать расходящимся, но будет достигнута поставленная цель — точность начального участка характеристики  $h_{np}(t)$  будет значительно повышена.

### 3.4. Синтез систем управления с распределенными параметрами

При проектировании исполнительных систем типа «двигатель – редуктор – манипулятор» стремятся обеспечить высокую жесткость ее элементов: звеньев манипулятора, длинных валов редуктора, зубьев шестерен, шпоночных соединений и др. Однако увеличение жесткости сопровождается возрастанием масс элементов, их габаритов, увеличением моментов инерции и т. д. Поэтому на практике чаще всего приходится принимать компромиссные решения, сохраняя на каком-то уровне упругую податливость элементов. Это обстоятельство приходится учитывать при выполнении расчетов механической системы, а также при построении исполнительных подсистем управления такими механическими системами.

Для решения подобных задач составляют расчетные схемы (модели) рассматриваемых механических систем. Выделим две из числа наиболее простых. Первая модель представляет собой многомассовую систему, чаще всего – двухмассовую. В этом случае реальную механическую систему заменяют, например, двумя сосредоточенными массами, соединенными упругим элементом, имеющим определенную жесткость [3,15]. Вторая модель учитывает распределенную податливость элемента по его длине. В первую очередь такие модели актуальны для звеньев манипулятора. Модель более точно соответствует реальному объекту, и в этом смысле ее использование является предпочтительным, в частности, при синтезе регуляторов исполнительных систем управления.

Несмотря на существенные преимущества моделей, учитывающих пространственную распределенность параметров объекта, они применяются нечасто. Причина состоит в том, что получаемые в конечном итоге математические описания таких объектов в виде передаточных функций содержат иррациональные и/или трансцендентные выражения. Примером может служить передаточные функции кольцевого упруго-распределенного звена манипулятора

$$W(p) = \frac{q \operatorname{ch} \lambda p}{sh p + p\mu sh p},$$

где  $q, \mu$  – параметры звена,  $p$  – комплексная переменная преобразования Лапласа. В более общем случае передаточная функция электропривода с распределенными параметрами механических элементов может быть записана в виде

$$W(p) = F\left(p, \sqrt{p}, sh p, ch p, sh\sqrt{ap^2 + bp + c}\right). \quad (3.9)$$

Передаточные функции с иррациональными и трансцендентными составляющими приводит к значительным, порой непреодолимым трудностям при решении уравнений синтеза. Устраняют их путем двухэтапной аппроксимации. На первом этапе сложную передаточную функцию механического элемента заменяют дробно-рациональной, что соответствует переходу к модели с сосредоточенными параметрами. При этом для получения достаточно высокой точности перехода приходится привлекать аппроксимирующие функции высокого порядка. В результате получают результирующую функцию, которая, естественно, имеет еще более высокий порядок. Поэтому возникает необходимость заменить ее более простым дробно-рациональным выражением, удобным для аналитических, численных или графических операций.

Рассмотренная последовательность формирования передаточной функции неизменяемой части системы приводит к цели – позволяет в последующем решить уравнение синтеза, однако является трудоемкой, громоздкой и, главное, имеет два дополнительных источника погрешности. Поэтому собственно синтез регулятора определяет только третью составляющую общей погрешности и, возможно, не самую большую. Особое внимание обратим на то, что наличие двух первых составляющих является следствием выполнения вспомогательных этапов, не связанных непосредственно с основной задачей – синтезом регулятора. Поэтому можно поставить задачу поиска таких путей и методов получения регуляторов, которые бы не требовали выполнения этапов аппроксимации. ВИМ может быть таким методом, т. к. процедура получения ЧХ распространяется не только на дробно-рациональные функции, но и на трансцендентные и иррациональные, что позволяет решать уравнения синтеза (2.7) при наличии моделей неизменяемых частей в виде (3.9).

Для рассмотрения этой возможности обратимся к типовому уравнению синтеза (2.7)  $W_c^p(p) \cong W_p(p)W_{nc}(p)$ , в котором передаточная функция  $W_{nc}(p)$  учитывает распределенность параметров какого-то элемента и потому относится к сложным. Подставим (3.9) в уравнение синтеза:

$$W_{sc}^p(p) \cong W_p(p)W_{nc}(p, \sqrt{p}, sh p, ch p, sh\sqrt{ap^2 + bp + c}).$$

Для решения его на основе ВИМ заменим комплексную переменную  $p$  на вещественную  $\delta$ :

$$W_{sc}^p(\delta) \cong W_p(\delta)W_{nc}(\delta, \sqrt{\delta}, sh \delta, ch \delta, sh\sqrt{a\delta^2 + b\delta + c}). \quad (3.10)$$

Такая замена при  $\delta \in [0, \infty)$  возможна, так как полагаем, что все передаточные функции, входящие в уравнение синтеза, соответствуют устойчивым элементам.

Теперь можно перейти к решению уравнения (3.10) по методике, изложенной в п. 2.4. Просматривая ее, следует обратить внимание на то, что передаточная функция неизменяемой части привлекается только один раз – при определении ее ЧХ. Следовательно, возможность решения уравнения синтеза намеченным методом зависит только от возможности вычисления элементов ЧХ неизменяемой части. Они имеют вид

$$W_{нч}(\delta_i, \sqrt{\delta_i}, sh \delta_i, ch \delta_i, sh \sqrt{a\delta_i^2 + b\delta_i + c}), \quad i = 1, 2, \dots$$

Несмотря на сложность этого выражения, определение его численного значения для произвольного  $\delta_i \in [0, \infty)$  остается в рамках простых численных действий и не встречает принципиальных трудностей.

Таким образом, при синтезе систем управления объектами с распределенными параметрами вещественным интерполяционным методом не появляется никаких принципиальных особенностей по сравнению с синтезом систем с сосредоточенными параметрами. Говоря другими словами, ВИМ распространяется на задачи синтеза систем управления широкого класса, включающего объекты с сосредоточенными и распределенными параметрами.

## ГЛАВА 4. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

### 4.1. Исполнительные системы управления с цифровыми регуляторами

Цифровые регуляторы и построенные на их основе исполнительные подсистемы управления имеют значительные преимущества по сравнению с непрерывными аналогами [2, 5]. Программная реализация законов управления с помощью универсальных микропроцессорных средств или специальных контроллеров не имеет принципиальных особенностей, связанных со спецификой коррекции контура тока, скорости или положения. По этой причине можно рассматривать вопросы синтеза произвольного контура, не детализируя его функции, сосредоточив внимание на общих задачах и проблемах динамического синтеза цифровых систем управления. В связи с этим будем продолжать пользоваться термином «система», определяя им и многоконтурную систему, и отдельный контур.

В своей основе построение цифровых систем управления связано с использованием микропроцессорного регулятора и устройств его сопряжения с непрерывными частями системы. Функциональная схема построенной таким образом системы приведена на рис. 4.1.

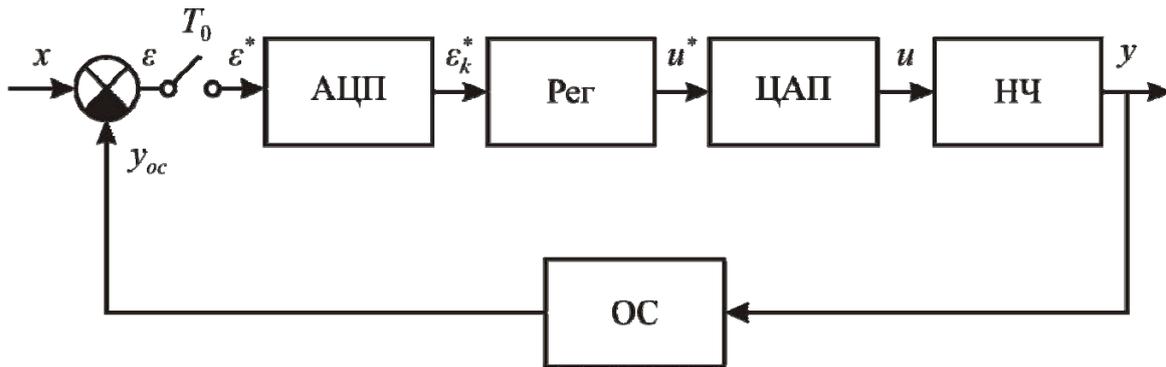


Рис. 4.1. Функциональная схема системы управления с цифровым регулятором

На схеме показаны: ключ, выполняющий роль импульсного элемента, работающий с периодом  $T_0$ ; цифровой регулятор  $\text{Reg.}$ ; аналого-цифровой преобразователь АЦП; цифро-аналоговый преобразователь ЦАП; неизменяемая часть системы НЧ и устройство обратной связи ОС. Сигнал рассогласования  $\varepsilon = x - y_{oc}$  поступает на импульсный элемент, который выполняет квантование сигнала по времени, формируя  $\varepsilon^*$ . Этот сигнал поступает на АЦП, где происходит квантование по уровню и формируется цифровой сигнал. Далее сигнал трансформируется регулятором в соответствии с принятым законом управления в сигнал управления  $u^*$ , затем с помощью ЦАП вновь преобразуется в непрерывный сигнал  $u$  и поступает на неизменяемую часть системы, которая является непрерывной. Внешнее возмущающее воздействие представлено сигналом  $f$ , который обычно отражает влияние момента сопротивления.

В других случаях схемы могут несколько отличаться от приведенной из-за иного расположения преобразователей, наличия дискретного входного сигнала  $x^*$ , по другим причинам. Однако такие отличия не являются существенными с позиций синтеза, так как они играют какую-то роль лишь на подготовительном этапе – при приведении схемы системы к типовой, при формировании непрерывной и дискретной частей.

Математическим аппаратом, позволяющим получать модели цифровых систем и их элементов, является дискретное преобразование Лапласа или получаемое на его основе  $z$ -преобразование. Первое из них определено формулой

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_0)e^{-kpT_0}, \quad p = \delta + j\omega. \quad (4.1)$$

В практическом отношении более удобно  $z$ -преобразование, получаемое из (4.1) путем подстановки  $z = \exp(pT_0)$ :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_0)z^{-k}, \quad z = \exp(pT_0). \quad (4.2)$$

Синтез цифровых регуляторов представляет собой сложную задачу, для решения которой, как и в случае непрерывных систем, необходимо получить математические модели элементов, входящих в систему. Это первый шаг в процедуре синтеза. Рассмотрим его.

Будем считать, что передаточная функция неизменяемой части известна. Определению подлежат математические описания сигналов, АЦП, регулятора и ЦАП.

В цифровых системах осуществляется квантование (дискретизация) сигнала рассогласования  $\varepsilon(t)$  по времени и уровню. Квантование по времени можно рассматривать как процесс работы модулятора, на вход которого подается непрерывный сигнал  $\varepsilon(t)$  и последовательность  $\delta$ -импульсов, обладающих свойствами:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{при } t = 0, \\ 0, & \text{при } t \neq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Их называют фильтрующими и используют при формировании временных последовательностей. При смещении последовательности  $\delta$ -импульсов на дискретные промежутки времени  $kT_0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $T_0 = \text{const}$  такие свойства остаются справедливыми:

$$\delta(t - kT_0) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = kT_0, \\ 0 & \text{при } t \neq kT_0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) dt = 1.$$

Это позволяет представить выходной сигнал модулятора в виде

$$\varepsilon^*(t) = \varepsilon(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon(kT_0) \delta(t - kT_0), \quad (4.3)$$

где знак \* означает дискретность сигнала. В дальнейшем соотношению (4.3) целесообразно использовать в операторной форме. Применение дискретного преобразования Лапласа (4.1) к соотношению (4.3) приводит к соотношению:

$$\varepsilon^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon(kT_0) e^{-kpT_0}. \quad (4.4)$$

Выражения (4.3), (4.4) являются математическими описаниями квантованного по времени сигнала  $\varepsilon(t)$ .

## 4.2. Математические модели элементов цифровых систем управления

### 4.2.1 Математическая модель аналого-цифрового преобразователя

Квантование сигналов по уровню осуществляется в АЦП. Процесс поясняет статическая характеристика преобразователя, представленная на рис. 4.2. Входная непрерывная величина  $\varepsilon$  откладывается на оси ординат; на оси абсцисс – ее цифровое представление. Основными параметрами АЦП и ее статической характеристики являются цена младшего разряда  $\delta_A$  и число ненулевых уровней  $N$  одной ветви характеристики. Эти параметры связаны

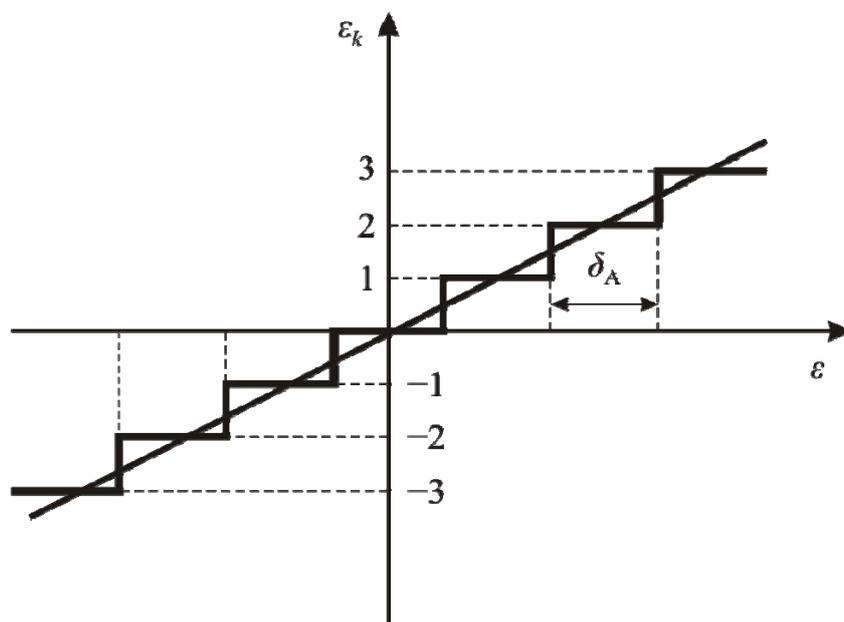


Рис. 4.2. Статическая характеристика АЦП

между собой соотношением

$$N = \varepsilon_{\max} / \delta_A, \quad (4.5)$$

где  $\varepsilon_{\max}$  – максимальная величина входного сигнала  $\varepsilon(t)$ . В то же время параметр  $N$  определяет число двоичных разрядов  $\alpha$  АЦП:

$$N = 2^\alpha - 1. \quad (4.6)$$

Формулы (4.5), (4.6) позволяют находить разрядность АЦП, задавая допустимую погрешность преобразования. При этом нужно учесть следующее. Во-первых, сигнал рассогласования  $\varepsilon(t)$  изменяется в пределах от  $-\varepsilon_{\max}$  до  $+\varepsilon_{\max}$  и потому в (4.5) следует принять  $2\varepsilon_{\max}$ . Во-вторых, погрешность округления при квантовании по уровню равна половинному значению цены младшего разряда, то есть величине  $\delta_A/2$ , что также учитывается при выборе разрядности АЦП.

Статическая характеристика АЦП нелинейна и это делает нелинейной всю цифровую систему. На практике характеристику АЦП линеаризуют, заменяя исходную ступенчатую характеристику прямой линией (сплошная наклонная линия на рис. 4.2). Линеаризация значительно упрощает расчет и исследование системы и в то же время не влечет за собой значительных погрешностей при использовании АЦП высокой разрядности. Математическое описание АЦП на основе такой линеаризации представляют в форме коэффициента передачи  $k_A = 1/\delta_A$ .

Существенная особенность линеаризованной таким образом системы проявляется только в виде квантования сигнала во времени. Системы, в которых хотя бы один непрерывный сигнал преобразуется в последовательность импульсов, относятся к классу импульсных систем.

#### 4.2.2. Математическая модель цифрового регулятора

Цифровой регулятор может быть представлен различными математическими моделями. Наиболее употребительной является  $z$ -форма, которая позволяет представить математическое описание регулятора дискретной передаточной функцией

$$W(z) = \frac{u(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + 1}, \quad m \leq n. \quad (4.7)$$

Распространен еще один вид дискретной передаточной функции. Для простоты приведем частный случай, положив в (4.7)  $m = n$ , затем умножим числитель и знаменатель дроби на  $z^{-n}$  и получим

$$W(z) = \frac{u(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{b_n + b_{n-1} z^{-1} + \dots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + z^{-n}}. \quad (4.8)$$

Эта форма описания САУ удобна для перехода к моделям в области времени – к разностным уравнениям. Передаточной функции (4.8) соответствует уравнение

$$a_n u(k) + a_{n-1} u(k-1) + \dots + a_1 u(k-n+1) + a_0 u(k-n) = b_n \varepsilon(k) + b_{n-1} \varepsilon(k-1) + \dots + b_1 \varepsilon(k-n+1) + b_0 \varepsilon(k-n). \quad (4.9)$$

В этом уравнении с целью упрощения записи опущен параметр  $T_0$ . Обратим внимание на важное обстоятельство – форма (4.9) удобна при составлении программы работы цифрового регулятора.

Для получения передаточной функции регулятора обычно используют один из двух способов, оба из которых требуют решения уравнений синтеза. Первый заключается в рассмотрении системы с учетом квантования по времени: находят дискретные передаточные функции (4.7) всех элементов системы, составляют и решают уравнение синтеза,

описывающего импульсную систему. Вторым способом используется косвенный путь решения задачи. Он базируется на расчете непрерывной системы, что приводит к получению передаточной функции  $W_p(p)$  непрерывного регулятора. Затем осуществляется переход от  $W_p(p)$  к дискретной передаточной функции  $W_p(z)$ . Этот вариант, известный как получение дискретного регулятора по непрерывному прототипу [5], приводит при достаточно малом периоде квантования  $T_0$  к приемлемым результатам.

Обе возможности получения ПФ цифровых регуляторов будут обсуждаться позднее – при обсуждении задач синтеза регуляторов.

В заключение обратим внимание на принципиальную особенность цифровых регуляторов. Их выходные сигналы формируются в результате вычислений, для выполнения которых требуется определенное время. Обычно речь идет об одном такте  $T_0$ . Поэтому выходной сигнал регулятора запаздывает на время  $T_0$ , что необходимо отразить включением звена запаздывания  $e^{-pT_0}$  в прямой канал системы.

#### 4.2.3. Математическая модель цифро-аналогового преобразователя

ЦАП служит для преобразования выходного сигнала регулятора  $u^*$ , представляющего собой цифровой код обычно в форме двоичных чисел, в непрерывный сигнал  $u(t)$ , который подается на непрерывную часть системы. Эту операцию, называемую декодированием, с формальных позиций удобно представить в виде двух этапов. На первом сигналы из цифровой формы преобразуются в последовательность идеальных импульсов, на втором этапе осуществляется переход к непрерывной функции с помощью специального устройства – экстраполятора. Наличие первого этапа вызвано необходимостью согласования выходного сигнала регулятора и входного сигнала ЦАП с точки зрения математики. Однако эта операция не влияет на модели регулятора и ЦАП и потому в дальнейшем не отображается в схемах в виде специального элемента.

Экстраполятор в простейшем случае превращает идеальные  $\delta$ -импульсы в постоянные в пределах интервала квантования сигналы  $u(t)$ . В этом случае его обычно называют экстраполятором нулевого порядка. Его передаточная функция имеет вид [3,5/

$$W_0(p) = \frac{1 - e^{-pT_0}}{p} = \frac{z - 1}{zp}. \quad (4.10)$$

Используются также экстраполяторы высоких порядков – первого, второго и т. д. Они обеспечивают более точное формирование сигналов  $u(t)$ , но на практике применяются редко (в частности потому, что погрешность работы ЦАП на точностные показатели системы оказывает значительно меньшее влияние по сравнению с АЦП).

Функция (4.10) описывает динамические процессы преобразования входного сигнала ЦАП. Рассмотрим статический режим преобразователя. Для этого обратимся к его статической характеристике, которая показана на рис. 4.3. Входной сигнал ЦАП в виде его цифровых значений  $u_k^*$  отображается на оси абсцисс. На оси ординат откладывается выходная величина, представляющая собой непрерывную функцию  $u(t)$ . С целью упрощения модели ЦАП характеристику линейризуют так же, как и в случае АЦП. При этом цена младшего разряда  $\delta_u$  определяет наклон линейризованной характеристики и, следовательно, коэффициент передачи ЦАП:  $k_u = \delta_u$ .

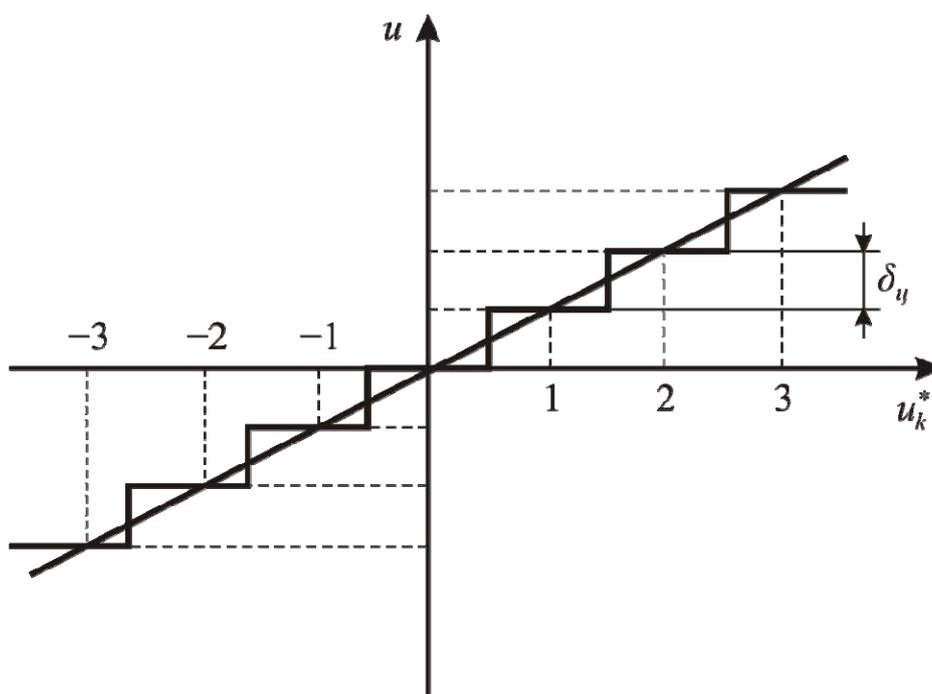


Рис. 4.3. Статическая характеристика ЦАП

Общая математическая модель ЦАП, учитывающая динамические и статические свойства преобразователя, будет иметь вид

$$W_u(p) = k_u W_s(p) = \delta_u \frac{z-1}{zp}.$$

#### 4.2.4. Типовая схема линейризованной цифровой системы

Полученные математические модели АЦП, ЦАП и принятая форма передаточной функции цифрового регулятора (4.7) позволяют составить структурную схему системы. Она представлена на рис. 4.4. Обозначения некоторых сигналов сопровождаются индексом  $*$ , который свидетельствует о квантовании сигнала по времени, и индексом « $k$ », обозначающим квантование по уровню.

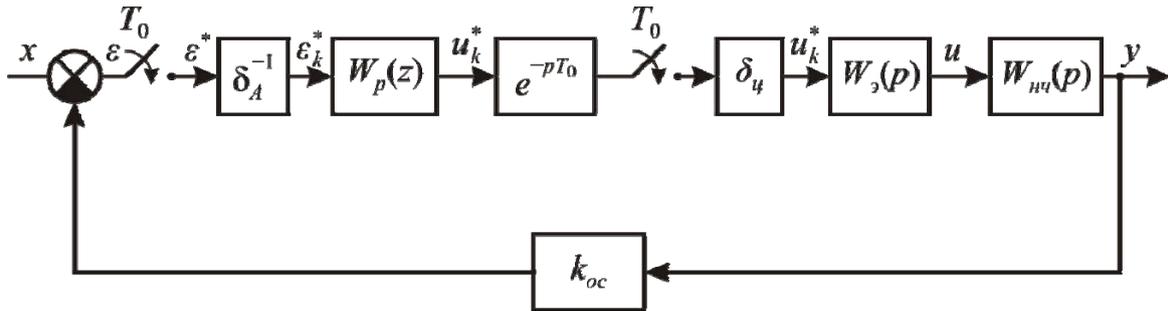


Рис. 4.4. Структурная схема импульсной системы

Наличие в системе квантования по времени дает основание называть ее импульсной. С учетом выполненной линеаризации АЦП и ЦАП ее относят к классу линеаризованных, а наличие в реальной системе цифрового регулятора иногда подчеркивают в названии – линеаризованная цифровая система.

Для унификации подходов к рассмотрению линеаризованных систем различных структур целесообразно перейти к ее типовой схеме. С этой целью все элементы системы объединяют в две части – непрерывную и дискретную. Такая схема показана на рис. 4.5.

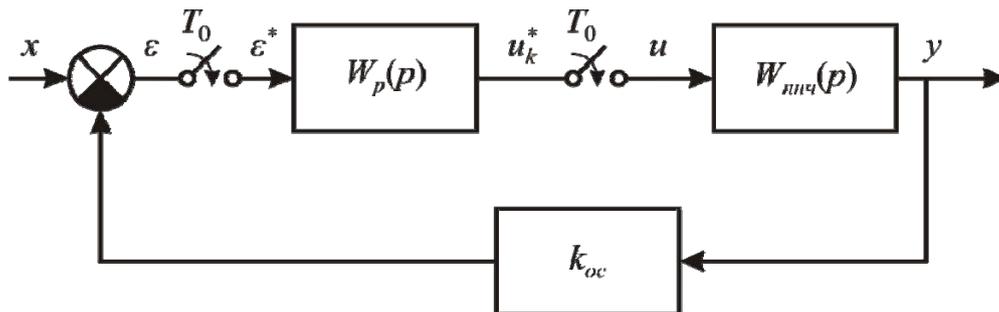


Рис. 4.5. Схема цифровой системы с выделенными дискретной и непрерывной частями

Дискретная часть образуется регулятором, в непрерывную входит неизменяемая часть с передаточной функцией  $W_{нч}(p)$ , экстраполятор и звено запаздывания. Коэффициенты передачи АЦП и ЦАП можно отнести как к непрерывной, так и к дискретной части. На практике удобнее

второй вариант. Тогда коэффициент передачи дискретной части будет определяться произведением  $k_k = \delta_A^{-1} k_p \delta_C$ , где  $k_p$  – коэффициент передачи регулятора. Полученное объединение непрерывных элементов системы называют приведенной непрерывной частью. На первых этапах расчета обычно звено запаздывания не учитывается, а модель этой части представляют передаточной функцией

$$W_{мч}(p) = W_s(p)W_{нч}(p). \quad (4.11)$$

Схема, представленная на рис. 4.5, удобна тем, что, во-первых, разделены дискретная и непрерывная части системы, во-вторых, выделена передаточная функция регулятора  $W_p(z)$ , определение параметров которой является целью синтеза. В результате создается основа для составления уравнения синтеза и нахождения регулятора.

### 4.3. Составление уравнения синтеза цифрового регулятора

В общем случае уравнение синтеза линеаризованной цифровой системы может быть записано в виде

$$W_{эс}(z) \cong \frac{W_p(z)W_{мч}(z)}{1 + W_p(z)W_{нч}(z)k_{ос}}, \quad (4.12)$$

где  $W_{эс}(z)$  – желаемая передаточная функция. Большей частью более удобно составлять и решать уравнение синтеза, записанное для разомкнутой системы:

$$W_{эс}^p(z) \cong W_p(z)W_{нч}(z). \quad (4.13)$$

Для перехода к решению любого из этих уравнений необходимо выполнить несколько подготовительных этапов, приводящих уравнение к определенной типовой форме. К ним относятся:

- 1) определение частоты и периода квантования;
- 2) получение передаточной функции приведенной непрерывной части  $W_{нч}(z)$ ;
- 3) формирование желаемой передаточной функции  $W_{эс}(z)$  замкнутой или  $W_{эс}^p(z)$  разомкнутой системы;
- 4) согласование структурных особенностей левой и правой частей уравнения (4.12) или (4.13).

Рассмотрим эти подготовительные задачи.

#### 4.3.1. Определение частоты и периода квантования

При выборе частоты квантования  $\omega_0$  и периода  $T_0 = 2\pi / \omega_0$  ориентируются на результат теоремы Котельникова–Шеннона: непрерывный сигнал со спектром, ограниченным наибольшей частотой  $\omega_n$ ,

можно точно восстановить по его дискретным значениям, если выполняется неравенство

$$\omega_0 \geq 2\omega_n. \quad (4.14)$$

Неравенство представляет собой условие неискаженной передачи квантованного по времени сигнала; значение  $\omega_n$  может рассматриваться как величина полосы пропускания непрерывной части.

При решении практических задач частота квантования не всегда определяется по условию (4.14). Одна из причин этого связана с асимптотическим уменьшением значений частотных характеристик, что не позволяет однозначно фиксировать величину  $\omega_n$ . Однако условие может служить ориентиром при выборе значения  $\omega_n$ , а также для проверки принятых решений.

Существует несколько способов определения значений  $\omega_0$  и  $T_0$ . Приведем наиболее употребительные из них.

1.  $T_0 = \pi / \omega_n$ . Это соотношение прямо связано с теоремой Котельникова-Шеннона. Подставим в (4.14) известное выражение  $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi / T_0$  и получим исходную расчетную формулу.

2. Критерий Джури. Пусть на вход системы поступает гармонический сигнал с единичной амплитудой. Положим, что модуль выходного сигнала

$$|Y(j\omega)| = \frac{|W_p(j\omega)W_{нч}(j\omega)|}{|1 + W_p(j\omega)W_{нч}(j\omega)|}$$

на частоте  $\omega_n$  не должен превышать допустимой величины  $\varepsilon_{дон} = 0,01 \div 0,1$ . Тогда величина  $\omega_n$  является верхней границей полосы пропускания и период квантования определится из выражения  $T_0 = \pi / \omega_n$ .

3. Критерий в области времени:

$$T_0 = (1/6 \dots 1/20) T_{95},$$

где  $T_{95}$  – время, в течение которого переходная характеристика достигает уровня 95 % от установившегося значения. Можно пользоваться другими временными характеристиками, выделяя интервал времени, в течение которого переходная характеристика входит в пятипроцентную зону.

Практические вопросы выбора параметров  $\omega_0$  и  $T_0$  несколько сложнее формальных расчетов по какому-либо из этих критериев. Приходится учитывать особенность реальных частотных характеристик, которые приближаются к оси  $\omega$  асимптотически, что не позволяет одно-

значно выбрать значение  $\omega_n$ . При этом учитывают две противоречивых тенденции. Увеличение значения  $\omega_n$  приводит к повышению точности дискретной модели (приближаясь к непрерывной). Однако при этом заметно увеличивается объем вычислений, что всегда нежелательно.

#### **4.3.2. Получение дискретной передаточной функции приведенной непрерывной части**

Исходная передаточная функция приведенной непрерывной части контура определена выражением (4.11). В случае экстраполятора нулевого порядка его модель имеет вид (4.10), а передаточная функция приведенной непрерывной части примет вид

$$W_{нч}(p) = \frac{z-1}{zp} W_{нч}(p).$$

Для перехода к дискретной форме воспользуемся оператором Z-преобразования:

$$W_{нч}(z) = Z \left\{ \frac{z-1}{zp} W_{нч}(p) \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_{нч}(p)}{p} \right\}.$$

Z-изображение выражения в фигурных скобках получить достаточно просто, располагая программной поддержкой.

#### **4.3.3. Формирование желаемой передаточной функции**

Задача возникает в связи с составлением уравнения синтеза (4.13) и заключается в получении желаемой ПФ  $W_{эс}^p(z)$  разомкнутого контура. В качестве промежуточного результата может быть сначала получена передаточная функция замкнутого контура  $W_{эс}(z)$ , по которой затем найдется искомая функция  $W_{эс}^p(z)$ . Основные методы получения желаемых передаточных функций можно объединить в несколько групп: методы логарифмических частотных характеристик, алгебраические, корневые, стандартных настроек, численные методы.

Методы, использующие ЛАЧХ, являются наиболее распространенными. Они основаны на формировании желаемых частотных характеристик в виде функций псевдочастоты  $\lambda = 2tg(\omega T_0/2)/T_0$  в результате выполнения трехэтапной процедуры [8]. Сначала по требованиям точности формируется низкочастотная часть характеристики, затем строится среднечастотная по условиям устойчивости и, наконец, высокочастотная. Последующее «сшивание» полученных участков позволяет получить желаемую ЛАЧХ и желаемую ПФ разомкнутого контура. Как и в

случае непрерывных систем, различные варианты метода ЛАЧХ обладают главными достоинствами: наглядность решения задач и получаемых результатов, а также сравнительная простота графоаналитических построений. В то же время не следует забывать о недостатках, специфике и ограничениях метода. Это приближенный метод, погрешность которого сильно зависит от желаемого быстродействия и периода квантования; он трудно поддается формализации, что не позволяет эффективно использовать вычислительные средства; последовательность действий в значительной мере зависит от учета особенностей рассматриваемой задачи, в частности, минимально-фазовых свойств объекта. Наконец, сохраняются и даже усиливаются трудности перехода к частотным функциям, в том числе логарифмическим  $L(\lambda)$ .

Методы алгебраической группы перспективны, позволяя решать в общем виде многие задачи синтеза САУ. Наиболее заметным представителем этой группы является полиномиальный метод /9,14/. Он позволяет учесть разнообразные требования, предъявляемые к контуру или системе: условие физической реализуемости, астатизм заданного порядка, корректность решения задачи при неминимально-фазовости неизменяемой части. Поясним последнее требование, которое наглядно демонстрирует свойство грубости или робастности системы. Речь идет о том, что нули передаточной функции неизменяемой части, по модулю равные или больше единицы, при формальном решении задачи синтеза компенсируются такими же полюсами регулятора. Но в реальных условиях такая компенсация не может быть технически реализована, так как малейшее изменение рассматриваемых нулей или компенсируемых полюсов делает систему неустойчивой /2, 8, 9, 10/. Важность этого вопроса для цифровых систем имеет принципиальное значение, так как свойство неминимально-фазовости проявляется у непрерывных систем как исключение из правила, для цифровых же – это распространенное явление.

Корневой метод по своей сути близок аналогичному методу для непрерывных систем, поэтому обладает характерными достоинствами и недостатками. В то же время есть особенности, определенные спецификой цифровых систем. В частности, при малых значениях периода  $T_0$  корни характеристического уравнения располагаются очень близко к точке  $z=1$ , а концентрация доминирующих корней в окрестности этой точки делает очень высокой чувствительность параметров системы к положению корней /10/.

Формирование желаемых ПФ для реализации метода стандартных настроек цифровых систем имеет определенные особенности по

сравнению с непрерывными. Получение их с учетом специфики последующего синтеза регуляторов удобно выполнять полиномиальным методом /2,9/.

Численные методы образуют сравнительно большую группу, так как получены, как правило, в результате компьютерной реализации методов, отмеченных выше. В своей основе они не являются ориентированными на численные расчеты и применение ЭВМ; они лишь в большей или меньшей степени приспособлены для этого. В то же время есть несколько подходов к формированию желаемых передаточных функций, ориентированных на применение цифровых вычислительных средств. Один из них, основанный на вещественном дискретном преобразовании, будет рассмотрен в комплексе вопросов синтеза цифровых регуляторов.

#### **4.3.4. Согласование структур левой и правой частей уравнения синтеза**

Входящие в уравнение синтеза (4.13) передаточные функции  $W_{жс}(z)$  и  $W_{нч}(z)$  формируются достаточно независимо друг от друга. Действительно, функция  $W_{нч}(z)$  определена силовой частью системы, то есть в основе ее формирования лежат требования по развиваемым усилиям, моментам, максимальной скорости и т. д., как и в случае непрерывных САУ. Функция  $W_{жс}(z)$  описывает желаемые свойства системы (астатизм, перерегулирование, быстродействие, запас устойчивости и т. д.) и потому лишь в небольшой степени связана с неизменяемой частью системы. Эта связь проявляется прежде всего в виде ограничения желаемого быстродействия инерционными свойствами силовой части системы. Столь слабая взаимосвязь функций  $W_{жс}(z)$  и  $W_{нч}(z)$  в свою очередь определяет низкий уровень взаимного соответствия левой и правой части уравнения (4.13). В то же время очевидно, что точность решения уравнения будет тем выше, чем более близкими будут структурные и параметрические свойства этих частей. Отсюда можно сделать два вывода. Во-первых, следует стремиться к сближению структурных особенностей левой и правой частей. Во-вторых, основным средством для этого является передаточная функция  $W_p(z)$ .

С математической точки зрения выбор вида передаточных функций  $W_p(z)$  должен быть направлен на максимальное совпадение структурно-дифференцирующих свойств левой и правой частей уравнения. В частности необходимо, чтобы совпадали нули  $z = 1$  полиномов знаменателей обеих частей уравнения. С физической точки зрения это означает равенство числа интегрирующих звеньев, имеющих в желаемой передаточ-

ной функции и в прямом канале синтезируемой системы. Обычно из-за проблем устойчивости используют не более двух интегрирующих звеньев. В этом случае уравнение (4.13) в обозначениях

$$W_{жс}(z) = \frac{B_{жс}(z)}{A_{жс}(z)}, \quad W_p(z) = \frac{B_p(z)}{A_p(z)}, \quad W_{мнч}(z) = \frac{B_{мнч}(z)}{A_{мнч}(z)}$$

должно иметь вид

$$\frac{z}{z-1} \frac{B_{жс,0}(z)}{A_{жс,0}(z)} \cong \frac{z}{z-1} \frac{B_{p,0}(z)}{A_{p,0}(z)} \frac{B_{мнч,0}(z)}{A_{мнч,0}(z)}, \quad (4.15)$$

в котором индекс «0» означает, что полином не содержит нулей  $z=1$ . Очевидно, что уравнение (4.15) можно привести к более простой форме

$$\frac{B_{жс,0}(z)}{A_{жс,0}(z)} \cong \frac{B_{p,0}(z)}{A_{p,0}(z)} \frac{B_{мнч,0}(z)}{A_{мнч,0}(z)},$$

которую целесообразно использовать для поиска коэффициентов передаточной функции регулятора.

Наличие сомножителя  $z/(z-1)$  в желаемой передаточной функции выражает требование отсутствия составляющей статической ошибки по управлению. Для реализации условия в синтезируемой системе правая часть уравнения, которая описывает ее, должна содержать такой же множитель. Его источником может быть приведенная непрерывная часть; тогда на структуру передаточной функции регулятора никаких дополнительных условий не накладывается. Если же передаточной функции  $W_{мнч}(z)$  не содержит полюс  $z=1$ , то его следует предусмотреть в структуре передаточных функций ПФ  $W_p(z)$ . Для этой цели используют цифровой интегратор – аналог оператора интегрирования  $1/p$  непрерывных сигналов.

На практике обычно принимают один из следующих трех вариантов цифрового интегрирования /8/:

$$W_{u1}(z) = \frac{T_0}{z-1}; \quad W_{u2}(z) = \frac{T_0 z}{z-1}; \quad W_{u3}(z) = \frac{T_0}{2} \frac{z+1}{z-1}.$$

Первые два выражения можно получить на основе интегрирования непрерывной функции по методу прямоугольников соответственно с недостатком или избытком, третью – при использовании метода трапеций или рассмотрения подстановки  $z = \exp(pT_0)$  из (4.2). В последнем случае получают равенство

$$p = \frac{1}{T_0} \ln z = \frac{2}{T_0} \left[ \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \frac{(z-1)^3}{(z+1)^3} + \frac{1}{45} \frac{(z-1)^5}{(z+1)^5} + \dots \right],$$

которое приводит к искомому соотношению  $\frac{1}{p} \cong \frac{T_0}{2} \frac{z+1}{z-1} = W_{u3}(z)$ . По-

путно заметим, что подстановка  $p = \frac{2}{T_0} \frac{z-1}{z+1}$  применяется для получе-

ния дискретных передаточных функций по их непрерывным прототипам путем замены переменных  $p$  на  $z$  и известна как формула Тастина (Tustin) /8, 10/.

Любой из трех вариантов интегрирования сопровождается погрешностью, величина которой возрастает с увеличением периода квантования  $T_0$ . Анализ погрешностей, количественные оценки для некоторых типовых входных сигналов и рекомендации по выбору способа интегрирования можно найти в /8, 10/.

В заключение рассмотрения вопроса согласования структурных особенностей левой и правой частей уравнения синтеза подчеркнем еще раз чрезвычайную важность этой меры с позиций приближения свойств синтезируемой системы к эталону. Наибольшее значение в структурных согласованиях имеют полюсы  $z = 1$ . Если они необходимы в правой части уравнения, но отсутствуют в передаточной функции  $W_{min}(z)$ , они должны быть введены в состав регулятора в виде одной из трех приведенных выше форм. При этом обратим внимание на то, что некоторые методы синтеза обеспечивают автоматическое формирование полюса  $z = 1$  в передаточной функции регулятора, если он содержится в желаемой функции. Такой возможностью обладает, в частности, ВИМ, дискретный вариант которого будет рассмотрен ниже.

К вопросам формирования структурных особенностей уравнения синтеза относится также учет неминимально-фазовых свойств неизменяемой части системы, выполнение условий физической реализуемости и некоторых других. Эти действия совершенно необходимы в случае синтеза систем алгебраическими, полиномиальными и близкими к ним методами. Однако эти методы имеют ограничения – не позволяют синтезировать регуляторы низкого порядка, не дают возможности использовать прямые показатели качества и потому рассматриваться не будут. Ознакомиться с ними можно в /3, 8/.

#### 4.4. Синтез передаточных функций цифровых регуляторов

Задача получения передаточных функций цифрового регулятора обычно сводится к решению уравнения синтеза (4.13) относительно неизвестной функции  $W_p(z)$ .

Ранее было уже сказано, что существует два основных подхода к решению задач синтеза. Первый базируется на решении уравнения синтеза дискретной системы (4.13). Второй, использующий косвенный путь, основан на получении дискретных передаточных функций  $W_p(z)$  по функции  $W_p(p)$  непрерывного прототипа регулятора [8, 10]. В этом случае сначала синтезируют непрерывную систему, получая в результате передаточную функцию непрерывного регулятора  $W_p(p)$ , затем осуществляют переход  $W_p(p) \rightarrow W_p(z)$ , что позволяет найти искомую дискретную функцию регулятора. Путь достаточно эффективен, если выполняется условие (4.14), накладывающее ограничение на частоту квантования  $\omega_0$ :  $\omega_0 \geq \omega_{nn}$ . Однако неравенство выполняется далеко не всегда и потому использование этого пути в реальных задачах может приводить к значительным ошибкам или нецелесообразно.

Ниже будут рассмотрены обе возможности получения дискретных передаточных функций регуляторов.

#### **4.4.1. Получение дискретной передаточной функции по непрерывному прототипу**

Косвенный путь решения задачи синтеза дискретных регуляторов предполагает выполнение специфического этапа – преобразования непрерывной передаточной функции  $W_p(p)$  в дискретный аналог  $W_p(z)$ . Рассмотрим варианты такого этапа.

Для решения задачи сопоставим схемы непрерывной и цифровой систем, которые представлены соответственно на рис. 2.1 и рис. 4.4. Нас будет интересовать условия их эквивалентности. Можно полагать, что близость систем можно обеспечить, если будут близки функции  $W_p(p)$  и  $W_p(z) = W_p(e^{pT_0})$ . В простейшем случае должно выполняться условие

$$W_p(p) \cong \delta_A^{-1} \delta_y W_p(e^{pT_0}) e^{-pT_0}, \quad (4.16)$$

что соответствует близости выходных сигналов сопоставляемых регуляторов. В более общем случае можно сравнивать выходные сигналы непрерывного регулятора и дискретного с учетом экстраполятора, а также сигналы на выходе неизменяемых частей обеих систем. В этих двух случаях условия близости можно записать следующим образом:

$$W_p(p) \cong \delta_A^{-1} \delta_y W_p(e^{pT_0}) e^{-pT_0} W_s(p), \quad (4.17)$$

$$W_p(p) W_{нч}(p) \cong \delta_A^{-1} \delta_y W_p(e^{pT_0}) e^{-pT_0} W_{нч}(e^{pT_0}). \quad (4.18)$$

С физическим смыслом равенств (4.16)–(4.18) можно познакомиться в [8]. В математическом плане любое из равенств можно рассматри-

вать как задачу приближения известного выражения  $F(p) = F[W_p(p)]$  трансцендентной функцией  $W_p(z) = W_p(e^{pT_0})$ .

Очевидно, что задача не имеет точного решения и уже в силу этого сопровождается определенными трудностями. Распространены два метода отыскания коэффициентов передаточных функций  $W_p(z)$ . Первый реализует частотный подход, используя понятие псевдочастоты /8/, второй основан на приближенной замене переменной  $p$  на  $z$ , предложенной Тастиным /8, 10/:  $p \approx \frac{2}{T_0} \frac{z-1}{z+1}$ . Оба подхода обеспечивают приемле-

мую точность лишь в области малых частот или, что то же самое, при больших значениях дискретного времени  $nT_0$ . По этой причине целесообразно воспользоваться таким методом решения уравнений (4.16)–(4.18), который бы позволял перераспределять погрешность решения по частотному интервалу  $[0, \omega_{ин}]$  или по интервалу времени  $[0, t_p]$ . Такая мера должна привести к снижению максимальной погрешности решения задачи, оцениваемой по любому из распространенных критериев. Указанным условиям удовлетворяет вещественный метод – ВИМ, применение которого к решению задач аппроксимации изложено в главе 3. Для рассмотрения вопроса воспользуемся наиболее простым уравнением из (4.16)–(4.18), уравнением (4.16). Заменим в обеих его частях переменную  $p$  на вещественную  $\delta$ :

$$W_p(\delta) \cong \delta_A^{-1} \delta_u W_p(e^{\delta T_0}) e^{-\delta T_0}. \quad (4.19)$$

Такая замена правомерна: входящие в уравнение ПФ имеют полюсы только в области устойчивости, так как они должны соответствовать устойчивым регуляторам. Поэтому можно принять  $\delta \in [0, \infty)$ , выбрать значение первого узла  $\delta_1 = 0$ , вычислить значения других узлов  $\delta_i$ ,  $i = 2, 3 \dots \eta$ , используя рекомендации п. 1.3.

