

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.Г. Князева

ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СОВРЕМЕННЫХ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2009

УДК 536.5(075.8)
ББК 22.36я73
К54

Князева А.Г.

К54 Теплофизические основы современных высокотемпературных технологий: учебное пособие / А.Г. Князева; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 357 с.

ISBN 978-5-98298-804-1

В пособии даны основные представления о законах переноса тепла (теплопроводностью, конвекцией и излучением) и способах их математического описания применительно к моделированию высокотемпературных технологических процессов и их стадий. Уделено внимание инженерным подходам к решению задач. Описаны сопутствующие явления, имеющие теплофизическую природу (фазовые переходы, химические реакции, диффузия).

Разработано в рамках реализации Инновационной образовательной программы ТПУ по направлению «Материаловедение, наноматериалы и нанотехнологии» и предназначено для студентов 5 курса, обучающихся по направлению 150900 «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств», специализациям 151001.01 «Технология автоматизированного производства», 150900.17 «Физика высоких технологий в машиностроении», а также аспирантов теплофизических специальностей.

УДК 536.5(075.8)
ББК 22.36я73

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор ТГУ
А.Ю. Крайнов

Доктор физико-математических наук, профессор
проректор ТГАСУ, зав. кафедрой прикладной математики
С.Н. Колупаева

ISBN 978-5-98298-804-1

© ГОУ ВПО «Томский политехнический университет», 2009
© Князева А.Г., 2009
© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	8
ЧАСТЬ 1. Введение в моделирование теплофизических процессов	10
1.1. Температура, теплофизика, теплообмен	10
1.2. Количественные характеристики переноса теплоты	11
1.3. Механизмы переноса тепла: теплопроводность, конвекция, излучение	12
1.4. Исторический экскурс	13
1.5. Высокотемпературные технологии	15
1.6. Тепловая защита	22
1.7. Теплообменники	25
1.8. Химические технологии	27
1.9. Отношение теплообмена к термодинамике	28
1.10. Роль математического моделирования в разработке современных технологий	33
Вопросы для самоконтроля	35
ЧАСТЬ 2. Основные понятия и уравнения	36
2.1. Источники энергии	36
2.2. Характеристики температурного поля	40
2.3. Теплопроводность	42
2.4. Коэффициент теплопроводности	43
2.5. Задача о плоской стенке	46
2.6. Уравнение теплопроводности	48
2.7. О постановке задач в теории теплопроводности	50
2.8. Многослойная стенка	53
2.9. Электрическая аналогия для теплопроводности	55
2.10. Контактное термическое сопротивление	58
Вопросы для самоконтроля	60
Задания	61
ЧАСТЬ 3. Конвективный теплообмен и теплопередача	62
3.1. Конвективный теплообмен	62
3.2. Дифференциальные уравнения конвективного теплопереноса	69
3.3. Задача об обтекании плоской пластины	76
3.4. Теплопередача через плоскую стенку	83
3.5. Многослойная стенка	85
Вопросы для самоконтроля	88

Задания.....	88
ЧАСТЬ 4. Элементы теории подобия и анализа размерностей.....	90
4.1. Понятие о теории подобия.....	90
4.2. Теоремы теории подобия.....	92
4.3. Основные критерии теории подобия	93
4.4. Характерные масштабы	97
4.5. Примеры критериальных уравнений	98
4.6. Некоторые эмпирические формулы.....	99
4.7. Приближенный способ расчета коэффициентов теплоотдачи и трения.....	105
Вопросы для самоконтроля	110
Задания.....	111
 ЧАСТЬ 5. Задачи теплопроводности в различных системах координат	112
5.1. Уравнения теплопроводности в различных системах координат.....	112
5.2. Уравнение теплопроводности для тел канонической формы	114
5.3. Простейшие стационарные задачи теплопроводности в цилиндрической системе координат	116
5.4. Электрическая аналогия	119
5.5. Многослойная цилиндрическая стенка.....	121
5.6. Критический диаметр теплоизоляции.....	122
5.7. Шаровая стенка	125
5.8. Решение простейших задач в безразмерной форме	128
Вопросы для самоконтроля	130
Задания.....	131
 ЧАСТЬ 6. Задачи с объемным тепловыделением	132
6.1. Задача о плоской стенке.....	132
6.2. Цилиндр с объемным тепловыделением.....	138
6.3. Провод с изоляцией.....	141
6.4. Шар с объемным тепловыделением	144
6.5. Задача об ошибках термомпары	146
6.6. Охлаждение рабочих лопаток турбины	152
Вопросы для самоконтроля	155
Задания.....	155