С целью большей конкретизации задачи положим, что передаточные функции в (4.16) имеют вид дробей второго порядка

$$W_p(p) = \frac{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}{\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + 1}, \quad W_p(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + 1}, \quad z = e^{pT_0}, \quad (4.20)$$

в которых коэффициенты  $\alpha_2, \alpha_1, \beta_2, \beta_1, \beta_0$  известны, а коэффициенты  $a_2, a_1, b_2, b_1, b_0$  подлежат определению. При этом уравнение (4.19) примет вид

$$\frac{\beta_2 \delta^2 + \beta_1 \delta + \beta_0}{\alpha_2 \delta^2 + \alpha_1 \delta + 1} \cong \delta_A^{-1} \delta_u \frac{b_2 e^{2\delta T_0} + b_1 e^{\delta T_0} + b_0}{a_2 e^{2\delta T_0} + a_1 e^{\delta T_0} + 1} e^{-\delta T_0}, \quad (4.21)$$

Решение будем искать в три этапа. На первом найдем ЧХ  $\{W_p(e^{\delta_i T_0})\}_\eta$  дискретного регулятора, на втором определим его коэффициенты, третий этап предназначен для минимизации погрешности.

Для выполнения первого этапа вновь воспользуемся компактной записью (4.19), имея в виду, что входящие в уравнение передаточные функции определены выражениями (4.20). Используя это уравнение, можем написать формулу для вычисления элементов ЧХ дискретного регулятора:

$$W_p(e^{\delta_i T_0}) = \delta_A \delta_y^{-1} W_p(\delta_i) e^{\delta_i T_0}, \quad i = 1, 2, \dots, \eta. \quad (4.22)$$

Размерность  $\eta$  ЧХ известна: она определена числом неизвестных коэффициентов ( $\eta = 5$ ). Значения коэффициентов передачи АЦП и ЦАП на этой стадии расчета также известны. Узлы  $\delta_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, \eta$  найдутся по методике п. 1.3, так что правая часть равенства полностью определена и для каждого значения узла  $\delta_i$  сворачивается в число, представляющее собой соответствующий элемент искомой ЧХ.

Выполнение второго этапа – вычисление коэффициентов передаточной функции дискретного регулятора – сводится к решению системы уравнений

$$W_p(e^{\delta_i T_0}) = \frac{b_2 e^{2\delta_i T_0} + b_1 e^{\delta_i T_0} + b_0}{a_2 e^{2\delta_i T_0} + a_1 e^{\delta_i T_0} + 1}, \quad i = \overline{1, 5}. \quad (4.23)$$

Несмотря на кажущуюся сложность системы уравнений, она представляет собой систему самых обычных алгебраических уравнений, линейных относительно неизвестных коэффициентов  $a_2, a_1, b_2, b_1, b_0$ . Действительно, левые части представляют собой числа, полученные по формуле (4.22). В правой части экспоненциальные сомножители  $e^{\delta_i T_0}$  также являются числами, так как значения узлов  $\delta_i$  и период квантования  $T_0$  известны. Другими словами, система (4.23) с вычислительной точки зрения аналогична СЛАУ (2.42), предназначенной для вычисления коэффициентов передаточных функций регуляторов непрерывных систем по их ЧХ. Отсюда по аналогии можно предположить существование решения и его единственность.

Выполнение третьего, заключительного этапа, направлено на уменьшение погрешности решения задачи. Рассмотрение подобных вопросов всегда связано с выбором характеристик, которые в наибольшей мере отражают интересующие проектировщика свойства и которые можно использовать для формирования критерия точности. В рассматриваемой задаче наиболее информативным будет сравнение временных динамических характеристик непрерывных и дискретных регуляторов –

соответственно переходных  $h_p(t)$  и  $h_p(nT_0)$  или импульсных переходных  $k_p(t)$  и  $k_p(nT_0)$ . Для характеристик первой пары обычно лучшей считается оценка

$$\Delta h = \max_{t^*} |h_p(t^*) - h_p(nT_0)|. \quad (4.24)$$

В данной задаче она вполне может быть использована. Будем полагать, что характеристика  $h_p(t)$  известна, а функция  $h_p(nT_0)$  найдена по результатам решения задачи. Это позволяет найти погрешность

$$\Delta h(t^*) = |h_p(t^*) - h_p(nT_0)| \quad (4.25)$$

и в соответствии с (4.24) найти максимальное отклонение  $\Delta h$ .

Дальнейшие действия связаны с уменьшением величины этого отклонения. Для такой цели существует механизм, базирующийся на перекрестном свойстве  $\delta$ -преобразования (см. п. 1.5). Напомним суть: если максимальное отклонение  $\Delta h$  принадлежит начальному участку интервала  $[0, t_p]$ , то значение узла  $\delta_n$  и, следовательно, значения остальных узлов следует увеличить; если  $\Delta h$  принадлежит конечному участку интервала, то значения узлов необходимо уменьшить.

Более подробные сведения о механизме уменьшения максимальной погрешности приведены в главе 3 в задачах оценивания погрешности приближенных решений и аппроксимации сложных передаточных функций. В связи с этим еще раз отметим, что рассматриваемая задача получения передаточной функции цифрового регулятора по своей сути является задачей приближения рациональной дроби  $W_p(p)$  трансцендентным выражением  $W_p(z) = W_p(e^{pT_0})$  и потому представленный в главе 3 алгоритм снижения максимального отклонения путем выравнивания погрешности на интервале  $[0, t_p]$  полностью распространяется на данную задачу. Механизм позволяет в необходимых случаях ставить и решать задачу получения наилучшего равномерного приближения.

Рассмотрена трехэтапная процедура решения уравнения (4.16), которое выражает наиболее простое условие эквивалентности непрерывного и дискретного регуляторов. Процедура в полном объеме распространяется на более сложные уравнения эквивалентности (4.17), (4.18) и такое обобщение не связано с появлением каких-либо вопросов принципиального и даже вычислительного характера.

#### 4.4.2. Прямые методы синтеза дискретных регуляторов

Классификация основных методов синтеза прямого действия, позволяющих получить цифровой регулятор непосредственно по дискретным передаточным функциям – желаемой и неизменяемой части – мо-

жет быть принята такой же, как и для задачи формирования желаемых дискретных передаточных функций. Наиболее употребительные из них – частотный метод и метод стандартных настроек достаточно полно представлены в литературе, например, в [3, 6, 8, 10 и др.] и поэтому здесь не рассматриваются. Краткие сведения о методах других групп (полиномиальных, корневых, алгебраических) также приведены.

Для практического применения будет подробно рассмотрен раздел ВИМ, ориентированный на дискретные системы. Он по-прежнему, как и в случае непрерывных САУ, относится к группе численных и позволяет решать задачи с применением ЭВМ и средств программной поддержки. Применение метода в задачах синтеза регуляторов было предметом рассмотрения в п. 4.5.5. Ближайшие подпараграфы представляют его математическую основу – вещественное дискретное преобразование.

#### **4.5. Синтез цифровых регуляторов на основе вещественного дискретного преобразования**

##### **4.5.1. Вещественное дискретное преобразование**

Вещественное дискретное преобразование [4] является обобщением вещественного интегрального преобразования (1.3) на решетчатые функции  $f(nT_0)$ .

Вещественное изображение  $F^*(\delta)$  функции – оригинала  $f(nT_0)$  определено формулой прямого преобразования

$$F^*(\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0)e^{-\delta nT_0}, \quad \delta \in [c_\delta, \infty), \quad c_\delta \geq 0. \quad (4.26)$$

Значение параметра  $c_\delta$  выбирается из условия сходимости ряда. В большинстве практических задач вопрос выбора отсутствует, как это было и в случае непрерывных систем. Действительно, если рассматривается устойчивая система и она представлена импульсной переходной характеристикой  $k(nT_0) = f(nT_0)$ , то ряд в (4.26) сходится даже при  $c_\delta = 0$ , так как  $f(nT_0)$  – затухающая функция. Поэтому для устойчивых систем можно принимать  $c_\delta = 0$ .

В практическом отношении более удобно вместо формулы (4.26) использовать преобразование

$$F(v) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0)v^{-n}, \quad v \in [c_v, \infty), \quad (4.27)$$

в которое трансформируется (4.26) при подстановке

$$v = \exp(\delta T_0). \quad (4.28)$$

При этом по-прежнему необходимо обеспечить сходимость ряда, то есть наложить ограничение на нижнюю границу изменения переменной  $v$ :  $c_v \geq 1$ . Это неравенство следует непосредственно из подстановки (4.28):  $c_v = \exp(c_\delta T_0)$ . Для устойчивых систем, когда  $c_\delta = 0$  и  $f(nT_0)$  – импульсная переходная характеристика, будем иметь  $c_v = 1$ .

Формулы (4.26), (4.27), можно рассматривать как частные случаи соответственно дискретного преобразования Лапласа и  $z$ -преобразования. Это позволяет использовать таблицы соответствий оригиналов и их изображений по Лапласу  $F^*(p)$  и  $z$ -изображений при обращении вещественных изображений  $F^*(\delta)$  и  $F(v)$ , находить изображения  $F^*(\delta)$  и  $F(v)$  по функциям  $F^*(p)$  и  $F(z)$  путем формальных замен  $p \rightarrow \delta$  или  $z \rightarrow v$ , решать более простым образом другие задачи.

Для представления вещественных изображений в ЭВМ привлекаются модели в виде численных характеристик. В случае использования формы  $F(v)$  такой характеристикой будет множество  $\{F(v_i)\}_\eta = \{F(v_1); F(v_2) \dots F(v_\eta)\}$ , определяемое значениями функции  $F(v)$  на сетке  $c \leq v_1 < v_2 < \dots < v_\eta$ . Формирование ЧХ обычно выполняется в рамках равномерной сетки, так что поиск узлов сводится к определению значений первого и последнего узлов  $v_1$  и  $v_\eta$ , а остальные находятся из условия их равномерного распределения:

$$v_i = v_1 + \frac{v_\eta - v_1}{\eta - 1}(i - 1), \quad i = \overline{2, \eta - 1}. \quad (4.29)$$

Значение первого узла для устойчивых систем (а именно такие будут рассматриваться далее) в общем случае целесообразно принять равным единице. Для этого есть по крайней мере две причины. Во-первых, для принятого класса систем при  $v_1 = 1$  сохраняется сходимость ряда в (4.27). Во-вторых, такой выбор  $v_1$  обеспечивает формирование уравнения статики и вследствие этого придает синтезируемой системе такие свойства в установившемся режиме, которые определены желаемой передаточной функцией. Можно указать еще одну причину, которая тоже бывает важной, особенно на первых этапах знакомства с методом, – простота решения вопроса.

Для определения значения последнего узла  $v_\eta$  рекомендуется воспользоваться расчетной формулой

$$(0,1 \div 0,2)[F(v_1) - F(\infty)] + F(\infty) = F(v_\eta), \quad (4.30)$$

которая по смыслу и форме близка аналогичной формуле (1.8), определяющей значение последнего узла при получении численных моделей непрерывных систем.

Приведенные сведения позволяют найти элементы ЧХ  $\{F(v_i)\}_\eta$  по заданному аналитическому выражению

$$F(v) = \frac{b_m v^m + b_{m-1} v^{m-1} + \dots + b_1 v + b_0}{a_n v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \dots + a_1 v + 1}, \quad (4.31)$$

или известной функции времени  $f(nT_0)$ . В первом случае переменной  $v$  в (4.31) придают дискретные значения  $v_i, i = 1, 2, \dots, \eta$  и вычисляют величины  $F(v_i), i = 1, 2, \dots, \eta$ . Во втором случае расчетная формула формируется на основе (4.27):

$$F(v_i) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) v_i^n, \quad i = 1, 2, \dots, \eta. \quad (4.32)$$

При использовании ЧХ приходится решать не только прямую задачу – формирование ЧХ, но и обратную ей – получение дробно-рационального выражения  $F(v)$  по ЧХ. Для решения обратной задачи составляется система уравнений

$$F(v_i) = \frac{b_m v_i^m + b_{m-1} v_i^{m-1} + \dots + b_1 v_i + b_0}{a_n v_i^n + a_{n-1} v_i^{n-1} + \dots + a_1 v_i + 1}, \quad i = \overline{1, \eta}, \quad (4.33)$$

в которой число уравнений  $\eta$ , определяемое размерностью ЧХ, должно быть равно числу неизвестных коэффициентов:  $\eta = m + n + 1$ .

Вещественное дискретное преобразование и вещественные изображения имеют свойства, которые создают некоторые преимущества в задачах расчета САУ, в том числе в задачах их синтеза. Выделим некоторые:

- переход к вещественной форме осуществляется значительно проще по сравнению, например, с частотным подходом;
- существует простая взаимная связь между вещественными изображениями и  $z$ -формами;
- математические модели в форме вещественных функций и ЧХ ориентированы на применение численных методов и ЭВМ;
- получение ЧХ возможно как по вещественным функциям-изображениям, так и по их оригиналам.

Приведенные сведения о вещественном дискретном преобразовании позволяют перейти к рассмотрению алгоритма решения задач синтеза дискретных регуляторов.

#### 4.5.2. Формирование желаемых дискретных передаточных функций

Получение цифровых регуляторов путем решения уравнений синтеза (4.12), (4.13) предполагает наличие исходных данных в области изображений – в виде желаемой передаточной функции и передаточной функции неизменяемой части. Последняя была представлена как приведенная непрерывная часть системы. В то же время сведения о желаемых свойствах системы удобно задавать в области времени, используя временные динамические характеристики либо однозначно с ними связанные показатели качества желаемой системы. Поэтому, как и в случае непрерывных систем, возникает необходимость получения передаточных функций по желаемым временным характеристикам или показателям качества.

Наиболее распространенные методы решения задачи относятся к частотной области. Среди них особо популярны методы ЛАЧХ, вводимые на основе псевдочастоты  $\lambda$  [9, 10]. Они имеют высокую наглядность, достаточно просты, базируются на приемах и технике частотного подхода к расчету непрерывных систем. Их недостатки в основном остаются прежними, характерными для непрерывных систем: трудности получения вещественных функций, не содержащих мнимой переменной; опосредованная связь с показателями качества; непростой и только лишь приближенный способ описания многоконтурных систем. Кроме того, добавляется специфический недостаток – переход между характеристиками  $L(\omega)$  и  $L(\lambda)$  в области средних и высоких частот является дополнительным источником погрешности. По этим причинам связь между желаемой передаточной функцией и показателями качества устанавливается косвенно и обычно весьма приближенно.

Приближенный характер связи между показателями качества и желаемой передаточной функции сохраняется при использовании другого непрямого метода – корневого. Он сохраняет достоинства и недостатки, имеющие место при формировании желаемых передаточных функций непрерывных систем. Специфические особенности получения дискретных функций могут проявляться в виде концентрации доминирующих полюсов в окрестности точки  $z = 1$ , что приводит к значительным изменениям в поведении системы при сравнительно малых смещениях одного или нескольких доминирующих полюсов [10].

При сравнительно простых желаемых реакциях системы применяют прямые алгебраические методы, сводящие задачу к решению СЛАУ [10]. К числу прямых также относится представленный ниже численный способ формирования желаемых передаточных функций, базирующийся на вещественном дискретном преобразовании.

Сведения о  $\nu$ -преобразовании, приведенные в п. 4.5.1, в частности, формула (4.27), свидетельствуют о существовании непосредственной связи между функцией времени  $f(nT_0)$  и ее вещественным изображением  $F(\nu)$ . Эта связь оказывается достаточно простой для реализации численного перехода из области времени в область изображений.

Схему решения задачи можно представить в виде двухэтапной процедуры:  $f(nT_0) \Rightarrow \{F(\nu_i)\}_\eta \Rightarrow F(\nu)$ . Под  $f(nT_0)$  можно понимать желаемую переходную  $h_{\text{жс}}(nT_0)$  или импульсную переходную  $k_{\text{жс}}(nT_0)$  характеристику. Будут рассмотрены оба варианта.

#### 4.5.3. Получение желаемых передаточных функций по импульсным переходным характеристикам

В принятой схеме получения желаемых передаточных функций на основе  $\nu$ -преобразования положим:  $h(nT_0) = k_{\text{жс}}(nT_0)$ . Тогда задача состоит в следующем. Эталонная система представлена функцией времени  $k_{\text{жс}}(nT_0)$  и передаточной функцией

$$W_{\text{жс}}(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + 1}, \quad m \leq n, \quad (4.34)$$

структурные параметры которой  $m, n$  известны. Требуется найти коэффициенты  $b_m \dots b_0, a_n \dots a_1$ , обеспечивающие выполнение заданного критерия приближения синтезированной функции  $k_{\text{жс}}^c(nT_0)$  к исходной  $k_{\text{жс}}(nT_0)$ . Показателем близости удобно иметь оценку вида (4.24), которая в обозначениях рассматриваемой задачи принимает вид:

$$\Delta k = \max_n |k_{\text{жс}}(nT_0) - k_{\text{жс}}^c(nT_0)|. \quad (4.35)$$

При этом важно найти такое решение, которое будет оптимальным по критерию  $\Delta k \rightarrow \min$  или близким к нему.

Для решения задачи в рамках первого этапа переведем (4.34) в вещественную форму

$$W_{\text{жс}}(\nu) = \frac{b_m \nu^m + b_{m-1} \nu^{m-1} + \dots + b_1 \nu + b_0}{a_n \nu^n + a_{n-1} \nu^{n-1} + \dots + a_1 \nu + 1}, \quad m \leq n, \quad (4.36)$$

и поставим перед собой задачу получения элементов  $W_{\text{жс}}(\nu_i), i = 1, 2, \dots, \eta$  характеристики  $\{W_{\text{жс}}(\nu_i)\}_\eta$ . Предварительно необходимо определить размерность ЧХ  $\eta$  и значения узлов интерполирования  $\nu_i, i = 1, 2, \dots, \eta$ . Для размерности  $\eta$  имеем расчетную формулу:  $\eta = m + n + 1$ . При выборе узла  $\nu_1$  руководствуемся следующими соображениями. Эталонная сис-



Полученные в результате решения СЛАУ коэффициенты передаточной функции (4.36) являются в то же время коэффициентами z-формы  $W_{\text{жс}}(z)$ . Это позволяет сформировать передаточную функцию  $W_{\text{жс}}(z)$  и найти ее оригинал – синтезированную импульсную переходную характеристику  $k_{\text{жс}}^c(nT_0)$ . Можно предполагать, что она не будет точно совпадать с исходной характеристикой  $k_{\text{жс}}(nT_0)$ . Источниками погрешности являются приближенный характер расчетной формулы (4.37), неточность задания решетчатой функции  $k_{\text{жс}}(nT_0)$  и погрешности вычислений. Суммарная ошибка  $\Delta k(nT_0)$  обычно невелика, но она существует и в некоторых случаях возникает необходимость ее минимизации.

Принципиальные и технические возможности для этого имеются. Они базируются на перекрестном свойстве  $\nu$ -преобразования, которое аналогично свойству интегрального преобразования. Оно позволяет использовать ошибку

$$\Delta = \max_{t^* \in [0; t_p^*/2]} |k_{\text{жс}}(nT_0) - k_{\text{жс}}^c(nT_0)| - \max_{t^* \in [t_p^*/2; t_p^*]} |k_{\text{жс}}(nT_0) - k_{\text{жс}}^c(nT_0)|,$$

которая в процедуре минимизации более удобна по сравнению с оценкой  $\Delta k$ . Дело в том, что в процессе минимизации эти оценки приближаются к различным пределам:  $\Delta k \rightarrow \min \neq 0$ ,  $\Delta \rightarrow 0$ . Во втором случае предел известен, поэтому удаленность решения от оптимального (по критерию  $\Delta k = \max_n |k_{\text{жс}}(nT_0) - k_{\text{жс}}^c(nT_0)| \rightarrow \min$ ) характеризуется величиной  $\Delta$ , то есть ее удаленностью от нуля. В случае же использования оценки  $\Delta k$  ее минимальное значение неизвестно, поэтому для определения расстояния между оптимальным и полученным решениями приходится выполнять больший объем вычислений.

Для дальнейшего пояснения алгоритма обратимся к примеру, основные вычисления которого легко проверить и повторить при ручном счете.

**Пример.** Желаемая импульсная реакция  $k_{\text{жс}}(nT_0)$  представлена таблицей значений в тактовые моменты времени  $nT_0$ ,  $T_0 = 5$  с. Требуется найти желаемую передаточную функцию вида  $W_{\text{жс}}(z) = b_1 / (a_1 z + 1)^{-1}$ .

Таблица 4.1

$nT_0$	0	5	10	15	20	25
$k_{\text{жс}}(nT_0)$	1	0,367	0,135	0,049	0,018	0,007

В рамках первого этапа находим: размерность ЧХ  $\eta = 2$ ; узел  $v_1$  в силу устойчивости желаемой модели можно принять как  $v_1 = 1$ ; узел  $v_2 = 2$ . Тогда по формуле (4.32) получаем

$$W_{\text{жс}}(v_1) = W_{\text{жс}}(1) = 1 + 0,367 + 0,135 + 0,049 + 0,018 + 0,007 = 1,572,$$

$$W_{\text{жс}}(v_2) = W_{\text{жс}}(2) = 1 + 0,367 \cdot 2^{-1} + 0,135 \cdot 2^{-2} + 0,049 \cdot 2^{-3} + \\ + 0,018 \cdot 2^{-4} + 0,018 \cdot 2^{-4} + 0,007 \cdot 2^{-5} = 1,226.$$

Получили ЧХ  $\{W_{\text{жс}}(v_i)\}_2 = \{1,572; 1,226\}$ . Это результат первого этапа.

На втором этапе нужно найти коэффициенты  $b_1, a_1$ . Для этого составим и решим СЛАУ вида (4.37):

$$\begin{cases} 1,572 = \frac{b_1}{a_1 + 1}, \\ 1,226 = \frac{2b_1}{2a_1 + 1}. \end{cases}$$

Решение системы:  $b_1 = -2,78$ ;  $a_1 = -2,77$ . Получили передаточную функцию  $W_{\text{жс}} = \frac{-2,78z}{-2,77z + 1} = \frac{z}{z - 0,367}$ . Для сравнения приведем точное

решение  $W(z) = \frac{z}{z - 0,367}$ . Столь небольшое отклонение синтезированной ПФ от точной находится на уровне вычислительной погрешности,

поэтому в данном случае решение не требует коррекции.

#### 4.5.4. Получение желаемых передаточных функций по переходным характеристикам

Эта задача является более распространенной и значимой по сравнению с предыдущей. Действительно, ступенчатое воздействие является наиболее употребительным типовым входным сигналом, а реакция на него является, пожалуй, наиболее информативной.

Пусть задана переходная характеристика  $h_{\text{жс}}(nT_0)$  эталонной системы. Необходимо найти функцию  $W_{\text{жс}}(z)$  по заданной  $h_{\text{жс}}(nT_0)$ . Для рассмотрения путей поиска решения обратимся к формуле, связывающей передаточную функцию  $W_{\text{жс}}(z)$  и изображение переходной характеристики  $h_{\text{жс}}(z) \doteq h_{\text{жс}}(nT_0)$ . При единичном ступенчатом воздействии  $1(nT_0) \doteq \frac{z}{z-1}$  по определению переходной характеристики будем иметь

$$h_{\text{эс}}(z) = W_{\text{эс}}(z) \frac{z-1}{z}. \quad (4.38)$$

Подобное соотношение можно получить также для области  $v$ -изображений:

$$h_{\text{эс}}(v) = W_{\text{эс}}(v) \frac{v-1}{v}, \quad v \in (1, \infty). \quad (4.39)$$

Эту формулу можно использовать для вычисления элементов  $W_{\text{эс}}(v_i)$  ЧХ  $\{W_{\text{эс}}(v_i)\}_\eta$ :

$$W_{\text{эс}}(v_i) = \frac{v_i}{v_i - 1} h_{\text{эс}}(v_i), \quad i = \overline{1, \eta}. \quad (4.40)$$

Неизвестные значения  $h_{\text{эс}}(v_i)$  найдутся по формуле прямого  $v$ -преобразования, которая в обозначениях рассматриваемой задачи принимает вид:

$$h_{\text{эс}}(v_i) \cong \sum_{n=0}^N h_{\text{эс}}(nT_0) v_i^{-n}, \quad i = \overline{1, \eta}. \quad (4.41)$$

Теперь обратим внимание на полученные формулы (4.40) и (4.41). Последняя содержит исходную функцию  $h_{\text{эс}}(nT_0)$  и, если известны значения узлов  $v_i$ , она позволяет вычислить элементы  $h_{\text{эс}}(v_i)$ ,  $i = \overline{1, \eta}$ . Эти значения в свою очередь обеспечивают получение интересующих нас элементов ЧХ  $\{W_{\text{эс}}(v_i)\}_\eta$  по второй из выделенных формул – (4.40).

Между тем для выполнения вычислений по расчетным формулам (4.40) и (4.41) необходимо знать узлы интерполирования  $v_i$ , о чем уже говорилось. Здесь трудностей не существует. Все они, за исключением узла  $v_1$ , находятся по общей для ЧХ формуле (4.29).

Однако следует помнить, что в отношении первого узла имеются ограничения, связанное со сходимостью ряда в (4.41). Об этом свидетельствует интервал изменения переменной  $v$  в (4.41), исключаяющий значение  $v=1$ . Напомним, что все прежние задачи расчета дискретных систем на основе ВИМ таких ограничений не имели, что позволяло принимать  $v_1=1$ . В конструктивном плане выбор такого узла в прежних задачах обеспечивал совпадение установившегося режима, заданного исходной функцией со статическим режимом синтезированной модели. В рассматриваемой задаче также попробуем найти условия равенства статических режимов. Если они будут найдены, то отпадет необходимость в отыскании и использовании узла  $v_1$ .

С этой целью обратимся к известному в теории z-преобразования соотношению предельных значений оригинала  $f(nT_0)$  и изображения  $F(z)$  /10/:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(nT_0) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z).$$

Воспользуемся им для установления связи между начальным значением оригинала  $h_{\text{жс}}(nT_0)$  и конечным значением функции  $\frac{z-1}{z} h_{\text{жс}}(z)$ , содержащей изображение  $h_{\text{жс}}(z) \doteq h_{\text{жс}}(nT_0)$ . Будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{\text{жс}}(nT_0) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} h_{\text{жс}}(z).$$

Заменим изображение  $h_{\text{жс}}(z)$  его выражением  $h_{\text{жс}}(z) = W_{\text{жс}}(z) \frac{z-1}{z}$  из (4.38):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{\text{жс}}(nT_0) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} W_{\text{жс}}(z) \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} W_{\text{жс}}(z) = W_{\text{жс}}(1).$$

В полученном равенстве выполним две операции. Во-первых, введем обозначение для установившегося значения переходной характеристики  $h_{\text{жс}}^{\text{уст}} = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{\text{жс}}(nT_0)$ , и, во-вторых, заменим передаточную функцию

$W_{\text{жс}}(z)$  дробью  $W_{\text{жс}}(z) = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + 1}$  из (4.41) (4.4.1) с учетом  $z = 1$ .

Получим важное для нас соотношение

$$h_{\text{жс}}^{\text{уст}} = W_{\text{жс}}(1) = \frac{b_m + b_{m-1} + \dots + b_1 + b_0}{a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + 1}. \quad (4.42)$$

Оно является уравнением статики желаемой системы. Наличие его, как уже говорилось, позволяет отказаться от непростой задачи поиска узла  $v_1 \neq 1$  по переходной характеристике.

Следуя предложению об исключении из рассмотрения узла  $v_1$ , нумерацию узлов рекомендуется начинать со второго:  $v_2, v_3 \dots v_\eta$ . Вычислять их можно по формуле (4.29), положив в ней  $v_1 = 1$ :

$$v_i = 1 + \frac{v_\eta - 1}{\eta - 1} (i - 1), \quad i = \overline{2, \eta - 1}.$$

На этом круг вопросов, связанных с получением ЧХ желаемой передаточной функции считается завершенным. Этим завершен первый этап. Перейдем ко второму этапу – отысканию коэффициентов передаточной функции. Исходными данными для ее решения служат элементы  $W_{\text{жс}}(v_i)$ ,  $i = 2, 3 \dots \eta$  и уравнение (4.42). Эти данные позволяют сформировать систему уравнений

$$W_{\text{жс}}(v_i) = \frac{b_m v_i^m + b_{m-1} v_i^{m-1} + \dots + b_1 v_i + b_0}{a_n v_i^n + a_{n-1} v_i^{n-1} + \dots + a_1 v_i + 1}, \quad i = 1, 2, \dots, \eta,$$

для узлов  $v_1 = 1, v_2, v_3, \dots, v_\eta$  относительно неизвестных коэффициентов  $b_m, b_{m-1}, \dots, b_0, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ . Присутствующий здесь узел  $v_1 = 1$  присутствие в системе уравнения статики, в левой части которого следует в соответствии с (4.42) заменить  $W_{\text{жс}}(v_1) = W_{\text{жс}}(1)$  на  $h_{\text{жс}}^{\text{ycm}}$ .

Заключительные операции решения задачи, как всегда связаны с проверкой точности полученного решения. Лучший вариант – оценивание точности в области времени. Для этого по синтезированной передаточной функции  $W_{\text{жс}}(z)$  находят переходную характеристику  $h_{\text{жс}}^c(nT_0)$  и сравнивают с исходной  $h_{\text{жс}}(nT_0)$ , например, с помощью оценки  $\Delta h$ , определяемой выражением (4.24). Если ошибка оказалась недопустимо большой, ее можно уменьшить путем смещения узла  $v_\eta$ , который в свою очередь определяет пропорциональные изменения других узлов.

#### **4.5.5. Синтез дискретных регуляторов вещественным интерполяционным методом**

Задача синтеза дискретных регуляторов может быть сформулирована как задача решения уравнения синтеза (4.12) или (4.13). Будем рассматривать более простое из них второе уравнение, описывающее разомкнутый контур или систему. Рассмотрим математическую постановку задачи.

При использовании ВИМ следует преобразовать все функции, входящие в уравнение (4.13), в вещественную форму. Получим

$$W_{\text{жс}}^p(v) \cong W_p(v)W_{\text{нч}}(v). \quad (4.43)$$

Теперь задача состоит в определении коэффициентов передаточной функции

$$W_p(v) = \frac{b_m v^m + b_{m-1} v^{m-1} + \dots + b_1 v + b_0}{a_n v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \dots + a_1 v + 1}, \quad (4.44)$$

которая описывает дискретный регулятор в области вещественных изображений. В общем случае задача не имеет точного решения, поэтому необходим критерий, определяющий близость синтезированной системы к эталонной. Обычно лучшим считается сравнение систем в области времени, например, по их переходным характеристикам. Поэтому воспользуемся оценкой вида (4.24), которая в приложении к рассматриваемой задаче будет иметь вид

$$\Delta h = \max_n |h_{\text{жс}}(nT_0) - h_c(nT_0)|, \quad (4.45)$$

где  $h_{\text{жс}}(nT_0)$ ,  $h_c(nT_0)$  – желаемая и синтезированная переходные характеристики.

Оценка (4.45) должна быть дополнена требуемым уровнем сближения, например, неравенством  $\Delta h \leq \Delta h_0$ , которое ограничивает сверху допустимую погрешность величиной  $\Delta h_0$ , или требованием минимизации отклонения  $\Delta h$ :

$$\Delta h = \max |h_{\text{жс}}(nT_0) - h_c(nT_0)| \rightarrow \min. \quad (4.46)$$

В первом случае, если при заданных значениях параметров  $m$  и  $n$  передаточной функции регулятора

$$W_p(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 + 1}, \quad (4.47)$$

неравенство  $\Delta h \leq \Delta h_0$  останется невыполненным, придется увеличивать значения  $m$  и/или  $n$ , то есть переходить к структурному синтезу. Во втором случае рассмотрение ограничивается параметрическим синтезом. Этот вариант наиболее распространен, практически удобен и потому в постановке задачи примем именно его.

Итак, задача состоит в отыскании такого решения уравнения (4.13) относительно коэффициентов передаточной функции (4.47), при котором выполняется условие (4.46).

Решение будем искать в три этапа. На первом определим ЧХ регулятора  $\{W_p(v_i)\}_\eta$ , на втором вычислим коэффициенты передаточной функции регулятора, третий этап отведем для оптимизации решения по критерию (4.47). В связи с такой структуризацией поиска решения напомним, что точно такие же этапы были выделены при поиске передаточной функции дискретного регулятора по его непрерывному прототипу в п. 4.4.1. Это говорит об общности задач и методики их решения, то есть определенной универсальности подхода. Обратим внимание на важность такой общности: она не только позволяет распространить единый подход на различные задачи синтеза, но и создать, и использовать единое программное обеспечение. Продолжая тему общности, можно показать, что ВИМ предоставляет также возможность универсализации алгоритмического и программного обеспечения решения задач синтеза класса непрерывных и цифровых систем. Однако этот вопрос выходит за рамки тематики учебного пособия, поэтому вернемся к выделенной трехэтапной процедуре.

Первый этап, напомним, заключается в определении ЧХ регулятора  $\{W_p(v_i)\}_\eta$ , то есть совокупности значений вещественной переда-

точной функции  $W_p(v)$ , которая должна удовлетворять определенным условиям. Их выполнение трансформируется в назначение или выбор значений параметров  $\eta; v_1; v_\eta; v_i, i = 2, 3 \dots \eta - 1$  и вычисление значений  $W_p(v_i), i = 1, 2 \dots \eta$ .

Первый из параметров определяется числом неизвестных коэффициентов искомой передаточной функции:  $\eta = m + n + 1$ . Значение узла  $v_1$  целесообразно принять равным единице. Это возможно, так как полюсы всех передаточных функций, входящих в уравнение синтеза (4.43), должны принадлежать области устойчивости. Поэтому можно положить  $c_v = 1$ , принять  $v \in [1, \infty)$  и  $v_1 = 1$ . Значение последнего узла  $v_\eta$  найдется в соответствии с рекомендацией (4.30), а промежуточные узлы вычисляются по формуле (4.29). На этом завершается подготовительная часть этапа, позволяющая перейти к собственно вычислениям. Они тоже несложны, так как заключаются в вычислении значений  $W_{\text{эс}}^p(v_i), W_{\text{нч}}(v_i)$  по известным выражениям  $W_{\text{эс}}^p(v)$  и  $W_{\text{нч}}(v)$ . Это позволяет сформировать желаемую ЧХ

$$\{W_{\text{эс}}^p(v_i)\}_\eta = \{W_{\text{эс}}^p(v_1); W_{\text{эс}}^p(v_2); \dots; W_{\text{эс}}^p(v_\eta)\}, \quad (4.48)$$

и приведенной непрерывной части

$$\{W_{\text{нч}}(v_i)\}_\eta = \{W_{\text{нч}}(v_1); W_{\text{нч}}(v_2); \dots; W_{\text{нч}}(v_\eta)\}. \quad (4.49)$$

По ним найдется ЧХ регулятора

$$\{W_p(v_i)\}_\eta = \{W_p(v_1); W_p(v_2); \dots; W_p(v_\eta)\}, \quad (4.50)$$

путем вычисления ее элементов:

$$W_p(v_i) = \frac{W_{\text{эс}}^p(v_i)}{W_{\text{нч}}(v_i)}, \quad i = 1, 2 \dots \eta. \quad (4.51)$$

Как видим, первый этап в целом не содержит принципиальных либо вычислительных трудностей и легко формализуется.

Второй этап заключается в определении коэффициентов передаточной функции регулятора (4.44). С этой целью составляется система уравнений вида (4.42):

$$W_p(v_i) = \frac{b_m v_i^m + \dots + b_1 v_i + b_0}{a_n v_i^n + \dots + a_1 v_i + 1}, \quad i = \overline{1, \eta}. \quad (4.52)$$

Система линейна относительно подлежащих определению  $m + n + 1$  коэффициентов  $b_m, b_{m-1} \dots b_0, a_n, a_{n-1} \dots a_1$ , имеет  $\eta = m + n + 1$  уравнений, левые части уравнений известны. Эти предпосылки существования и единственности решения наряду с выполнением других несложных условий позволяют найти решение СЛАУ.

Полученный результат является математическим решением СЛАУ, но не задачи синтеза в целом, так как эта задача требует оценивания полученного решения с позиций близости синтезированной САУ эталонной, желаемой системе. Для получения оценок сближения удобно использовать характеристики систем в области – переходные и импульсные переходные, привлекая, например, критерий (4.45). Воспользуемся такой возможностью, которая была подробно рассмотрена в задачах создания непрерывных САУ, а также использована при формировании желаемых передаточных функций дискретных САУ и стала фактически стандартной. Она позволяет не только оценить точность решения, но и выполнить его корректировку, привлекая перекрестное свойство соответствующего преобразования.

В рассматриваемом случае оценивания точности решения задачи синтеза цифровых регуляторов нужно найти передаточную функцию синтезированной системы  $W_c(z)$ , затем соответствующую ей переходную характеристику  $h_c(nT_0)$  и оценку  $\Delta h$ . Если полученная погрешность оказалась больше допустимой, можно уменьшить ее величину на основе привлечения перекрестного свойства  $v$ -преобразования. С этой целью достаточно изменить верхнюю границу расположения узлов интерполирования, что достигается смещением последнего узла  $v_n$ . Механизм изменения величины узла остается таким же, как и в случае непрерывных систем. Он подробно представлен в главе 3. В результате использования этого механизма можно снизить величину погрешности  $\Delta h$  в пределе – до близкой к наименьшей величине, итерационно приближаясь к наилучшему равномерному решению.

Для пояснения процедуры синтеза цифровых регуляторов рассмотрим задачу, которая приведена в /10/ и решена там другим методом.

**Пример.** Информация о САУ представлена передаточными функциями неизменяемой части и желаемой передаточной функцией соответственно

$$W_{нч}(z) = \frac{0,0453(z + 0,904)}{(z - 0,905)(z - 0,819)}, \quad W_{жс}(z) = \frac{0,0476(z - 0,904)}{(z - 1)(z - 0,819)}.$$

Известны также коэффициент обратной связи  $k_{oc} = 1$ , период квантования  $T_0 = 1$  с и вид передаточной функции регулятора

$$W_p(z) = \frac{b_1 z + b_0}{a_1 z + 1}.$$

В вычислительном плане задача состоит в определении трех коэффициентов:  $b_1, b_2, a_1$ . Последовательность решения задачи представим в виде алгоритма, демонстрирующего методику синтеза цифровых регуляторов на основе ВИМ.

1. Составим уравнение синтеза вида (4.13)

$$\frac{0,0476(z - 0,904)}{(z - 1)(z - 0,819)} \cong \frac{b_1 z + b_0}{a_1 z + 1} \frac{0,0453(z + 0,904)}{(z - 0,905)(z - 0,819)}.$$

2. Выполним согласование структур левой и правой частей уравнения. Левая часть содержит в знаменателе множитель  $(z - 1)$ , следовательно, такой же член должен быть в правой части, поэтому можно принять  $a_1 = -1$ . В знаменателе правой части появляется двучлен  $(-z + 1)$ , который, умножив на  $-1$ , можно сократить с соответствующим выражением в левой части равенства. С учетом этого сокращения и изменения знаков уравнение можно записать в виде

$$\frac{0,0476(z - 0,904)}{(z - 0,819)} \cong (-b_1 z - b_0) \frac{0,0453(z + 0,904)}{(z - 0,905)(z - 0,819)}. \quad (4.53)$$

3. Этап позволил не только упростить уравнение, но и найти неизвестный коэффициент  $a_1$ .

4. Реализуем еще одну возможность для упрощения задачи – составим уравнение статики, положив  $z = 1$  в форме (4.52). Получим:

$$\frac{0,0476 \cdot 1,904}{0,181} = (-b_1 + b_0) \frac{0,0453 \cdot 1,904}{0,095 \cdot 0,181} \text{ или } 0,1 = (-b_1 - b_0).$$

Для вычисления двух оставшихся неизвестных коэффициентов имеем одно уравнение. Необходимо составить второе. Его найдем, используя собственно аппарат ВИМ. Для этого переведем уравнение синтеза (4.52) в вещественную форму. Такой переход возможен даже при  $v \in [1, \infty)$ , так как полюсы выражений, входящих в уравнение, должны принадлежать области устойчивости. Получим

$$\frac{0,0476(v - 0,904)}{(v - 0,819)} \cong (-b_1 v - b_0) \frac{0,0453(v + 0,904)}{(v - 0,905)(v - 0,819)}.$$

Размерность численных характеристик должна быть равна единице, так как необходимо составить лишь одно уравнение. Значение узла примем  $v = 2$  и найдем второе уравнение:

$$0,117 = (b_1 \cdot 2 + b_0) \cdot 0,102.$$

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,1 = (-b_1 - b_0), \\ 1,15 = (b_1 \cdot 2 + b_0). \end{cases}$$

Отсюда найдем коэффициенты  $b_1 = 1,05$ ;  $b_0 = 0,95$ , затем получим передаточную функцию регулятора  $W_p(z) = \frac{-1,05z + 0,95}{-z + 1}$ . Далее, сформировав передаточную функцию замкнутой САУ с найденным регулятором, можно убедиться в том, что получено точное решение.

## ГЛАВА 5. АНАЛИЗ СИСТЕМ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 5.1. Введение в теорию робастного управления

В предыдущей главе рассмотрены основные вопросы синтеза регуляторов САУ на основе ВИМ. В реальных условиях необходимо, чтобы системы управления обладали свойствами, которые напрямую не связаны с их динамическими или статическими режимами. К числу таких свойств в первую очередь относится свойство робастности. Обеспечение его достигается в рамках ВИМ рассмотренными ранее мерами. Однако задача построения робастных регуляторов САУ сложна, а управляемые объекты разнообразны, что для различных классов систем могут оказаться эффективными различные пути и механизмы обеспечения робастности. Они могут быть специфическими средствами ВИМ или опираться на самостоятельные направления и результаты. Специфические варианты обеспечения робастности, непосредственно опирающиеся на ВИМ, будут рассмотрены в главе 8. Здесь же будет представлен альтернативный подход, основанный на корневом методе и гарантирующий робастное качество.

В системах автоматического управления, как правило, не все параметры могут быть заданы точно. Они могут меняться в процессе эксплуатации системы по заранее неизвестным законам или быть в принципе недоступными для точного измерения. В тоже время в большинстве случаев известны пределы изменения таких параметров. В этих случаях нестабильные параметры можно отнести к классу интервально-неопределенных [11]. Системы, имеющие интервально-неопределенные параметры, получили название интервальных систем (ИС). Пусть линейная ИС описывается передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{W_1(s, q)}{W_2(s, q)}, \quad (5.1)$$

где полиномы  $W_1(s, q)$  и  $W_2(s, q)$  зависят от интервальных параметров, образующих вектор  $q$ . Так как  $q_i \in [q_{i \min}, q_{i \max}]$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , то интер-

вальные параметры образуют многогранник  $P$ , представляющий собой прямоугольный гиперпараллелепипед с числом вершин  $2^m$ .

Интервальность параметров  $q$  системы приводит к различным видам неопределенности ее характеристического полинома: его коэффициенты могут являться либо интервалами, либо функциями интервалов. Различают четыре вида неопределенности характеристических полиномов:

- интервальная неопределенность;
- аффинная неопределенность;
- полилинейная неопределенность;
- полиномиальная неопределенность.

Смысл классификации характеристических полиномов по видам неопределенности покажем на примере системы второго порядка:

- *Интервальная неопределенность* – коэффициенты полинома являются интервальными параметрами  $s^2 + q_1s + q_2$ ,  $q_i \in [q_{i\min}, q_{i\max}]$ .
- *Аффинная неопределенность* – коэффициенты полинома образованы суммой или разностью интервальных параметров  $(s^2 + (q_1 + q_2 + 2q_3)s + q_1 - 3q_2)$ ,  $q_i \in [q_{i\min}, q_{i\max}]$ .
- *Полилинейная неопределенность* – коэффициенты полинома линейно зависят от каждого параметра, если остальные параметры фиксированы  $(s^2 + (q_1q_2 + 2q_3)s + 3q_1q_2)$ ,  $q_i \in [q_{i\min}, q_{i\max}]$ .
- *Полиномиальная неопределенность* – коэффициенты полинома зависят полиномиально хотя бы от одного параметра  $(s^2 + (q_1q_2 + 2q_3^2)s + q_2)$ ,  $q_i \in [q_{i\min}, q_{i\max}]$ .

Для интервальной и аффинной неопределенностей существуют достаточно простые методы анализа и синтеза ИС [11], но если коэффициенты полинома являются более сложными функциями интервальных параметров, то анализ и синтез ИС значительно усложняется.

Впервые задача о нахождении устойчивости ИС была поставлена итальянским ученым С. Фаэдо, который получил достаточные условия устойчивости. Однако наибольший интерес к данным задачам появился после того, как В.Л. Харитоновым были найдены необходимые и достаточные условия устойчивости интервальных полиномов. Позднее появилось большое количество работ на основе результатов, полученных В.Л. Харитоновым. Также Я.З. Цыпкин, Ю.И. Неймарк и их последователи развили частотный подход к исследованию устойчивости интервальных динамических систем. Один из самых распространенных частотных подходов к анализу ИС основан на принципе исключения нуля и теореме отображения Дезоера. Из корневых под-

ходов к анализу ИС наиболее распространенным является подход, основанный на реберной теореме.

На основе правил интервальной арифметики характеристический полином любой системы управления с интервальными физическими параметрами можно привести к полиному с интервальными коэффициентами. Таким образом, на основе методов, разработанных для систем с интервальной неопределенностью характеристического полинома, можно оценивать устойчивость ИС с более сложными видами неопределенности. Но следует отметить, что следствием такого приведения коэффициентов полинома является переограничение области неопределенности, поэтому нельзя достоверно судить о неустойчивости ИС. Однако простота методов исследования ИС с интервальной неопределенностью в некоторых случаях компенсирует данный недостаток.

## 5.2. Анализ робастной устойчивости

### 5.2.1. Показатели качества интервальных систем

При проектировании ИС основная задача состоит в обеспечении желаемого качества ее функционирования или, в крайнем случае, устойчивости системы при любых возможных значениях интервальных параметров. В соответствии с корневым подходом, система является робастно устойчивой, если области локализации всех полюсов ИС располагаются в левой половине комплексной плоскости. Требуемое качество работы системы можно гарантировать, если система является относительно (регионально) робастно устойчивой, что соответствует расположению областей локализации корней в требуемых областях комплексной плоскости.

Определение корневых оценок качества САУ является одними из наиболее желательных результатов анализа, так как полученные количественные характеристики, позволяют оценить не только ее устойчивость, но и динамические свойства системы. В случае с интервальными системами необходимо оценить работу системы в наихудших режимах: найти наименьшую степень устойчивости и наибольшую колебательность. Поиск корней интервального полинома требует большого количества вычислений, хотя для анализа системы требуются не все корни, а только те, которые определяют максимальную колебательность и минимальную степень устойчивости. На рис. 5.1 изображен пример расположения областей локализации корней интервального характеристического полинома на комплексной плоскости, где  $tg(\varphi_{1\max})$  и  $tg(\varphi_{1\min})$ , соответственно, наименьшая и наибольшая колебательность,  $d$  – минимальная степень устойчивости системы.

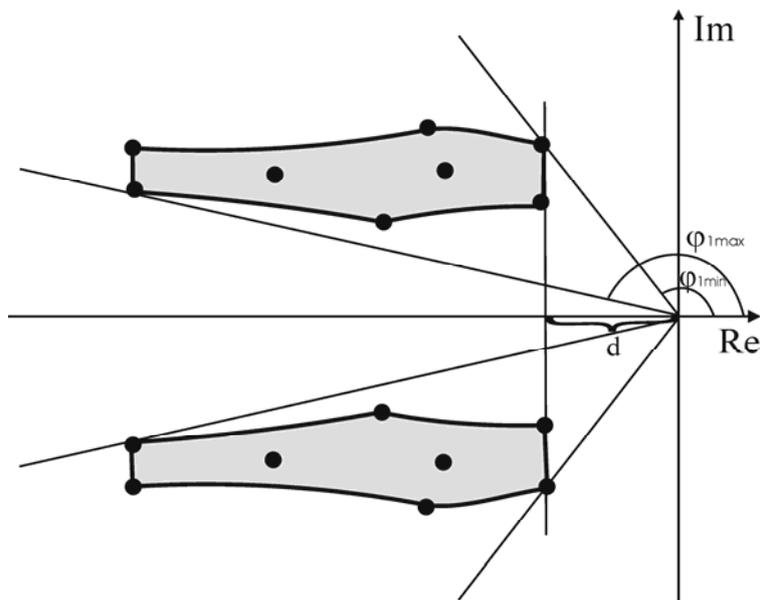


Рис. 5.1. Области локализации корней полинома

В данном случае максимальная колебательность и минимальная степень устойчивости ИС определяется корнями одного вершинного полинома. В общем случае их может быть два, один из которых определяет максимальную колебательность, другой – минимальную степень устойчивости ИС.

### 5.2.2. Теорема Харитонова

Рассмотрим некоторые существующие методы анализа робастной устойчивости.

Один из первых полиномиальных методов анализа ИС был разработан В. Харитоновым в 1978 году. Метод основан на теореме, которая позднее была названа именем автора – теоремой Харитонова:

*Непрерывный интервальный полином является робастно устойчивым, если устойчивы четыре особым образом составленных полинома (они позднее также получили название по имени автора теоремы – полиномы Харитонова).*

Пусть задан интервальный полином:

$$P(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_n s^n, \quad \underline{a}_i \leq a_i \leq \overline{a}_i, \quad \underline{a}_n > 0, \quad i = 0, \dots, n. \quad (5.2)$$

Для анализа его робастной устойчивости необходимо вместо проверки бесконечного числа полиномов, проверить на устойчивость только четыре полинома Харитонова, составленных из крайних значений коэффициентов, чередующихся парами (два минимальных значения – два максимальных):

$$\begin{aligned}
P_1(s) &= \underline{a_0} + \underline{a_1}s + \overline{a_2}s^2 + \overline{a_3}s^3 + \dots, \\
P_2(s) &= \overline{a_0} + \underline{a_1}s + \underline{a_2}s^2 + \overline{a_3}s^3 + \dots, \\
P_3(s) &= \overline{a_0} + \overline{a_1}s + \underline{a_2}s^2 + \underline{a_3}s^3 + \dots, \\
P_4(s) &= \underline{a_0} + \overline{a_1}s + \overline{a_2}s^2 + \underline{a_3}s^3 + \dots,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Для определения устойчивости полиномов низкой степени, необязательно составлять все четыре полинома Харитонова, достаточно проверить лишь некоторые из них.

- Степень 5  $p^{--}(s)$ ,  $p^{-+}(s)$ ,  $p^{+-}(s)$ .
- Степень 4  $p^{+-}(s)$ ,  $p^{++}(s)$ .
- Степень 3  $p^{+-}(s)$ .

Чем проще метод анализа интервальных полиномов, тем, как правило, ниже точность метода. Это обусловлено «искусственным» увеличением области неопределенности, что необходимо для того, чтобы применение того или иного метода стало возможным. Например, если коэффициенты полинома являются функциями интервальных параметров, то для анализа такого полинома с помощью теоремы Харитонова, необходимо представить коэффициенты в виде интервалов.

Рассмотрим пример приведения полилинейной неопределенности полинома к интервальной:

$$\begin{aligned}
p(s, q) &= (0,5 - 3q_1q_2) + (6 + 6q_2 - 8q_2)s + (6 + 3q_1q_2 - 4q_2)s^2 + \\
&+ (5 + 0,2q_1q_2 + 0,1q_1 - 0,1q_2)s^3 + s^4,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

где  $|q_i| \leq 0,25$ .

Вычислим новые границы коэффициентов для (5.4)

$$\begin{aligned}
0,3125 &\leq 0,5 - 3q_1q_2 \leq 0,6875; \\
2,5 &\leq 6q_1 - 8q_2 \leq 9,5; \\
4,8125 &\leq 6 + 3q_1q_2 - 4q_2 \leq 7,1875; \\
4,9375 &\leq 5 + 0,2q_1q_2 + 0,1q_1 - 0,1q_2 \leq 5,0625.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

С учетом формул (5.4) и (5.5) построим переограниченный интервальный полином

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(s, \tilde{q}) &= [0,3125; 0,6875] + [2,5; 9,5]s + \\
&+ [4,8125; 7,1875]s^2 + [4,9475; 5,0375]s^3 + s^4.
\end{aligned}$$

К полиному такого вида уже возможно применение теоремы Харитонова.

Несмотря на блестящий и плодотворный результат, теорема имеет ограничение, она позволяет оценивать робастную устойчивость полиномов только с интервальными коэффициентами. Другой недостаток

состоит в наличии большого консерватизма в случае, если интервальные коэффициенты являются приведенными.

Рассмотрим неопределенный полином  $p(s, q) = 1 + a_1s + a_2s^2 + s^3$ , где  $a_1 = 3 - 2q_1 - 0,5q_2$ ,  $a_2 = 0,5 + q_1 + 1,5q_2$ ,  $q_i \in [0, 1]$ . Эквивалентный полином с интервальными коэффициентами примет вид:

$$\tilde{p}(s, \tilde{q}) = 1 + [0, 5; 3]s + [0, 5; 3]s^2 + s^3.$$

Так как это полином третьей степени достаточно проверить только один полином Харитонова  $p^{+-}(s) = 1 + 0,5s + 0,5s^2 + s^3$ .

Данный полином неустойчив, в этом случае нельзя сделать выводы, что любой  $p(s, q)$  неустойчив или же неустойчивость получена в результате переограничения, а исходный полином устойчив.

### 5.2.3. Реберная теорема

Позднее появился более совершенный аппарат анализа – реберная теорема, с ее понятиями вершинного и реберного полиномов.

Вершинам и ребрам бруса  $P$ , образованного интервальными коэффициентами (либо параметрами, но только для случая аффинной неопределенности) полинома (4.2) соответствуют вершинные и реберные полиномы. То есть реберный полином является ветвью корневого годографа и «соединяет» два «соседних» вершинных полинома (соответствующих соседним вершинам куба). Если  $l$  – число интервальных коэффициентов, то количество реберных полиномов будет равно  $l2^{l-1}$ .

Реберная теорема:

*Полином (В.2) устойчив в любой точке многогранника параметров, если он устойчив вдоль его ребер.*

Данная теорема позволяет эффективно оценивать робастную устойчивость, если число  $l$  неопределенных параметров мало. В этом случае следует проверить устойчивость всех реберных полиномов. Однако если  $l$  велико, то число таких проверок оказывается значительным (например, уже для  $l = 5$  нужно проверить  $l2^{l-1} = 80$  реберных полиномов), что потребует большого объема вычислений.

Следует заметить, что максимальную колебательность и минимальную степень устойчивости ИС, а значит и качество работы ИС с интервальной неопределенностью характеристического полинома определяют корни только вершинных полиномов. С другой стороны, для анализа относительной устойчивости ИС нет необходимости проверять устойчивость всех вершинных полиномов.

Поэтому возникает естественное желание знать существенные вершины, устойчивость которых гарантировала бы относительную устойчивость ИС. Для их определения предлагается использовать реберную

маршрутизацию и фазовые соотношения метода многопараметрического интервального корневого годографа.

### 5.3. Методы анализа интервальных систем на основе свойств корневого годографа

#### 5.3.1. Основные положения метода корневого годографа

Рассмотрим метод корневого годографа и метод многопараметрического интервального корневого годографа, применимые к системам с интервальными параметрами, а также способ построения границ областей локализации корней интервального полинома методом реберной маршрутизации, основанным на методе многопараметрического интервального корневого годографа.

*Корневым годографом* называется совокупность траекторий, описываемых корнями характеристического уравнения системы с обратной связью в плоскости корней при изменении одного из ее параметров.

Пусть замкнутая система имеет вид:

$$W_{cl}(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}.$$

Получим характеристическое уравнение:

$$W(s) = W_1(s)W_2(s) = -1, \quad (5.6)$$

где  $W(s)$  содержит множитель  $k$  – вещественное число. Так как  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$  являются функциями комплексной переменной  $s$ , то уравнение (5.6) распадается на два уравнения – уравнение модулей

$$|W(s)| = 1,$$

и уравнение фаз:

при  $k > 0$

$$\arg W(s) = \pm(2i + 1)\pi, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

При  $k > 0$

$$\arg W(s) = \pm 2i\pi, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Случай  $k > 0$  соответствует отрицательной обратной связи, случай  $k < 0$  – положительной обратной связи. Далее будем рассматривать только практически значимый случай  $k > 0$ .

Уравнение фаз (5.7) является уравнением корневых годографов, так как каждый корень  $s_k$  этого уравнения удовлетворяет также уравнению (5.6).

Пусть  $W(s)$  имеет вид:

$$W(s) = \frac{k(s - N_1)(s - N_2)\dots(s - N_m)}{(s - P_1)(s - P_2)\dots(s - P_n)}, \quad (5.8)$$

где  $N_1, N_2 \dots N_m$  – нули,  $P_1, P_2 \dots P_n$  – полюсы передаточной функции разомкнутой системы. Каждый из множителей,  $(s - P_i)$  или  $(s - N_i)$  выражения (4.8), изображается в плоскости  $s$  нулей и полюсов (рис. 5.2) вектором, направленным из точки  $P_i(N_j)$  в точку  $S$  (где  $S$  – произвольная точка в этой плоскости) под соответствующим углом  $\Theta_i$  ( $\Theta_j^0$ ) к вещественной оси.

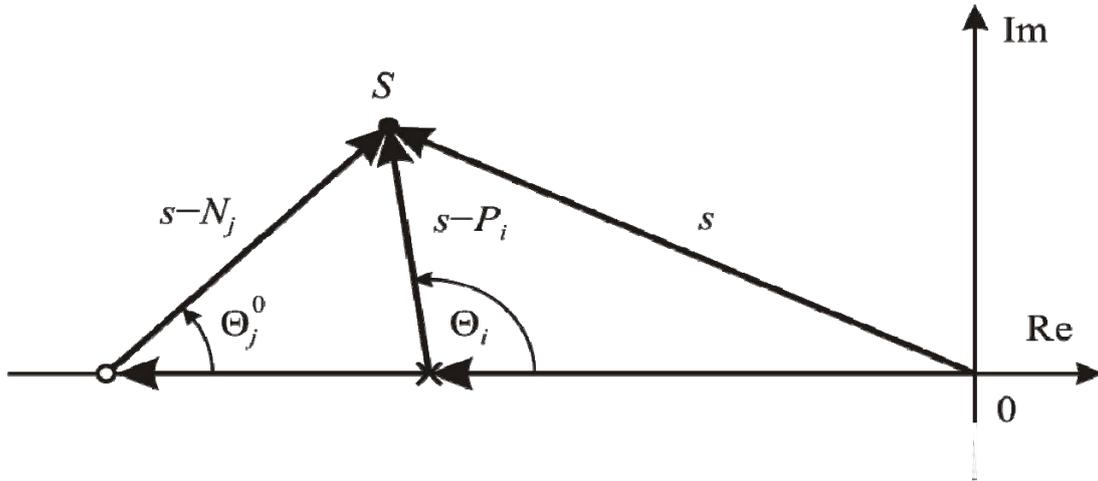


Рис. 5.2. Векторы нулей и полюсов системы на плоскости  $s$

Если же точка  $S$  является одним из корней  $s_k$ ,  $k = 1, 2 \dots n$ , характеристического уравнения (4.6) системы, то комплексное число удовлетворяет уравнению (4.7), которое можно записать в развернутой форме:

$$\sum_{j=1}^m \Theta_j^0 - \sum_{i=1}^n \Theta_i = \pm(2v + 1)\pi, \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

Выражение (4.9) является основным фазовым соотношением метода корневого годографа.

Пользуясь выражением (4.9) и зная расположение полюсов и нулей системы, можно определять направление движения полюсов системы при изменении коэффициента усиления системы.

### 5.3.2. Многопараметрический интервальный корневой годограф

Если одновременно изменяются несколько коэффициентов характеристического полинома, то возможно применение многопараметрического интервального корневого годографа.

Пусть полином имеет вид

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0, \quad (5.10)$$

где  $a_i \in [a_{i_{\min}}, a_{i_{\max}}]$  и образуют прямоугольный гиперпараллелепипед  $P$  с  $2^m$  вершинами ( $m \leq n+1$ ). Координаты любой точки  $P$  относительно вершины  $V_q$ ,  $q = \overline{1, 2^m}$ , определяются выражениями

$$a_i = a_i^q + \Delta a_i, \quad i \in \overline{0, n}, \quad (5.11)$$

где

$$(a_i^q - a_{i_{\min}}) \leq \Delta a_i \leq (a_{i_{\max}} - a_i^q), \quad (5.12)$$

$\Delta a_i$  – приращение  $i$ -го интервального коэффициента,  $a_i^q$  – его значение в вершине  $V_q$ .

Подставляя выражение (5.11) в (5.10) получим:

$$D^q(s) + \sum_i \Delta a_i s^i = 0, \quad i \in \overline{0, n}, \quad (5.13)$$

где  $D^q(s) = \sum_i a_i^q s^i + \sum_p a_p s^p$ ,  $p \in \overline{0, n}$ ,  $p \neq i$  – вершинный полином,  $a_p$  – постоянные коэффициенты полинома (5.10).

На основании (5.13) запишем уравнение отображения  $R_i^q$  на плоскость корней

$$D^q(s) + \Delta a_i s^i = 0. \quad (5.14)$$

Пусть (5.14) является характеристическим уравнением системы с единичной обратной связью. Тогда передаточная функция эквивалентной разомкнутой системы для ребра будет иметь вид

$$W_i^q(\Delta a_i, s) = \frac{\Delta a_i s^i}{D^q(s)}. \quad (5.15)$$

Анализируя (5.14) и (5.15) с позиции теории корневого годографа, заметим, что при изменении  $\Delta a_i$  в интервале (5.12) корни движутся от полюсов функции (5.15), соответствующих одному концу  $R_i^q$ , к корням (5.14) на другом конце  $R_i^q$ . При этом они образуют фрагментарные ветви корневого годографа. Назовем их реберными ветвями (обозначим  $RS_i^q$ ), а их начала и концы – корневыми узлами ( $U_q$ ). Тогда для  $\varphi: P \rightarrow S_m$  будут справедливы выражения:  $\varphi(R_i^q) = RS_i^q$ ,  $\varphi(V_q) = U_q$ . Следовательно, согласно реберной теореме области локализации корней (5.10), будут ограничены реберными ветвями  $RS_i^q$  однопараметрических интервальных корневых годографов. Такой вывод позволяет рассматривать  $S_m$  как некоторый многопараметрический интервальный корневой годограф.

### 5.3.3. Анализ устойчивости интервального полинома в произвольном секторе

Для определения граничных вершин  $P$  в произвольном секторе нас интересуют не значения углов выхода, а только взаимное расположение векторов выхода реберных ветвей по всем интервальным коэффициентам. Такой вывод можно сделать исходя из основных фазовых соотношений корневого годографа

$$\Theta_i^q = 180^\circ - \sum_{g=1}^n \Theta_g + i\Theta_0, \quad (5.16)$$

$$\Theta_i^q = -\sum_{g=1}^n \Theta_g + i\Theta_0. \quad (5.17)$$

Из (5.16), (5.17) видно, что составляющая  $\sum_{g=1}^n \Theta_g$  одинакова для всех углов выхода. Таким образом, для определения граничных вершин  $P$  в произвольном секторе следует построить единичные векторы в полярной системе координат под углами

$$\Theta_i^q = 180^\circ + i\Theta_0, \quad (5.18)$$

$$\Theta_i^q = i\Theta_0. \quad (5.19)$$

Для граничности узла  $U_q$ , необходимо, чтобы разность между максимальным и минимальным углами выхода ветвей многопараметрического интервального корневого годографа была меньше  $\pi$ . Это легко проверяется графическим способом на построенной круговой диаграмме, при заданном значении угла сектора  $\Theta_0$  и известном (верхнем или нижнем) пределе соответствующего интервального коэффициента. На рис. 5.3 показан пример возможного расположения углов выхода реберных ветвей по четырем интервальным коэффициентам ИХП. Символом  $\bar{a}_i$  обозначен верхний предел коэффициента  $a_i$ , символом  $\underline{a}_i$  – его нижний предел. Заметим, что изменение предела любого коэффициента позволяет повернуть соответствующий угол на 180 градусов. Задавая минимальный (максимальный) угол, таким образом можно сформировать пределы коэффициентов, которые обеспечат граничность соответствующего корневого узла. Изменяя минимальный (максимальный) угол, легко получить набор из  $2m$  возможных граничных вершин при заданном значении  $\Theta_0$ .

Таким образом, если для каждого из  $m$  коэффициентов ИХП на круговой диаграмме построить два противоположных вектора, то любые  $m$  последовательно расположенные лучи будут лежать в угле, меньшем  $\pi$ , и, следовательно, определять координаты граничной вершины  $P$ .

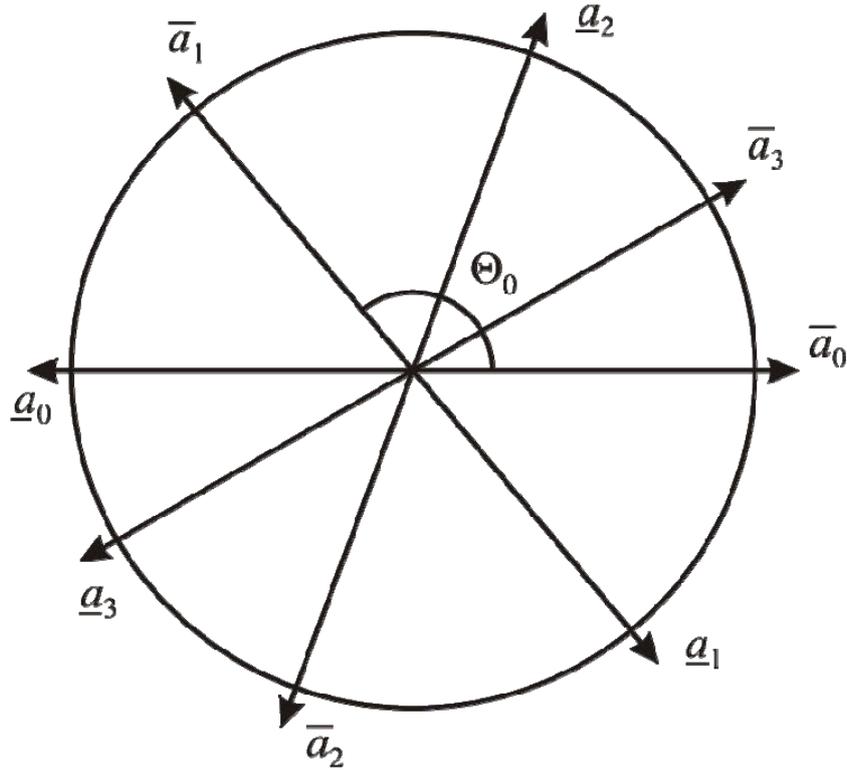


Рис. 5.3. Взаимное расположение углов выхода реберных ветвей

Исходя из проведенного анализа разработано следующее правило формирования набора граничных вершин  $P$ :

1. Задать значение угла  $\Theta_0$ .
2. На круговой диаграмме построить лучи, выходящие из начала координат под углами  $\Theta_{i+} = \Theta_0 \cdot i$ ;  $\Theta_{i-} = \pi + \Theta_0 \cdot i$ , где  $\Theta_{i+}$  и  $\Theta_{i-}$  соответственно углы при максимальном и минимальном значениях  $i$ -го коэффициента ИХП.
3. Начиная с любого луча, определить  $m$  лучей, следующих последовательно один за другим при движении в положительном направлении (против часовой стрелки). Соответствующие этим лучам пределы коэффициентов ИХП определяют координаты одной из граничных вершин.
4. Последовательно изменяя начальные лучи, повторять процедуру п. 3 и в результате получить координаты  $2m$  граничных вершин для сектора с заданным  $\Theta_0$ .

**Пример.** Рассмотрим полином:

$$D(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0,$$

где  $a_3 = 1$ ,  $a_2 = [6; 8]$ ,  $a_1 = [14; 18]$ ,  $a_0 = [8, 5; 11, 5]$ .

Требуется определить, лежат ли корни данного полинома в секторе  $\Gamma$  с углом  $180 \pm 45$  градусов. Согласно разработанному правилу сформируем набор граничных полиномов для этого сектора:

$$\overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0};$$

Отобразим корни найденных полиномов на комплексную плоскость (рис. 5.4). Из рисунка видно, что не все корни найденных вершинных полиномов лежат в заданном секторе, соответственно, не все корни заданного ИХП лежат в заданном секторе.

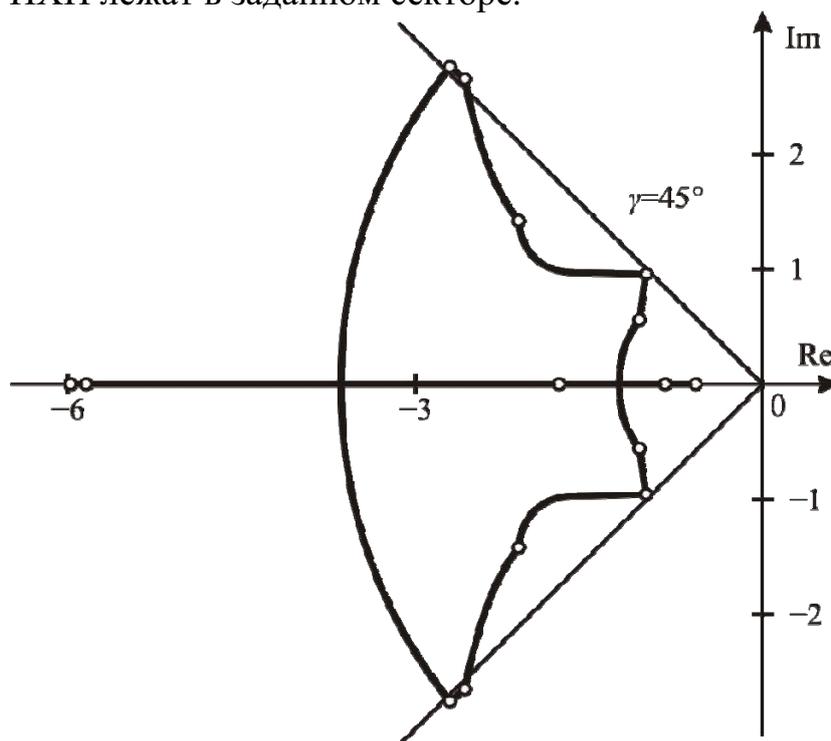


Рис. 5.4. Границы области локализации комплексных корней;  
 ◦ – корни сформированных вершинных полиномов

Для подтверждения сделанного вывода на рис. 5.4 также приведены образы реберного маршрута  $P$ , определяющие границы областей локализации корней ИХП.

## 5.4. Синтез робастных систем

Более сложной задачей, решаемой при работе с ИС, является задача синтеза. Под синтезом ИС будем понимать определение настроек линейного регулятора заданной структуры, гарантирующего желаемое робастное качество.

По различным данным в настоящее время около 90 % регуляторов, используемых в промышленности – ПИД-регуляторы. Но при стационарных подходах к их настройке нельзя гарантировать требуемое качество работы системы во всех возможных режимах ее функционирования. Для устранения данного недостатка необходимо использование робастных алгоритмов настройки регуляторов. Это позволяет, не изменяя аппаратной части САУ, гарантировать требуемое качество работы системы.

Существующие методы настройки робастных регуляторов имеют ряд недостатков:

1. Они основаны на оптимизации по различным критериям, соответственно, требуют больших вычислительных затрат.
2. Большинство методов не всегда позволяют строить регуляторы низких порядков, поэтому получаемые регуляторы высокого порядка приходится аппроксимировать регуляторами низкого порядка, соответственно, не всегда можно гарантировать требуемый результат.
3. Возникает проблема отсутствия робастности получаемой системы к отклонениям параметров регулятора.
4. Некоторые методы позволяют проводить синтез ИС не более чем по двум параметрам.

Более того, задача построения робастных регуляторов заданной структуры (в частности ПИД-регуляторов) не имеет универсального решения.

Многие из предлагаемых методов синтеза робастных ИС основаны на результатах Харитонова. Так, например, полиномы Харитонова используются при определении параметров линейного регулятора на основе робастного  $D$ -разбиения. Данный метод позволяет выбрать две настройки регулятора из параметрической области устойчивости, что обеспечивает попадание корней ИХП в заданную односвязную область комплексной плоскости.

Для простых видов неопределенности характеристических полиномов существуют достаточно простые и эффективные методы, которые не пригодны для синтеза интервальных систем с полилинейной и полиномиальной неопределенностью. Реальные системы, как правило, имеют неопределенности характеристических полиномов именно такого вида. Существующие методы, которые позволяют работать с полиномами, имеющими такую структуру неопределенности, требуют большого числа вычислений. Таким образом, очевидна необходимость разработки подхода к синтезу интервальных систем с полилинейной и полиномиальной неопределенностью.

#### 5.4.1. Доминантное расположение полюсов стационарной системы

Задача размещения полюсов стационарной системы требуемым образом рассматривается в многих работах. Будем рассматривать метод, предложенный в работе /12/, который позволяет не только размещать доминирующие полюса стационарной системы, но и локализовать остальные (свободные) полюса в заданной области комплексной плоскости. Это будет необходимо для гарантированного размещения областей локализации доминирующих полюсов ИС. Рассмотрим данный метод доминантного расположения полюсов стационарной системы подробнее.

Пусть характеристическое уравнение линейной непрерывной системы управления приведено к виду

$$\sum_{i=1}^r k_i A_i(p) + B(p) = 0, \quad (5.20)$$

где  $k_i, j = 1, 2 \dots r$  – параметры, значения которых необходимо выбрать так, чтобы обеспечить требуемое качество управления,  $A_i(p), j = 1, 2 \dots r, B(p)$  – полиномы.

Для того чтобы  $l$  доминирующих полюсов системы приняли предписанные значения, необходимо не менее  $l$  изменяемых параметров. Если  $r > l$ , то можно не только обеспечить заданное положение доминирующих полюсов, но и задать дополнительные условия на размещение остальных (свободных) полюсов. В частности, можно потребовать, чтобы эти полюса располагались в заданной области левой полуплоскости, в соответствии с условием доминирования. На рис. 5.5 представлены некоторые возможные варианты задания областей расположения свободных полюсов.

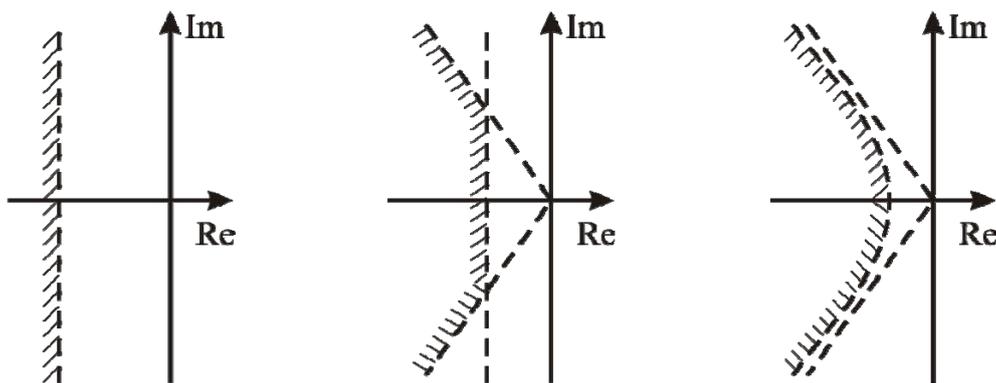


Рис. 5.5. Некоторые возможные варианты задания областей расположения свободных полюсов

Граница области описывается выражением:

$$X(j\omega) = -\delta(\omega) + j\omega, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (5.21)$$

Поэтому полагаем, что число  $r$  варьируемых параметров в (5.20) превышает число  $l$  заданных доминирующих полюсов. Варьируемые параметры  $k_1, k_2 \dots k_r$  разобьем на две группы. В первую включим параметры, которые назовем свободными. С их помощью будем обеспечивать размещение свободных полюсов в желаемой области, используя метод  $D$ -разбиения. Так как названный метод наиболее эффективен для выбора одного или двух параметров, то число  $c$  свободных параметров предлагается задавать не более двух. При помощи метода  $D$ -разбиения граница желаемой области свободных полюсов, описываемая выражением (5.21), отображается в пространство свободных параметров и на ее основе формируется параметрическая область, внутри которой выбираются значения свободных параметров.

Ко второй группе варьируемых параметров отнесем  $l$  параметров и назовем их зависимыми, поскольку их значения будут рассчитываться после выбора свободных параметров из условия, чтобы  $l$  доминирующих полюсов системы приняли предписанные значения. Таким образом, вектор  $\bar{g} = (k_1 \dots k_r)^T$  варьируемых параметров оказывается разбитым на два вектора: вектор  $\bar{g}_1 = (k_1 \dots k_c)^T$  свободных параметров размерностью  $c$  и вектор  $\bar{g}_2 = (k_{c+1} \dots k_r)^T$  зависимых параметров размерностью  $l = r - c$ .

С учетом сказанного характеристическое уравнение (5.20) системы преобразуем к виду

$$\sum_{i=1}^c k_i \cdot A_i(p) + \sum_{i=c+1}^r k_i \cdot A_i(p) + B(p) = 0. \quad (5.22)$$

Задачу доминантного расположения полюсов стационарной системы можно сформулировать следующим образом. Задано характеристическое уравнение системы вида (5.20), имеющее степень  $n$ . Необходимо найти значения  $c$  свободных и  $l$  зависимых варьируемых параметров, при которых  $l$  заданных доминирующих полюсов системы принимают предписанные значения  $\lambda_i, i = 1 \dots l$ , а остальные  $n - l$  свободных полюсов лежат слева от заданной на комплексной плоскости границы (5.21).

Для случая  $c = r - l = 1$  характеристическое уравнение (5.22) запишем в виде

$$k_1 \cdot A_1(p) + \sum_{i=2}^r k_i \cdot A_i(p) + B(p) = 0, \quad (5.23)$$

где  $k_1$  – свободный варьируемый параметр,  $k_2 \dots k_r$  – зависимые параметры. Подстановка  $p = \lambda_j, j = 1, \dots, l$  в (4.20) дает  $l$  уравнений

$$k_1 \cdot A_1(\lambda_j) + \sum_{i=2}^r k_i \cdot A_i(\lambda_j) + B(\lambda_j) = 0, \quad j = 1 \dots l. \quad (5.24)$$

Эти уравнения связывают варьируемые параметры  $k_i, i = 1 \dots r$  с задаваемыми доминирующими полюсами  $\lambda_j, j = 1 \dots l$ .

Представим систему уравнений (5.24) в матричной форме

$$Q_{11}(\lambda) \cdot k_1 + Q_{12}(\lambda) \cdot \bar{g}_2 = R_1(\lambda), \quad (5.25)$$

где

$$Q_{11}(\lambda) = \begin{bmatrix} A_1(\lambda_1) \\ \dots \\ A_l(\lambda_l) \end{bmatrix}; \quad Q_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} A_2(\lambda_1) & \dots & A_r(\lambda_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ A_2(\lambda_l) & \dots & A_r(\lambda_l) \end{bmatrix};$$

$$g_2 = \begin{bmatrix} k_2 \\ \dots \\ k_r \end{bmatrix}; \quad R_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -B(\lambda_1) \\ \dots \\ -B(\lambda_l) \end{bmatrix}.$$

Для размещения свободных полюсов системы левее линии, заданной формулой (5.21), в случае одного свободного параметра  $k_1$  воспользуемся известным методом  $D$ -разбиения на плоскости одного параметра. С этой целью в (5.23) сделаем подстановку  $p = -\delta(\omega) + j\omega$ . В результате получим

$$Q_{21}(\omega) \cdot k_1 + Q_{22}(\omega) g_2 = R_2(\omega). \quad (5.26)$$

В матричной форме (4.26) имеет вид

$$Q_{21}(\omega) \cdot k_1 + Q_{22}(\omega) g_2 = R_2(\omega), \quad (5.27)$$

где

$$Q_{21}(\omega) = A_1(-\delta(\omega) + j\omega);$$

$$Q_{22}(\omega) = [A_2(-\delta(\omega) + j\omega) \quad \dots \quad A_r(-\delta(\omega) + j\omega)];$$

$$R_2(\omega) = -B(-\delta(\omega) + j\omega).$$

Для определения уравнения границы  $D$ -разбиения объединим (5.25) и (5.27) в одну систему уравнений

$$\begin{cases} Q_{11}(\lambda) \cdot k_1 + Q_{12}(\lambda) \cdot g_2 = R_1(\lambda), \\ Q_{21}(\omega) \cdot k_1 + Q_{22}(\omega) \cdot g_2 = R_2(\omega). \end{cases} \quad (5.28)$$

Из первого уравнения системы (4.28) имеем

$$g_2 = Q_{12}^{-1}(\lambda) \cdot R_1(\lambda) - Q_{12}^{-1}(\lambda) \cdot Q_{11}(\lambda) \cdot k_1. \quad (5.29)$$

После подстановки полученного выражения (5.29) для вектора  $g_2$  зависимых варьируемых параметров во второе уравнение системы (5.28), получим искомое уравнение границы  $D$ -разбиения

$$k_1(\omega) = \frac{R_2(\omega) - Q_{22}(\omega) \cdot Q_{12}^{-1}(\lambda) \cdot R_1(\lambda)}{Q_{21}(\omega) - Q_{22}(\omega) \cdot Q_{12}^{-1}(\lambda) \cdot Q_{11}(\lambda)} = \alpha(\omega) + j\beta(\omega). \quad (5.30)$$

Далее задавая значениями  $\omega$  в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ , строим границу  $D$ -разбиения на комплексной плоскости. Она разделяет плоскость параметра  $k_1$  на ряд областей, среди которых необходимо выделить (если она имеется) область, которой соответствует требуемое расположение свободных полюсов системы. Для выделения указанной области используются стандартные правила штриховки границы  $D$ -разбиения. Значения  $k_1$ , гарантирующие требуемое размещение полюсов системы, располагаются на отрезке действительной оси внутри найденной области.

Следует заметить, что по величине найденного отрезка действительной оси, можно оценить в каких пределах может изменяться данный параметр, чтобы свободные полюса найденной стационарной системы располагались в заданной области, при требуемом расположении доминирующих полюсов.

После выбора значения  $k_1$  из найденной области при помощи выражения (5.29) рассчитываются значения зависимых варьируемых параметров  $k_2 \dots k_r$ , являющихся составляющими вектора  $g_2$ .

#### **5.4.2. Размещение областей локализации доминирующих полюсов интервальной системы с обеспечением требуемой максимальной колебательности**

Существующие методы размещения областей локализации полюсов ИС основаны на численном поиске настроек регулятора при условии обеспечения степени устойчивости и колебательности ИС либо на получении полинома с желаемым расположением корней.

Пусть характеристический полином ИС представлен в виде:

$$R(p) = \sum_{i=0}^n a_i(\bar{k})p^i, \quad (5.31)$$

$$a_{i_{\min}}(\bar{k}) \leq a_i(\bar{k}) \leq a_{i_{\max}}(\bar{k}), \quad (5.32)$$

где  $\bar{k}$  – вектор настраиваемых параметров регулятора, линейно входящих в коэффициенты полинома (5.31),  $a_i(\bar{k})$  – интервальные коэффициенты полинома (5.31).

Ставится задача найти такие значения параметров  $k_i$ ,  $i = 1, 2 \dots r$ , чтобы при возможных вариациях интервальных коэффициентов полинома (5.31) в диапазонах (5.32), области доминирующих полюсов располагались в заданном секторе, а свободные полюсы были локализованы в заданной области (рис. 5.6).

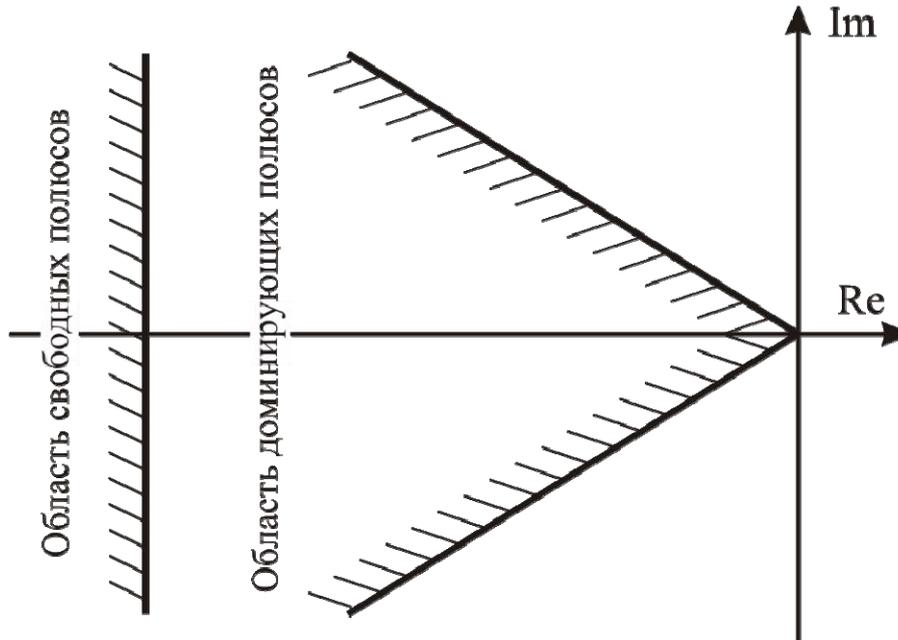


Рис. 5.6. Заданные области расположения полюсов

Так как в выражение (5.31) входят интервальные коэффициенты, то оно соответствует семейству полиномов. По корням каждого из этих полиномов можно определить колебательность соответствующей стационарной системы. Наибольшая колебательность будет определять максимальную колебательность ИС. Для ее нахождения желательно не рассматривать все семейство полиномов, а выделить из них только один, который будет определять максимальную колебательность. При этом этот полином должен быть вершинным, т. е. задаваться набором предельных значений интервальных коэффициентов. Обозначим вершинный полином через  $R^v(p)$ , где  $v$  – номер вершины многогранника.

Для решения поставленной задачи предлагается разделить ее на две:

- Выделение из заданного семейства граничных полиномов  $R^v(p)$  одного полинома  $R_b^v(p)$ , который будет гарантированно определять максимальную колебательность ИС.
- Определение настроек регулятора для размещения корней найденного полинома желаемым образом в соответствии с принципом доминирования.

Пусть у полинома (5.31)  $m = n - 2$  корней  $p_g$ ,  $g = \overline{1, m}$ , лежат левее доминирующего корня  $p_0$ . Обозначим через  $\Theta_g$  угол между вещественной осью и вектором, направленным к полюсу  $p_0$  от полюса  $p_g$ .

Для  $m = 2$  расположение полюсов и соответствующие углы показаны на рис. 5.7.

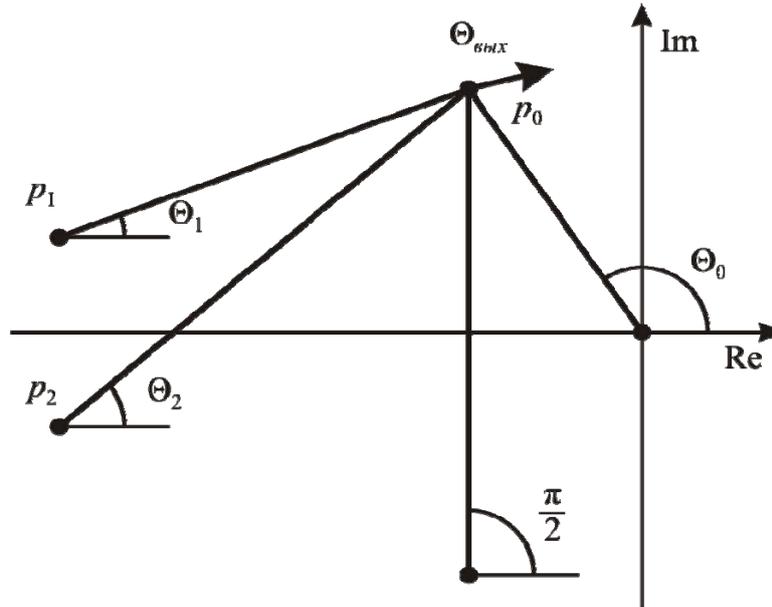


Рис. 5.7. Расположение полюсов и нулей

Для нахождения вершинного полинома  $R_b^v(p)$ , корни которого определяют максимальную колебательность ИС, будем рассматривать углы выхода ветвей корневого годографа. Уравнение фаз, из которого они могут быть получены, имеет вид:

$$i\Theta_0 - \sum_{j=1}^n \Theta_j = \pm(2\nu + 1)\pi, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.33)$$

где  $\Theta_j$  и  $\Theta_0$  – углы между вещественной осью и векторами, направленными к некоторому корню от  $j$ -го полюса и от  $i$ -ых нулей с координатами  $(0; j0)$ , соответственно. Представим в (5.33)  $\sum_{j=1}^n \Theta_j$  как  $\left( \sum_{g=1}^m \Theta_g + \frac{\pi}{2} \right)$ .

Тогда уравнение (5.33) примет вид:

$$\Theta_i^q = \pi - \left( \sum_{g=1}^m \Theta_g + \frac{\pi}{2} \right) + i\Theta_0, \quad (5.34)$$

при увеличении интервального коэффициента  $a_i$

$$\Theta_i^q = - \left( \sum_{g=1}^m \Theta_g + \frac{\pi}{2} \right) + i\Theta_0, \quad (5.35)$$

при уменьшении интервального коэффициента  $a_i$ , где  $\Theta_i^q$  – угол выхода ветви корневого годографа из вершины  $q$ , при изменении  $i$ -го коэффициента. Заметим, что в уравнениях фаз (5.34), (5.35) величина  $\frac{\pi}{2}$  добавлена в связи с необходимостью учета корня, комплексно-сопряженного  $p_0$ .

Пусть допустимая колебательность  $\mu$  определяется неравенством:  $\mu \leq \operatorname{tg}(\pi - \Theta_0)$ . Для того чтобы корень полинома (5.31) определял максимальную колебательность ИС необходимо, чтобы векторы, задающие углы выхода данного корня из вершины  $q$  по всем  $a_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , были направлены внутрь сектора  $\Gamma = \pm\Theta_0$ . Это требование соответствует выполнению условия:  $\Theta_0 < \Theta_i^q < \Theta_0 + \pi$ . Используя (5.34), (5.35), представим данное неравенство в виде

$$\Theta_0 < i\Theta_0 - \left( \sum_{g=1}^m \Theta_g + \frac{\pi}{2} \right) + \Omega < \Theta_0 + \pi, \quad (5.36)$$

где  $\Omega = 0$  или  $\Omega = \pi$  в зависимости от того, увеличивается или уменьшается интервальный параметр. Из уравнения (5.36) видно, что при заданном  $\Theta_0$ , на величину угла выхода по  $i$ -му коэффициенту будет влиять только составляющая  $\sum_{g=1}^m \Theta_g$ .

Пусть для вершины  $q$  угол выхода  $\Theta_i^q$  по каждому  $i$ -му коэффициенту задает границу сектора  $\Gamma$ , т. е.  $\Theta_i^q = \Theta_0$ . В этом случае каждому  $\Theta_i^q$  будет соответствовать некоторое значение  $\sum_{g=1}^m \Theta_g$ , зависящее от расположения свободных полюсов. Обозначим  $\sum_{g=1}^m \Theta_g$  для  $i$ -го коэффициента через  $C_i$ .

Из условия (5.36) следует, что  $\Theta_i^q = \Theta_0$  при  $\max C_i$ . Тогда из (5.34), (5.35) получим

$$\Theta_0 = i\Theta_0 - \left( \max C_i + \frac{\pi}{2} \right) + \Omega,$$

откуда

$$\max C_i = \Theta_0(i-1) - \frac{\pi}{2} + \Omega. \quad (5.37)$$

Рассмотрим зависимость значения  $\sum_{g=1}^m \Theta_g$  от расположения свободных полюсов на корневой плоскости. Пусть  $p_{1,2} = -\alpha_1 \pm j\beta_1$ ,  $p_0 = -\alpha_2 + j\beta_2$ , (рис. 5.8). Тогда  $\operatorname{ctg}(\Theta_1) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_2 - \beta_1}$ ,  $\operatorname{ctg}(\Theta_2) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_2 + \beta_1}$ . Используя соотношения тригонометрических функций котангенса, получим:

$$\operatorname{ctg}(\Theta_1 + \Theta_2) = \left( \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\beta_2^2 - \beta_1^2)}{2\beta_2(\alpha_1 - \alpha_2)} \right).$$

Тогда

$$\sum_{g=1}^m \Theta_g = \operatorname{arccctg} \left( \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\beta_2^2 - \beta_1^2)}{2\beta_2(\alpha_1 - \alpha_2)} \right). \quad (5.38)$$

На основании (5.38) на плоскости корней построена диаграмма линий равных значений  $\sum_{g=1}^m \Theta_g$  (рис. 5.8).

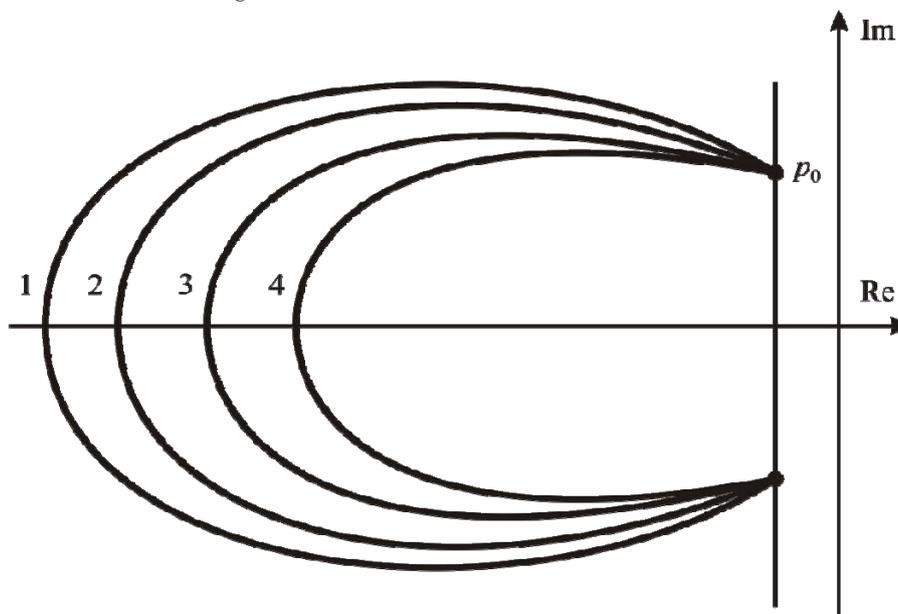


Рис. 5.8. Линии равных значений  $\sum_{g=1}^m \Theta_g$   $\left( \sum_{g=1}^m \Theta_g^1 < \sum_{g=1}^m \Theta_g^2 < \sum_{g=1}^m \Theta_g^3 < \sum_{g=1}^m \Theta_g^4 \right)$

В табл. 5.1 представлены зависимости наборов пределов коэффициентов ИХП и соответствующие им  $\sum_{g=1}^m \Theta_g$  для некоторых  $\Theta_0$ .

Таблица 5.1

Зависимость набора коэффициентов полинома (4.31) и соответствующие им  $\sum_{g=1}^m \Theta_g$  для некоторых  $\Theta_0$  для полинома 3-й степени ( $m = 1$ )

$\Theta_0 = \frac{1}{2}\pi$		$\Theta_0 = \frac{2}{3}\pi$		$\Theta_0 = \frac{3}{4}\pi$	
$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [0; \frac{\pi}{2}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3}$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [0; \frac{\pi}{6}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3}$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [0; \frac{\pi}{4}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3}$
—	—	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3}$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3}$

Из рис. 5.8 видно, что для каждой кривой при фиксированном значении  $\sum_{g=1}^m \Theta_g$  корни лежат на вещественной оси при  $\beta_1 = 0$  и максимальном значении  $\alpha_1$ . Введем в рассмотрение прямую  $d$ , параллельную мнимой оси и проходящую через точку, соответствующую кратным корням с координатами  $(\max \alpha_1, j0)$ , (рис. 5.9).

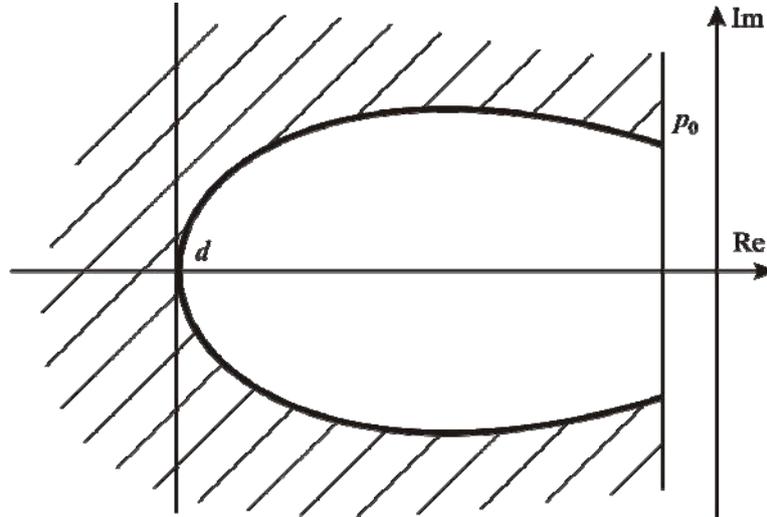


Рис. 5.9. Область расположения свободных полюсов

Тогда  $\sum_{g=1}^2 \Theta_g = 2 \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{\beta_2}{d - \alpha_2} \right)$ . Выражая  $d$ , получим:

$$d = \frac{\beta_2}{\operatorname{tg} \left( \frac{\sum_{g=1}^2 \Theta_g}{2} \right)} + \alpha_2.$$

Очевидно, что для свободных корней, располагающихся левее прямой  $d$ , значения  $\sum_{g=1}^m \Theta_g$ , будут меньше значения  $\sum_{g=1}^m \Theta_g$ , соответствующего данной прямой  $d$ .

Если количество свободных полюсов равно  $m$ , то уравнение прямой  $d$  примет вид:

$$d = \frac{\beta_2}{\operatorname{tg} \left( \frac{\sum_{g=1}^m \Theta_g}{m} \right)} + \alpha_2.$$

Для того чтобы обеспечить максимальное удаление свободных полюсов от доминирующих, необходимо рассматривать такие наборы коэффициентов полинома, при которых  $\min_{g=1}^m \Theta_g = 0$  (это значение соот-

ветствует бесконечному удалению свободных полюсов). Область на плоскости корней, соответствующую интервалу значений  $\sum_{g=1}^m \Theta_g$  с границей  $\min \sum_{g=1}^m \Theta_g = 0$  обозначим  $S_0$ . Левее прямой  $d_0$  располагается только данная область. Прямая  $d_0$  определяется по формуле:

$$d_0 = \frac{\beta_2}{\operatorname{tg} \left( \max \sum_{g=1}^m \Theta_g / m \right)} + \alpha_2,$$

где  $\max \sum_{g=1}^m \Theta_g$  является максимальным значением интервала  $\sum_{g=1}^m \Theta_g$ , соответствующего этой области. Для того чтобы свободные полюсы располагались в  $S_0$  необходимо, чтобы  $\min C_i = 0$ . Из (5.37) видно, что  $\max C_i$  может отличаться от  $\min C_i$  не больше, чем на  $\Omega = \pi$ , тогда  $\max C_i \in [0; \pi]$ . На основании этого получим **фазовые условия 1 формирования полинома  $R_b^v(p)$** :

$$\text{Если } \Theta_0(i-1) \in \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right], \text{ то } \max C_i = \Theta_0(i-1) - \frac{\pi}{2} \text{ при } \Omega = 0. \Omega = 0$$

соответствует значению коэффициента  $a_i = a_{i_{\max}} = \overline{a_i}$ .

$$\text{Если } \Theta_0(i-1) \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], \text{ то } \max C_i = \Theta_0(i-1) + \frac{\pi}{2} \text{ при } \Omega = \pi.$$

$\Omega = \pi$  соответствует значению коэффициента  $a_i = a_{i_{\min}} = \underline{a_i}$ .

Таким образом, для определения искомого набора коэффициентов полинома  $R_b^v(p)$  и нахождения прямой  $d_0$ , задающей область  $S_0$ , требуется определить значения  $\Omega$  и наименьшее значение  $\max C_i$  для каждого  $i = \overline{0, n}$ .

Далее, размещая полюса найденной стационарной системы в соответствии с /12/ найдем настройки регулятора.

**Пример.** Рассмотрим пример поиска настроек регулятора для размещения доминирующих полюсов в заданном секторе.

Пусть для объекта с передаточной функцией:

$$W_0(p) = \frac{1}{p^3 + a_3 p^2 + b_2 p + b_1}, \quad (5.39)$$

необходимо выбрать параметры регулятора:

$$W_p(p) = \frac{k_3 p^2 + k_2 p + k_1}{p}. \quad (5.40)$$

На основании (5.39), (5.40) получим характеристическое уравнение системы

$$p^4 + a_3 p^3 + (b_2 + k_3) p^2 + (b_1 + k_2) p + k_1 = 0,$$

где  $a_2 = b_2 + k_3$ ,  $a_1 = b_1 + k_2$ ,  $a_0 = k_1$ ,  $a_3 = [17; 20]$ ,  $b_2 = [192; 200]$ ,  $b_1 = 1024$ .

Требуется обеспечить расположение областей локализации двух доминирующих полюсов в секторе  $\Theta_0 = \pm \frac{3}{4} \pi$ , а свободные полюсы расположить в соответствии с принципом доминирования.

Пусть корни вершинных полиномов, определяющие максимальную колебательность ИС, располагаются в точках:  $\lambda_1 = -1 + j1$  и  $\lambda_2 = -1 - j1$ . Из условий формирования полинома  $R_b^v(p)$  определим пределы коэффициентов полинома, соответствующих сектору  $\Theta_0 = \pm \frac{3}{4} \pi$ .

При  $i = 0$ ,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{3}{4} \pi(-1) = -\frac{3}{4} \pi = \frac{5}{4} \pi \in \left( \frac{1}{2} \pi; \frac{3}{2} \pi \right],$$

$$\max C_0 = \frac{3}{4} \pi(0-1) - \frac{1}{2} \pi = \frac{3}{4} \pi, \quad a_0 = \overline{a_0}.$$

При  $i = 1$ ,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{3}{4} \pi(1-1) = 0 \in \left( -\frac{1}{2} \pi; \frac{1}{2} \pi \right],$$

$$\max C_1 = \frac{3}{4} \pi(1-1) + \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} \pi, \quad a_0 = \underline{a_0}.$$

При  $i = 2$ ,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{3}{4} \pi(2-1) = \frac{3}{4} \pi \in \left( \frac{1}{2} \pi; \frac{3}{2} \pi \right],$$

$$\max C_2 = \frac{3}{4} \pi(2-1) - \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{4} \pi, \quad a_0 = \overline{a_0}.$$

При  $i = 3$ ,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{3}{4} \pi(3-1) = \frac{3}{2} \pi \in \left( \frac{1}{2} \pi; \frac{3}{2} \pi \right],$$

$$\max C_3 = \frac{3}{4} \pi(3-1) - \frac{1}{2} \pi = \pi, \quad a_0 = \overline{a_0}.$$

При  $i = 4$ ,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{3}{4} \pi(4-1) = \frac{9}{4} \pi = 2 \frac{1}{4} \pi \in \left( -\frac{1}{2} \pi; \frac{1}{2} \pi \right],$$

$$\max C_4 = \frac{3}{4}\pi(4-1) + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi, \quad a_0 = \underline{a}_0.$$

Наименьшее значение  $\max C_i = \max C_2 = \frac{1}{4}\pi$ .

Таким образом получим полином с пределами:  $\overline{a}_0 \overline{a}_1 \overline{a}_2 \overline{a}_3 \overline{a}_4$ , где  $\underline{a}_4 = 1$ ,  $\overline{a}_3 = 20$ ,  $\overline{a}_2 = 200 + k_3$ ,  $\underline{a}_1 = 1024 + k_2$ . Найдем прямую  $d_0$ .

$$d_0 = \frac{\beta_2}{\operatorname{tg}(\max C_i/m)} + \alpha_2 = \frac{1}{\operatorname{tg}(0,25\pi/2)} + 1 = 3,4.$$

Для того чтобы колебательность области локализации доминирующих полюсов определял только один набор коэффициентов, требуется, чтобы область расположения свободных полюсов лежала левее  $d_0$ . С учетом принципа доминирования зададим границу свободных полюсов  $X(j\beta) = -7$ ,  $-\infty < \beta < \infty$ .

Варьируемые параметры регулятора разделены на свободный  $k_1$  и зависимые  $k_2$  и  $k_3$ . После формирования необходимых матриц и векторов проведено  $D$ -разбиение по  $k_1$  (рис. 5.10).

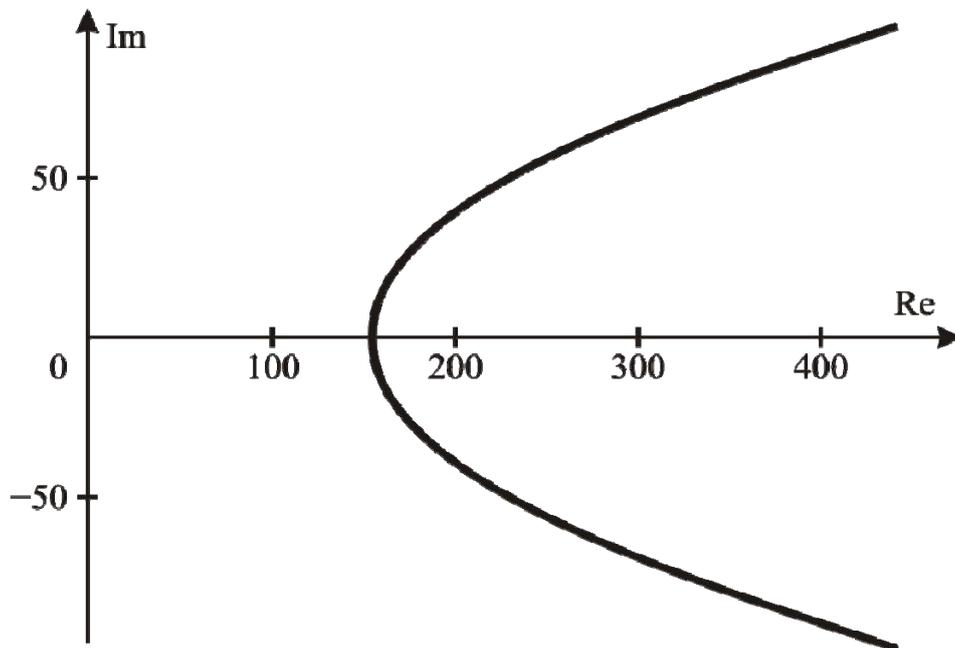


Рис. 5.10.  $D$ -разбиение по  $k_1$

Для выбранного  $k_1 = 190$  получены значения зависимых параметров  $k_2 = -798$  и  $k_3 = -67$ . На рис. 5.11, рис. 5.12 представлены области локализации полюсов ИС, соответствующие найденным настройкам регулятора.



Рис. 5.11. Области локализации доминирующего и свободного полюса

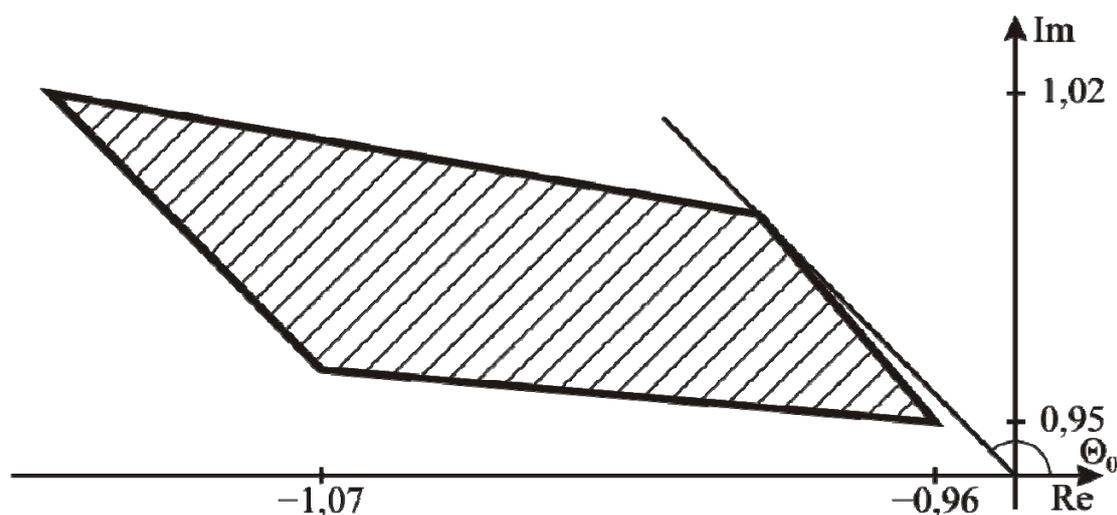


Рис. 5.12. Область локализации доминирующего полюса

Расположение полученных областей локализации полюсов ИС при найденных значениях варьируемых параметров регулятора удовлетворяют заданным требованиям.

#### 5.4.3. Регулятор с функцией робастной самонастройки системы автоматического управления на заданное перерегулирование

Для построения робастных регуляторов может быть использован вещественный интерполяционный метод.

В данном случае задача является общей для задач синтеза САУ и состоит в нахождении коэффициентов регулятора  $b_0, b_1 \dots b_m, a_1, a_2 \dots a_n$ , таких, чтобы желаемая и синтезированная системы были бы близки между собой в соответствии с каком-либо критерием. В качестве такого критерия примем отклонение перерегулирования  $\sigma$  синтезированной системы от заданного значения  $\sigma_d$ :

$$\Delta\sigma = |\sigma - \sigma_d| < \Delta\sigma_d. \quad (5.41)$$

Наконец, поставим еще одно условие в отношении искомого решения – система должна быть робастной. По-прежнему будем считать приоритетным параметром синтезируемой системы перерегулирование. Количественной мерой успешности решения является (5.41). При этом важно не только добиться выполнения неравенства (5.41), но и сохранения его при возможных изменениях каких-либо параметров элементов системы. Для простоты будем рассматривать случай, когда система имеет только один элемент с одним изменяющимся параметром  $P$ . Его значение может отклоняться от номинального  $P_n$  на величину  $\pm\Delta P$ , принимая любое значение

$$P = P_n \pm \Delta P. \quad (5.42)$$

Таким образом, задача состоит в определении коэффициентов регулятора при выполнении условий (5.41) и (5.42).

Будем считать, что в рамках синтеза САУ решены локальные задачи: по желаемым параметрам системы – перерегулированию  $\sigma_d$  и времени установления  $t_t$  – найдена желаемая передаточная функция эталонной системы в замкнутом состоянии  $W_d(p)$ , передаточная функция этой системы в разомкнутом состоянии  $W_d^o(p)$ , найдена модель объекта управления  $W_p(p)$  и коэффициент обратной связи  $k_f$ . Теперь задача сводится к ключевому этапу – решению уравнения синтеза с учетом условий (5.41), (5.42).

Предлагаемый подход к синтезу регуляторов базируется на механизме, который является характерным для ВИМ. Он дает возможность изменять свойства регулятора и системы, приближая или удаляя САУ от границы устойчивости. Естественно, что такие смещения должны отражаться на величине перерегулирования: она должна соответственно увеличиваться или уменьшаться. В условиях равномерной сетки  $\delta_i = i\delta_1$ ,  $i = 1, 2, \dots, \eta$ , инструментальной переменной может выступать первый узел  $\delta_1$ , второй  $\delta_\eta$  или шаг  $\Delta\delta$ . Таким образом, речь идет о том, что имеется возможность управлять перерегулированием, в частности, можно получить зависимость  $\sigma = f(\delta_1)$  и выбрать такое значение  $\delta_1$ , при котором перерегулирование системы будет соответствовать условию (5.41).

Для пояснения этого результата на рис. 5.13 показана идеализированная зависимость  $\sigma = f(\delta_1)$ . Условно она может быть разделена на три участка. Для нас представляет интерес участок 2 с границами  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Он важен для задач синтеза, потому что он соответствует практически неизменному перерегулированию. Следовательно, имеется робастность

САУ по перерегулированию при изменении переменной  $\delta_1$ : вариации  $\Delta\delta_1$  приводят к малым изменениям  $\Delta\sigma$ . Известно, что имеется качественная связь между  $\Delta\delta_1$  и приращениями  $\pm\Delta P$  какого-либо параметра элементов САУ  $P$ . Это дает основание говорить о робастности перерегулирования САУ в отношении некоторого параметра элементов  $P$ .

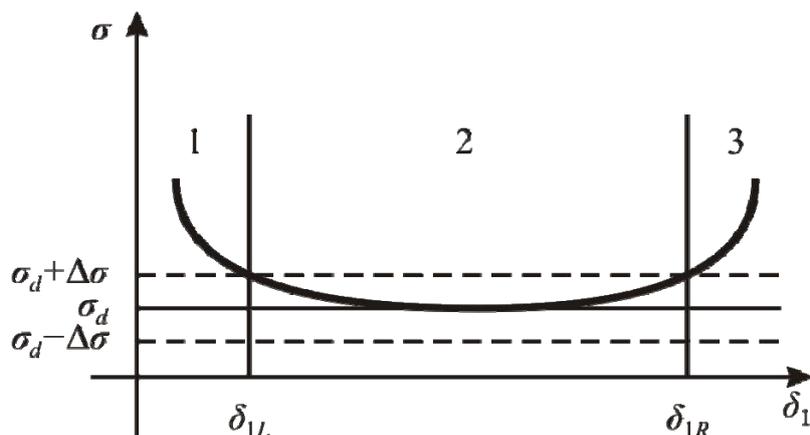


Рис. 5.13. Зависимость изменения перерегулирования системы от  $\delta$

В этой ситуации важно выявить факторы, которые влияют на количественные соотношения между параметрами САУ и параметрами элементов. В первую очередь нас интересует ширина зоны 2. Эксперименты показали, что основными из них являются: свойства объекта управления, желаемые значения времени установления  $t_i$  и перерегулирования  $\sigma_d$ , структура передаточной функции регулятора  $W_r(p)$ . В приведенном перечне доступным для изменения, а следовательно для настройки решения на целевые параметры задачи может быть только порядок регулятора. Если же порядок регулятора максимален, т. е. второй для практических задач, то управлять робастностью невозможно. Поэтому в реальных задачах приходится поступаться перерегулированием или временем установления. Обычно перерегулирование обладает более высоким приоритетом и потому управляющим параметром становится время  $t_i$ . Поэтому необходимая величина робастности САУ двойной итерационной процедуры — по переменным  $\delta_1$  и  $t_i$ .

Уточнение результатов синтеза и их коррекция выполняются на основе моделирования поведения синтезированной САУ. В случае невыполнения условия (5.41) коррекция выполняется путем смещения узлов интерполирования. На этом же этапе осуществляется проверка робастности системы в отношении наиболее динамичного параметра.

**Пример.** Рассмотрим систему управления, объект управления которой представлен передаточной функцией

$$W_0(s) = \frac{0,0652s + k_p}{0,0004005s^2 + 0,08405s + 1}.$$

Коэффициент передачи  $k_p$  может изменяться в пределах  $k_p = 0,8213 \mp 0,4$ . Желаемая САУ представлена передаточной функцией замкнутой системы для показателей  $\sigma_d = 10\%$ ,  $t_i = 0,05$  с, обратная связь единичная,

$$W_d = \frac{0,0006s + 0,5}{3,9 \cdot 10^{-6}s^2 + 0,023s + 1}.$$

Регулятор будем искать в виде звена второго порядка:

$$W_r = \frac{a_2s^2 + a_1s + a_0}{b_2s^2 + b_1s + b_0}.$$

В этом примере продемонстрируем только ту часть процедуры самонастройки регулятора, которая связана с его робастностью.

В результате поиска множества решений уравнения синтеза найден график функции  $\sigma = f(\delta_1)$ , представленный на рис. 5.14.

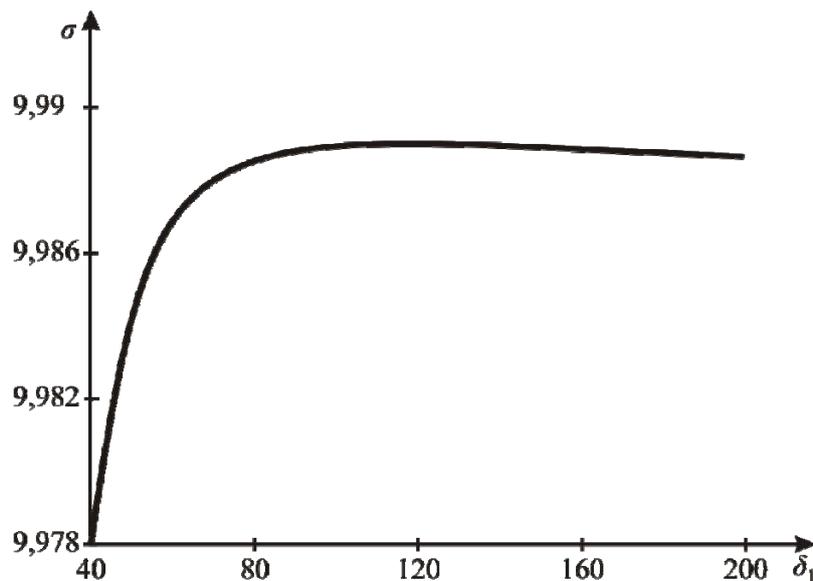


Рис. 5.14. Зависимость перерегулирования  $\sigma$  от параметра  $\delta_1$

Анализируя эту зависимость, можно видеть, что искомый горизонтальный участок на уровне  $\sigma \approx 10\%$  существует и оказывается достаточно обширным. Из множества решений выберем одно, соответствующее значению  $\delta_1 = 140$ . Для этого варианта найдена передаточная функция регулятора

$$W_r(s) = \frac{9,919 \cdot 10^{-6}s^2 + 0,0064s + 1}{3,755 \cdot 10^{-6}s^2 + 0,001127s}.$$

Переходная характеристика  $h(t)$  САУ для номинального значения коэффициента передачи объекта  $k_p = 0,8213$  показана на рис. 5.15.

Для проверки робастности системы на этом же рисунке приведены еще две характеристики  $h(t)$ . Они получены для систем с прежним регулятором и различными значениями интервального коэффициента передачи  $k_p = 0,8213 \mp \Delta k_p$ ,  $\Delta k_p = 0,4$ .

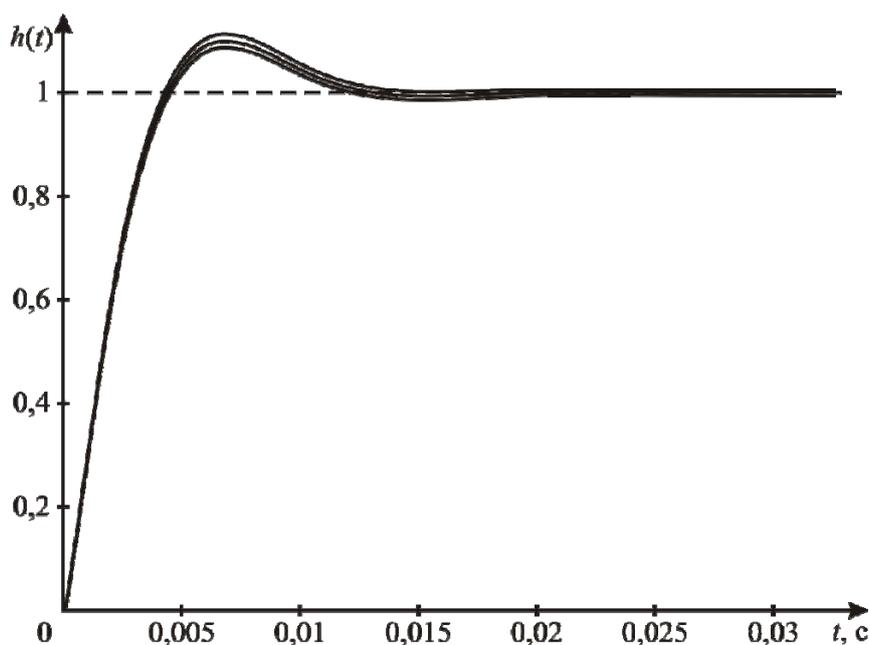


Рис. 5.15. Переходные характеристики системы при  $k_p = 0,8213 \mp \Delta k_p$ ,  $\Delta k_p = 0,4$

Как видно из графиков, робастность по перерегулированию обеспечивается. Численные значения вариаций  $\Delta\sigma$ , которые здесь не приводятся, намного меньше реально существующих требований.

Рассматриваемый подход к построению контура самонастройки имеет характерные особенности, часть из которых позволяет усиливать определенные свойства самонастраивающихся систем, другая представляет интерес при управлении специфическими объектами, например, с распределенными параметрами. Выделим наиболее важные на наш взгляд особенности:

- можно принять в качестве контролируемого параметра системы прямой показатель качества;
- имеется возможность изменять робастность системы, используя расстояние между узлами как инструментальную переменную;
- снижаются вычислительные затраты контроллера, например, по сравнению с использованием частотного метода.

## ГЛАВА 6. СИНТЕЗ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В главе рассматриваются применение ВИМ к синтезу систем автоматического управления класса многомерных. Многомерными называются такие системы автоматического управления (МСАУ), которые имеют несколько управляемых координат. Если эти координаты связаны между собой, то такие системы называют многосвязными.

Большая часть МСАУ образуется при управлении несколькими координатами одного объекта или при совместной работе нескольких односвязных САУ. Для таких систем характерно равенство числа управляемых координат числу управляющих воздействий. Структурную схему МСАУ можно представить в виде нескольких систем (каналов) регулирования с перекрестными связями между ними. При этом каждой управляемой (регулируемой) величине можно поставить в соответствие свой регулирующий орган и тем самым определить в объекте прямые или сепаратные каналы передачи воздействий. Прямые каналы в объекте выделяют либо по технологическому признаку, либо по признаку интенсивности и быстродействия связи между регулирующим органом и регулируемой величиной. Если многосвязный объект представляет собой совокупность агрегатов, объединенных для совместной работы, то обычно предпочитают пользоваться технологическим признаком, при котором агрегаты оборудуются собственными регуляторами; если объект представляет собой конструктивное единое целое, то каналы распределяют в зависимости от их динамики. В качестве примера для последнего случая многомерного объекта управления (МОУ) можно указать систему управления турбореактивным двигателем со следующими каналами: управление скоростью турбины, управление количеством подаваемого топлива, управление температурой газов перед турбиной /9/.

Каждый из сепаратных каналов объекта оборудуется собственным сепаратным регулятором; так образуется сепаратная система (или сепаратный контур) регулирования. Канал передачи воздействий, берущий начало в одной сепаратной системе и приложенный в другой, называется перекрестной связью. Перекрестные связи могут действовать в объекте регулирования или в многосвязном регуляторе, или в том и другом одновременно. Так, для турбореактивного двигателя, указанные выше каналы управления связаны между собой через один объект – турбину, и тем самым порождают взаимозависимость, неавтономность каналов управления друг от друга.

Таким образом, основной отличительной особенностью МСАУ является наличие более чем одной регулируемой величины, причем процессы регулирования различных величин являются взаимосвязанными. Это приводит к резкому возрастанию порядка дифференциального уравнения, описывающего систему, и затрудняет применение известных из теории односвязных САУ методов исследований и синтеза систем управления.

### **6.1. Перекрестные связи в МСАУ**

Перекрестные связи, действующие между сепаратными системами регулирования, можно разбить на две группы.

К первой группе перекрестных связей относятся такие, которые присущи системе вследствие физических её особенностей. Такие перекрестные связи называются естественными. Естественные перекрестные связи существуют между каналами объекта регулирования. Например, если объект регулирования представляет собой единую конструкцию (турбореактивный двигатель) и осуществляется регулирование нескольких величин, характеризующих его работу, то, кроме прямых каналов передачи воздействий от регулирующих органов к регулируемым переменным, имеются перекрестные связи между отдельными каналами объекта.

Вторая группа перекрестных связей образуется при введении искусственных воздействий между сепаратными системами регулирования для придания системе в целом определенных, желаемых свойств. Обычно такие искусственные перекрестные связи вводятся в многосвязном регуляторе. Эту группу перекрестных связей принято называть корректирующими перекрестными связями. Корректирующие перекрестные связи являются средством улучшения показателей качества регулирования в МСАУ, поддерживают определённые соотношения между регулируемыми величинами и обеспечивают частичную или полную автономность каналов управления. Указанные характеристики корректирующих связей являются специфической особенностью МСАУ и, поэтому, им уделяется особое внимание при синтезе и исследовании многомерных систем.

В зависимости от направления передачи сигналов перекрестные связи делятся на прямые и обратные (рис. 6.1 и рис. 6.2). Прямой перекрестной связью называется такая связь, через которую сигнал с выхода или входа одной группы звеньев передается на выходы или входы другой группы звеньев, находящихся впереди по направлению сигнала. Обратной перекрестной связью называется такая связь, с помощью которой сигнал с выхода или входа одной группы звеньев передается на выходы или входы другой группы звеньев.

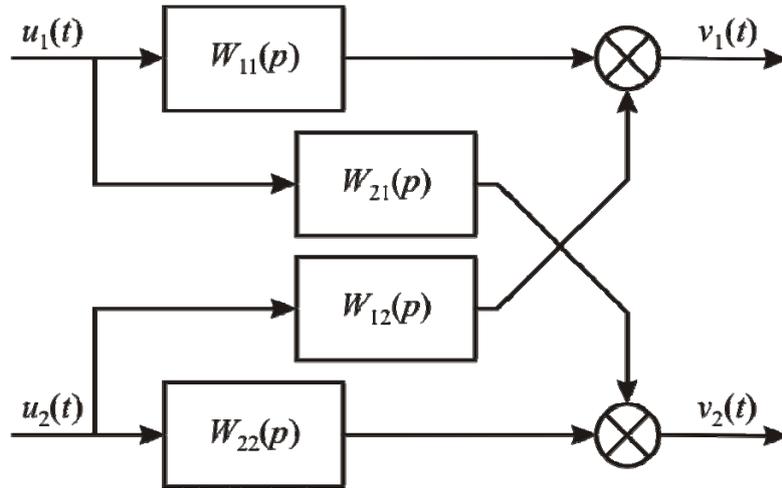


Рис. 6.1. Прямая перекрестная связь

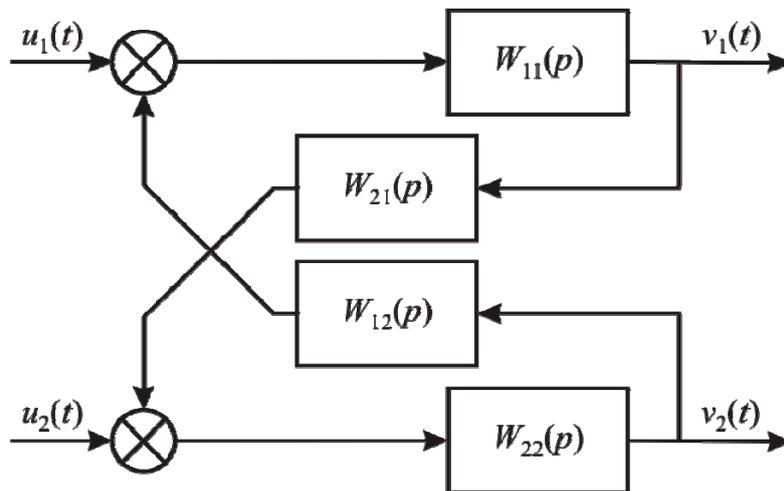


Рис. 6.2. Обратная перекрестная связь

Таким образом, при синтезе МСАУ, кроме определения численных значений настроек регуляторов, появляются две дополнительные задачи: выбор подходящей структуры компенсирующей перекрестной связи и определение ее численных значений.

## 6.2. Формы математического описания и структурные схемы МСАУ

Математическое описание многомерных систем принято записывать в виде матричных уравнений. Для наглядности и упрощения изложения здесь и далее будут рассматриваться двумерные системы, которые получили широкое распространение на практике. Уравнения, отражающие связь между входом и выходом двумерной системы, имеют следующий вид:

$$W(s)X(s) = Y(s), \quad (6.1)$$

где  $W(s)$  – матричная передаточная функция замкнутой системы;  $X(s)$  – вектор изображения входных сигналов;  $Y(s)$  – вектор изображения выходных сигналов или в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

$W_{11}(s)$ ,  $W_{22}(s)$  – передаточные функции замкнутой системы прямых каналов управления;  $W_{12}(s)$ ,  $W_{21}(s)$  – передаточные функции замкнутой системы перекрестных каналов управления;  $X(s)$  и  $Y(s)$  – соответственно векторы входных и выходных сигналов системы.

Уравнение (6.2) описывает систему в общем виде и для задач синтеза не представляет особого интереса. Кроме этого, из его вида невозможно определить вид перекрестной связи как в самом объекте управления, так и в многомерном регуляторе. Более детальными и наглядными формами математического описания МСАУ являются такие формы, которые отражают структуру не только всей системы, но и ее составных частей. Применительно для задач синтеза на основе ВИМ эти формы должны быть ещё записаны в формах для разомкнутых систем.

Рассмотрим четыре основные структурные схемы ДСАУ и запишем их математическое описание в развернутом виде для рис. 6.3:

$$\begin{pmatrix} W_{ob11}(s) & W_{ob12}(s) \\ W_{ob21}(s) & W_{ob22}(s) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} W_{r11}(s) & W_{r22}(s) \times W_{c12}(s) \\ W_{r11}(s) \times W_{c21}(s) & W_{r22}(s) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Пусть

$$WW_1(s) = \frac{-W_{r11}(s) \cdot W_{r22}(s) \cdot W_{c21}(s)}{-1 + W_{zr}(s)},$$

$$WW_2(s) = \frac{-W_{r11}(s) \cdot W_{r22}(s) \cdot W_{c12}(s)}{-1 + W_{zr}(s)}.$$

Тогда для рис. 6.4:

$$\begin{pmatrix} W_{ob11}(s) & W_{ob12}(s) \\ W_{ob21}(s) & W_{ob22}(s) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{-W_{r11}(s)}{-1 + W_{zr}(s)} & WW_2(s) \\ WW_1(s) & \frac{-W_{r22}(s)}{-1 + W_{zr}(s)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix}; \quad (6.4)$$



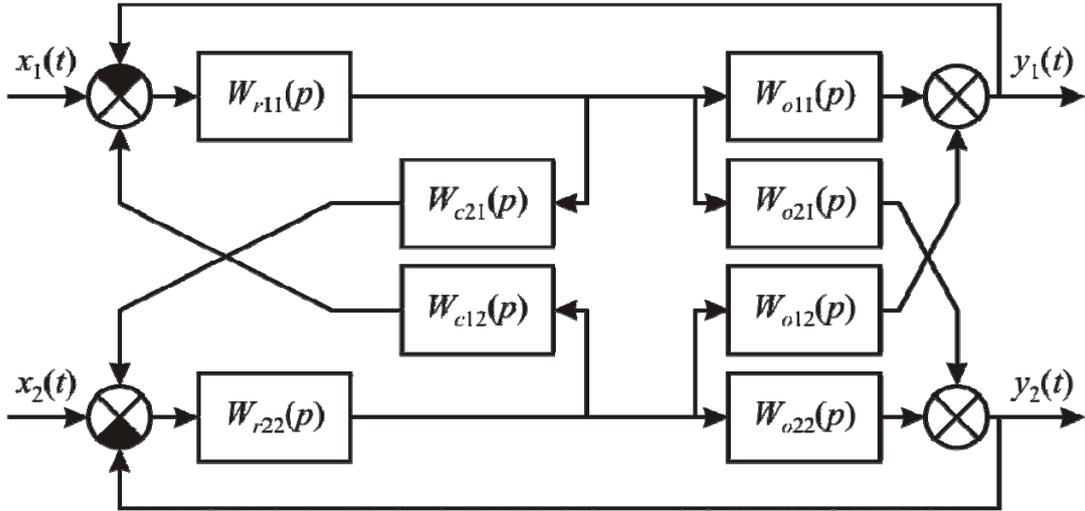


Рис. 6.4. Структурная схема ДСАУ

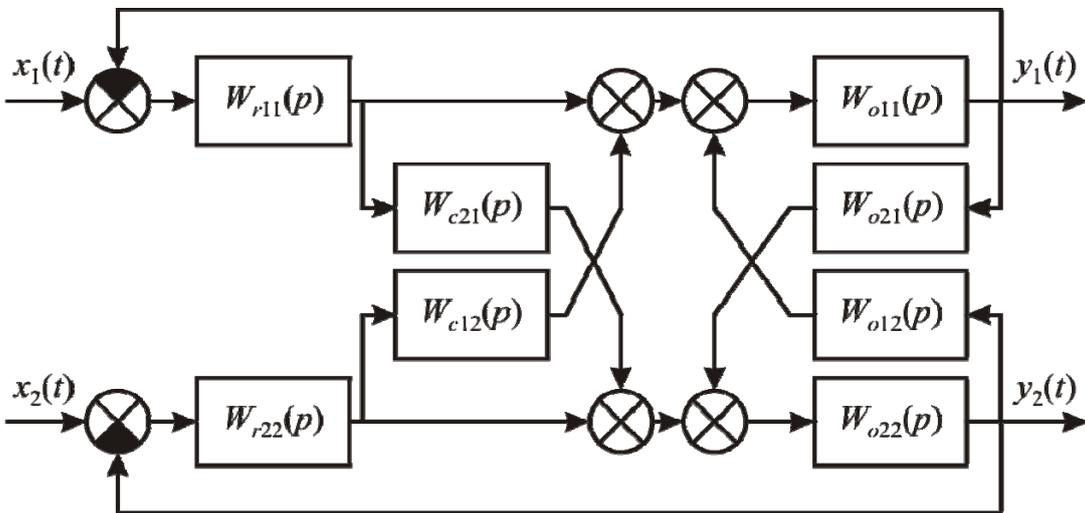


Рис. 6.5. Структурная схема ДСАУ

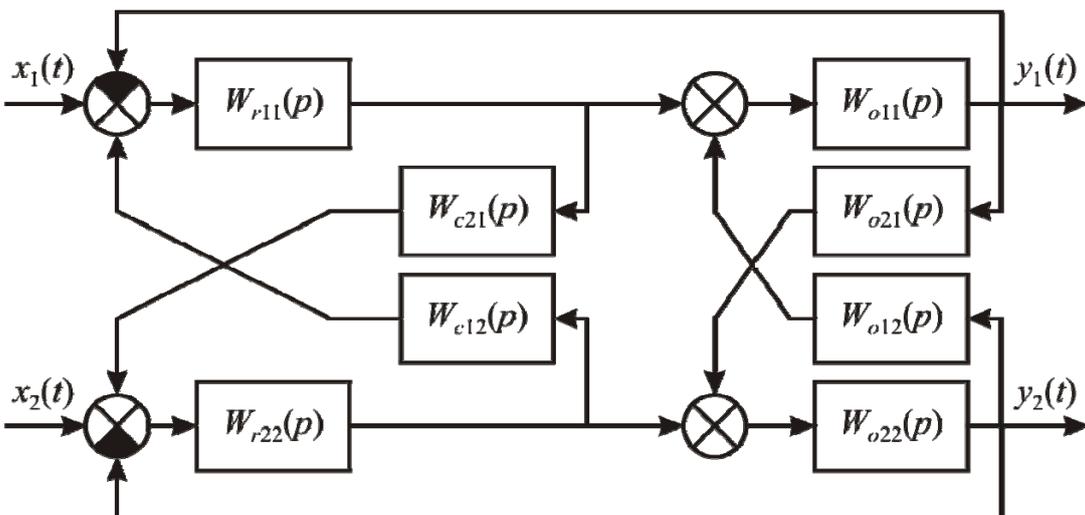


Рис. 6.6. Структурная схема ДСАУ

$W_{ob12}(s)$ ,  $W_{ob21}(s)$  – передаточные функции объекта управления в перекрестных каналах;  $W_{r11}(s)$ ,  $W_{r22}(s)$  – передаточные функции регуляторов;  $W_{c12}(s)$ ,  $W_{c21}(s)$  – передаточные функции компенсаторов;  
 $W_{zr}(s) = -1 + W_{r11}(s) \cdot W_{r22}(s) \cdot W_{c12}(s) \cdot W_{c21}(s)$ ;  
 $W_{zob}(s) = -1 + W_{ob11}(s) \cdot W_{ob22}(s) \cdot W_{ob12}(s) \cdot W_{ob21}(s)$ .

### 6.3. Постановка задачи синтеза МСАУ

Качество управления МСАУ может характеризовать критерий, предложенный В.В. Солодовниковым и Н.Б. Филимоновым.

Динамическое качество МСАУ тем выше, чем точнее она обрабатывает входной сигнал  $x(t)$  для каждой выходной переменной  $y(t)$  и чем меньше при этом влияние на другие выходные переменные объекта. Качество управления определяется матрицей переходных характеристик  $H = (h_{ij}(t))$  системы посредством задания областей допустимых значений выходных переменных.

Элементы  $h_{ii}(t)$  матрицы переходных характеристик являются переходными процессами по каждому прямому каналу, как реакция на единичное ступенчатое воздействие. Элементы  $h_{ij}(t)$  – это переходный процесс влияния каналов по перекрестным связям (рис. 6.7). Тогда можно сформулировать постановку задачи синтеза системы управления многомерным объектом в следующем виде.

Требуется синтезировать устойчивую систему, у которой реакция прямых каналов соответствует заданным динамическим и статическим требованиям, как это принято в одномерных системах, а реакция перекрестных связей соответствует амплитуде допустимого взаимного влияния и допустимому времени действия.

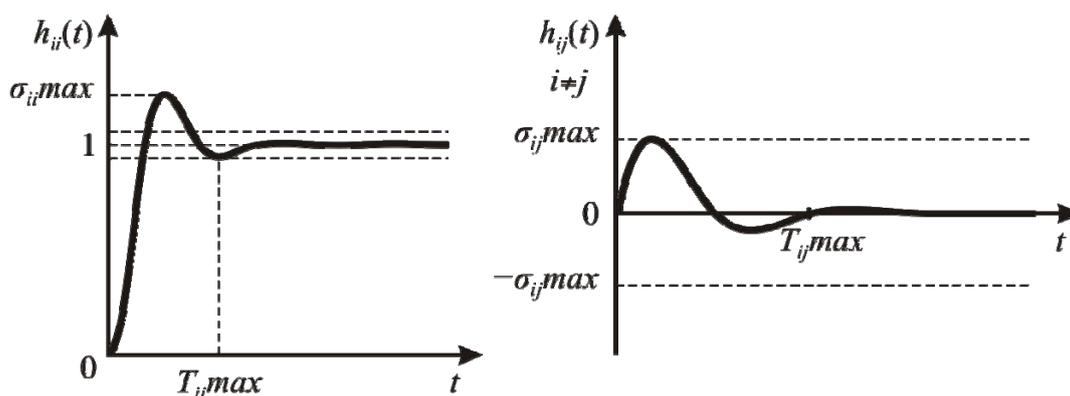


Рис. 6.7. Критерий качества МСАУ

Выполнение указанного требования к МСАУ возможно достичь следующими способами. Первый – придание многомерной системе свойств автономности каналов. В автономной системе полностью ис-

ключаются взаимные влияния каналов с помощью дополнительных, искусственных перекрестных связей. Второй – приближение свойств синтезируемой системы к свойствам идеальной автономной системы. При этом качество матрицы переходных процессов должно полностью соответствовать заданным требованиям к системе.

#### 6.4. Синтез на основе принципа автономности каналов

Автономность системы может быть получена соответствующим подбором перекрестных связей в многомерном регуляторе. Соответственно структура такого регулятора будет напрямую зависеть от формы перекрестных связей в многомерном объекте управления.

Основным методом получения автономности каналов является создание специального блока, в который вводят компенсирующие перекрестные связи и включают его на выходе блока регуляторов. Такой блок получил название компенсатора. Главным назначением компенсатора является обеспечение динамической развязки каналов системы, то есть либо получение полной автономности каналов друг от друга либо существенное ослабление взаимного влияния каналов.

Одним из способов получения автономности каналов является создание такого компенсатора, при котором объект совместно с компенсатором образуют скомпенсированный объект управления (рис. 6.3, рис. 6.4), по отношению к которому система может рассматриваться как система несвязного регулирования. В этом случае передаточные функции компенсаторов выбираются таким образом, чтобы получить или строго диагональную матрицу скомпенсированного объекта или с доминирующей главной диагональю. Матрица с доминирующей диагональю позволяет ослабить взаимодействие между контурами.

Рассмотрим применение указанного способа на примере двумерной системы. Для полного устранения поперечных связей в скомпенсированном объекте (рис. 6.3) необходимо выбрать передаточные функции компенсаторов по следующим формулам:

$$W_{c12}(s) = -\frac{W_{ob12}(s)}{W_{ob11}(s)}, W_{c21}(s) = -\frac{W_{ob21}(s)}{W_{ob12}(s)}. \quad (6.7)$$

В этом случае матрица передаточных функций скомпенсированного объекта окажется диагональной:

$$W_{cob}(s) = \begin{pmatrix} W_{cob11}(s) & 0 \\ 0 & W_{cob22}(s) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} W_{cob11}(s) &= W_{ob11}(s) - \frac{W_{ob12}(s) \cdot W_{ob21}(s)}{W_{ob22}(s)}, \\ W_{cob22}(s) &= W_{ob22}(s) - \frac{W_{ob12}(s) \cdot W_{ob21}(s)}{W_{ob11}(s)}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Для случая, изображенного на рис. 6.5, условие полного устранения поперечных связей в скомпенсированном объекте определяется выбором передаточных функции компенсаторов по следующим формулам:

$$\begin{aligned} W_{c12}(s) &= -W_{ob22}(s) \cdot W_{ob12}(s), \\ W_{c21}(s) &= -W_{ob11}(s) \cdot W_{ob21}(s). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Матрица передаточных функций скомпенсированного объекта для данной схемы также станет диагональной и будет иметь наиболее простой вид:

$$W_{cob}(s) = \begin{pmatrix} W_{ob11}(s) & 0 \\ 0 & W_{ob22}(s) \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Выполнение условий (6.7)–(6.9) позволяет синтезировать регуляторы или вести их настройку независимо друг от друга с применением методов настройки одномерных систем, в том числе и с помощью ВИМ. Для пояснения изложенного подхода рассмотрим пример решения конкретной задачи, привлекая ВИМ.

**Пример.** В качестве примера настройки ДСАР на заданные показатели качества рассмотрим процесс синтеза системы управления для модели двухконтурного турбореактивного двигателя с передаточной матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{3,4 \cdot (0,4 \cdot s + 1)}{0,38 \cdot s^2 + 1,1 \cdot s + 1} & \frac{6,8 \cdot (0,55 \cdot s + 1)}{0,38 \cdot s^2 + 1,1 \cdot s + 1} \\ \frac{0,18 \cdot (1,13 \cdot s + 1)}{0,38 \cdot s^2 + 1,1 \cdot s + 1} & \frac{0,9 \cdot (1,1 \cdot s + 1)}{0,38 \cdot s^2 + 1,1 \cdot s + 1} \end{pmatrix}.$$

Структурная схема системы соответствует структуре рис. 6.3. По условию задачи перерегулирование выходных величин в каналах управления должно отсутствовать, а время установления не должно превышать 2 секунд. Вид желаемого переходного процесса каждого канала должен соответствовать экспоненциальной кривой вида  $y(t) = 1 - \exp(-2,5t)$ , а взаимное влияние каналов должно отсутствовать. По этим данным были найдены желаемые передаточные функции каналов и осуществлен синтез регуляторов, получение которых полностью соответствует рассмотренным ранее задачам синтеза одномерных сис-

тем. Расчеты регуляторов по каждому из каналов близки между собой, поэтому приведем результаты для одного канала. Желаемая передаточная функция  $W_s^c(s)$  одного сепаратного канала будет следующей:

$$W_w^c(s) = \frac{2,5}{s + 2,5}.$$

Для синтеза регулятора зададимся видом его передаточной функции, которую для общности примем в форме ПИД-регулятора:

$$\left( K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \cdot s \right) \cdot \frac{1}{T_f \cdot s + 1} = \frac{K_p \cdot s + K_i + K_d \cdot s^2}{(T_f \cdot s + 1) \cdot s} = W_r(s).$$

Составим уравнение синтеза регулятора, используя соотношения (6.7) и (6.8):

$$\frac{K_p \cdot s + K_i + K_d \cdot s^2}{(T_f \cdot s + 1) \cdot s} \cdot \left( W_{p11}(s) - W_{p12}(s) \cdot \frac{W_{p21}(s)}{W_{p22}(s)} \right) \cong \frac{2,5}{s}. \quad (6.11)$$

В уравнении (6.11) искомыми параметрами являются коэффициенты регуляторов. Для их определения перейдем в вещественную область, затем с помощью ВИМ составим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & K_p \cdot \delta_i + K_i + K_d \cdot \delta_i^2 - \frac{T_f \cdot \delta_i}{\left( W_{p11}(\delta) - W_{p12}(\delta) \cdot \frac{W_{p21}(\delta)}{W_{p22}(\delta)} \right)} = \\ & = \frac{2,5}{\left( W_{p11}(\delta) - W_{p12}(\delta) \cdot \frac{W_{p21}(\delta)}{W_{p22}(\delta)} \right)}, \quad i = 1, \dots, \eta. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Решение системы (6.12) дает следующую передаточную функцию регулятора после настройки системы на требуемые показатели качества переходного процесса:

$$\begin{aligned} & \left( 3,144 + \frac{2,485}{s} + 1,377 \cdot s \right) \cdot \frac{1}{0,474 \cdot s + 1} = W_{r1}(s), \\ & \left( 3,71 + \frac{4,63}{s} + 1,357 \cdot s \right) \cdot \frac{1}{0,616 \cdot s + 1} = W_{r2}(s). \end{aligned}$$

Моделирование синтезированной системы управления подтвердило ее полную автономность. Показатели качества переходного процесса и значения узлов интерполирования получились следующими:  $\sigma = 0\%$  – перерегулирование;  $t_r = 1$  с – время регулирования (время переходного процесса);  $\delta = \{1,842; 3,684; 5,526\}$ .

Второй способ получения автономных многомерных систем основан на принципах инвариантности или компенсации возмущающих воздействий. Здесь на вход регулятора, помимо отклонений регулируемой величины  $u(t)-y(t)$ , подается сигнал от возмущения  $g(t)$ , сформированный надлежащим образом в блоке компенсации возмущения с передаточной функцией  $K(s)$ . В качестве возмущения в ДСАУ выступают сигналы перекрестных связей в объекте управления. На рис. 6.4 и рис. 6.6 представлены структурные схемы ДСАУ, реализующие принцип инвариантности по перекрестным связям в объекте управления.

Для обеспечения полной автономности каналов системы передаточные функции компенсаторов должны быть найдены по следующим формулам:

для системы на рис. 6.4

$$W_{c12}(s) = -\frac{W_{ob12}(s)}{W_{ob11}(s) \cdot W_{r11}(s)},$$

$$W_{c21}(s) = -\frac{W_{ob21}(s)}{W_{ob22}(s) \cdot W_{r22}(s)};$$
(6.13)

для системы на рис. 6.6

$$W_{c12}(s) = -\frac{W_{ob12}(s) \cdot W_{ob22}(s)}{W_{r11}(s)},$$

$$W_{c21}(s) = -\frac{W_{ob21}(s) \cdot W_{ob11}(s)}{W_{r22}(s)}.$$
(6.14)

Как видно из формул, передаточные функции компенсаторов зависят от передаточных функций регуляторов. Учитывая тот факт, что настройка системы ведется на основе принципов инвариантности, эту зависимость исключим, воспользовавшись уравнением синтеза одномерного регулятора (2.7), и запишем следующие соотношения:

$$W_{r11}(s) = \frac{W_w^c(s)}{W_{ob11}(s)},$$

$$W_{r22}(s) = \frac{W_w^c(s)}{W_{ob22}(s)};$$
(6.15)

для системы на рис. 6.4 –

$$W_{c12}(s) = -\frac{W_{ob12}(s)}{W_w^c(s)},$$

$$W_{c21}(s) = -\frac{W_{ob21}(s)}{W_w^c(s)}.$$
(6.16)

для системы на рис. 6.6 –

$$W_{c12}(s) = -\frac{W_{ob12}(s) \cdot W_{ob11}(s) \cdot W_{ob22}(s)}{W_w^c(s)},$$

$$W_{c21}(s) = -\frac{W_{ob21}(s) \cdot W_{ob11}(s) \cdot W_{ob22}(s)}{W_w^c(s)}.$$
(6.17)

Таким образом, суть подхода к синтезу МСАУ сводится к выполнению следующей последовательности:

- синтез желаемых ПФ сепаратных каналов;
- настройка регуляторов сепаратных каналов по их желаемым ПФ;
- синтез ПФ компенсаторов по формулам (6.16) и (6.17).

Рассмотрим выполнение этой схемы на конкретном примере, позволяющем выявить особенности каждого этапа и подхода в целом.

**Пример.** Воспользуемся рассмотренной ранее моделью турбореактивного двигателя и теми же требованиями к качеству переходного процесса, которые предъявлялись прежде. С помощью ВИМ и основного уравнения синтеза найдем настройки регуляторов для прямых каналов в объекте управления:

$$W_{r1}(s) = \frac{0,57s^2 + 1,65s + 1,5}{1,36s^2 + 3,4s},$$

$$W_{r2}(s) = \frac{0,57s^2 + 1,65s + 1,5}{0,99s^2 + 0,9s}.$$

Применяя формулы (6.16) и (6.17), найдем передаточные функции компенсаторов:

$$W_{k12}(s) = \frac{2,49s^2 + 4,53s}{0,38s^2 + 1,1s + 1},$$

$$W_{k21}(s) = \frac{0,13s^2 + 0,12s}{0,38s^2 + 1,1s + 1}.$$

После проведения исследования полученной системы управления было установлено, что она полностью отвечает заданным требованиям и обладает автономностью каналов.

### 6.5. Синтез двумерных САУ на основе приближения к автономности каналов

Рассмотренные выше подходы к синтезу многомерных САУ на основе динамической компенсации взаимовлияния каналов на практике не всегда удается применить в силу ряда причин. Основные из них:

- формулы для идеальных компенсаторов не всегда дают физически реализуемые структуры компенсаторов;

- во многих случаях для реализации передаточной функции компенсатора необходимо иметь дифференцирующие звенья, которые точно не реализуются;
- необходимо иметь точную передаточную функцию всего многомерного объекта, что в большинстве случаев невозможно;
- если объект имеет звено запаздывания, то компенсатор должен содержать звено опережения, которое тоже точно не реализуется;
- если система работает в условиях помех, то дифференцирующие звенья будут усиливать их влияние.

В условиях, когда нельзя обеспечить полную компенсацию взаимного влияния каналов, приходится искать приближенные решения. Необходимо синтезировать такие регуляторы, которые бы обеспечивали требуемое качество переходных процессов по каждому каналу управления, а степень влияния каналов друг на друга не превышала бы заданного уровня. Задача в такой постановке оказывается значительно более сложной по сравнению с вариантом раздела 4, когда можно реализовать полную автономность каналов.

Причина резкого усложнения задачи связана с тем, что система уравнений (6.1) становится нелинейной, невозможно получить строго диагональную матрицу скомпенсированного объекта управления и невозможно отыскать точные решения компенсаторов для придания системе свойств инвариантности по каналам. В этих условиях приходится искать приближенное решение, удовлетворяющее предъявляемым требованиям. Наиболее удобны для таких целей численные методы, позволяющие реализовывать гибкие итерационные схемы приближения к цели. Таким методом является ВИМ, возможность применения которого и алгоритмические основы получения приемлемого решения будут рассмотрены далее.

Для демонстрации подхода вновь обратимся к двумерной САУ, структура которой приведена на рис. 6.3. Для решения задачи запишем уравнения (6.2) в следующем виде, полагая для простоты  $Y(s)_1 = Y(s)_2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{p11}(\delta_i) \cdot [W_{r11}(\delta_i) - W_{r22}(\delta_i) \cdot W_{c12}(\delta_i)] + \\ + W_{p12}(\delta_i) \cdot [W_{r22}(\delta_i) - W_r(\delta_i)_{11} \cdot W_{c21}(\delta_i)] = \frac{Y(\delta_i)}{E(\delta_i)} \cong W_w^o(\delta_i), \\ W_{p21}(\delta_i) \cdot [W_{r11}(\delta_i) - W_{r22}(\delta_i) \cdot W_{c12}(\delta_i)] + \\ + W_p(\delta_i)_{22} \cdot [W_r(\delta_i)_{22} - W_r(\delta_i)_{11} \cdot W_c(\delta_i)_{21}] = \frac{Y(\delta_i)}{E(\delta_i)} \cong W_w^o(\delta_i), \\ i = 1, 2 \dots \eta. \end{array} \right. \quad (6.18)$$

Полученная система (6.18) является системой нелинейных алгебраических уравнений, относительно которой можно высказать предположение о возможности поиска ее приближенного решения численными методами. Подчеркнем роль ВИМ на этом пути. Во-первых, метод позволил расщепить уравнение синтеза в систему уравнений. Для сравнения: привлечение частотного подхода приводит к более сложной конструкции – число уравнений будет по крайней мере вдвое большим. Во-вторых, для решения этой системы уравнений можно использовать известные методы решения систем нелинейных уравнений.

В условия поиска приближенного решения необходимо сформировать критерий близости эталонной и синтезируемой САУ. В качестве меры близости удобна использовавшаяся ранее оценка

$$\Delta h = \max_t |h_w(t) - h_s(t)|,$$

в которой сопоставляются переходные характеристики желаемой  $h_w(t)$  и синтезируемой  $h_s(t)$  САУ. На практике могут оказаться более важными другие оценки, учитывающие конкретные особенности той или иной задачи. В частности, может быть использована оценка, определяющая близость перерегулирования синтезированной системы к заданному значению. Важно, что любая из них зависит от вектора параметров регуляторов и компенсаторов  $c$  и позволяет сформировать критерий

$$J(c) \rightarrow \min_{c \in C} .$$

Для минимизации принятой оценки вновь привлечем механизм, базирующийся на изменении узлов  $\delta_i = \overline{1, \eta}$ . Как и в случае использования принципа автономности каналов, решение может быть найдено путем изменения узлов интерполирования. Продемонстрируем это на примере синтеза двумерной САУ для рассмотренного ранее двухконтурного турбореактивного двигателя.

**Пример.** Исходные данные задачи и требования сохраним в соответствии с разделом 4. Исключением является отсутствие требования компенсации взаимного влияния каналов в переходном режиме. Это позволяет, сохраняя в полном объеме методику решения задачи, упростить ее за счет снижения числа неизвестных коэффициентов. С этой целью примем компенсаторы статическими. Основные регуляторы должны быть пропорционально-интегральными. В этих условиях система уравнений (6.12) примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 W_p(\delta_i)_{11} \cdot \left( \frac{K_{p11} \cdot \delta_i + K_{i11}}{\delta_i} - \frac{K_{p22} \cdot \delta_i + K_{i22}}{\delta_i} \cdot K_{c12} \right) + W_p(\delta_i)_{12} \times \\
 \times \left( \frac{K_{p22} \cdot \delta_i + K_{i22}}{\delta_i} - \frac{K_{p11} \cdot \delta_i + K_{i11}}{\delta_i} \cdot K_{c21} \right) = \frac{Y(\delta_i)}{E(\delta_i)} \cong \frac{2,5}{\delta_i}, \\
 W_p(\delta_i)_{21} \cdot \left( \frac{K_{p11} \cdot \delta_i + K_{i11}}{\delta_i} - \frac{K_{p22} \cdot \delta_i + K_{i22}}{\delta_i} \cdot K_{c12} \right) + W_p(\delta_i)_{22} \times \\
 \times \left( \frac{K_{p22} \cdot \delta_i + K_{i22}}{\delta_i} - \frac{K_{p11} \cdot \delta_i + K_{i11}}{\delta_i} \cdot K_{c21} \right) = \frac{Y(\delta_i)}{E(\delta_i)} \cong \frac{2,5}{\delta_i}, \\
 i = 1, 2, \dots, \eta.
 \end{array} \right. \quad (6.19)$$

Решение системы уравнений (6.19) для различных значений узлов интерполирования дало следующие результаты, представленные в табл. 6.1 и на рис. 6.8 и рис. 6.9.

Таблица 6.1

*Результаты настройки неавтономной МСАУ*

№ итерации	Значения узлов	Значения коэффициентов регуляторов и компенсаторов		Показатели переходного процесса
		1 канал	2 канал	
1	{1,75; 3,5; 5,25; 7; 8,75}	$Kp_1 = 0,034;$ $Ki_1 = 8,912;$ $Kc_{21} = 0,303$	$Kp_2 = 1,518;$ $Ki_2 = 6,964;$ $Kc_{12} = 2,399$	Система неустойчива
2	{2,5; 5, 7,5; 10; 12,5}	$Kp_1 = 0,351;$ $Ki_1 = 9,2;$ $Kc_{21} = 0,292$	$Kp_2 = 1,678;$ $Ki_2 = 6,968;$ $Kc_{12} = 2,444$	Время регулирования < 1,5 с; Перерегулирование < 0,5 %; Отсутствие установившегося значения по первому каналу
3	{5,25; 10,5; 15,75; 21; 26,25}	$Kp_1 = 3,792;$ $Ki_1 = 14,242;$ $Kc_{21} = 0,136$	$Kp_2 = 2,206;$ $Ki_2 = 6,278;$ $Kc_{12} = 3,532$	Время регулирования < 1,5 с; Перерегулирование отсутствует

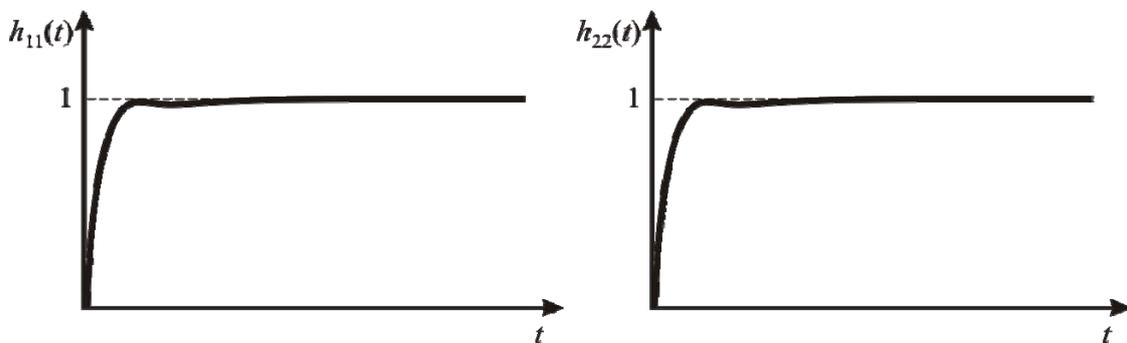


Рис. 6.8. Графики переходных процессов ДСАУ по прямым каналам

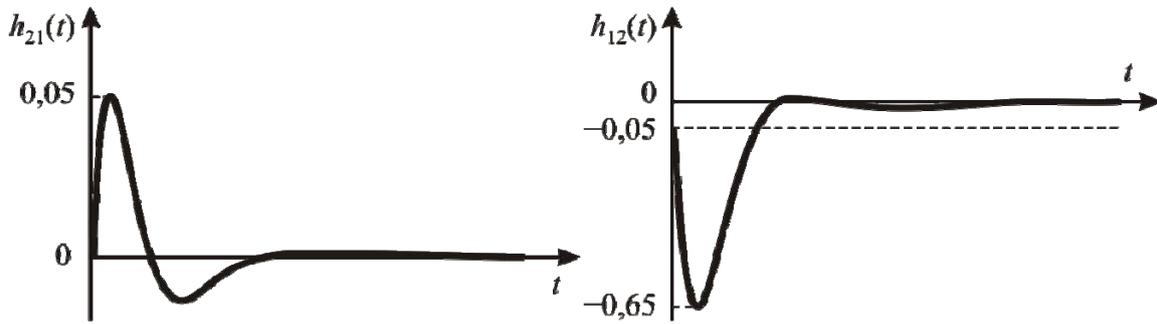


Рис. 6.9. Графики переходных процессов ДСАУ по перекрестным каналам

На графиках приведена реакция системы на единичное ступенчатое воздействие, которое подается на оба канала одновременно в момент времени, равный одной секунде (с целью доступа к окрестности  $t = 1$  с). Проверка показала, что в САУ заметно влияние каналов друг на друга в переходных процессах, то есть система уже не обладает свойствами автономности. Поэтому возникает вопрос возможности снижения взаимного влияния путем усложнения структуры регуляторов и компенсаторов, что приведет к увеличению переменных в системе уравнений (6.19) и усложнению ее решения. Но это плата за получение более приемлемого решения.

Достижение требуемых показателей качества управления достигается с помощью изменения узлов интерполирования. При этом на каждом этапе приближения ищутся сразу все коэффициенты регуляторов и компенсаторов в обоих каналах, поскольку в неавтономных многомерных системах изменение какого-либо параметра в одном из каналов влечет за собой изменения в динамике всей систем. И такая возможность является весьма важной с позиций сокращения объема вычислений.

Если по условию задачи задан вид ПФ объекта управления и известны приближенные значения коэффициентов, то можно воспользоваться еще одним приближенным способом настройки многомерной системы, основанным на ВИМ. Для демонстрации этого способа вновь обратимся к системе, изображенной на рис. 6.4. Математическое описание системы можно свести к следующему виду системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} W_{o1}(s)Z_1(s) + W_{o12}(s)Z_2(s) = W_{w1}^o(s), \\ W_{o21}(s)Z_1(s) + W_{o2}(s)Z_2(s) = W_{w2}^o(s), \end{cases} \quad (6.20)$$

где

$$\begin{cases} Z_1(s) = \frac{W_{r1}(s) - W_{k12}(s)W_{r1}(s)W_{r2}(s)}{1 - W_{k21}(s)W_{k12}(s)W_{r1}(s)W_{r2}(s)}, \\ Z_2(s) = \frac{W_{r2}(s) - W_{k21}(s)W_{r1}(s)W_{r2}(s)}{1 - W_{k21}(s)W_{k12}(s)W_{r1}(s)W_{r2}(s)}. \end{cases} \quad (6.21)$$

Таким образом, мы получили две функции, отражающие взаимосвязь регуляторов и компенсаторов с учетом передаточных функций объекта управления и желаемых передаточных функций каждого канала. Но для того, чтобы провести окончательную настройку системы, т. е. получить вид и численные значения регуляторов и компенсаторов, требуется разрешить указанную систему. Для этого необходимо задаться из каких-либо физических или математических соображений видом и значениями регуляторов или компенсаторов. Наиболее эффективным и, видимо, целесообразным путем является первоначальное определение вида ПФ компенсаторов. Тогда из системы (6.21) можно получить систему уравнений для нахождения регуляторов и с помощью ВИМ проводить их настройку путем изменения узлов интерполирования. Уравнения синтеза регуляторов примут следующий вид:

$$\begin{cases} W_{r1}(s) = \frac{Z_1(s)}{1 - Z_2(s)W_{k12}(s)}, \\ W_{r2}(s) = \frac{Z_2(s)}{1 - Z_1(s)W_{k21}(s)}. \end{cases} \quad (6.22)$$

**Пример.** Проведем настройку системы управления турбореактивного двигателя таким способом с помощью ВИМ. Условия задачи остаются прежними, как и в предыдущих примерах. Однако сделаем одно предположение, позволяющее продемонстрировать подход в полной мере. Допустим, что компенсаторы, найденные в предыдущем расчетном примере, являются физически нереализуемыми. Тогда необходимо задаться их видом и найти численные значения коэффициентов. Пусть вид искомых компенсаторов будет следующим:

$$W_k(s) = \frac{a_1 s}{b_1 s + 1}.$$

Формулы для идеальных компенсаторов из предыдущего примера дают желаемый вид численной характеристики реальных компенсаторов. Далее составляются системы уравнений для нахождения коэффициентов компенсаторов и определяются их значения, получим:

$$W_{k12}(s) = \frac{4,76s}{0,68s + 1},$$

$$W_{k_{21}}(s) = \frac{0,136s}{0,321s + 1}.$$

Аналогичным образом на основе уравнений (6.22) синтеза регуляторов находятся значения коэффициентов регуляторов и с помощью процедуры изменения узлов интерполирования уточняются, настраиваются из условия максимального приближения к желаемому виду переходных процессов в системе. Результат этой процедуры:

$$W_{r_1}(s) = \frac{0,155 s^2 + 0,519s + 0,419}{0,396s^2 + s},$$

$$W_{r_2}(s) = \frac{0,5 s^2 + 1,7s + 1,7}{0,73s^2 + s}.$$

Для наглядности на рис. 6.10 представлены графики переходных процессов по перекрестным каналам. Они отражают реакцию системы для случаев, когда на один вход подается единичный ступенчатый сигнал, а на входе второго канала сигнал отсутствует. Это позволяет оценить влияние первого канала на второй. Очевидно, точно так же можно проверить влияние второго канала на первый. Из рисунков следует, что качество переходных процессов по прямым каналам соответствует заданным. Следовательно, синтезированная система полностью соответствует желаемым показателям качества. Кроме этого, удалось получить приемлемое, близкое к минимальному влияние каналов друг на друга.

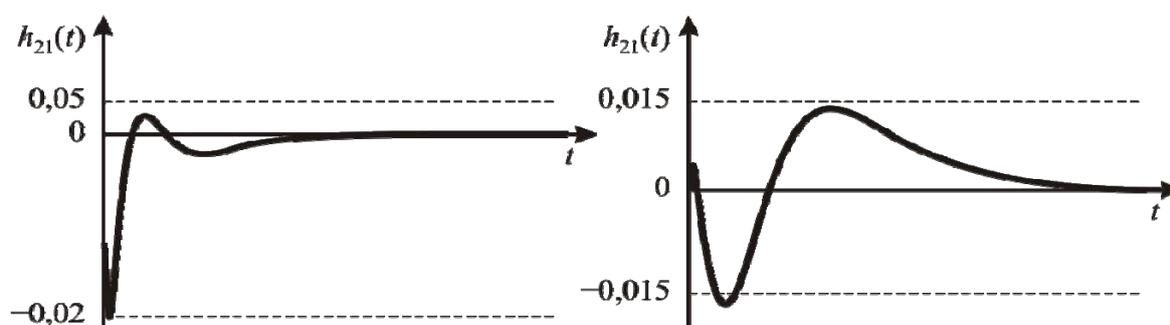


Рис. 6.10. Графики переходных процессов ДСАУ по перекрестным каналам

В данном разделе были даны основные подходы к синтезу многомерных систем на базе ВИМ. На примерах показано, что применение ВИМ для синтеза регуляторов и компенсаторов систем этого класса возможно, а процедура численного расчета близка к стандартной для ВИМ, что позволяет использовать ее в инженерной практике.

## **ГЛАВА 7. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА В ЗАДАЧАХ НАСТРОЙКИ РЕГУЛЯТОРОВ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ**

### **7.1. Методы ручной, автоматизированной и автоматической настройки регуляторов**

В последние годы значительно возрос интерес к вопросам настройки регуляторов промышленных систем автоматического управления (САУ). Это связано с большими материальными и временными затратами, которые возникают как вследствие эксплуатации систем, работающих не в оптимальных режимах, так и необходимости проведения довольно частых регламентных работ по настройке регуляторов. При этом настройка осуществляется, как правило, вручную и по разным причинам не лучшим образом, что также приводит к существенным экономическим потерям.

Анализу практического использования САУ и широкого спектра возникающих при этом проблем настройки регуляторов САУ посвящены многочисленные исследования. Результаты одного из них, представляющие особый интерес с практической точки зрения, приведены в /17/. В этой работе продемонстрированы итоги исследования качества работы промышленных систем автоматического управления, которое было проведено компанией Honeywell. На 350 предприятиях в различных отраслях промышленного производства анализировались 100 000 контуров регулирования, находящихся в эксплуатации не менее 5 лет. Численные данные по работе контуров таковы. На различных предприятиях от 49 до 63 % контуров работает со «слабыми» (приближенными к размыканию контура) настройками. В эту группу включены как контуры, настройки которых ослаблены для обеспечения работы контура при изменении режима работы объекта, так и необоснованно ослабленные настройки (т. е. по существу регуляторы отключены, контур почти разомкнут). В работе /17/ даны предполагаемые причины такого состояния регуляторов. Одна из основных определена субъективными причинами, что дает основание искать разрешение проблемы в переходе к автоматизированной и автоматической настройке регуляторов.

Автоматическая настройка и самонастройка регуляторов уже давно привлекает внимание исследователей, отражая потребности практики. Это связано с необходимостью снижения временных и материальных затрат как при вводе систем управления в работу, так и при их последующей эксплуатации. Первоначально теоретические работы по настройке регуляторов были нацелены на разработку методик, процедур и

рекомендаций, использовавшихся при ручной настройке. Однако ручная настройка систем требует от обслуживающего персонала высокой квалификации, больших затрат труда и времени и носит в значительной мере интуитивный характер.

Уменьшить такого рода потери можно путем использования принципов автоматического управления, обеспечивающих приспособление системы к изменяющимся параметрам объекта управления и условиям эксплуатации. Единственной альтернативой потерям в промышленных системах, вызванных слабыми настройками регуляторов, является построение систем с автоматической самонастройкой регуляторов. Более того, такой подход, ориентированный на идентификацию модели объекта, открывает дорогу к использованию других предложений, направленных на повышение качества действующих САУ. Однако полностью автоматическая настройка регуляторов САУ имеет и свои недостатки: сложность регулятора, высокая стоимость системы и, главное, трудности обеспечения достаточной надежности и др. В этой связи во многих случаях целесообразно использовать автоматизированную настройку, которая является, по всей видимости, компромиссным вариантом при создании инструментальных средств настройки регуляторов между вариантами ручной и автоматической настройки.

Автоматическую и автоматизированную настройку регуляторов можно в целом представить в виде решения общей задачи, включающей в себя задание желаемых требований к системе, идентификацию объекта управления и расчет параметров регулятора. Первой и наиболее сложной из этого перечня является задача идентификации. Выбор метода идентификации во многом определяет возможности и эффективность работы всей системы. Поэтому, решая задачу расчета настраиваемых параметров регулятора, необходимо рассмотреть основные особенности методов, применяемых для получения математических моделей объектов и систем.

### ***7.1.1. Частотные методы настройки регуляторов***

Большинство методов, используемых в настоящее время для целей настройки регуляторов систем, – ручной, автоматизированной или автоматической – основаны на частотном подходе. Типичным и, видимо, основным примером может служить метод Циглера–Николса. Он позволяет получать во многих случаях разумные настройки регулятора и добиваться удовлетворительной работы систем и поэтому используется на практике сороковых годов прошлого столетия. При этом он обладает определенными недостатками. Во-первых, при осу-

ществлении процедуры настройки требуется предварительное превращение регулятора в П-регулятор и создание режима автоколебаний. Во-вторых, метод позволяет уверенно находить лишь два варьируемых коэффициента и потому ПИД-закон реализуется косвенными методами при использовании табличных соотношений. Все это приводит к существенным трудностям при получении решения, удовлетворяющего заданному показателю качества.

Как уже отмечалось, решение задачи настройки регуляторов неразрывно связано с решением задачи идентификации. Основные частотные методы идентификации, используемые при настройке регуляторов, можно объединить в две группы. В первую входят те, у которых информационная характеристика определяется посредством подачи гармонических сигналов на вход объекта, а с выхода снимаются гармонические сигналы той же частоты, но отличные по амплитуде и фазе. Достоинством методов данной подгруппы является их наглядность и богатство физического содержания. К недостаткам можно отнести длительность настройки, сложность оборудования для формирования синусоидальных сигналов, а также неточность этих сигналов, что является дополнительным источником погрешности при идентификации. Методы второй группы позволяют получать частотные характеристики по временным динамическим характеристикам – переходной или импульсной переходной функции объекта управления. Существенной положительной чертой методов второй подгруппы является малое время проведения эксперимента, сравнимое с длительностью переходного процесса исследуемого объекта. При этом используется разложение временной динамической характеристики в ряд Фурье, которое осуществляется либо программным способом, т. е. когда характеристика обрабатывается вычислительными средствами, либо аппаратным способом, когда на выходе объекта ставят специальные фильтры. Последние выделяют гармоники, используемые для построения частотных характеристик объекта. Однако выделение гармоник сопровождается появлением ошибок за счет конечного верхнего предела интегрирования, что так же, как и в первом случае, ведет к ухудшению результатов идентификации.

Следует также иметь в виду особенность частотных методов, которая в определенных процедурах проявляется в виде серьезного недостатка. Суть его состоит в том, что математические описания объектов в частотной области представляет собой функции аргумента  $j\omega$ . В то же время вычислительные процедуры требуют перехода к функциям вещественного аргумента  $\omega$ . На практике используют именно такие частотные характеристики: вещественные и мнимые частотные характеристики, амплитудные, фазовые и др. К сожалению

нию, переход от функций мнимого аргумента к функциям аргумента  $\omega$ , являющийся, по своей сути, вспомогательным, требует больших вычислительных затрат, а в ряде случаев (при наличии в исходной функции иррациональных и трансцендентных выражений) этот переход может оказаться непреодолимым.

### 7.1.2. Настройка регуляторов на основе вещественного интерполяционного метода

Ограничения и недостатки частотных методов заставляют искать иные подходы в решении задач автоматической настройки систем, учитывая специфические особенности таких задач, развитие цифровой вычислительной техники, получение новых научных результатов. Прежде всего, обращают внимание на методы, которые расширяют спектр применяемых законов регулирования и используют встроенные аппаратно-программные вычислительные средства.

В этой связи представляется целесообразным использовать ВИМ, который хорошо согласуется с особенностями представления информации в вычислительных средствах, не требует выполнения трудоемкой операции перехода к функциям вещественного переменного, обладает другими возможностями, которые были отмечены в главе 1.

В самом деле, на основе ВИМ математическая модель объекта найдется по экспериментальной импульсной или переходной характеристике с помощью выражений (1.4) и (1.6):

$$F(\delta) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\delta t} dt, \quad \delta \in [C, \infty), \quad C \geq 0,$$

$$\{F(\delta_i)\}_n = \{F(\delta_1), F(\delta_2), \dots, F(\delta_n)\}.$$

Эталонная модель системы в форме желаемой передаточной функции (ПФ) вида (1.5)

$$W(\delta) = \frac{b_m \delta^m + b_{m-1} \delta^{m-1} + \dots + b_1 \delta + b_0}{a_n \delta^n + a_{n-1} \delta^{n-1} + \dots + a_1 \delta + 1}$$

также может быть достаточно просто получена по какой-либо временной динамической характеристике системы.

Решение задачи синтеза регуляторов описано в главе 2 и позволяет получить эффективный алгоритм нахождения коэффициентов передаточной функции регулятора. В качестве критерия качества полученного результата целесообразно использовать близость динамических характеристик желаемой и синтезированной систем, которая наиболее полно воспринимается человеком. Критерии могут оценивать отклонения импульсных характеристик, например, в виде выражения (3.5)

$$\max_t |\Delta k(t)| = \Delta_{\min}$$

или переходных характеристик, например, на основании формулы (2.20):

$$\Delta h = \max_t |h(t) - h_m(t)|.$$

Таким образом, существует необходимое математическое обеспечение для настройки регуляторов в условиях изменения характеристик объекта управления. Основные его составляющие подробно рассмотрены в главе 2.

Ключевым элементом в реализации этого алгоритма является задача идентификации. Рассмотрим ее в целях использования при настройке регуляторов.

## 7.2. Идентификация объектов управления на основе вещественного интерполяционного метода

Рассмотрим линейный непрерывный объект, относящийся к классу одномерных, стационарных, детерминированных. Его условное представление показано на рис. 7.1.

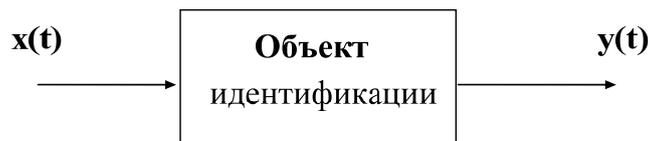


Рис. 7.1. Схема объекта идентификации

Задача идентификации заключается в получении математического описания объекта по известному входному воздействию  $x(t)$  и реакции объекта  $y(t)$ . При разработке основы алгоритма будем рассматривать максимально простую постановку задачи. Поэтому полагаем, что сигналы входа и выхода являются детерминированными и не сопровождаются погрешностями измерения. Они удовлетворяют условиям существования  $\delta$ -изображений, что позволяет найти их по формуле прямого  $\delta$ -преобразования (1.4):

$$X(\delta) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-\delta t} dt, \quad \delta \in [C, \infty[, \quad C > 0,$$

$$Y(\delta) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-\delta t} dt, \quad \delta \in [C, \infty), \quad C > 0.$$

Пусть на вход объекта подан единичный ступенчатый сигнал  $1(t) = x(t)$  и известна переходная функция  $h(t) = y(t)$  объекта. В этом случае можно записать вещественную ПФ в виде

$$W(\delta) = \frac{h(\delta)}{1/\delta},$$

где  $h(\delta)$  – изображение переходной функции  $h(t)$ ;  $1/\delta$  – изображение единичного ступенчатого сигнала  $1(t)$ .

Тогда формула связи переходной характеристики с искомой передаточной функцией  $W(\delta)$  имеет вид

$$W(\delta) = \delta \int_0^{\infty} h(t) e^{-\delta t} dt, \quad \delta \in [C, \infty), \quad C > 0.$$

На основе этого выражения найдется ЧХ  $\{W(\delta_i)\}_{\eta}$ , элементы которой определяются формулой (2.18):

$$W(\delta_i) = \delta_i \int_0^{\infty} h(t) e^{-\delta_i t} dt, \quad i = 1, 2, \dots$$

В условиях идентификационного эксперимента характеристику  $h(t)$  обычно получают в виде последовательности значений  $h(t_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ ,  $N < \infty$ . Поэтому для нахождения элементов  $W(\delta_i)$  осуществляется переход от выражения (2.18) к численному интегрированию

$$W(\delta_i) \approx \delta_i \sum_{j=0}^N h(t_j) e^{-\delta_i t_j} \Delta t.$$

Эта формула может быть расчетной для получения ЧХ объекта по экспериментальным отсчетам  $h(t_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ ,  $N < \infty$ . На практике можно в первом приближении принять  $N = 50 \div 150$ .

При формировании моделей в виде ЧХ и рассмотрении задач параметрической идентификации объектов с помощью ВИМ вопросы выбора узлов интерполирования  $\delta_i$ ,  $i = 1, \dots, \eta$  занимают центральное место. Для случая равномерной сетки расположения узлов  $\delta_i = i\delta_1$ ,  $i = 1, 2, \dots, \eta$  целесообразно использовать выражение (2.19)

$$\delta_1 = \frac{-\ln \Delta}{t_i}.$$

Второй этап решения задачи идентификации связан с получением коэффициентов передаточной функции вида (1.5) по найденной ЧХ. Для его выполнения составим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$W(\delta_i) = \frac{b_m \delta_i^m + b_{m-1} \delta_i^{m-1} + \dots + b_0}{a_n \delta_i^n + a_{n-1} \delta_i^{n-1} + \dots + 1}, \quad i = 1, \dots, \eta.$$

В левой части СЛАУ – найденные согласно (2.18) элементы ЧХ. В правой части содержатся известные узлы интерполирования  $\delta_i$ . Незвестными остаются лишь коэффициенты передаточной функции объек-

та идентификации  $a_k, k=\overline{1,n}$  и  $b_j, j=\overline{0,m}$ , которые входят в СЛАУ. Для решения системы можно использовать стандартные методы. Полученные таким образом значения  $a_k, b_j$  являются коэффициентами вещественной передаточной функции вида (1.5), что означает получение модели объекта в виде аналитического выражения.

После нахождения математической модели объекта естественно возникает вопрос о том, насколько полученная модель отражает реальные свойства объекта. Поэтому заключительный этап расчетов связан с проверкой точности полученного решения. В общем случае считается предпочтительным оценивать близость функций по критерию абсолютного максимального отклонения (2.20)

$$\Delta h = \max_t |h(t) - h_m(t)|,$$

где  $h(t), h_m(t)$  – точная переходная характеристика и ее модельное представление. Если величина погрешности  $\Delta h$  оказывается меньше заданной  $\Delta h_d$ , то задача считается решенной.

Критерий (2.20) является достаточно полным условием решения задачи идентификации. Однако, когда значения структурных параметров  $m$  и  $n$  модели объекта вида (1.5) фиксированы, а величина  $\Delta h_d$  мала, может оказаться, что задача не имеет решения. При такой перспективе более практичной будет модификация критерия (2.20)

$$\Delta h = \max_t |h(t) - h_m(t)| \rightarrow \min .$$

Другим весьма важным преимуществом этого критерия является возможность его использования в задачах идентификации, когда модель объекта представляет собой передаточную функцию с трансцендентными и иррациональными составляющими. Такой критерий достаточно прост, нагляден, отражает физическое содержание близости модели и объекта. Он обеспечивает гарантию максимально полного (в условиях поставленной задачи, например, при заданной структуре модели) соответствия модели и объекта.

### 7.3. Идентификация объектов с распределенными параметрами

Необходимость управления объектами с распределенными параметрами (РП) и значительная сложность задачи определяют практическую и теоретическую значимость разработки новых подходов к решению задачи идентификации таких объектов и систем управления ими. Можно выделить два варианта решения задачи идентификации, которые встречаются в практических задачах. Первый, наиболее значимый по сути и потому привлекательный, заключается в поиске коэффициентов

передаточной функции, которая содержит иррациональные либо трансцендентные составляющие. Трудности решения такой задачи традиционным частотным методом нетрудно себе представить уже в случае поиска одного, двух или трех коэффициентов, даже не принимаясь за решение задачи. Вторым вариантом является более щадящим по техническим и принципиальным препятствиям, так как он базируется на поиске решения в дробно-рациональной форме. Ниже рассматривается решение задачи с привлечением ВИМ. Основы использования этого метода в действиях над передаточными функциями систем с РП были изложены в главах три и четыре. Здесь дано продолжение и развитие подхода. Объекты управления с РП в общем случае могут описываться передаточными функциями вида

$$W(p) = W(e^{-\sqrt{T_1 p}}, 1/\sqrt{T_2 p}, 1/\sqrt{T_2 p + 1}, \sqrt{p}, \text{sh } p, \text{ch } p, \text{sh}\sqrt{T_4 p}, \text{ch}\sqrt{T_4 p}, \dots). \quad (7.1)$$

Обращаясь к виду такой обобщенной функции, становится очевидным, что иррациональные и трансцендентные выражения, входящие в форму, создают трудности на пути решения многих задач и они возникают вследствие особенностей таких передаточных функций. В частности, трудности сопровождают задачу идентификации – получения передаточной функции объекта с РП по экспериментальным данным, которая включает в себя выбор аппроксимирующей функции и определение значений ее параметров.

Аппроксимирующая передаточная функция  $W_a(p)$  может быть принята в одной из двух форм. В случае, если имеется существенная априорная информация об объекте, например, известна структура его математической модели, передаточная функция может быть принята в виде выражения (7.1), которая учитывает особенности объекта управления. При этом определение значений параметров модели сводится к чрезвычайно сложной вычислительной процедуре, которая далеко не всегда может быть реализована. Вторая форма является дробно-рациональной и потому задача будет значительно более простой.

В рамках ВИМ в силу специфики численного решения и действий с функциями вещественного аргумента значительно задача упрощается, по крайней мере она достигает уровня, когда препятствия не являются непреодолимыми. Решение ищется в два этапа. На первом этапе по экспериментальной переходной характеристике  $h(t)$  объекта определяется его ЧХ  $\{W(\delta_i)\}_n$ . Вторым этапом является в решении системы уравне-

ний  $W_a(\delta_i) = \delta_i h(\delta_i)$ , сформированной на основе выражения (7.1), где  $h(\delta_i)$  – элементы ЧХ переходной характеристики  $h(t)$ :

$$h(\delta_i) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-\delta_i t} dt, \quad i = 1, \dots, \eta.$$

В развернутой форме система принимает вид

$$W_a(e^{-\sqrt{T_1 \delta_i}}, 1/\sqrt{T_2 \delta_i}, 1/\sqrt{T_3 \delta_i + 1}, \sqrt{\delta_i}, sh \delta_i, ch \delta_i, sh \sqrt{T_4 \delta_i}, ch \sqrt{T_5 \delta_i}, \dots) = \delta_i h(\delta_i).$$

Решение удастся найти, если число искомых параметров  $T, T_1, \dots, a, b, c, \dots$  невелико. Переход к модели вида (7.1) осуществляется очевидной заменой  $\delta \rightarrow p$ .

Другая аппроксимирующая форма описания моделей РП является дробно-рациональной

$$W_a(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + 1}, \quad m < n. \quad (7.2)$$

Она по всей видимости будет менее точной, однако при этом трудности определения коэффициентов  $a_k, k = \overline{1, n}$  и  $b_j, j = \overline{0, m}$ , резко уменьшаются, а сама вычислительная процедура по затратам оказывается сравнимой со случаем систем с сосредоточенными параметрами.

С позиций получения математических моделей вида (7.1) подход открывает возможность идентификации объектов с учетом структурных особенностей передаточных функций. Этот подход трудно переоценить, т. к. других путей, сравнимых по вычислительной простоте алгоритма и просто по возможности получения моделей заданного класса, в общем случае не существует. Переход к определению параметров, входящих в иррациональное либо трансцендентное выражения, делает задачу практически неразрешимой. В этом смысле ВИМ снимает столь серьезные ограничения и дает возможность поиска моделей в классе рассматриваемых математических описаний.

Очевидно, что форма (7.1) приводит к более точным моделям, но имеет принципиальные особенности и трудности реализации, которые требуют специального рассмотрения в каждом конкретном случае. Поэтому с точки зрения общности описания разнообразных объектов с распределенными параметрами бóльший интерес представляет дробно-рациональная форма вида (7.2).

Будем считать, что в выражении (7.2) параметры  $m$  и  $n$  известны. Они обычно достаточно точно задаются на основе априорной информации, предыдущих исследований и т. д. Тогда решение задачи идентифи-

кации, базирующееся на выражениях (7.1), (7.2) можно представить следующими относительно самостоятельными этапами:

- 1) выбор закона распределения и значения узлов интерполирования  $\delta_i$ ;
- 2) расчет численной характеристики  $\{W_a(\delta_i)\}_\eta$ ;
- 3) формирование на основе формулы (7.2) системы линейных алгебраических уравнений и ее решение;
- 4) оценивание точности идентификации на основе критерия (2.20).

Для выполнения этапов можно использовать методiku и алгоритмы, которые были разработаны и использовались при идентификации ОУ с сосредоточенными параметрами. Рассмотрим решение задачи идентификации на примере системы, структурная схема которой представлена на рис. 7.2.

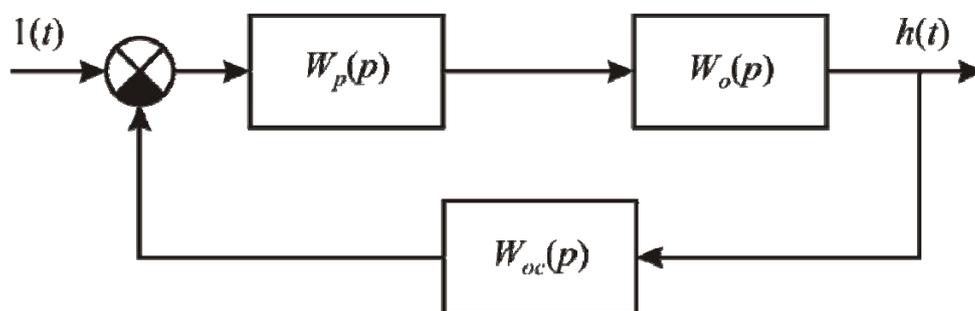


Рис. 7.2. Блок-схема системы с распределенными параметрами

**Пример.** Здесь передаточная функция объекта управления имеет вид

$$W_o(p) = \frac{0,7 \cdot ch 0,4p}{sh p + 11p \cdot sh p},$$

передаточная функция регулятора

$$W_p(p) = \frac{16,572p + 0,063}{852,668p^2 + 153,612p + 1},$$

передаточная функция в цепи обратной связи  $W_{oc}(p) = \frac{0,26}{30p + 1},$

желаемая переходная характеристика системы

$$h(t) = 3,846 - 3,846 \cdot e^{-0,0187t} \cdot \cos(0,01625 \cdot t) - 0,673 \cdot e^{-0,0187t} \cdot \sin(0,01625 \cdot t)$$

Задача заключается в определении передаточной функции замкнутой системы в дробно-рациональной форме вида

$$W^3(p) = \frac{b_2p^2 + b_1p + b_0}{a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + 1}.$$

Значение коэффициента  $b_0$  находится из установившегося режима:  $b_0 = 3,846$ . Зависимость  $h(t)$  показана на рис. 7.3. Здесь величина пере-

регулирования менее 4 % и время регулирования  $t_c \approx 97$  с. Время наблюдения переходного процесса  $T \approx 5t_c = 500$  с.

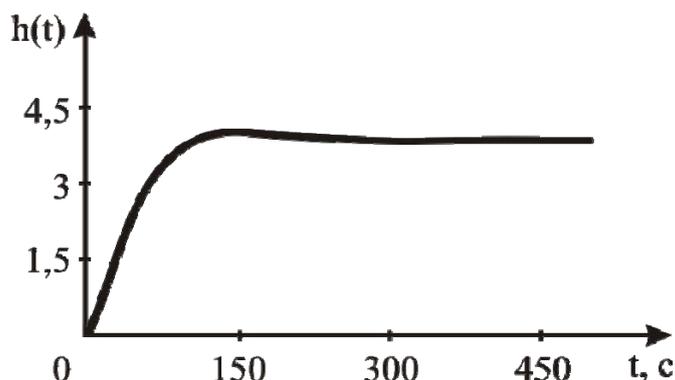


Рис. 7.3. График  $h(t)$  системы с распределенными параметрами

На основании исходных данных можно записать аналитическое выражение для замкнутой системы:

$$W^3(p) = \frac{\frac{16,572p + 0,063}{852,668p^2 + 153,612p + 1} \cdot \frac{0,7 \cdot ch 0,4p}{sh p + 11p \cdot sh p}}{1 + \frac{16,572p + 0,063}{852,668p^2 + 153,612p + 1} \cdot \frac{0,7 \cdot ch 0,4p}{sh p + 11p \cdot sh p} \cdot \frac{0,26}{30p + 1}}$$

Традиционный подход к преобразованию такого выражения к искомой дробно-рациональной форме, например, с помощью теоремы вычетов и метода цепных дробей представляет собой весьма трудную задачу. В случае использования ВИМ решение значительно упрощается.

Задаем значения узлов интерполирования:

$$\delta_i = i\delta_1, \quad i = 1, 2, \dots, \eta, \quad \eta = m+n, \quad m=2, \quad n=3;$$

$$\delta_1 = \frac{\Delta}{T}, \quad \Delta = 4,9;$$

$$\delta_i = \{0,0098; 0,02; 0,029; 0,039; 0,049\}.$$

Определяем численную характеристику замкнутой системы с помощью выражения:

$$\{W^3(\delta_i)\}_\eta = \delta_i \sum_{j=0}^N h_j(t) e^{-\delta_i t} \Delta t, \quad i = \overline{1, \eta}, \quad \eta = 5, \quad N = 200, \quad \Delta t = 2,5;$$

$$\{W^3(\delta_i)\}_\eta = \{2,72; 2,053; 1,61; 1,312; 1,102\}.$$

Составляем и решаем СЛАУ вида

$$W^3(\delta_i) = \frac{b_2 \delta_i^2 + b_1 \delta_i + b_0}{a_3 \delta_i^3 + a_2 \delta_i^2 + a_1 \delta_i + 1}, \quad i = \overline{1, 5}, \quad b_0 = 3,846.$$

После решения системы уравнений находим коэффициенты передаточной функции  $W^3(\delta)$ :

$$b_2 = 9,492 \cdot 10^3; b_1 = 295,764; a_3 = 1,574 \cdot 10^5; a_2 = 4,496 \cdot 10^3; a_1 = 41,517.$$

Отсюда

$$W^3(\delta) = \frac{9,492 \cdot 10^3 \delta^2 + 295,764 \delta + 3,484}{1,574 \cdot 10^5 \delta^3 + 4,496 \cdot 10^5 \delta^2 + 41,517 \delta + 1}.$$

Осуществив подстановку  $p \rightarrow \delta$ , получаем выражение для передаточной функции модели замкнутой системы по Лапласу

$$W^3(p) = \frac{9,492 \cdot 10^3 p^2 + 295,764 p + 3,484}{1,574 \cdot 10^5 p^3 + 4,496 \cdot 10^5 p^2 + 41,517 p + 1}.$$

Результаты моделирования показаны на рис. 7.4, где  $h(t)$  – желаемая переходная характеристика системы,  $h_m(t)$  – переходная характеристика полученной модели. Относительная ошибка составляет менее 2 %.

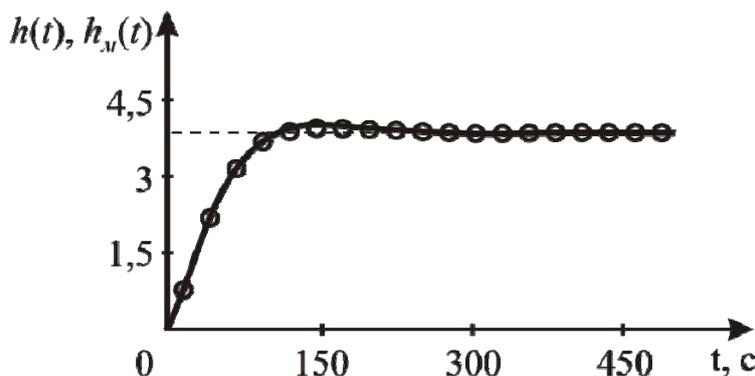


Рис. 7.4. Графики желаемой переходной функции системы  $h(t)$  и переходной характеристики модели  $h_m(t)$

Приведенный пример иллюстрирует возможность использования алгоритма ВИМ-идентификации, разработанного для идентификации ОУ с сосредоточенными параметрами для решения задачи идентификации объектов с распределенными параметрами. Фактически задача по-прежнему заключается в использовании переходной характеристики  $h(t)$  ОУ, которая учитывает влияние распределенности параметров и позволяет получать модели объектов в виде дробно-рациональной ПФ.

Таким образом, можно отметить привлекательную с практической точки зрения особенность используемого подхода на основе ВИМ в решении задачи идентификации: при поиске дробно-рациональных ПФ для объектов как с распределенными, так и с сосредоточенными параметрами, отпадает необходимость в разработке специальных алгоритмов и программ для каждого отдельного класса систем.

#### **7.4. Идентификация цифровых систем и объектов управления на основе вещественного интерполяционного метода**

Для современной техники управления характерно широкое использование различных цифровых устройств, используемых не только для получения и обработки информации, но и для непосредственного управления процессами. Прогресс в развитии микроэлектроники привел к улучшению основных качественных и количественных показателей контроллеров, применяемых в цифровых системах управления. В свою очередь это сделало возможным значительно улучшить динамические свойства систем управления и более эффективно решать задачи адаптации, оптимизации, диагностики и др. В то же время успешное их решение невозможно без получения и использования адекватного математического описания объекта управления.

Методы идентификации цифровых объектов во многих случаях удобно классифицировать по области описания математической модели: в области времени и в области изображений, в частности, в области  $z$ -изображений и частотной области. Методы временной группы обладают сравнительно невысокой помехоустойчивостью и в общем случае требуют значительных вычислительных затрат. В случае представления модели системы с помощью частотных характеристик число операций оказывается сравнительно высоким из-за необходимости вычисления амплитудных и фазовых частотных характеристик объектов по довольно сложному алгоритму. Наиболее широкое распространение получило использование аппарата  $z$ -преобразования для идентификации модели цифровых объектов. Однако и в этом случае решение задачи идентификации на практике связано со значительными трудностями, прежде всего вычислительными. В этом отношении большие возможности предоставляет ВИМ, который близок к методам  $z$ -преобразования, решая задачу в области изображений, но резко снижает объем вычислений.

Цифровые системы имеют две важные особенности по сравнению с непрерывными. Во-первых, они относятся к классу нелинейных из-за статических характеристик цифровых преобразователей. Во-вторых, в них осуществляется дискретизация сигналов во времени. Последнее обстоятельство является следствием принципиальной особенности таких систем и должно быть в полной мере учтено. В отношении первой особенности – нелинейности цифровых элементов – имеются общепринятые приемы, направленные на линеаризацию систем и использование таких моделей на первых этапах решения задач. Обычно пренебрегают влиянием нелинейностей цифровых элементов, обоснованно полагая достаточно высокой их разрядность. Это позволяет перевести систему

в класс импульсных и значительно упростить решение задачи. В дальнейшем воспользуемся этим приемом.

Задачу идентификации цифровых объектов можно решать двумя путями – на основе непрерывной и цифровой модели. В первом случае используется косвенный путь: по экспериментальным отсчетам  $X(nT_0)$  и  $Y(nT_0)$  находится передаточная функция  $W_0(p)$ , которая в последующем переводится в класс дискретных. Во втором случае ищется непосредственно дискретная передаточная функция  $W_0(z)$  идентифицируемого объекта, структурная схема которого представлена на рис. 7.5.

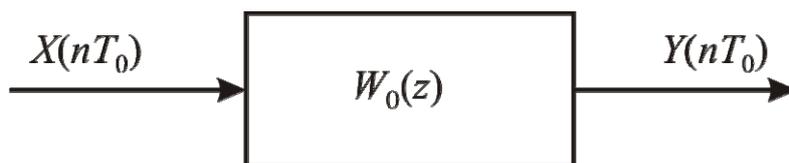


Рис. 7.5. Структурная схема идентифицируемого объекта

При использовании любого из этих подходов задача идентификации объекта формулируется следующим образом. Известны входной  $X(nT_0)$  и выходной  $Y(nT_0)$  сигналы, где  $T_0$  – период квантования. Необходимо определить параметры передаточной функции вида

$$W_0(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + 1}, \quad n \geq m, \quad (7.3)$$

по уравнению  $Y(z) = W_0(z)X(z)$ , где  $Y(z) = Z\{Y(nT)\}$ ,  $X(z) = Z\{X(nT)\}$ .

Обычно задача упрощается до параметрической, когда структурные показатели  $m, n$  заданы. Наибольший интерес с практической точки зрения представляет случай подачи на вход единичного ступенчатого сигнала  $X(nT_0)$ . Тогда задача сводится к получению ПФ  $W_0(z)$  из уравнения

$h(z) = W_0(z) \cdot \frac{z}{z-1}$ , в котором  $h(z)$  – изображение переходной ха-

рактеристики  $h(nT_0)$ ,  $\frac{z}{z-1}$  – изображение единичного ступенчатого сигнала.

При решении задачи косвенным способом процедуру идентификации параметров  $W_0(z)$  в общем случае можно представить как последовательность следующих основных этапов:

- 1) получение непрерывной передаточной функции объекта управления  $W_0(p)$  по его известной переходной характеристике  $h(t)$ ;
- 2) переход от непрерывной передаточной функции  $W_0(p)$  к дискретной  $W_0(z)$ .

Способы и алгоритмы решения первой задачи достаточно известны и были подробно рассмотрены в предыдущих главах. Принципиально важной является последняя задача – переход от непрерывной функции  $W_0(p)$  к дискретной  $W_0(z)$ . Решение такой задачи можно осуществить несколькими способами. На практике наиболее распространены табличный метод и метод Тастина. Первый основан на разложении ПФ  $W_0(p)$  в виде суммы простых слагаемых и использовании таблиц соответствия. Во втором случае вводят подстановку  $p = \frac{z-1}{z+1} \cdot \frac{1}{T_0}$ , где  $T_0$  –

период квантования. Табличный метод позволяет получать точное представление непрерывной ПФ ее дискретным аналогом, но при этом требует выполнения дополнительного этапа – разложения дробно-рациональной ПФ  $W_0(p)$  на сумму простых слагаемых. Метод Тастина отличается простотой применения и небольшим количеством вычислительных операций. Однако результат решения задачи не всегда удовлетворяет предъявляемым требованиям по точности, поскольку является приближенным.

Общей проблемой при использовании различных алгоритмов идентификации остается довольно сложная процедура получения математических моделей исследуемых объектов, требующая для своей реализации существенных вычислительных затрат. Характерным примером в этом отношении можно рассматривать частотный метод. По этой причине разработка более эффективных в вычислительном смысле способов решения задачи идентификации остается актуальной как для непрерывных, так и для случая дискретных систем.

Определенные перспективы в реализации этих возможностей дает применение ВИМ, поскольку распространение вещественного интегрального преобразования на рассматриваемый класс объектов не встречает принципиальных трудностей. Кроме того, задача перехода от непрерывных передаточных функций к дискретным также сравнительно просто решается в рамках ВИМ. Понятие вещественного изображения распространяется на описание импульсных систем и протекающих в них процессов. Для выполнения численных действий над вещественными изображениями необходимо перейти от непрерывных функций  $F(v)$  к их дискретным аналогам, как это описано в главе 4. Под ними, как и в случае непрерывного вещественного преобразования, понимают совокупность значений

$$\{F(v)\}_\eta = \{F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_\eta)\}, \eta = m + n + 1,$$

заданных на сетке  $1 < v_1 < v_2 < \dots < v_\eta$ . Значения узлов интерполирования  $v_i, i \in \overline{1, \eta}$  могут назначаться по известным рекомендациям, изложенным в главе 4.

Это позволяет, в частности, записать уравнение вход-выход объекта в терминах  $\nu$ -преобразования (4.27)

$$Y(\nu) = W(\nu)X(\nu).$$

Рассмотрим приложение аппарата вещественных функций-изображений и ЧХ к решению задачи идентификации. Предположим, что  $X(\nu)$  – изображение единичного входного сигнала,  $Y(\nu)$  – реакция объекта на это входное воздействие. По формуле прямого преобразования для случая принятого входного сигнала можно найти изображение

$X(\nu) = \frac{\nu}{\nu-1}$ , где  $\nu \in [1, \infty)$ . Выходной сигнал объекта  $Y(\nu)$  по определению будет представлять собой изображение переходной характеристики  $h(\nu)$ . В этом случае уравнение объекта, базирующееся на вещественной передаточной функции  $W(\nu)$ , будет определяться выражением (4.40)

$$h(\nu) = W(\nu) \frac{\nu}{\nu-1}, \quad \nu \in [C, \infty), \quad C = 1.$$

Приведенные сведения позволяют перейти непосредственно к решению задачи параметрической идентификации. Задача заключается в определении коэффициентов вещественной ПФ

$$W(\nu) = \frac{b_m \nu^m + b_{m-1} \nu^{m-1} + \dots + b_0}{a_n \nu^n + a_{n-1} \nu^{n-1} + \dots + 1}, \quad (7.4)$$

по переходной характеристике, представленной своим вещественным изображением  $h(\nu)$ . Для решения задачи будем использовать численные характеристики переходной функции  $\{h(\nu_i)\}_\eta$  и входного сигнала

$\left\{ \frac{\nu_i}{\nu_i - 1} \right\}_\eta$ . Размерность  $\eta$  характеристик принимаем равной числу неиз-

вестных коэффициентов ПФ (7.4):  $\eta = m + n + 1$ . В этом случае равенство (7.4) можно развернуть в систему  $\eta$  линейных алгебраических уравнений, которая имеет решение и оно единственно /4/.

Техника формирования СЛАУ включает в себя получение ЧХ единичного ступенчатого сигнала и переходной характеристики  $\{h(\nu_i)\}_\eta$ .

Элементы  $X(\nu_i) = \frac{\nu_i}{\nu_i - 1}$ ,  $\nu_i > 1$  находятся расчетным путем, а получение

ЧХ  $\{h(\nu_i)\}_\eta$  можно осуществить, зная последовательность  $h(nT_0)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  с помощью выражения (4.41):

$$h(\nu_i) = \sum_{n=0}^N h(nT_0) \nu_i^{-n}, \quad \nu_i \in [1, \infty).$$

Здесь параметр  $N$  определяется моментом времени, который считается временем окончания переходного процесса в системе. При выбранных узлах  $\nu_i$  определены ЧХ  $\{X(\nu_i)\}_\eta$  и  $\{h(\nu_i)\}_\eta$ .

Они позволяют найти ЧХ искомой ПФ:

$$W(\nu_i) = \frac{\nu_i - 1}{\nu_i} \cdot h(\nu_i), \quad i = \overline{1, \eta}, \quad \eta = m + n + 1.$$

Теперь имеются все необходимые данные для вычисления коэффициентов ПФ (7.4). Задача свелась к решению СЛАУ

$$W(\nu_i) = \frac{b_m \nu_i^m + b_{m-1} \nu_i^{m-1} + \dots + b_0}{a_n \nu_i^n + a_{n-1} \nu_i^{n-1} + \dots + 1} \cdot \frac{\nu_i - 1}{\nu_i}, \quad i = \overline{1, \eta}, \quad \eta = m + n + 1 \quad (7.5)$$

Поиск решения может осуществляться известными методами, т. к. СЛАУ не содержит каких-либо особенностей. Единственный существенный момент заключается в том, что для устранения проблем, описанных в п. 2.5.4, необходимо включить в состав СЛАУ выражение вида (4.4.2)

$$h(nT)_{n \rightarrow \infty} = \frac{b_m + b_{m-1} + \dots + b_0}{a_n + a_{n-1} + \dots + 1},$$

обеспечивающего совпадение установившихся значений идентифицируемой системы и ее модели. Включение уравнения (4.4.2) в состав СЛАУ (7.5) снимает проблему выбора первого узла интерполирования  $\nu_1$ .

Таким образом, существует последовательность действий, которая позволяет по отсчетам  $h(nT_0)$ , полученных экспериментальным путем, найти коэффициенты вещественной ПФ. Для перехода к  $z$ -форме  $W(z)$  достаточно в выражении (7.4) осуществить замену  $\nu \rightarrow z$ , что допустимо для устойчивых систем и является важной практической возможностью ВИМ и вещественного дискретного преобразования.

Последним этапом в решении задачи идентификации цифрового объекта является оценивание погрешности полученного решения и, если это необходимо, его коррекция, обычно сводящаяся к минимизации погрешности. В качестве критерия близости можно использовать выражение на основе критерия (2.20)

$$\Delta h = \max_n |\Delta h(nT_0)| = \max_n |h_{\text{мод}}(nT_0) - h_{\text{пр}}(nT_0)| \rightarrow \min.$$

Как можно заметить, алгоритм решения задачи идентификации цифровых объектов является достаточно простым для практической реализации. Единственным существенным вопросом при решении задачи ВИМ-идентификации цифровых объектов можно считать неопределенность с порядком полиномов числителя и знаменателя  $m$  и  $n$  выражения (7.4). В данном случае не всегда возможно, как в случае непрерывных систем, так же свободно задавать структуру передаточной функции модели объекта.

Однако этот вопрос разрешается определенными способами. Идея заключается в использовании аппарата чисел обусловленности, который позволяет составлять суждения о структуре передаточной функции модели, удовлетворяющей требованиям успешного решения задачи идентификации цифрового объекта. Рассмотрим этот вопрос.

Пусть СЛАУ (7.5) представлена в матричной форме

$$D \cdot K = W,$$

где

$$K = [b_m, b_{m-1}, \dots, b_0, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]^T;$$

$$W = [W(v_1) \cdot v_1, W(v_2) \cdot v_2, \dots, W(v_\eta) \cdot v_\eta]^T;$$

$$D = \begin{bmatrix} v_1^{m+1} - v_1^m & v_1^m - v_1^{m-1} & \dots & v_1 - 1 & -W(v_1) \cdot v_1^{n+1} & \dots & -W(v_1) \cdot v_1 \\ v_2^{m+1} - v_2^m & v_2^m - v_2^{m-1} & \dots & v_2 - 1 & -W(v_2) \cdot v_2^{n+1} & \dots & -W(v_2) \cdot v_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{\eta-1}^{m+1} - v_{\eta-1}^m & v_{\eta-1}^m - v_{\eta-1}^{m-1} & \dots & v_{\eta-1} - 1 & -W(v_{\eta-1}) \cdot v_{\eta-1}^{n+1} & \dots & -W(v_{\eta-1}) \cdot v_{\eta-1} \\ v_\eta^{m+1} - v_\eta^m & v_\eta^m - v_\eta^{m-1} & \dots & v_\eta - 1 & -W(v_\eta) \cdot v_\eta^{n+1} & \dots & -W(v_\eta) \cdot v_\eta \end{bmatrix}.$$

Числа обусловленности позволяют получить количественную оценку качества и возможности решения СЛАУ различной размерности, которая определяется порядком степеней полиномов передаточной идентифицируемой системы. Для практических целей ВИМ – идентификации целесообразно использовать стандартное число обусловленности вида

$$K_3(D) = \|D^{-1}\| \cdot \|D\|,$$

которое может быть найдено на основе вычисления векторных норм для матриц известных коэффициентов левой части СЛАУ  $D^{-1}$  и  $D$ :

$$\|D\| = \max_j \sum_{i=1}^N |\lambda_{ij}|,$$

$$\|D^{-1}\| = \max_j \sum_{i=1}^N |\lambda_{ij}^{-1}|,$$

где  $\lambda_{ij}$ ,  $\lambda_{ij}^{-1}$  – элементы матриц  $D$  и  $D^{-1}$  соответственно,

$$\|D^{-1}\| \geq \max \frac{1}{|\lambda_d|} = \frac{1}{\min |\lambda_d|}.$$

Отсюда выражение для нахождения стандартного числа обусловленности  $K_3(D)$  принимает вид:

$$K_3(D) = \frac{\max |\lambda_d|}{\min |\lambda_d|}.$$

Такой подход к определению стандартного числа обусловленности позволяет избежать весьма существенных трудностей нахождения

обратной матрицы  $D^{-1}$  и оценивать погрешность решения СЛАУ по информации лишь о собственных значениях матрицы  $D$ . Указанная особенность является благоприятной, поскольку эти значения находятся в процессе реализации алгоритма ВИМ-идентификации, и применение стандартного числа обусловленности  $K_3(D)$  для оценивания точности полученного решения не требует существенного увеличения вычислительных затрат.

Отслеживая изменения величины стандартного числа обусловленности в каждом конкретном случае, можно найти наилучшее соотношение параметров структуры модели. Значение  $K_3(D) = 1$  свидетельствует о наиболее благоприятном случае, когда оценка относительной погрешности решения задачи идентификации совпадает с оценкой относительной погрешности исходных данных. К сожалению, такая ситуация редко возникает в практических задачах. Часто  $K_3(D) \gg 1$  и имеет порядок сотен, тысяч и более. Величину  $K_3(D)$  можно рассматривать как количественный показатель решения задачи: можно ли улучшить решение путем увеличения параметров  $m$  и  $n$ , насколько сильна некорректность задачи и т. д. Для нас важна, в частности, следующая оценка ситуации: резкое увеличение значения  $K_3(D)$  свидетельствует о возрастании ошибки при решении системы линейных алгебраических уравнений.

С помощью чисел обусловленности  $K_3(D)$  можно делать некоторые выводы относительно структуры модели объекта идентификации. При первоначальных малых значениях параметров модели  $m$  и  $n$  значение  $K_3(D)$  будет наиболее близким к наилучшему случаю  $K_3(D) = 1$ , хотя величины относительной ошибки  $\Delta h(nT_0)$  временных динамических характеристик объекта и его модели могут быть значительными. С целью уменьшения ошибки  $\Delta h(nT_0)$  следует увеличивать  $m$  и  $n$ . Однако при этом будет происходить рост величины  $K_3(D)$ . Таким образом, при увеличении степеней полиномов ПФ модели будут присутствовать две тенденции: увеличение точности получаемой модели и возрастание погрешности вычислений. На некотором этапе может сложиться ситуация, когда дальнейшее уменьшение относительной ошибки  $\Delta h(nT_0)$  за счет усложнения структуры модели окажется не в состоянии компенсировать погрешность, вносимую погрешностями вычислений и некорректностью задачи. Это проявляется в виде резкого иногда лавинообразного нарастания величины  $K_3(D)$ , что показывает возрастание ошибки при решении СЛАУ. Полученная информация позволяет обоснованно выбрать значения  $m$  и  $n$ , при которых модель объекта будет иметь наименьшую погрешность.

Проиллюстрируем изложенный подход к идентификации на примере.

**Пример.** Известна переходная характеристика цифрового объекта  $h[nT_0]$ , аналитическое выражение для огибающей которой имеет вид

$$h_o(t) = 1 - 2,3 \cdot 0,368^t + 1,5 \cdot 0,135^t - 0,2 \cdot (1,832 \cdot 10^{-2})^t.$$

Известно время квантования  $T_0 = 1$  с и время установления  $t_p = 6$  с.

Необходимо найти модель цифрового объекта вида (7.3)

$$W(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + 1}, \quad n \geq m$$

для различных значений параметров  $m$  и  $n$ . Для каждой из полученных моделей найдем огибающие их переходных характеристик, оценим близость полученных решений к  $h_o(nT_0)$  по критерию (2.20). Результаты вычислений для различных значений  $m$  и  $n$  приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

*Результаты идентификации цифрового объекта для моделей различной структуры*

№	m	n	$\nu_i$	ЧХ $\{W(\nu_i)\}_n$	Стандартное число обусловленности $K_3(D)$	Коэффициенты ПФ $W(z)$	$\Delta h_{\max}, \%$
1	0	1	1,667 3,333 6,667	0,979 0,206 0,073	1,67	$b_0 = -0,751$ $a_1 = -1,751$	21
2	1	1	1,667 3,333 6,667 10	0,979 0,206 0,073 0,043	44,40	$b_1 = 9,807 \cdot 10^3$ $b_0 = -0,699$ $a_1 = -1,690$	14
3	1	2	2 4 8 12 16	0,589 0,152 0,057 0,035 0,025	44,40	$b_1 = -1,350$ $b_0 = -1,695$ $a_2 = -3,921$ $a_1 = -0,123$	6
4	2	2	2 4 8 12 16 20	0,589 0,152 0,057 0,035 0,025 0,020	$1,73 \cdot 10^3$	$b_2 = -4,215 \cdot 10^{-3}$ $b_1 = -1,423$ $b_0 = -1,882$ $a_2 = -4,243$ $a_1 = -0,067$	4
5	2	3	2 4 8 12 16 20 24	0,589 0,152 0,057 0,035 0,025 0,020 0,016	$4,10 \cdot 10^3$	$b_2 = -12,107$ $b_1 = -0,878$ $b_0 = 2,402$ $a_3 = -34,277$ $a_2 = 32,734$ $a_1 = -10,042$	1

6	3	3	2	0,589	$1,60 \cdot 10^5$	$b_3 = -5,570 \cdot 10^{-8}$ $b_2 = -11,194$ $b_1 = -0,394$ $b_0 = 2,425$ $a_3 = -31,691$ $a_2 = 31,445$ $a_1 = -9,917$	1
			4	0,152			
			8	0,057			
			12	0,035			
			16	0,025			
			20	0,020			
			24	0,016			
			28	0,014			
7	3	4	—	—	—	—	—

Прочерк в графах таблицы указывает на существенные вычислительные трудности получения модели в классе устойчивых систем, связанные в первую очередь с некорректностью задачи и вычислительными погрешностями. Для полученных моделей различной структуры были построены графики огибающих переходных характеристик  $h(t)$  и относительной ошибки  $\Delta h(nT_0), \%$ , представленные на рис. 7.6.

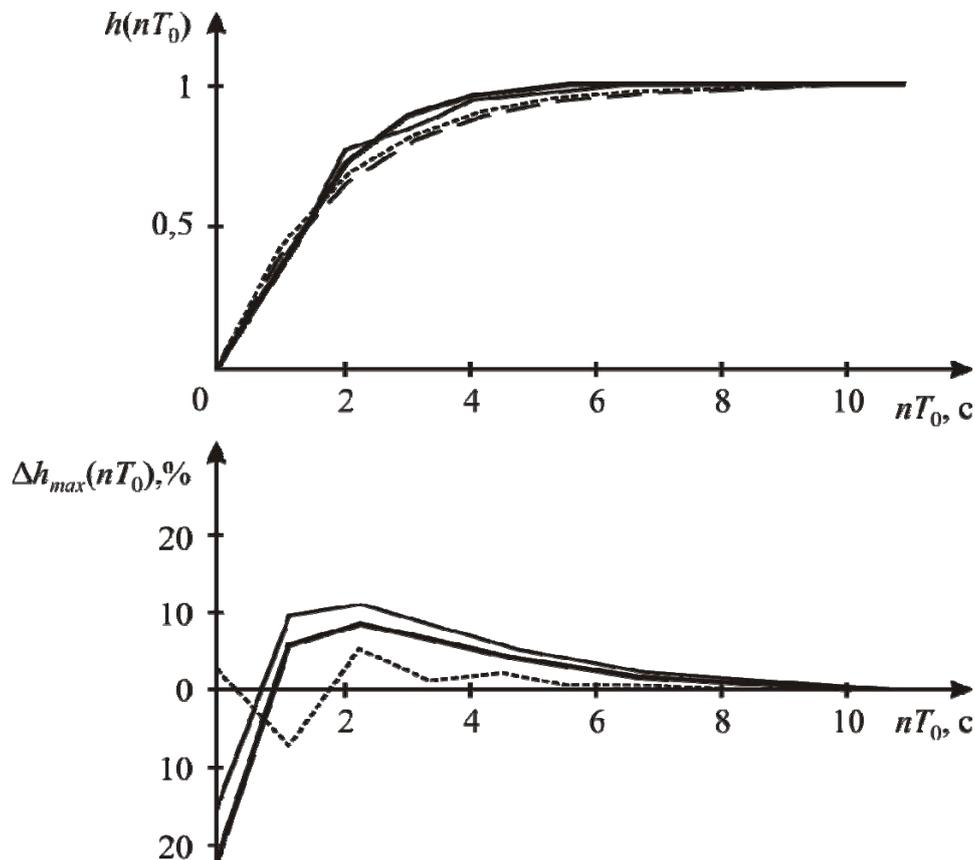


Рис. 7.6. Графики огибающих переходных характеристик  $h(t)$  и относительных ошибок  $\Delta h(nT_0)$  для моделей различной структуры

Из таблицы и рисунков видно, что при возрастании параметров  $m$  и  $n$  точность идентификации увеличивается. При этом число  $K_3(D)$  имеет минимальное значение 1,67 при  $m = 0, n = 1$ . Последующее увеличение

$m$  и  $n$  приводит к снижению относительной ошибки  $\Delta h(nT_0)$  и росту числа  $K_3(D)$  вплоть до десятков тысяч, например, при  $m=3$ ,  $n=3$  значение  $K_3(D)$  возрастает до  $1,6 \cdot 10^5$ , а относительная ошибка  $\Delta h(nT_0)$  не превышает 1 %. Дальнейшее увеличение значений  $m$  и  $n$  даже на единицу приводит к тому, что получить модель цифрового объекта уже не удастся. Наиболее вероятная причина – резкий рост вычислительной погрешности, обусловленной некорректностью задачи. На основании полученных результатов можно определить структуру модели параметрами  $m=3$ ,  $n=3$ . Дальнейшее снижение погрешности идентификации возможно на основе применения методов регуляризации, но эти вопросы не входят в задачу пособия и поэтому не рассматриваются.

Таким образом, результаты расчетного примера подтверждают возможность использования подхода на основе ВИМ для идентификации дискретных систем с передаточными функциями различной структуры с учетом требований критерия точности (2.20). Подобный подход позволяет использовать на практике алгоритм идентификации цифровых объектов управления, создает благоприятные предпосылки для решения задачи синтеза регуляторов цифровых систем управления.

Необходимо отметить еще одно важное свойство алгоритма идентификации на основе ВИМ. Наряду с рассмотренными случаями вещественный интерполяционный метод предоставляет возможность получения математической модели объектов управления и с учетом их нелинейности. Это обстоятельство представляется весьма важным с позиций повышения функциональных возможностей САУ и заслуживает отдельного рассмотрения.

### **7.5. Идентификация нелинейных объектов на основе вещественного интерполяционного метода**

Как известно, задача идентификации объектов становится особенно сложной в тех случаях, когда приходится учитывать нелинейность объектов. Существует несколько способов решения таких задач. Наиболее распространен подход, основанный на представлении нелинейной характеристики в виде рядов Вольтерра. Но из-за значительных вычислительных трудностей, возникающих при применении таких рядов, его применение во встроженных вычислительных системах затруднительно. Поэтому актуален поиск более простых алгоритмов, обеспечивающих реализацию идентификационного подхода в реальном времени.

Один из возможных подходов связан с привлечением преобразований, которые переводят задачу из области оригиналов в область изображений, что значительно уменьшает объем вычислительных опера-

ций. С целью упрощения содержательной стороны задачи и демонстрации принципиальной стороны получения решения будем рассматривать нелинейность типа «насыщение»  $y = f(x)$ , которая, видимо, наиболее распространена в элементах САУ.

Для использования ВИМ в заявленных целях заменим в формуле прямого интегрального преобразования (1.4) функцию  $f(t)$  на интересующую нас  $y(x)$

$$F(\delta) = \int_0^{\infty} y(x) \cdot e^{-\delta t} dx, \quad \delta \in [C, \infty), \quad C \geq 0. \quad (7.6)$$

Предлагаемая процедура идентификации нелинейного звена включает следующие этапы:

1. Выбор узлов интерполирования и получение модели звена в непараметрической форме – в виде численной характеристики.
2. Получение модели звена в области изображений в виде дробно-рациональной функции вида (1.5).
3. Получение модели объекта в области оригиналов и оценивание погрешности.
4. Выполнение при необходимости итеративного улучшения модели путем изменения расположения узлов интерполирования.

Поясним ключевые этапы. Первый этап имеет целью получение математической модели объекта в области изображений в форме численной характеристики. Она представляет собой совокупность значений  $\{F(\delta_i)\}_\eta$ ,  $i = \overline{1, \eta}$ , которые можно получить по выражению (7.6).

Выбор узлов интерполяции осуществляется на основе равномерной сетки, которая является, как представлено в главе 1, наиболее целесообразной для большинства задач. Значение первого узла по вычисляется по формуле, которая вытекает непосредственно из (2.19),

$$F(p) = \frac{b_0}{a_1 p + 1}, \quad (7.7)$$

где  $x_n$  – значение входной величины, при которой наступает насыщение,  $\Delta$  – параметр, определяющий погрешность отсчета насыщения.

В практических задачах целесообразно переходить от формулы (7.6) к ее дискретному представлению

$$F(\delta_i) = \delta_i \sum_j^N \left[ y(x_j) e^{-\delta_i x_j} \cdot \Delta x_j \right]. \quad (7.8)$$

Третий этап связан с получением модели объекта в области оригиналов, оцениванием погрешности и коррекцией результатов, если требуется повышение точности. Переход можно осуществить формальной заменой переменных  $\delta$  на  $p$ . Полученная форма

$$F(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + 1} \quad (7.9)$$

позволяет для перехода к модели в области оригиналов воспользоваться формулой Хевисайда

$$y(x) = \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=1}^N \frac{B(p_i)}{p_i A'(p_i)} e^{p_i x},$$

где  $B(p), A(p)$  – полиномы числителя и знаменателя выражения (7.9),  $p_i$  – корни полинома  $A(p)$ ,  $N$  – их количество.

В результате статическая характеристика нелинейного звена принимает вид

$$y(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i e^{p_i x}. \quad (7.10)$$

Эту форму можно использовать для представления не только характеристик типа «насыщение», но и других типовых нелинейных статических характеристик. Дробно-рациональная форма (7.9) позволяет надеяться на его высокие аппроксимирующие свойства и, следовательно, ограничиться незначительным числом членов ряда (7.10) для достижения приемлемой точности.

На заключительном этапе необходимо оценить точность полученного результата. Для этих целей рекомендуется применять критерий близости

$$\varepsilon = \max_j |y_s(x_j) - y_m(x_j)|, \quad (7.11)$$

где  $y_s(x)$  – экспериментальное значение статической характеристики,  $y_m(x)$  – значение, восстановленное по полученной модели.

Выбор критерия (7.11) продиктован наглядностью оценки, а также тем, что значения  $y_s(x)$  эталонной характеристики известны, в частности, она может быть получена экспериментальным путем. Механизм коррекции решения, направленный на повышение его точности, базируется на изменении значений узлов интерполирования. Имеется возможность перераспределять погрешность на интервале  $[0, x_{\max}]$ , что позволяет итерационным путем снижать максимальное отклонение вплоть до приближения к наилучшему решению.

Если в рамках применяемой коррекции оценка  $\varepsilon = \max_j |y_s(x_j) - y_m(x_j)|$  остается больше допустимой, необходимо использовать структурные возможности функции (7.9), увеличивая последовательно значения параметров  $m$  и/или  $n$ , соблюдая, однако, условие  $m < n$ .

Поясним предлагаемый подход расчетными примерами.

**Пример.** Имеется звено, статическая характеристика которого представлена на рис. 7.7. Такая характеристика является типичной для многих элементов систем автоматического управления. Экспериментальные данные определения статической характеристики звена приведены в табл. 7.1. Используем их для определения математического описания звена в форме (7.10). Решение в области изображений будем искать в максимально простой форме.

Очевидно  $b_0 = 1$ . Определим значение узла интерполирования  $\delta$  и единственное значение численной характеристики:  $\delta_1 = 0,082$ ;  $F(\delta_1) = 0,52$ .

Таблица 7.1

*Экспериментальные данные*

x	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
y	0	0,451	0,699	0,835	0,909	0,95	0,973	0,985	0,992	0,995

Алгебраическое уравнение для определения коэффициента  $a_1$  имеет вид  $-0,043 \cdot a_1 = -0,48$ , а его решение  $a_1 = 11,258$ . Модель в области изображений будет иметь

$$F(p) = \frac{1}{11,258p + 1}.$$

Перейдем в область оригиналов, получим:

$$y(x) = 1,009 - e^{-0,085x}.$$

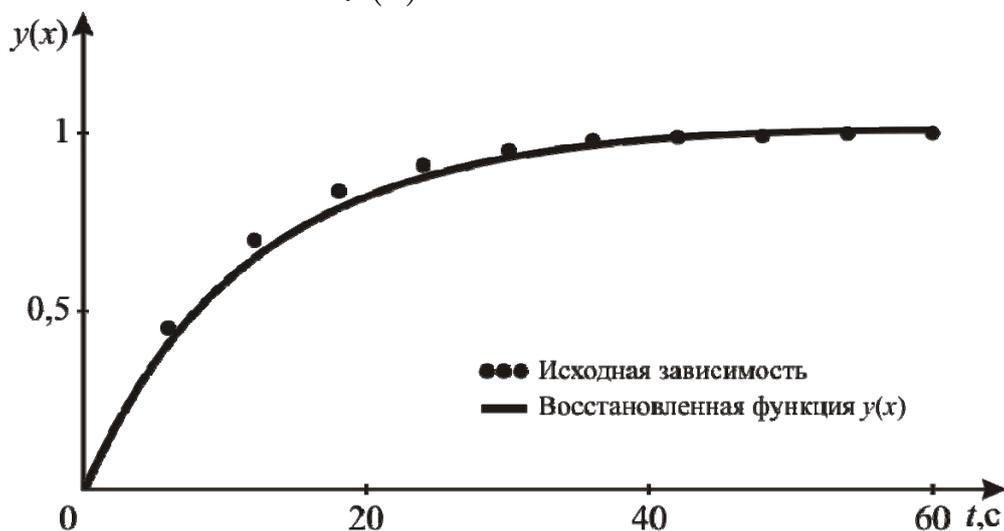


Рис. 7.7. Исходная зависимость и восстановленная функция  $y(x)$

Графики исходной экспериментальной и полученной зависимостей представлены на рис. 7.7. Погрешность решения в соответствии с (7.11) составила  $\varepsilon = 0,043$ .

**Пример.** Рассмотрим задачу получения математического описания нелинейной статической характеристики (рис. 7.8). Имеем

$$y = \begin{cases} \frac{x}{15}, & x \leq 15, \\ 1, & x > 15. \end{cases}$$

Таблица 7.2

Экспериментальные данные

x	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
y	0	0,4	0,8	1	1	1	1	1	1	1

Примем математическую модель в области изображения более сложной, учитывая, имеющийся разрыв непрерывности производной рассматриваемой функции:

$$F(p) = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}. \quad (7.12)$$

Экспериментальные данные представлены в табл. 7.2. Искомыми параметрами являются коэффициенты  $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$  и  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ . Значение коэффициента  $b_0$  определяется непосредственно по исходным данным:  $b_0 = 1$ . Для определения двух оставшихся коэффициентов примем узлы интерполирования  $\delta_1 = 0,087$ ,  $\delta_2 = 0,174$  и найдем в соответствии с (7.8) значения численной характеристики (7.12).

$$F(\delta_1) = 0,535; F(\delta_2) = 0,321.$$

Составим и решим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -4,05 \cdot 10^{-3} \cdot a_2 - 0,047 \cdot a_1 = -0,465, \\ -9,713 \cdot 10^{-3} \cdot a_2 - 0,056 \cdot a_1 = -0,679. \end{cases}$$

Ее решение:  $a_2 = 24,98$ ;  $a_1 = 7,821$ . Получим модель нелинейного звена в области изображений

$$F(p) = \frac{1}{24,98 p^2 + 7,821 p + 1}.$$

Для получения модели в форме (7.12) найдем корни полинома знаменателя  $s_1 = -0,157 + 0,125i$ ;  $s_2 = -0,157 - 0,125i$  и получим

$$y(x) = 1 + (-0,5 + 0,628i) \cdot e^{(-0,157+0,125i)x} + (-0,5 - 0,628i) \cdot e^{(-0,157-0,125i)x}.$$

Результат решения приведен на рис. 7.8, где для сравнения приведены исходные данные. Погрешность решения  $\varepsilon = 0,022$ , что для сравнительно простой аппроксимирующей функции можно считать вполне удовлетворительным результатом.

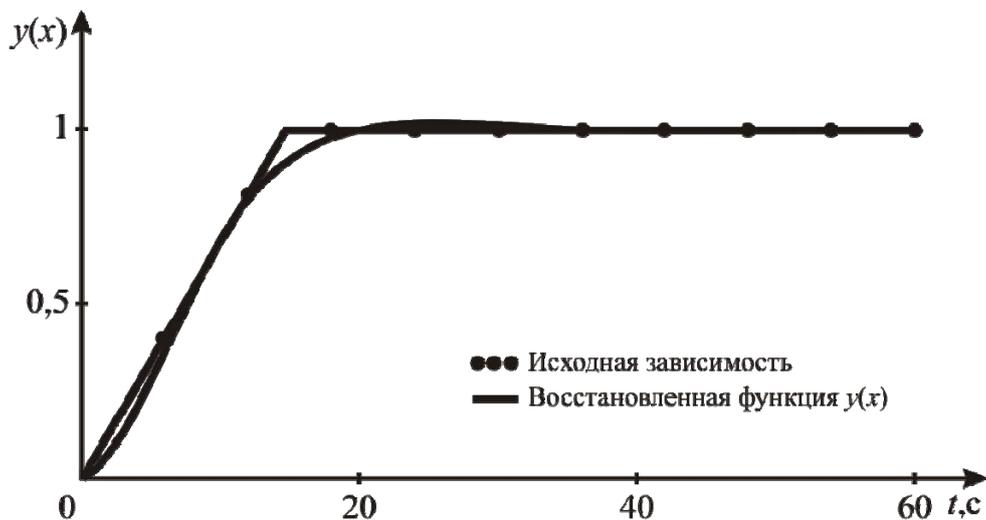


Рис. 7.8. Исходная зависимость и восстановленная функция  $y(x)$

Предложенный подход к получению моделей нелинейных статических характеристик характеризуется малым объемом вычислений и поэтому ориентирован на выстроенные в системы автоматического управления вычислительные структуры для решения задач идентификации в реальном времени. В перспективе это позволяет использовать его в самонастраивающихся системах управления, в которых необходим учет нелинейных статических характеристик, в частности, когда они могут изменяться во времени.

### 7.6. Инструментальные средства настройки регуляторов на основе вещественного интерполяционного метода

Свойства и динамические характеристики многих объектов управления могут изменяться с течением времени. Эти изменения могут быть вызваны как старением оборудования, изменением нагрузки на исполнительных механизмах или, например, изменением качества сырья, так и сменой технологических режимов. Процесс настройки регуляторов обеспечивает поддержание режима работы технологического оборудования, близкого к оптимальному. Однако процедура настройки является сложной, трудоемкой и дорогой. С целью ее упрощения используют несколько путей, в том числе автоматизированную настройку. Для ее реализации необходимы приемлемые методики и, что самое главное, аппаратные либо программно-аппаратные средства, позволяющие сократить затраты времени, устранить субъективные ошибки операторов. С целью приближения к этой цели ниже рассмотрены вопросы создания инструментальных средств на основе ВИМ, которые в определенной мере решают эту задачу.

В качестве инструментального средства может выступать автономный прибор, подключаемый непосредственно к объекту управления и позволяющий вычислять значения настраиваемых коэффициентов регулятора по желаемым, эталонным свойствам системы. Использование ВИМ в качестве математической основы для разработки подобного инструментального средства требует знания реакции объекта на какое-либо пробное воздействие. При этом требования к качеству работы контура могут задаваться в максимально приемлемой для оператора форме – в виде значений времени установления, перерегулирования и т. п. Настройки определяются в виде значений коэффициентов корректирующих П/ПИ/ПИД-звеньев. Оператор может использовать полученные значения настроек регулятора непосредственно для реализации в регуляторе или использовать их в виде рекомендуемых значений, что определяет свободу его действий и автоматизированный режим настройки. Для нахождения требуемых значений настроек регулятора необходимо установить связь динамических характеристик системы с характеристиками корректирующего звена. Первая задача, которую необходимо решить, состоит в определении математической модели объекта управления по экспериментальным данным.

Следующая задача – формирование эталонной модели системы на основе заданных показателей качества, которым должна удовлетворять настраиваемая система. Обладая математическими моделями реального объекта и эталонного контура управления, а также соответствующим программным обеспечением, устанавливающим связь между этими моделями и моделью регулятора, можно получить значения настраиваемых коэффициентов регулятора.

Задача получения указанных коэффициентов решается путем решения уравнения синтеза (2.1). Вид передаточной функции регулятора известен, так как рассматривается существующая система управления. Поэтому задача сводится к параметрическому синтезу, рассмотренному в главе 2. На основе приведенных там формул может быть осуществлена программная реализация решения задач, связанных с настройкой регулятором:

- формирования желаемой передаточной функции настраиваемой системы по перерегулированию и времени установления;
- идентификации объекта управления по его реакции на одно из входных воздействий, которые имеются в библиотеке программного обеспечения: ступенчатое, трапецеидальное с изменяемыми параметрами (наклоном стороны) и др.;
- расчета значений настраиваемых коэффициентов регулятора.

Ниже представлены алгоритмы решения этих задач на примере одноконтурной системы, представленной на рис. 7.2. Отметим, что рассматривается алгоритмическая часть прибора, которая поясняет принцип его работы, но не методическая, с которой имеет дело оператор. Действия оператора и его функции намного меньше по объему, они не связаны с выполнением расчетов – это делает контроллер прибора. Решения, которые должен принимать оператор в процедуре автоматизированной настройки, будут выделяться особо.

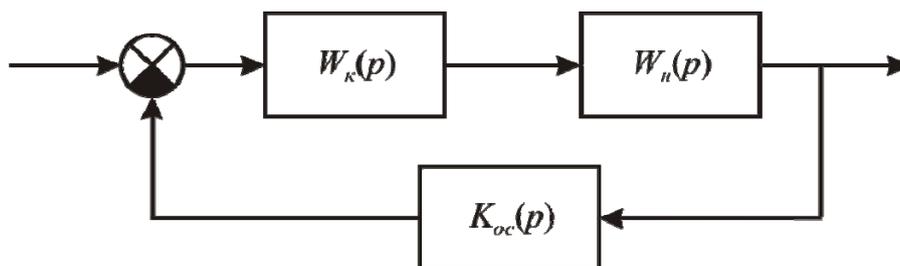


Рис. 7.2. Структурная схема одноконтурной САУ

Как было сказано, параметрическая постановка задачи сводится к решению уравнения (2.7), которое для наглядности приведем еще раз:

$$W_{\text{жс}}^p(p) \cong W_p(p)W_{\text{нч}}(p), \quad (7.13)$$

где  $W_{\text{жс}}^p(p)$ ,  $W_p(p)$ ,  $W_{\text{нч}}(p)$  – передаточные функции соответственно желаемой разомкнутой системы, регулятора и неизменяемой части системы.

Рассмотрим особенности входящих в уравнение передаточных функций.

Левая часть уравнения содержит функцию  $W_{\text{жс}}^p(p)$ , которая известна. Напомним: оператор задает показатели качества (в рассматриваемом варианте прибора их два – перерегулирование и время установления, хотя в общем случае их может быть больше); имеющаяся программа по этим показателям формирует желаемую передаточную функцию разомкнутой системы  $W_{\text{жс}}^p(p)$ .

Вторая функция, присутствующая в уравнении и которая должна быть известна, это передаточная функция неизменяемой части системы  $W_{\text{нч}}(p)$ .

До процедуры настройки она неизвестна, но определяется в результате эксперимента. Для этого на вход объекта подается так называемый пробный сигнал. Как было отмечено выше, в распоряжении оператора имеется несколько видов таких сигналов, из которых оператор выбирает подходящий для конкретных условий эксплуатации данного объекта. Кроме того, у оператора имеется возможность устанавливать величину

сигнала. Дело в том, что для некоторых объектов и технологических процессов нежелательно или невозможно снятие переходной характеристики. Причина – недопустимо вмешательство в технологический процесс на уровне полного входного сигнала. В этих случаях используют сигналы допустимой величины, например, на уровне 10–20 %. В любом случае пробные сигнал и реакция на него объекта управления позволяют имеющемуся программному обеспечению сформировать передаточную функцию, соответствующую текущему состоянию объекта управления.

Третья передаточная функция, входящая в уравнение, – искомая модель регулятора  $W_p(p)$ . Для отыскания ее используются возможности ВИМ, позволяющего развернуть уравнение (7.13) в систему линейных алгебраических уравнений.

В достаточно общем случае регулятор реализует пропорционально-интегрально-дифференциальный закон (ПИД-закон) управления:

$$W_p(p) = k_n + k_d p + \frac{k_u}{p}. \quad (7.14)$$

Эта форма коррекции динамических свойств широко распространена, прежде всего в системах повышенной точности. Подчеркнем достоинства. Во-первых, системе придается астатизм первого порядка за счет интегрирующего звена и, следовательно, устраняется ошибка в установившемся режиме. Во-вторых, регулятор имеет высокие форсирующие свойства, придающие системе повышенное быстродействие. Вместе с этим возникает вопрос физической реализации такой коррекции. Чтобы показать это, приведем правую часть выражения (7.14) к общему знаменателю:

$$W_p(p) = \frac{k_d p^2 + k_n p + k_u}{p}.$$

Как видим, такая функция не удовлетворяет условию физической реализации и потому требует изменения структуры – повышения степени переменной в знаменателе до второй. Обычно цель достигается введением фильтра  $\frac{1}{Tp+1}$ , в котором величина постоянной времени  $T$  вы-

бирается из каких-либо дополнительных условий. Обычно дополнительное условие привлекается из-за трудностей вычисления всех четырех коэффициентов. Например, используют условие подавления высокочастотных помех и тогда введенное апериодическое звено на самом деле является фильтром, пропускающим только низкочастотные сигналы. В результате получают реализуемый закон управления

$$W_p(p) = \frac{k_o p^2 + k_n p + k_u}{p(Tp + 1)} = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p(Tp + 1)}. \quad (7.15)$$

На основании уравнения (7.13) и выражения (7.15) составляется система уравнений

$$W_{ж}^p(\delta_i) = \frac{b_2 \delta_i^2 + b_1 \delta_i + b_0}{\delta_i(T\delta_i + 1)} W_{нч}(\delta_i), \quad i = 1, 2, \dots, \eta. \quad (7.16)$$

Она позволяет вычислить коэффициенты регулятора. Программное обеспечение имеет некоторые отклонения от представленной расчетной схемы. Отметим наиболее важные из них.

Система имеет четыре неизвестных коэффициента, но, как уже отмечалось в главе 2, величина коэффициента  $b_0$  может быть определена вне системы уравнений, что понижает ее размерность на единицу, то есть до трех уравнений. Второе изменение состоит в том, что, как показывает практика, в большинстве случаев настройка регуляторов связана с изменением только одного, иногда двух коэффициентов. В этих случаях вычислительная процедура резко упрощается и становится практически элементарной.

Прибор реализован на базе микроконтроллера EzS-PD-56M, который содержит ЦАП и АЦП для ввода/вывода сигналов и согласования их вида и значений с параметрами объекта управления, а также средства ввода/вывода в интересах оператора. Выбраны параметры, определяющие конкретные технические характеристики класса объектов: быстродействие, уровни входных и выходных сигналов (по току, напряжению) и др.

Экспериментальная проверка алгоритма самонастройки и созданного программного обеспечения была осуществлена на системе управления с шаговым двигателем типа EzM-56M. Структурная схема системы показана на рис. 7.3. Система управления относится к классу многоконтурных. Для эксперимента был выбран контур скорости, параметры и характеристики которого достаточно легко получать экспериментальным путем, контролировать их изменения при вариациях параметров объекта управления, наконец, использовать численные оценки – показатели качества.



Рис. 7.3. Структурная схема системы управления шаговым двигателем

Последовательность работы заключалась в следующем. В условиях отсутствия нагрузки на валу двигателя была получена переходная характеристика контура. Она представлена на рис. 7.4 и обозначена пунктирной линией. По этой экспериментальной функции была найдена модель объекта в виде передаточной функции

$$W_o(p) = \frac{1}{1,41 \cdot 10^{-5} p^2 + 0,0077 p + 1}. \quad (7.17)$$

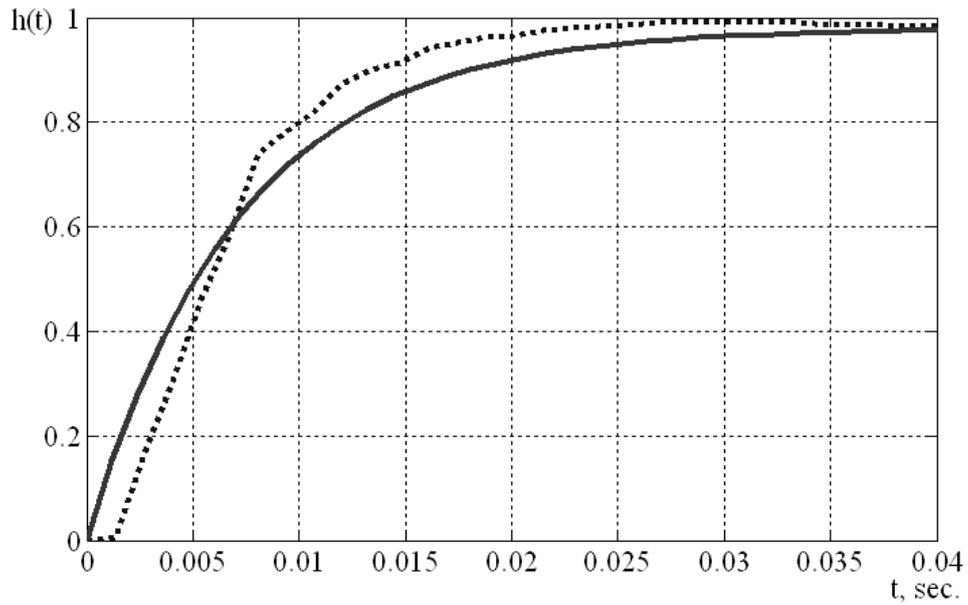
Небольшие значения коэффициентов объясняются тем, что собственные инерционные свойства двигателя малы. Их можно характеризовать значением электромеханической постоянной времени – 0,0067 с. Для проверки правильности решения задачи, а главное – точности полученной модели, необходимо найти переходную характеристику, соответствующую этой модели. Она приведена на рис. 7.4 (сплошная линия).

Как видим, отличия между двумя характеристиками довольно существенные. Они вызваны влиянием преобразователя напряжения, зоной нечувствительности объекта в условиях высокого быстродействия и другими факторами. Здесь заметим, что при таких особенностях объекта их целесообразно учитывать в форме искомой модели. Можно использовать и другие меры для повышения точности. Однако в данном случае нас интересует не столько достижение высоких результатов по точности и связанное с этим усложнение модели объекта, сколько пояснение методических основ алгоритма настройки регулятора в автоматизированном режиме. Поэтому перейдем к следующему этапу эксперимента.

Напомним, что первый эксперимент был проведен без внешней нагрузки для двигателя, фактической нагрузкой были собственные нагрузочные параметры – момент инерции, статический момент нагрузки и др. На этом этапе сделаем нагрузку максимально большой. Количественно ее можно характеризовать электромеханической постоянной времени, величина которой составила 0,754 с. И это во много раз больше по сравнению с первым опытом. Полученная переходная характеристика показана на рис. 7.5 по-прежнему в виде пунктирной линии. В результате идентификации объекта той же передаточной функцией второго порядка получена модель

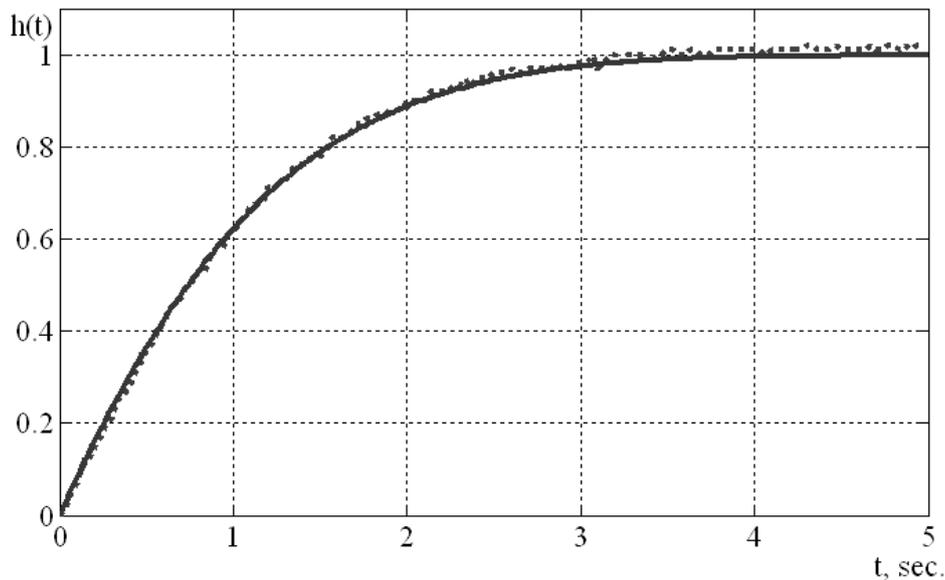
$$W_o(p) = \frac{1}{0,1208 p^2 + 0,804 p + 1}. \quad (7.18)$$

Ей соответствует переходная характеристика, показанная на том же рис. 7.5 (сплошная линия).



*Рис. 7.4. Идентификация объекта управления: экспериментальные данные (пунктирная линия), полученная модель объекта (сплошная линия)*

В том случае, когда при неизменной желаемой переходной характеристике изменяется нагрузка на валу двигателя, система управления также обеспечивает требуемое качество управления. Переходная характеристика двигателя с нагрузкой представлена на рис. 7.5. Постоянная времени объекта приблизительно составляет 0,754 с, передаточная функция описывается выражением (7.18).



*Рис. 7.5. Идентификация объекта управления, (пунктирная линия – экспериментальные данные, сплошная линия – полученная модель объекта)*

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что задача идентификации была успешно решена. Найденные передаточные функции достаточно хорошо описывают характеристики реальных объектов. Причина повышенной точности идентификации связана с уменьшением влияния факторов, которые были отмечены ранее. Прежде всего снизилось влияние запаздывания, вносимого преобразователем, и потому принятая форма идентификации объекта удачно соответствует процессам силовой части системы.

Следующие задачи состоят в нахождении коэффициентов регулятора контура управления. С целью устранения статической ошибки в состав регулятора введено интегрирующее звено, а сам регулятор реализует ПИ-закон. Перерегулирование должно отсутствовать, а время регулирования принято равным 0,5 с. Последнее сделано из тех соображений, чтобы выделить среднее значение времени в условиях интервальной нагрузки.

Найдем коэффициенты ПИ-регулятора для двух предельных случаев: в первом внешняя нагрузка отсутствует и объект управления описывается функцией (7.17); во втором случае действует максимально возможная нагрузка, а модель двигателя имеет вид (7.18).

Для первого случая передаточная функция регулятора получена в виде

$$W_{рег}(p) = \frac{0,05935s + 6}{s}.$$

На рис. 7.6 показана переходная характеристика контура управления с найденным регулятором полностью удовлетворяет предъявленным требованиям.

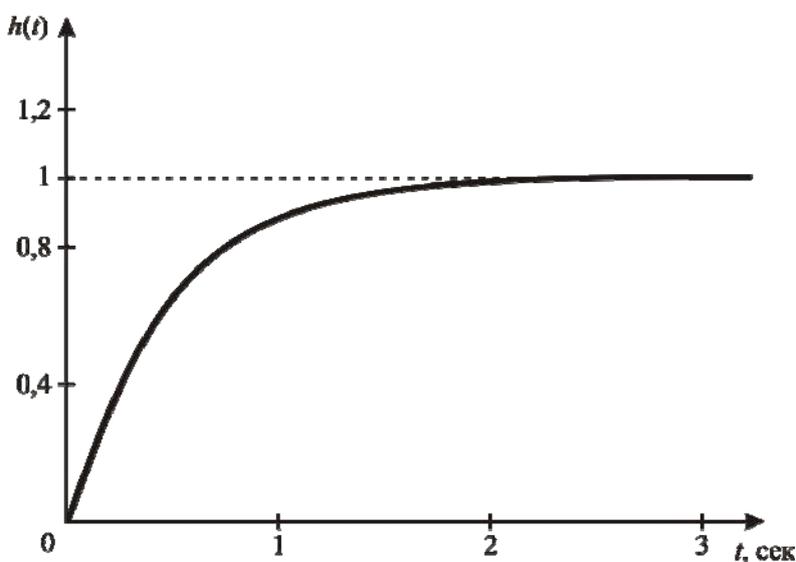


Рис. 7.6. Переходная характеристика контура с регулятором, рассчитанным для случая отсутствия нагрузки

Перейдем к второму случаю, когда нагрузка максимальна. Считаем, что регулятор сохранился неизменным. Необходимо убедиться в том, каким образом будет вести себя контур в условиях наброса нагрузки. Переходная характеристика контура для этого случая показана на рис. 7.7. Видно, что контур становится колебательным, появляется большое перерегулирование, время регулирования значительно превышает желаемое. Такие свойства контура следует признать неприемлемыми.

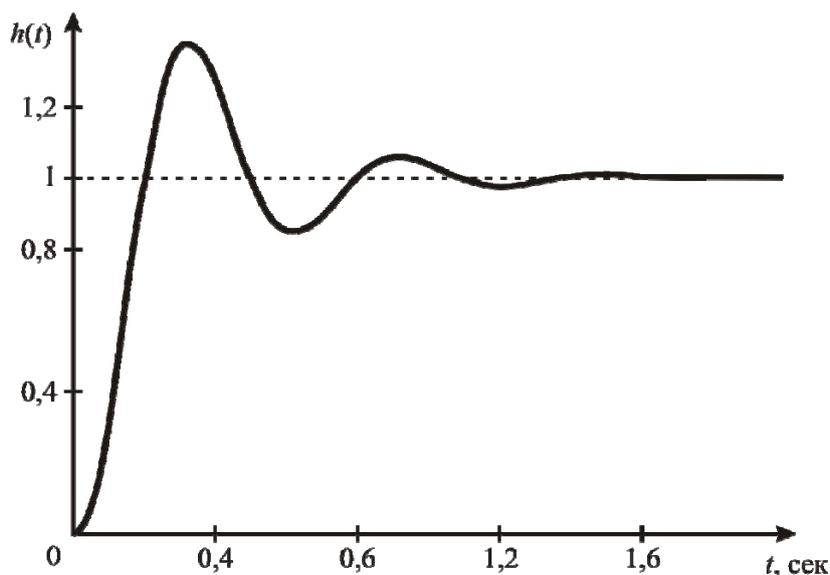


Рис. 7.7. Переходная характеристика при появлении нагрузки на САУ с регулятором, рассчитанным для случая отсутствия нагрузки

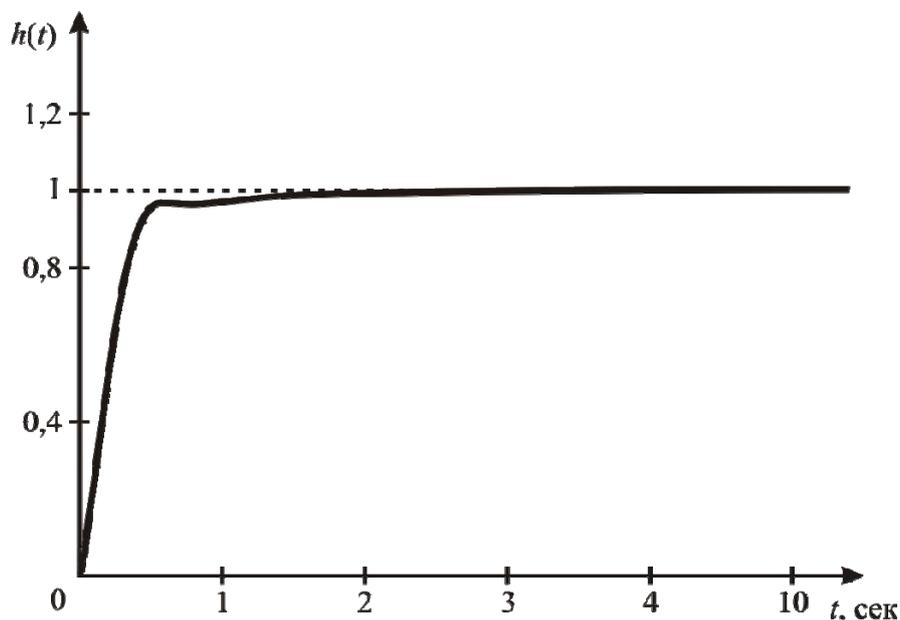
Теперь проверим свойства контура, соответствующие второму варианту, когда регулятор найден из условия работы контура с максимальной нагрузкой. Задача состоит, во-первых, в синтезе регулятора для двигателя с максимальной нагрузкой и, во-вторых, с проверкой возможности работы контура с найденным регулятором в условиях снижения нагрузки до минимальной.

Передаточная функция регулятора в этом случае:

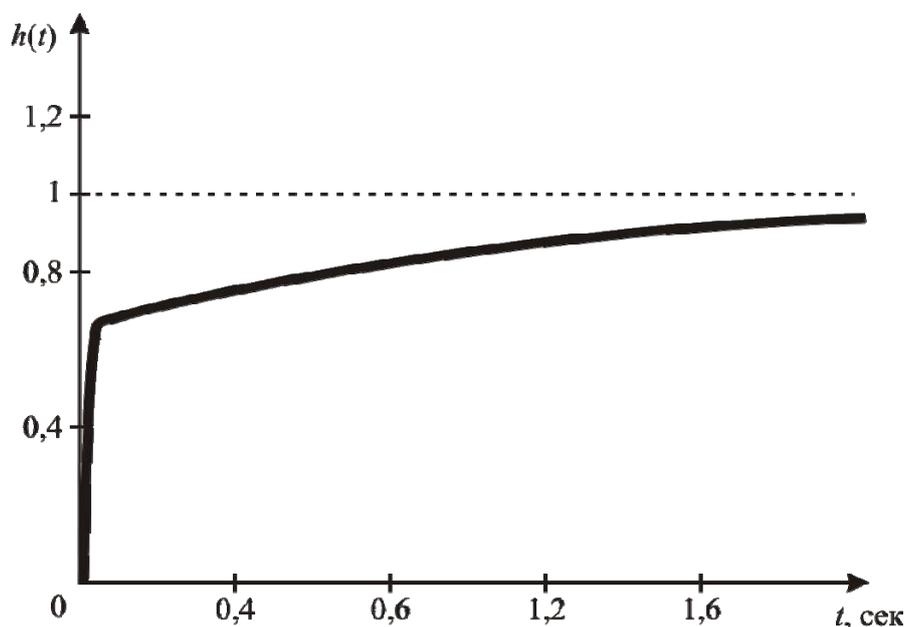
$$W_{рег}(p) = \frac{5,811s + 6,008}{s}.$$

Переходная характеристика для контура с таким регулятором и максимальной нагрузкой показана на рис. 7.8. Контур удовлетворяет заданным требованиям. Однако проверим его работоспособность в условиях снижения нагрузки при неизменном регуляторе. Результаты показаны на рис. 7.9. Показатели качества регулирования в этом случае ухудшаются. Главное – длительность переходного процесса больше требуемой.

Основной вывод из этих экспериментов следующий: в условиях изменения нагрузки невозможно использовать единый регулятор, рассчитанный либо на минимальную, либо на максимальную нагрузку.



*Рис. 7.8. Переходная характеристика САУ с регулятором, рассчитанным для случая присутствия нагрузки*



*Рис. 7.9. Переходная характеристика при удалении нагрузки САУ с регулятором, рассчитанным для случая присутствия нагрузки*

Решение этой проблемы заключается в использовании автоматической настройки коэффициентов регулятора. Описанная система управления самостоятельно вырабатывает закон управления объектом, исходя

из требований, предъявляемых к желаемому переходному процессу, что позволяет ей сохранять работоспособность при изменении динамических свойств объекта управления или требований к характеристикам самой системы управления. Достоинством данной системы является то, что она не просто адаптируется к изменению некоторого параметра, а полностью определяет математическую модель объекта. Это позволяет ее использовать при непрогнозируемых внешних воздействиях.

Эксперимент показал работоспособность алгоритма и программного обеспечения, разработанного на его основе. В то же время не следует считать, что представленные здесь материалы являются исчерпывающими, достаточными для промышленного применения. Они скорее являются иллюстративными, показывающими возможность и реальность такого пути. В целом перечень задач, которые должны быть решены при разработке прибора для автоматизированной настройки регуляторов, значительно шире.

Для примера была выделена из этого ряда задач одна, которая, на взгляд авторов, является наиболее важной в теоретическом и практическом отношении. Она состоит в обеспечении заданного уровня робастности настраиваемой системы или контура. Необходимо, чтобы программная поддержка регулятора в автоматическом режиме находила такое настроечное решение, при котором достигались бы заданные показатели качества и точности системы или контура, в том случае, если значения параметров объекта управления находятся в заданных пределах.

## **ГЛАВА 8. ПОСТРОЕНИЕ САМОНАСТРАИВАЮЩИХСЯ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПОДСИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЗВЕНЬЯМИ РОБОТОВ**

### **8.1. Особенности управления манипуляторами**

В этой главе рассматривается применение ВИМ в задачах построения исполнительных систем роботов. Такие системы должны отвечать ряду требований, которые чаще всего носят противоречивый характер. Например, требуется повышать точность отработки траекторий рабочим органом робота в условиях максимально высокой скорости движения. Решение этой актуальной задачи неразрывно связано с необходимостью придания адаптивных свойств исполнительным системам промышленных роботов. Примером такой адаптации могут служить системы с самонастройкой. Учитывая, что алгоритмы решения некоторых задач автоматического управления на основе ВИМ позволяют строить эконо-

мичное в вычислительном плане программное обеспечение, можно рассмотреть возможность построения исполнительных систем управления роботом, обладающих свойствами адаптации к изменяющимся условиям эксплуатации роботов.

Манипуляционный робот представляет собой сложную техническую систему, целью которой является выполнение различных производственных или исследовательских задач. Такая система в своем составе содержит исполнительный механизм (манипулятор), информационные устройства (датчики), систему управления движением, источники питания и ряд других компонент, необходимых для обеспечения нормального функционирования робота. В дальнейшем нас будут интересовать вопросы управления движением исполнительных механизмов. Под исполнительным механизмом будем понимать конечное число звеньев и рабочий орган. Звенья образуют механическую систему с изменяемой конфигурацией, которая, в свою очередь, связана с корпусом робота. Путем изменения взаимной ориентации звеньев появляется возможность перемещать и требуемым образом ориентировать рабочий инструмент.

Механическая система манипулятора представляет собой кинематическую цепь, элементы которой сопрягаются друг с другом кинематическими парами с вращательным или поступательным движением. Каждая кинематическая пара имеет конструктивно встроенный исполнительный двигатель, который формирует управляющий момент или силу в случае вращательного или поступательного движения соответственно.

Таким образом, под исполнительной подсистемой (ИПС) манипуляционного механизма будем понимать исполнительный механизм, систему приводных двигателей всех звеньев и локальные системы автоматического управления (САУ) каждым двигателем.

Главная особенность ИПС манипулятора состоит в том, что несколько приводных двигателей работают на общую нагрузку [13]. Такую систему можно представить в виде структуры, приведенной на рис. 8.1. Как видно из рисунка, имеется  $n$  приводов, формирующих управляющие воздействия на исполнительный механизм, на  $n$  выходах которого необходимо воспроизвести вид задающих функций  $g_j(t), j = \overline{1, n}$ .

Проблема организации управления ИПС состоит в том, что в манипуляторах, в общем случае, имеется взаимное влияние каналов управления друг на друга. Это взаимное влияние часто носит нелинейный характер, что приводит к значительному возрастанию сложности задач

синтеза и адаптации, другим нежелательным последствиям. Кроме того, при отработке траектории движения привод каждого звена испытывает действие сигнальных возмущений, обусловленных силами тяжести и Кориолиса. Все это в значительной степени усложняет синтез как исполнительных подсистем, так и системы управления в целом.

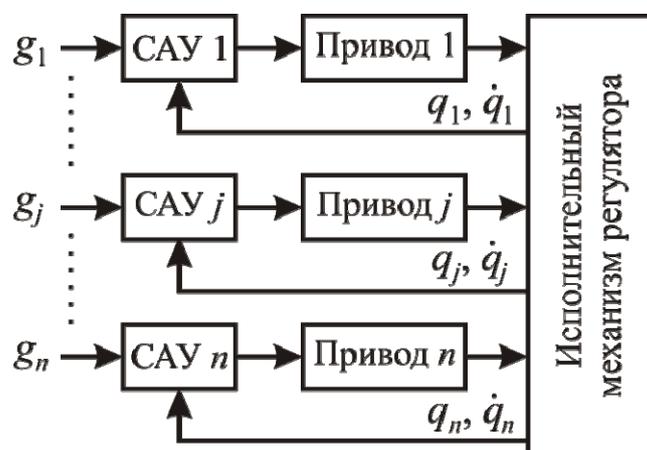


Рис. 8.1. Структура манипуляционного робота

Таким образом, задачу синтеза ИПС манипулятора можно разбить на две подзадачи. Первая из них заключается в снижении взаимного влияния каналов управления друг на друга. Эта мера позволяет представить ИПС робота совокупностью  $n$  автономных приводов. Вторая подзадача сведется к синтезу системы управления каждым приводом в отдельности. При этом синтезированная система должна быть инвариантной к параметрическим и сигнальным возмущениям, а также обеспечивать требуемое качество управления. Качество управления целесообразно оценивать по прямым показателям, прежде всего по длительности переходного процесса и перерегулированию.

Решение этих задач можно искать методами теории оптимального, робастного, нейросетевого, нечеткого управления и на основе других оригинальных подходов /15/. В рамках настоящей главы мы рассмотрим решение, основанное на математическом аппарате ВИМ.

## 8.2. Особенности математических моделей динамики манипуляторов

Рассмотрим кратко вопросы анализа ИПС манипуляционных роботов и получения их динамических моделей.

Исполнительный механизм робота (манипулятор) может быть описан нелинейным векторным уравнением (8.1), для получения которого можно привлечь аппарат Лагранжа /14/

$$A(q)\ddot{q} + B(\dot{q}, q)\dot{q} + C(q) = Q, \quad (8.1)$$

где  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$  – вектор обобщенных координат, описывающих ориентацию звеньев манипулятора в пространстве;  $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$  – скорости перемещения звеньев;  $\ddot{q} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n]^T$  – ускорения звеньев;  $Q = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n]^T$  – вектор обобщенных сил. Если координата  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) является углом поворота, то величина  $Q_j$  имеет размерность момента (Н·м). Если  $q_j$  – линейное перемещение, то  $Q_j$  имеет размерность силы (Н). Компоненты матриц  $A(q)$ ,  $B(\dot{q}, q)$  и  $C(q)$  выводятся из уравнения Лагранжа II-го рода и дают описание математической модели динамики манипулятора.

Для дальнейшего составления модели динамики исполнительного механизма необходимо выразить старшую производную из уравнения (8.1)

$$\ddot{q} = A^{-1}(q) \cdot (Q - [B(\dot{q}, q)\dot{q} + C(q)]).$$

В последнем выражении введем замену

$$F(Q, \dot{q}, q) = A^{-1}(q) \cdot (Q - [B(\dot{q}, q)\dot{q} + C(q)]),$$

тогда получим

$$\ddot{q} = F(Q, \dot{q}, q). \quad (8.2)$$

По выражению (8.2) можно построить операторно-структурную схему математической модели динамики манипулятора (рис. 8.2).

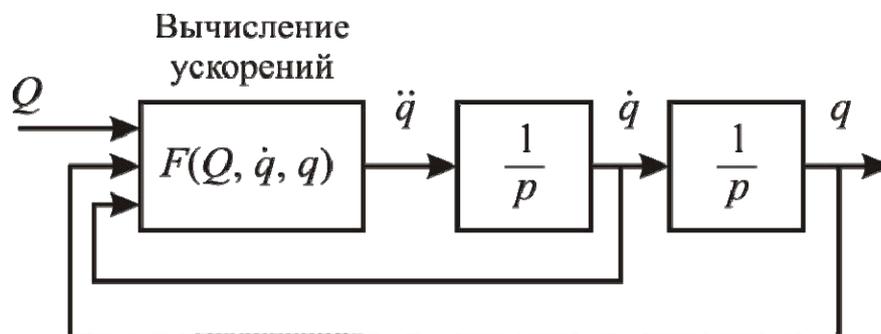


Рис. 8.2. Структурная схема модели динамики манипулятора

Для того чтобы получить модель ИПС робота, выражение (8.2) необходимо дополнить уравнениями, описывающими динамику каждого привода. Примем для простоты, что управление каждым звеном манипулятора осуществляется однотипными приводами. В качестве математической модели приводов используем модель двигателя с многоконтурной системой подчиненным регулированием. Обобщенная структурная схема такой системы представлена на рис. 8.3.

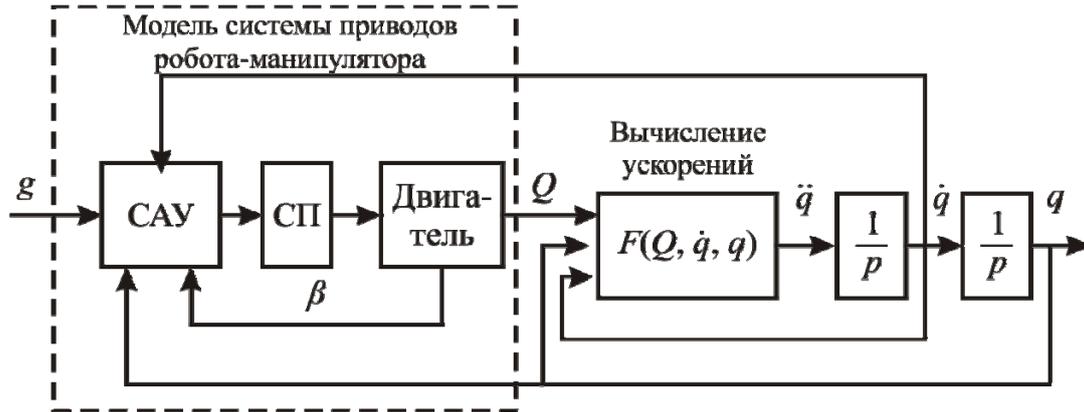


Рис. 8.3. Обобщенная структурная схема модели ИПС манипулятора

На рис. 8.3 приняты следующие обозначения: СП – силовой преобразователь,  $g = [g_1, g_2, \dots, g_n]^T$  – вектор задающих сигналов для ИПС каждого звена,  $\beta$  – вектор сигналов (ток в обмотки, напряжение, подаваемое на двигатель и прочее), характеризующих состояние двигателя. Состав компонент вектора  $\beta$  может отличаться для разных типов двигателей.

С целью упрощения расчетных выражений, имея в виду, прежде всего, учебную направленность пособия, в дальнейшем будем ориентироваться на коллекторные или бесколлекторные двигатели постоянного тока. Для анализа и синтеза автономных приводов с подчиненным регулированием используем типовую линеаризованную модель [15]. Рассмотрим ее подробнее. На рис. 8.4 приведена модель привода на основе двигателя постоянного тока. По функциональному назначению ее можно разбить на блоки, которые описывают динамику различных узлов  $j$ -го привода ИПС манипулятора.

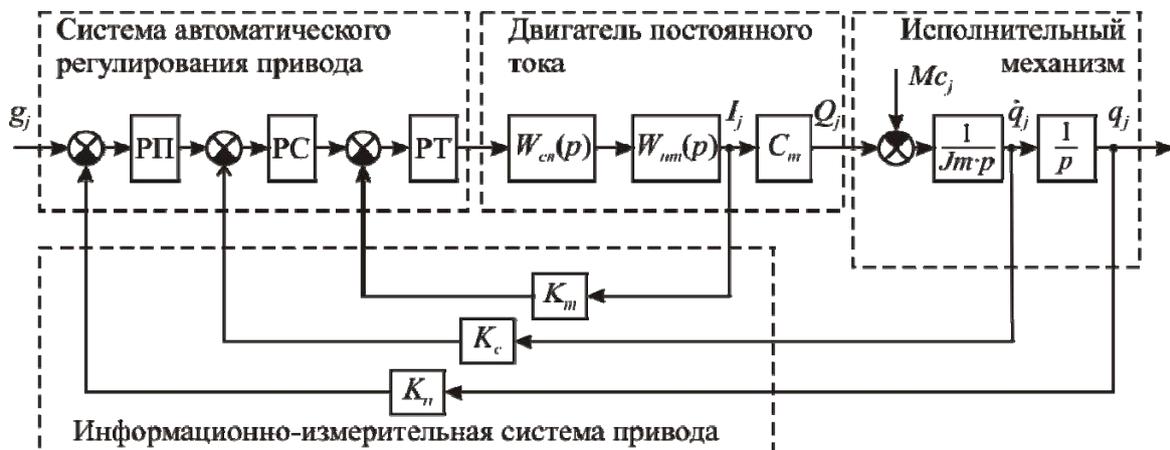


Рис. 8.4. Линеаризованная модель привода двигателя постоянного тока

Двигатель постоянного тока представлен передаточными функциями силового преобразователя  $W_{СП}(p)$  и электрической части двигателя  $W_{HT}(p)$ , а также механической постоянной момента  $C_m$ . Передаточные функции  $W_{СП}(p)$  и  $W_{HT}(p)$  представляют собой апериодические звенья первого порядка, коэффициенты которых определяются по данным технического паспорта. На рис. 8.4 не показана связь по противо-ЭДС поскольку ею можно пренебречь в виду того, что привод замкнут /15/.

Математическое описание информационно-измерительной системы дается в виде коэффициентов обратных связей по положению  $K_{II}$ , скорости  $K_C$  и току  $K_T$ .

Типовая система автоматического управления привода состоит из трех регуляторов – положения, скорости и тока с передаточными функциями  $W_{PI}(p)$ ,  $W_{PC}(p)$  и  $W_{PT}(p)$  соответственно. Структура передаточных функций регуляторов определяется, с одной стороны, исходя из критерия простоты получаемых выражений, а с другой – исходя из требований, предъявляемых к свойствам всей системы в целом.

Описательная часть исполнительного механизма представляет собой результат линеаризации выражения (8.2). Как можно заметить, векторное нелинейное уравнение динамики манипулятора сводится к определению значения параметра приведенного к валу двигателя момента инерции  $Jm_j$ . Сигнал возмущающего воздействия  $Mс_j$  обусловлен силами гравитации, действующими на звенья манипулятора, и силами Кориолиса, вызванными взаимным перемещением звеньев друг относительно друга.

Точность описания исполнительного механизма линеаризованной моделью ИПС целиком зависит от выбора точки линеаризации, т. е. в приложении к манипулятору, от выбора значений координат и скоростей звеньев. Заметим, что промышленные роботы представляют собой класс объектов управления, работа которых описывается в основном динамическими режимами. Последнее обстоятельство вызывает затруднения при выборе параметров линеаризации (координат и скоростей звеньев) в виду их непрерывных изменений, пределы которых могут быть весьма значительными. Разброс параметров линеаризации приводит к неадекватному описанию реального объекта его линеаризованной моделью, что влечет за собой снижение статической и динамической точности САУ приводов ИПС.

Таким образом, в общем случае использование типовой линеаризованной модели привода ИПС ограничено лишь малыми изменения-

ми обобщенных координат и скоростей манипуляционного механизма относительно выбранной точки линеаризации, в противном случае неизбежны ошибки в управлении положением звеньев. С другой стороны, типовая модель ИПС хорошо изучена, является достаточно простой и при этом даёт вполне адекватное описание протекающих в систему процессов при условии их линейности. С последним обстоятельством и связано желание устранить указанные ограничения настоящей модели.

Другими словами, решение проблемы адекватного описания исполнительного механизма манипулятора линеаризованной моделью можно свести к задаче аппроксимации. Эту задачу можно решать на основе идентификационного подхода, выбрав структуру исполнительного механизма (рис. 8.4), и используя в качестве входных данных информацию, поступающую от реального объекта. На основании полученных данных вычисляются параметры (моменты инерции каждого звена ИПС) линеаризованной модели объекта управления. Уточнение параметров может осуществляться периодически, вследствие чего практически в каждый момент времени можно иметь достаточно точную модель, описывающую динамику исполнительного механизма. Последнее обстоятельство даёт возможность для «развязывания» каналов управления, т. е. устранения или сведения до пренебрежимо малого уровня их взаимного влияния друг на друга. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать ИПС манипулятора, состоящего из  $n$  звеньев, как  $n$  автономных приводов, структура которых представлена на рис. 8.4.

Поскольку параметры модели манипуляционного механизма могут изменяться в достаточно широких пределах, то следующей задачей в синтезе ИПС является задача парирования параметрических возмущений в объекте за счет периодической перенастройки регуляторов локальной САУ  $j$ -го привода. При неизменной структуре регуляторов синтез сводится к вычислению коэффициентов их передаточных функций.

Системы управления, выполняющие идентификацию параметров и настройку регуляторов ИПС в автоматическом режиме, называются самонастраивающимися. ВИМ позволяет конструировать системы такого типа, поэтому далее при решении задач идентификации и синтеза приводов ИПС будем ориентироваться именно на этот метод. При этом более детально рассмотрим вопросы идентификации и слежения за изменением параметров ИПС, поскольку вопросы синтеза достаточно подробно изложены в главах 2 и 4, и еще раз останавливаться на них мы не будем.

### 8.3. Идентификация управляемого звена манипулятора по динамическим переходным характеристикам

#### 8.3.1. Идентификация управляемого звена

Рассмотрим особенности идентификации параметров манипуляционного робота по динамическим переходным характеристикам с привлечением ВИМ на примере  $j$ -го привода ИПС.

При решении задачи идентификации объекта управления примем его структуру неизменной, в этом случае задача ограничивается параметрической постановкой. Для модели привода  $j$ -го звена манипулятора имеем постоянную структуру объекта и один параметр, который может изменять свое значение в достаточно широких пределах, – момент инерции  $Jm_j$ .

Прежде чем приступить непосредственно к рассмотрению методики идентификации моментов инерции ИПС робота введем ряд обозначений. Введем обозначение для передаточной функции замкнутого контура тока

$$W_{KT}^3(p) = \frac{W_{PT}(p) \cdot W_{СП}(p) \cdot W_{HT}(p)}{1 + K_T \cdot W_{PT}(p) \cdot W_{СП}(p) \cdot W_{HT}(p)}, \quad (8.3)$$

а также разомкнутого контура скорости

$$W_{КС}^3(p) = W_{РС}(p) \cdot W_{KT}^3(p) \cdot C_m \cdot \frac{1}{Jm_j \cdot p}. \quad (8.4)$$

Задача состоит в том, чтобы определить моменты инерции звеньев по переходным характеристикам манипулятора за время, в течение которого «проявится» динамика механической части ИПС робота – за время переходного процесса, определяемого внутренними факторами привода. При этом алгоритм работы системы можно описать следующей последовательностью действий.

Во-первых, система самонастройки с заданным периодом дискретизации  $\Delta T$  сохраняет отсчеты  $q_j(i \cdot \Delta T)$ , где  $i$  – номер отсчета ( $i = \overline{1, k}$ ,  $k$  – число отсчетов). С таким же периодом сохраняются значения сигнала задания  $g_j(i \cdot \Delta T)$ .

Во-вторых, на основании собранных данных с привлечением выражения (1.4), в котором интеграл заменен конечной суммой, ищется элемент ЧХ замкнутого контура положения  $j$ -го привода.

$$W_{pos}^{cl}(\delta_1^j) = \frac{\sum_{i=0}^k q_j(i \cdot \Delta T) \exp(-\delta_1^j \cdot \Delta T) \Delta T}{\sum_{i=0}^k g_j(i \cdot \Delta T) \exp(-\delta_1^j \cdot \Delta T) \Delta T}, \quad (8.5)$$

где  $\delta_1^j$  – первый узел интерполирования  $j$ -го привода ИПС робота. Узел  $\delta_1^j$  выбирается в соответствии с рекомендациями, приведенными в п. 2.2.4.

Далее последовательно размыкаем контур положения и скорости, используя в качестве входных данных известные значения коэффициентов обратных связей и элемент ЧХ замкнутого контура положения  $W_{КП}^3(\delta_1^j)$ . Покажем эти преобразования.

Переход от замкнутого контура положения к разомкнутому осуществляется по известному выражению

$$W_{КП}^P(\delta_1^j) = \frac{W_{КП}^3(\delta_1^j)}{1 - K_{П} \cdot W_{КП}^3(\delta_1^j)}. \quad (8.6)$$

Чтобы разомкнуть контур скорости, необходимо определить выражение для определения элементов ЧХ замкнутого контура скорости. Это выражение следует из сравнения передаточных функций разомкнутого контура положения  $W_{КП}^P(p)$  и замкнутого контура скорости  $W_{КС}^3(p)$ :

$$W_{КП}^P(p) = W_{ПП}(p) \cdot W_{КС}^3(p) \frac{1}{p}. \quad (8.7)$$

Выразим из (8.7) передаточную функцию замкнутого контура скорости

$$W_{КС}^3(p) = \frac{W_{КП}^P(p)}{W_{ПП}(p)} \cdot p. \quad (8.8)$$

Подставим в выражение (8.8) значение узла интерполирования  $\delta_1^j$ :

$$W_{КС}^3(\delta_1^j) = \frac{W_{КП}^P(\delta_1^j)}{W_{ПП}(\delta_1^j)} \cdot \delta_1^j, \quad (8.9)$$

при этом учтем, что в (8.9) значение  $W_{КП}^P(\delta_1^j)$  определяется на основании (8.6).

Осуществим переход от замкнутого контура скорости к разомкнутому:

$$W_{КС}^P(\delta_1^j) = \frac{W_{КС}^3(\delta_1^j)}{1 - K_{С} \cdot W_{КС}^3(\delta_1^j)}. \quad (8.10)$$

Выразим из (8.3) момент инерции  $Jm_j$   $j$ -го звена манипулятора:

$$Jm_j = \frac{W_{РС}(p) \cdot W_{КТ}^3(p) \cdot C_m}{W_{КС}^P(p) \cdot p}. \quad (8.11)$$

Окончательное выражение для вычисления момента инерции  $Jm_j$  получим после подстановки в выражение (8.11) значения элемента ЧХ разомкнутого контура скорости  $W_{KC}^P(\delta_1^j)$ , определенного формулой (8.10), а также прямой подстановки значения  $\delta_1^j$  в передаточную функцию замкнутого контура тока  $W_{KT}^3(p)$ , определенного по (8.3), и передаточную функцию регулятора скорости  $W_{PC}(p)$ :

$$Jm_j = \frac{W_{PC}(\delta_1^j) \cdot W_{KT}^3(\delta_1^j) \cdot C_m}{W_{KC}^P(\delta_1^j) \cdot \delta_1^j}. \quad (8.12)$$

Таким образом, идентификация момента инерции  $j$ -го звена манипулятора сводится к последовательным вычислениям по выражениям (8.5), (8.6), (8.9), (8.10) и (8.12).

Полученное решение можно корректировать за счет смещения узла интерполирования  $\delta_1^j$  относительно значения, выбранного в соответствии с первоначальными рекомендациями. Такая коррекция осуществляется обычно для перераспределения погрешности идентификации в пределах времени установления, определяемой по какой-либо временной динамической характеристике.

Сделаем два важных замечания относительно идентификации момента инерции звена манипулятора по переходной характеристике.

Первое замечание относится к тому обстоятельству, что реализация описанной выше процедуры не накладывает ограничений на формы входного и выходного сигналов. В общем случае ВИМ допускает произвольную форму задающих сигналов, что в свою очередь даёт возможность использовать для идентификации более «мягкие», по сравнению со ступенчатым воздействием, входные воздействия в виде трапеций или плавных кривых.

Второе замечание относится к ограничению, связанному с применением данного метода идентификации. Суть ограничения состоит в том, что вычисленные моменты инерции звеньев робота будут адекватными только на момент их вычисления, дальнейшее движение системы с постоянной скоростью приведет к изменению конфигурации манипулятора и, следовательно, к изменению моментов инерции. Отследить эти изменения при помощи идентификации, основанной на переходных процессах, не удастся, поскольку в динамически установившемся режиме инерционные свойства в достаточной мере не проявляются.

### 8.3.2. Парирование сигнальных возмущений в каналах управления манипулятора

Одной из важных практических задач при построении высокоточных систем управления сложными динамическими объектами, такими как ИПС манипуляторов, является подавление сигнальных возмущений в каналах управления. Это необходимо, в частности, для повышения точности идентификации параметров системы. В рамках данного параграфа мы не будем рассматривать способы подавления сигнальных шумов в канале измерения и шумов, обусловленных действием случайных факторов внешней среды.

Как уже было сказано, основными причинами, обуславливающими сигнальные возмущения в САУ ИПС манипуляторов, являются сила гравитации, действующая на исполнительный механизм робота, и силы Кориолиса, возникающие в результате взаимного перемещения звеньев манипулятора относительно друг друга. Для системы приведенной на рис. 8.4 в качестве такого возмущающего воздействия рассматривается сигнал  $M_{c_j}$  – момент сопротивления на валу двигателя, входящего в состав приводной системы. Его влияние на объект управления таково, что сигнал на выходе зависит не только от задающего воздействия  $g_j$ , но и от  $M_{c_j}$ .

Чтобы парировать сигнал возмущающего воздействия следует ввести в САУ каждого привода дополнительный канал управления по возмущению с линейным компенсатором  $W_K(p)$  (рис. 8.5).

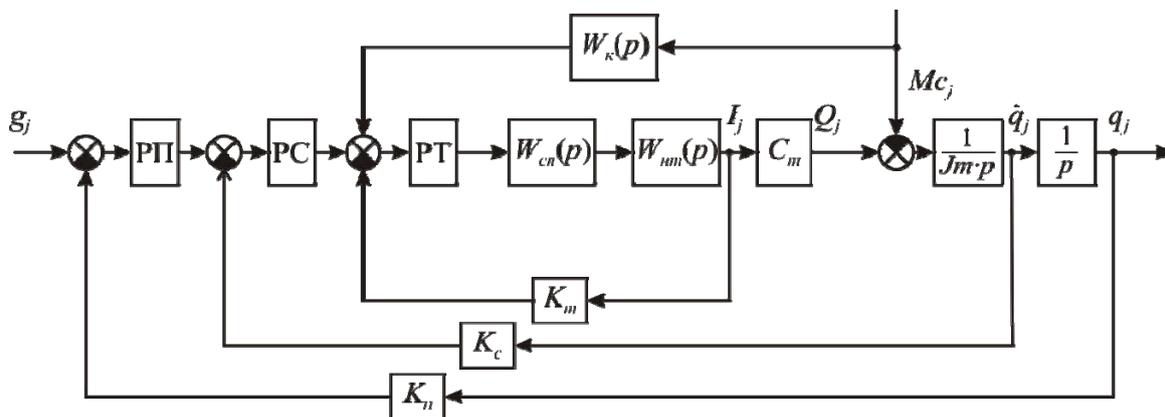


Рис. 8.5. САУ с дополнительным каналом управления

Передаточную функцию линейного компенсатора  $W_K(p)$  можно отыскивать на основании уравнения

$$W_K(p) \cong \frac{1}{W_{KT}^3(p) \cdot W_{PT}(p) \cdot C_m}. \quad (8.13)$$

Последнее выражение представляет собой запись условия инвариантности САУ по отношению к сигналу  $M_{c_j}$  в терминах рассматриваемой задачи.

Решение уравнения (8.13) целесообразнее всего искать в терминах ВИМ, приняв структуру передаточной функции компенсатора в виде известной дробно-рациональной функции, параметры которой подлежат определению. Тогда задача сводится к задаче аппроксимации сложной передаточной функции более простым выражением. При этом в качестве критерия близости полученного решения следует принять минимальную относительную ошибку ЧХ искомой передаточной функции.

Заметим что, решение уравнения (8.13) практически всегда будет носить приближенный характер в виду того, что выражение в правой части уравнения физически трудно реализуемо.

Стоит обратить внимание на то, что в реальных системах возмущающее воздействие часто недоступно для прямого измерения. В случае ИПС манипуляционных роботов прямое измерение момента сопротивления на валу двигателя потребует наличия специального датчика момента. Обычно с целью удешевления конструкции робота датчики момента не включают в состав его измерительной системы. В связи с этим для оценки значения возмущающего момента  $M_{c_j}$  используют косвенные методы измерения.

### 8.3.3. Косвенные методы измерения возмущающих сигналов в исполнительных подсистемах роботов

Рассмотрим два метода косвенного измерения момента сопротивления на валу приводного двигателя ИПС робота.

Первый метод решает эту задачу на структурном уровне. В состав операторно-структурной схемы системы вводится ряд дополнительных блоков и связей, что обеспечивает выделение возмущающего сигнала из множества сигналов, доступных измерению. В общем случае имеем типовую систему управления (рис. 8.6), на которую действуют задающий  $x(t)$  и возмущающий  $f(t)$  сигналы. Выход системы связан с сигналом  $y(t)$ .

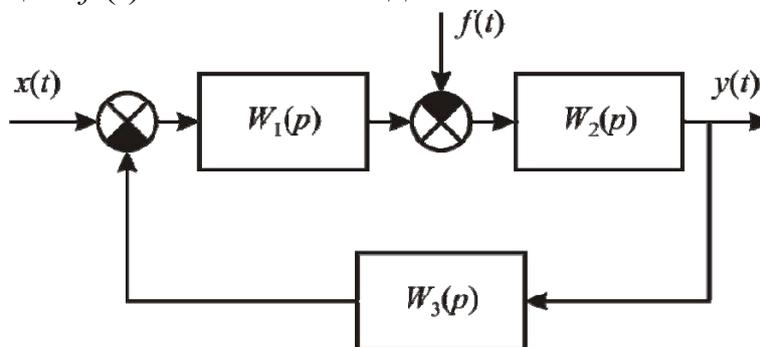


Рис. 8.6. Структура типовой системы управления

Запишем выражение для сигнала  $y(t)$ , полагая, что структура передаточных функций  $W_i(p), i = \overline{1,3}$  и их параметры известны

$$y(t) = x(t) \cdot \frac{W_1(p)W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_3(p)} - f(t) \cdot \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_3(p)}. \quad (8.14)$$

Выразим из (8.14) сигнал возмущения  $f(t)$  через сигналы  $x(t)$  и  $y(t)$ , которые доступны прямому измерению

$$f(t) = y(t) \cdot \frac{1 + W_1(p)W_2(p)W_3(p)}{W_2(p)} - x(t) \cdot W_1(p). \quad (8.15)$$

Введем обозначение  $W_4(p) = \frac{1 + W_1(p)W_2(p)W_3(p)}{W_2(p)}$  и с его учетом перепишем выражение (8.15)

$$f(t) = y(t) \cdot W_4(p) - x(t) \cdot W_2(p). \quad (8.16)$$

Используя выражение (8.16), дополним схему системы управления, приведенную на рис. 8.6, таким образом, чтобы на выходе системы, помимо сигнала  $y(t)$ , также присутствовал сигнал  $f(t)$ .

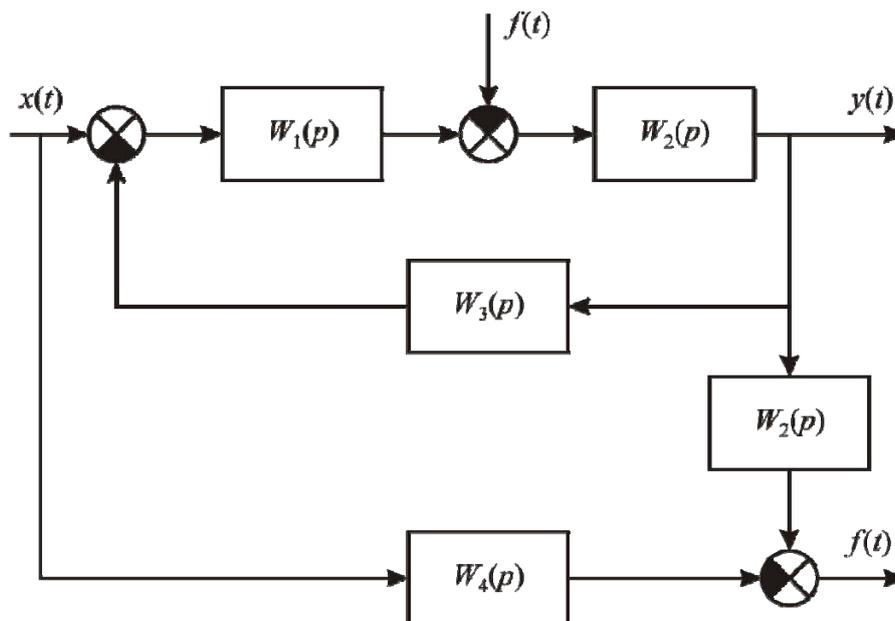


Рис. 8.7. Структура системы с выделенным сигналом возмущения  $f(t)$

Приведенное на рис. 8.7 схемное решение может быть применено и к ИПС робота (рис. 8.5), если для сигналов принять следующие равенства  $x(t) = I_j(t)$  и  $y(t) = \dot{q}_j(t)$ , а для передаточных функций –  $W_1(p) = C_m$ ,

$W_2(p) = \frac{1}{J_m p}$  и  $W_3(p) = 0$ , тогда на выходе получим значение момента сопротивления  $M_{сj}$  на валу приводного двигателя.

Второй метод основан на использовании информации о взаимном положении звеньев манипулятора для последующего вычисления статической составляющей возмущающего воздействия, т. е. момента сопротивления, обусловленного действием силы гравитации на механизм манипулятора.

Запишем выражение для вычисления статических моментов сопротивления, действующих на каждое звено манипуляционного механизма

$$M_j^* = \frac{\partial V}{\partial q_j}, j = \overline{1, n}, \quad (8.17)$$

где  $V$  – потенциальная энергия механизма,  $q_j$  – обобщенная координата манипулятора,  $n$  – число звеньев манипулятора.

Потенциальная энергия механизма определяется массами звеньев и вертикальными координатами центров масс

$$V = \sum_{j=1}^n m_j g h_j(q), \quad (8.18)$$

где  $m_j$  – масса  $j$ -го звена,  $g$  – ускорение свободного падения,  $h_j(q)$  – вертикальная координата центра масс, зависящая от обобщенных координат.

На основании выражений (8.17)–(8.18) достаточно просто получить аналитические зависимости моментов сопротивления от значения обобщенных координат. Покажем это на примере.

**Пример.** Для манипулятора, кинематическая схема которого приведена на рис. 8.8, выведем зависимости статических моментов сопротивления  $M_1^*$  и  $M_2^*$ , действующих на 1-е и 2-е звено механизма, от значения обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$ . Массы каждого из звеньев составляют  $m_1$  и  $m_2$ , длины звеньев –  $l_1$  и  $l_2$ , координаты центров масс –  $r_1$  и  $r_2$ .

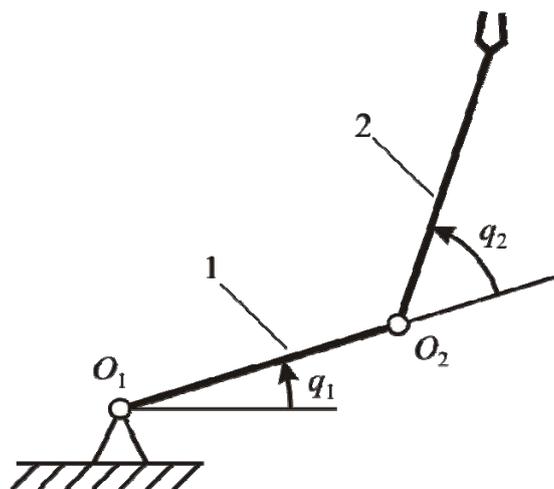


Рис. 8.8. Кинематическая схема манипулятора

**Решение.** Используя выражение (8.18), запишем потенциальную энергию механизма

$$V = m_1 g r_1 \sin(q_1) + m_2 g [l_1 \sin(q_1) + r_2 \sin(q_1 + q_2)].$$

Согласно выражению (8.17) вычислим частные производные и найдем зависимости для моментов сопротивления

$$M_1^* = \frac{\partial V}{\partial q_1} = m_1 g r_1 \cos(q_1) + m_2 g [l_1 \cos(q_1) + r_2 \cos(q_1 + q_2)],$$

$$M_2^* = \frac{\partial V}{\partial q_2} = m_2 g r_2 \cos(q_1 + q_2).$$

Как видно, получение этих зависимостей не вызывает затруднений.

Заметим, что оба метода косвенного оценивания воздействий, оказывающих возмущающее на механизм манипулятора, имеют определенные недостатки.

Первый метод требует реализации идеального дифференциатора в виде передаточной функции  $\frac{1}{W_2(p)} = \frac{1}{1/(J_m p)} = J_m p$ , что на практике не-

возможно. Кроме того, метод требует вычисления ускорения, что вновь связано с дифференцированием, теперь – скорости движения звена. Это влечет за собой существенные трудности, связанные с появлением шумов в канале измерения. В ряде случаев канал измерения оказывается зашумленным настолько, что не представляется возможным выделить полезный сигнал. Достоинством данного метода является универсальность применения вне зависимости от природы и характера рассматриваемого объекта управления.

Недостатком второго метода является его ограниченное применение только к роботам манипуляционного типа, а также то, что оценивается лишь статическая составляющая сигнала возмущения, обусловленного силой гравитации, и не учитываются возмущения, вызываемые силами Кориолиса. Достоинство метода – простота математических зависимостей статических моментов сопротивления от обобщенных координат манипулятора.

Видимо, лучших результатов косвенной оценки возмущающих сигналов можно добиться комбинацией приведенных методов.

#### **8.4. Учет кинематических соотношений при идентификации управляемых звеньев манипулятора**

Идентификация моментов инерции звеньев манипуляционного робота по динамическим переходным характеристикам позволяет достаточно точно вычислить их значения на определенный момент времени,

однако отследить изменения этих параметров в динамически установившихся режимах работы не удастся. В связи с этим проблема идентификации моментов инерции манипулятора состоит также в задаче слежения за этими изменениями.

Для преодоления указанных затруднений целесообразно привлечь дополнительную информацию, которую можно получить на основании данных о кинематической схеме манипуляционного механизма таких, как геометрические размеры и массы звеньев. Привлечение соответствующих кинематических соотношений даёт возможность находить моменты инерции в функции конфигурации манипулятора, т. е. при постоянных скоростях движения идентифицируемых звеньев.

Рассмотрим достаточно простой метод построения таких зависимостей в условиях, когда о конструкции манипулятора известны только массы звеньев  $m_j, j = \overline{1, n}$  и их длины  $l_j, j = \overline{1, n}$ . Метод основан на аддитивном свойстве момента инерции: момент инерции объекта относительно рассматриваемой оси вращения равен сумме моментов инерции материальных точек, составляющих этот объект. Известно, что момент инерции материальной точки относительно оси  $O$  записывается следующим образом

$$J_i = m_i r_i^2,$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -й материальной точки объекта,  $r_i^2$  – квадрат расстояния от оси вращения  $O$  до  $i$ -й материальной точки объекта. Тогда общий момент инерции относительно оси  $O$  составит

$$J = \sum_{i=1}^k J_i = \sum_{i=1}^k m_i r_i^2. \quad (8.19)$$

В выражении (8.19) введем замену

$$m_i = \rho \cdot \Delta l, \quad (8.20)$$

где  $\rho$  – линейная плотность звена,  $\Delta l = \frac{l}{k}$  – элемент длины звена.

Подставим выражение (8.20) в (8.19) и, взяв последнее в пределе, перейдем к интегралу по длине звена

$$J = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^k \rho \Delta l r_i^2 \right) = \int_l \rho r^2 dl. \quad (8.21)$$

Для пояснения наглядности и простоты подхода проиллюстрируем его на конкретном примере.

**Пример.** Для манипулятора, кинематическая схема которого представлена на рис. 8.9, выведем зависимость момента инерции для первого звена от значения координаты обобщенной  $q_2$ . Звенья манипулятора считать однородными жесткими стержнями массами  $m_1, m_2$  и длинами  $l_1, l_2$ .

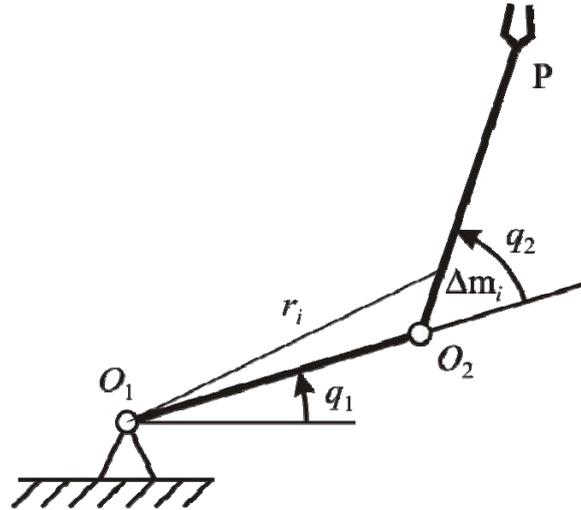


Рис. 8.9. Кинематическая схема манипулятора

На рис. 8.9 приняты следующие обозначения:  $q_1, q_2$  – обобщенные координаты двухзвенного манипулятора;  $O_1, O_2$  – шарниры манипулятора;  $P$  – координата полюса схвата манипулятора (для простоты считаем, что схват установлен на конце 2-го звена);  $r_i$  – расстояние от оси вращения  $O_1$  до элемента массы 2-го звена  $\Delta m_i$ .

Из анализа кинематической схемы получаем выражение для момента инерций механической системы относительно оси вращения  $O_1$ :

$$J_{m1} = J_1 + J_1^*, \quad (8.22)$$

где  $J_1$  – момент инерции 1-го звена относительно оси вращения  $O_1$ ,  $J_1^*$  – момент инерции, обусловленный положением 2-го звена манипулятора относительно 1-го. Момент инерции 1-го звена будет определяться выражением

$$J_1 = \frac{m_1 l_1^2}{3}. \quad (8.23)$$

Момент инерции  $J_1^*$  определяется в соответствии с выражением (8.19):

$$J_1^* = \sum_{i=1}^k \Delta m r_i^2,$$

где  $r_i^2 = l_1^2 + y^2 - 2l_1 y \cos(\pi - q_2)$  – расстояние от оси вращения  $O_1$  до элемента массы  $\Delta m_i$  ( $y$  – изменяется в интервале  $[0, l_2]$ );  $\Delta m_i = \rho_2 \Delta y$  – элемент массы 2-го звена ( $\Delta y$  – приращение переменной  $y$ ,  $\rho_2$  – линейная плотность 2-го звена).

Тогда

$$J_1^* = \sum_{i=1}^k \rho_2 \cdot (l_1^2 + y^2 - 2l_1 y \cos(\pi - q_2)) \Delta y. \quad (8.24)$$

Возьмем выражение (8.24) в пределе при  $\Delta y \rightarrow 0$  и перейдем к определенному интегралу, пределы которого заданы интервалом изменения переменной  $y$

$$\begin{aligned} J_1^* &= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^k \rho_2 \cdot (l_1^2 + y^2 - 2l_1 y \cos(\pi - q_2)) \Delta y \right) = \\ &= \int_0^{l_2} \rho_2 \cdot (l_1^2 + y^2 - 2l_1 y \cos(\pi - q_2)) dy = \\ &= \rho_2 \left( l_1^2 l_2 + \frac{l_2^3}{3} - l_1 l_2^2 \cos(\pi - q_2) \right). \end{aligned} \quad (8.25)$$

В выражении (8.25) введем замену  $m_2 = \rho_2 l_2$ , тогда

$$J_1^* = m_2 \cdot \left( l_1^2 + \frac{l_2^2}{3} - l_1 l_2 \cos(\pi - q_2) \right). \quad (8.26)$$

Таким образом, подставляя (8.23) и (8.26) в выражение (8.22), получим функциональную зависимость момент инерции механической системы от обобщенной координаты  $q_2$  относительно оси вращения  $O_1$

$$J_{m1} = \frac{m_1 l_1^2}{3} + m_2 \left( l_1^2 + \frac{l_2^2}{3} - l_1 l_2 \cos(\pi - q_2) \right). \quad (8.27)$$

Для того чтобы учесть момент инерции, который обусловлен массой переносимого груза  $m$ , в выражение (8.27) следует добавить слагаемое

$$J_1^{**} = m(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(\pi - q_2)).$$

### 8.5. Алгоритм самонастройки исполнительных подсистем управления звеньями манипулятора

Рассмотрим общий алгоритм работы самонастраивающейся системы управления  $j$ -ой степенью подвижности многозвенного манипулятора. Он базируется на слежении за изменениями параметров объекта управления и последующей настройке регуляторов на актуальную, текущую модель объекта. Для ИПС манипуляционных роботов такими параметрами являются моменты инерции управляемых звеньев. Процедура настройки регуляторов с использованием ВИМ в полной мере изложена в монографии /4/.

Как было показано ранее, момент инерции  $j$ -й степени подвижности манипулятора зависит от конфигурации манипулятора (значения обобщенных координат) и массы груза в схвате робота. Эта зависимость задана выражением (8.19) для удобства обозначим его следующим образом:

$$J_{mj} = f(q, m), \quad (8.28)$$

где  $q$  – вектор обобщенных координат;  $m$  – текущее значение массы груза в схвате манипулятора.

На основании выражения (8.28) заключаем, что для реализации самонастраивающейся системы управления необходимо в любой момент времени иметь значения следующих параметров: компоненты вектора обобщенных координат  $q$  и значение массы груза  $m$ . Вектор  $q$  в манипуляционных системах доступен измерению и потому его компоненты являются известными величинами. Учет массы груза  $m$  осуществляется по результатам идентификации момента инерции по временной динамической характеристике  $j$ -го звена с привлечением соотношения (8.28), поскольку в данное выражение параметр массы  $m$  входит линейно.

Для пояснения алгоритма решения задачи обратимся к графику (рис. 8.10), иллюстрирующему вид типовой траектории движения  $j$ -го звена манипулятора.

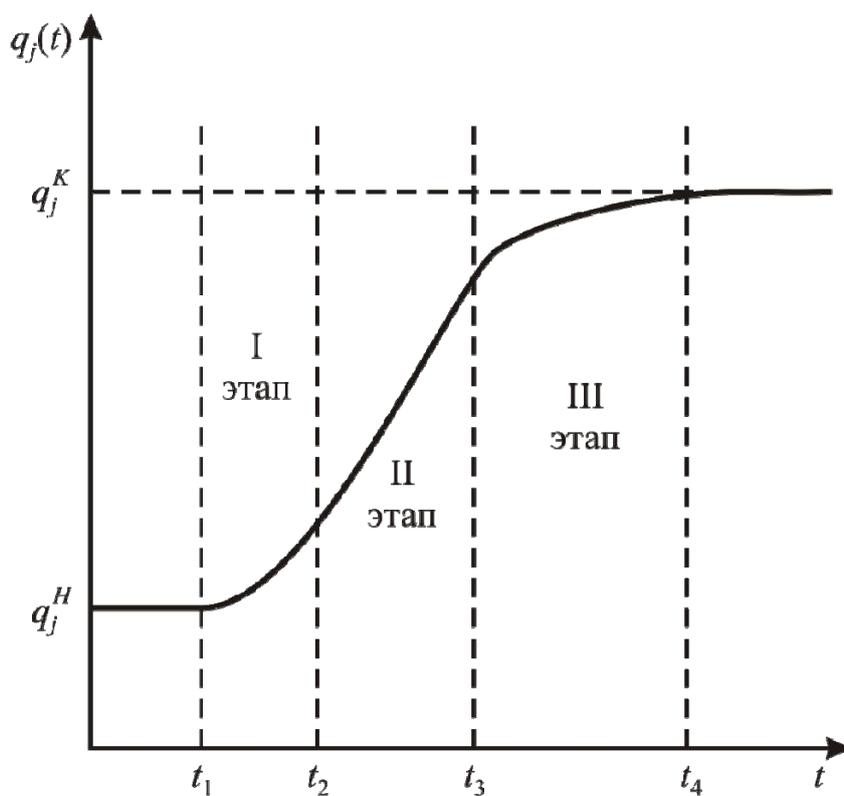


Рис. 8.10. График реакции системы

На рис. 8.10 показана временная зависимость обобщенной координаты  $q_j$ , которая имеет место при переходе системы из начального состояния с координатой  $q_j^H$  в конечное состояние с координатой  $q_j^K$ . На графике  $q_j(t)$  можно выделить три основных участка – этапа движения. Рассмотрим особенности каждого из них.

До момента времени  $t_1$  система находится в покое и сохраняет значение обобщенной координаты  $q_j^H$ . В момент времени  $t_1$  на вход системы приходит задающий сигнал  $g_j$ . С приходом сигнала на интервале времени  $t \in (t_1, t_2]$  система начинает разгон с ускорением из состояния покоя (скорость  $j$ -го звена  $\dot{q}_j = 0$ ) до максимально допустимой скорости движения ( $\dot{q}_j = \omega_j^{\max}$ ). Этому интервалу времени соответствует **I-й этап**. Его особенность заключается в том, что в системе имеет место переходный процесс, обусловленный ее инерционными свойствами. Именно на этом этапе следует осуществлять идентификацию параметров управляемого звена по динамическим переходным характеристикам. Значение массы груза  $m$  уточняется по идентифицированному значению  $Jm_j$ , известным значениям компонент вектора обобщенных координат  $q$  и на основании выражения (8.28). Отметим также, что к моменту времени  $t_2$  в системе затухают переходные процессы и система продолжает движение с постоянной скоростью  $\dot{q}_j = \omega_j^{\max}$ .

Интервалу времени  $t \in (t_2, t_3]$  соответствует **II-й этап** в работе самонастраивающейся системы управления – слежение и коррекция коэффициентов регуляторов ИПС робота. Под слежением понимается определение значения момента инерции  $Jm_j$  по известным значениям массы груза  $m$  и обобщенных координат в соответствии со строгой математической зависимостью (8.28). В результате выполнения этой операции формируется актуальная математическая модель объекта управления. Под коррекцией понимается вычисление и обновление значений настраиваемых коэффициентов регулятора на основании модели объекта управления и эталонной модели, которая определяет желаемые динамические и статические свойства ИПС робота. Частота обновления коэффициентов в регуляторе зависит от объекта управления и в каждом отдельном случае определяется индивидуально. Заме-

тим, что для стабилизации динамических свойств ИПС звена манипулятора достаточно осуществлять только коррекцию параметров регулятора скорости.

Интервалу времени  $t \in (t_3, t_4]$  соответствует **III-й этап** работы самонастраивающейся системы, который можно назвать этапом торможения. Он является весьма ответственным этапом в работе САУ. Именно на этом интервале времени может проявиться негативное влияние параметрических возмущений на динамические характеристики ИПС звена в виде повышенной колебательности, ухудшения декремента затухания или даже потери устойчивости. С целью предотвращения подобных явлений на данном временном отрезке также необходимо осуществлять операции слежения и коррекции коэффициентов регуляторов. При этом следует учесть, что в общем случае масса груза в схвате может быть переменной. Поэтому перед тем как корректировать коэффициенты регулятора, необходимо провести идентификацию инерционных свойств ИПС звена на половине интервала времени торможения с целью уточнения значения реальной массы  $m$  груза. На оставшемся временном отрезке (до момента времени  $t_4$ , характеризующего останова звена в заданной точке) самонастройка системы будет происходить так же, как и на II-м этапе.

Таким образом, мы рассмотрели основные этапы работы алгоритма самонастраивающейся ИПС манипуляционных роботов, которые включают в себя идентификацию динамических свойств объекта управления (определение момента инерции и массы груза), слежение за изменениями этих свойств по строгому геометрическому правилу, заданному выражением (8.28), и коррекцию настроечных коэффициентов регуляторов ИПС. Реализация изложенных принципов самонастройки в приложении к манипуляционным системам в робототехнике позволяет добиться более высокого качества управления движением звеньев путем стабилизации динамических и статических характеристик ИПС роботов на желаемом уровне. Отметим также, что решение задачи самонастройки регуляторов осуществлено на основе вещественного интерполяционного метода. Привлечение других подходов, например частотного, не позволяет сформировать столь же компактного алгоритмического обеспечения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии представлены основные сведения о вещественном интерполяционном методе расчета систем автоматического управления. Материалы охватывают широкий круг вопросов, относящихся к наиболее важным задачам создания САУ: синтезу регуляторов, идентификации объектов управления, настройке регуляторов, приближению передаточных функций и других. Метод является достаточно общим для класса линейных и линеаризуемых систем, распространяясь на системы непрерывные и дискретные, с сосредоточенными и распределенными параметрами.

К настоящему времени имеется промышленная практика применения ВИМ, он также был основой создания объектов интеллектуальной собственности. На основе алгоритмов ВИМ в ЗАО «ЭлеСи» разработан самонастраивающийся регулятор давления для магистральных нефтепроводов. Особенность таких объектов с позиций управления заключается в том, что параметры объекта, например вязкость нефти, не только не остаются постоянными, но изменяются в широких пределах. Это требует периодической настройки параметров регулятора, обеспечивая близость свойств системы к эталонной модели. В настоящее время около двадцати таких регуляторов изготовлено и работает на магистральных нефтепроводах страны. Еще одна разработка ЗАО «ЭлеСи» на этой же алгоритмической базе – программно-аппаратный комплекс для настройки регуляторов.

Метод использован для расчета регуляторов и построения алгоритмов управления линейным двигателем, осуществляющим линейное перемещение и позиционирование исполнительного устройства. Для этого же привода была разработана система автоматической настройки параметров регуляторов на этапе пуска. Для шагового двигателя, который также предназначен для осуществления вращательного движения и позиционирования при угловом перемещении исполнительного устройства, также разработана система управления на основе ВИМ. Эти работы были выполнены по контрактам с фирмой «Fastech», Республика Корея.

Имеется патент на изобретение «Способ самонастройки системы автоматического управления объектом и устройство для его реализации» /17/ и патент на полезную модель «Устройство для идентификации объектов управления» /18/.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скворцов Л.М. Интерполяционные методы синтеза систем управления // Проблемы управления и информатики, 1998, № 6.
2. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: Линеинные модели. – М.: Наука. 1987.
3. Автоматизированный электропривод промышленных установок / под ред. Г.Б. Онищенко. – М.: РАСХН, 2001.
4. Гончаров В.И. Вещественный интерполяционный метод синтеза систем автоматического управления. – Томск: изд-во ТПУ, 1995.
5. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – СПб, Изд-во «Профессия», 2004. – 2004.
6. Анализ и оптимальный синтез на ЭВМ систем управления / под ред. А.А. Воронова и И.А. Огурка. – М.: Наука, 1984.
7. Киселев О.Н., Поляк Б.Т. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию  $H^\infty$  и по критерию максимальной робастности // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 3.
8. Микропроцессорные системы автоматического управления / В.А. Бесекерский, Н.Б. Ефимов и др.; под общ. ред. В.А. Бесекерского. – Л.: Машиностроение, 1988.
9. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник в 5-ти тт.; 2-е изд. Т. 3: Синтез регуляторов систем автоматического управления / под. Ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
10. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления: пер. с англ. – Наука, 1986.
11. Вадутов, О.С. Решение задачи размещения полюсов системы методом D-разбиения / Вадутов О.С., Гайворонский // Изв. РАН. ТиСУ, 2004. № 5. С. 23–27.
12. Поляк, Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Поляк Б.Т., Щербаков П.С. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
13. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Управление роботами. Основы управления манипуляционными роботами. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 400 с.
14. Крутько П.Д. Управление исполнительными системами роботов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 336 с.

15. Хорьков К.А., Хорьков А.К. Электромеханические системы. Элементы канала управления / учеб. пособие. – Томск: Изд. ТГУ, 2001. – 396 с.
16. Юревич Е.И. Основы робототехники. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
17. Способ самонастройки системы автоматического управления объектом и устройство для его реализации/ Патент на изобретение № 2304298. Зарегистрирован в Гос. Реестре изобретений РФ 10 августа 2007 г. / Гончаров В.И., Рудницкий В.А., Удод А.С.
18. Устройство для идентификации объектов управления / Патент на полезную модель, 2006 г. / Гончаров В.И., Малиновский А.А., Рудницкий В.А., Сонг Д.И.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
ГЛАВА 1. МОДЕЛИ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА.....	5
1.1. Вещественное интегральное преобразование.....	5
1.2. Получение вещественных изображений. Вещественные передаточные функции .....	7
1.3. Математические модели динамических систем в форме численных характеристик .....	9
1.4. Матричная форма представления численных характеристик.....	14
1.5. Перекрестное свойство вещественного интегрального преобразования .....	15
ГЛАВА 2. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....	16
2.1. Основные задачи, решаемые при синтезе систем автоматического управления .....	16
2.2. Формирование желаемых передаточных функций .....	25
2.2.1. Общие сведения и классификация методов получения желаемых передаточных функций.....	25
2.2.2. Метод Коновалова–Орурка .....	28
2.2.3. Получение желаемых передаточных функций по импульсным переходным характеристикам вещественным интерполяционным методом.....	29
2.2.4. Получение желаемых передаточных функций по переходным характеристикам.....	32
2.2.5. Получение передаточных функций по желаемой реакции контура на заданный входной сигнал.....	36
2.2.6. Получение желаемых передаточных функций по прямым показателям качества .....	39
2.3. Получение желаемых передаточных функций разомкнутых систем .....	43
2.3.1. Получение желаемых передаточных функций разомкнутых статических систем .....	44
2.3.2. Получение желаемых передаточных функций разомкнутых астатических систем .....	45

2.4. Синтез передаточных функций регуляторов .....	48
2.4.1. Постановка задачи синтеза .....	48
2.4.2. Решение уравнения синтеза.....	49
2.4.3. Итерационный способ получения приближенного решения уравнения синтеза.....	53
2.4.4. Особенности синтеза астатических систем управления.....	59
<b>ГЛАВА 3. АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ: ОЦЕНИВАНИЕ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЙ, ПРИБЛИЖЕНИЕ К НАИЛУЧШИМ РЕШЕНИЯМ .....</b>	
	60
3.1. Оценивание точности приближенных решений.....	60
3.2. Приближение к наилучшим равномерным решениям.....	64
3.3. Аппроксимация сложных передаточных функций .....	67
3.4. Синтез систем управления с распределенными параметрами .....	71
<b>ГЛАВА 4. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ .....</b>	
	73
4.1. Исполнительные системы управления с цифровыми регуляторами .....	73
4.2. Математические модели элементов цифровых систем управления .....	76
4.2.1 Математическая модель аналого-цифрового преобразователя.....	76
4.2.2. Математическая модель цифрового регулятора.....	77
4.2.3. Математическая модель цифро-аналогового преобразователя.....	78
4.2.4. Типовая схема линеаризованной цифровой системы .....	80
4.3. Составление уравнения синтеза цифрового регулятора.....	81
4.3.1. Определение частоты и периода квантования.....	81
4.3.2. Получение дискретной передаточной функции приведенной непрерывной части.....	83
4.3.3. Формирование желаемой передаточной функции .....	83
4.3.4. Согласование структур левой и правой частей уравнения синтеза .....	85
4.4. Синтез передаточных функций цифровых регуляторов .....	87
4.4.1. Получение дискретной передаточной функции по непрерывному прототипу .....	88
4.4.2. Прямые методы синтеза дискретных регуляторов .....	91
4.5. Синтез цифровых регуляторов на основе вещественного дискретного преобразования.....	92
4.5.1. Вещественное дискретное преобразование .....	92

4.5.2. Формирование желаемых дискретных передаточных функций.....	95
4.5.3. Получение желаемых передаточных функций по импульсным переходным характеристикам.....	96
4.5.4. Получение желаемых передаточных функций по переходным характеристикам.....	99
4.5.5. Синтез дискретных регуляторов вещественным интерполяционным методом.....	102
<b>ГЛАВА 5. АНАЛИЗ СИСТЕМ</b>	
<b>С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ .....</b>	<b>107</b>
5.1. Введение в теорию робастного управления.....	107
5.2. Анализ робастной устойчивости.....	109
5.2.1. Показатели качества интервальных систем.....	109
5.2.2. Теорема Харитонова.....	110
5.2.3. Реберная теорема .....	112
5.3. Методы анализа интервальных систем на основе свойств корневого годографа.....	113
5.3.1. Основные положения метода корневого годографа .....	113
5.3.2. Многопараметрический интервальный корневой годограф .....	114
5.3.3. Анализ устойчивости интервального полинома в произвольном секторе .....	116
5.4. Синтез робастных систем .....	119
5.4.1. Доминантное расположение полюсов стационарной системы .....	120
5.4.2. Размещение областей локализации доминирующих полюсов интервальной системы с обеспечением требуемой максимальной колебательности. ....	123
5.4.3. Регулятор с функцией робастной самонастройки системы автоматического управления на заданное перерегулирование.....	132
<b>ГЛАВА 6. СИНТЕЗ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....</b>	
<b>6.1. Перекрестные связи в МСАУ .....</b>	<b>138</b>
6.2. Формы математического описания и структурные схемы МСАУ.....	139
6.3. Постановка задачи синтеза МСАУ .....	143
6.4. Синтез на основе принципа автономности каналов .....	144
6.5. Синтез двумерных САУ на основе приближения к автономности каналов.....	148

ГЛАВА 7. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА В ЗАДАЧАХ НАСТРОЙКИ РЕГУЛЯТОРОВ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ .....	155
7.1. Методы ручной, автоматизированной и автоматической настройки регуляторов .....	155
7.1.1. Частотные методы настройки регуляторов .....	156
7.1.2. Настройка регуляторов на основе вещественного интерполяционного метода.....	158
7.2. Идентификация объектов управления на основе вещественного интерполяционного метода .....	159
7.3. Идентификация объектов с распределенными параметрами.....	161
7.4. Идентификация цифровых систем и объектов управления на основе вещественного интерполяционного метода .....	167
7.5. Идентификация нелинейных объектов на основе вещественного интерполяционного метода.....	176
7.6. Инструментальные средства настройки регуляторов на основе вещественного интерполяционного метода .....	181
ГЛАВА 8. ПОСТРОЕНИЕ САМОНАСТРАИВАЮЩИХСЯ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПОДСИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЗВЕНЬЯМИ РОБОТОВ .....	191
8.1. Особенности управления манипуляторами .....	191
8.2. Особенности математических моделей динамики манипуляторов .....	193
8.3. Идентификация управляемого звена манипулятора по динамическим переходным характеристикам .....	198
8.3.1. Идентификация управляемого звена .....	198
8.3.2. Парирование сигнальных возмущений в каналах управления манипулятора .....	201
8.3.3. Косвенные методы измерения возмущающих сигналов в исполнительных подсистемах роботов .....	202
8.4. Учет кинематических соотношений при идентификации управляемых звеньев манипулятора .....	205
8.5. Алгоритм самонастройки исполнительных подсистем управления звеньями манипулятора.....	208
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	212
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	213

Учебное издание

АЛЕКСЕЕВ Александр Сергеевич  
АНТРОПОВ Антон Александрович  
ГОНЧАРОВ Валерий Иванович  
ЗАМЯТИН Сергей Владимирович  
РУДНИЦКИЙ Владислав Александрович

# ВЕЩЕСТВЕННЫЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор *С.П. Барей*  
Компьютерная верстка *А.И. Сидоренко*  
Дизайн обложки *О.Ю. Аршинова*

Подписано к печати 00.00.2009. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».  
Печать XEROX. Усл.печ.л. 12,74. Уч.-изд.л. 11,52.  
Заказ 401-10. Тираж 100 экз.



Томский политехнический университет  
Система менеджмента качества  
Томского политехнического университета сертифицирована  
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30  
Тел./факс: 8(3822) 56-35-35, [www.tpu.ru](http://www.tpu.ru)