ЧАСТЬ 7. Нестационарные задачи теплопроводности.....	157
7.1. Обзор задач и методов решения задач теплопроводности	157
7.2. Простейшие нестационарные задачи теплопроводности	158
7.3. Простейшие нестационарные задачи теории теплопроводности и элементы операционного метода	162
7.3.1. Задача с граничными условиями первого рода	162
7.3.2. Задача с граничными условиями второго рода	166
7.3.3. Задача с граничными условиями третьего рода	171
7.4. Метод Дюамеля	173
7.5. Примеры сопряженных задач теории теплопроводности	178
7.5.1. Термическая обработка материала в среде	178
7.5.2. Обработка материала с покрытием	181
Вопросы для самоконтроля	188
Задания.....	189
 ЧАСТЬ 8. Классические методы решения стационарных и нестационарных задач	 190
8.1. Решение краевых задач теории теплопроводности в виде произведения функций	190
8.2. Метод источников	191
8.3. Метод разделения переменных	197
8.3.1. Задача для круга	197
8.3.2. Интеграл Пуассона.....	201
8.3.3. Нестационарные задачи	202
8.4. Метод разложения по собственным функциям	207
8.5. Задача об остывании бесконечной пластины	210
Вопросы для самоконтроля	212
Задания.....	213
 ЧАСТЬ 9. Сопутствующие явления: теплообмен излучением.....	 214
9.1. Основные понятия теории теплового излучения	214
9.2. Основные законы теплового излучения.....	218
9.2.1. Закон Планка	218
9.2.2. Закон смещения Вина	218
9.2.3. Закон Стефана – Больцмана	219
9.2.4. Закон Ламберта	220

9.2.5.	Закон Кирхгофа	221
9.3.	Монохроматические радиационные свойства	223
9.4.	Понятие серого тела	225
9.5.	Лучистый теплообмен между телами	226
9.6.	Направленные радиационные свойства	228
9.7.	Перенос излучения в поглощающих пропускающих средах	231
9.8.	Теплообмен излучением при наличии других видов энергии	234
	Вопросы для самоконтроля	240
	Задания	241
ЧАСТЬ 10. Сопутствующие явления: фазовые превращения		243
10.1.	Условия фазового равновесия	243
10.2.	Уравнение Клапейрона – Клаузиуса	247
10.3.	Следствия условия фазового равновесия	248
10.4.	Задача Стефана	252
10.5.	Простейшая классификация фазовых переходов	255
10.6.	Размытые и точечные фазовые переходы	260
10.7.	Элементы теории двухфазной зоны	262
10.8.	Элементы кинетической теории фазовых превращений	264
	Вопросы для самоконтроля	267
	Задания	268
ЧАСТЬ 11. Сопутствующие явления: диффузия и химические реакции		269
11.1.	Простейшие понятия о кинетике химических реакций	269
11.2.	Примеры описания кинетики гомогенных реакций	272
11.3.	Квазистационарное приближение	279
11.4.	От чего зависит скорость химической реакции?	281
11.5.	Реакции с участием твердых веществ	284
11.5.1.	Классификация твердофазных превращений	284
11.5.2.	Особенности твердофазных превращений	288
11.6.	Кинетическое описание твердофазных превращений	291
11.7.	Диффузионная кинетика	295
11.7.1.	Общие представления о диффузии	295
11.7.2.	Роль диффузии в некоторых физико–химических процессах	298

11.7.3.	Макрокинетические области протекания гетерогенного процесса	300
11.8	Химические источники энергии в уравнении теплопроводности	304
	Вопросы для самоконтроля	307
	Задания.....	307
ЧАСТЬ 12. Разные задачи		309
12.1.	Охлаждение пористой пластины.....	309
12.2.	Движущиеся источники тепла.....	311
12.3.	Электрическое нагревание проволоки	314
12.4.	Ядерный тепловыделяющий элемент	317
12.5.	Теплообмен при наличии вязкого источника тепла.....	319
12.6.	Нагрев тел излучением ОКГ.....	321
12.7.	Оболочка, охлаждаемая излучением, с резким перепадом равновесных температур	328
12.8.	Модель процесса цементации компактного материала.....	330
12.9.	Нагрев излучением ОКГ разлагающейся полимерной пленки	336
	Задания.....	341
ПРИЛОЖЕНИЯ		344
1.	Основные теоремы и правила преобразования Лапласа	344
2.	Изображения некоторых функций	347
3.	Физические величины.....	349
ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ.....		352
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА		355

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «Теплофизические основы современных высокотемпературных технологий», предназначено, прежде всего, для магистрантов и аспирантов, обучающихся в технических высших учебных заведениях по специальностям «Физика высоких технологий в машиностроении», «Теплофизика и теплотехника» и др.

В пособии кратко изложены основные законы переноса тепла и массы, а также сопутствующих им явлений, некоторые способы вывода уравнений теплопроводности для твердого тела и для жидкости, уделено внимание инженерным подходам к решению теплофизических задач.

В первой главе дано краткое описание природных и технических процессов, где явление теплопроводности играет большую роль, обосновывается необходимость математического моделирования, что может способствовать как совершенствованию технологий, так и углубленному пониманию физических явлений, приводятся основные термодинамические соотношения, используемые в других главах. Вторая и третья главы посвящены описанию механизмов переноса тепла и выводу основных уравнений. Здесь же приводятся примеры простых моделей, которые анализируются с использованием качественных инженерных подходов; вводятся физические понятия (коэффициент теплопроводности, коэффициент теплообмена, коэффициент теплопередачи, термическое сопротивление и др.). Собственно конвективному теплообмену посвящена глава 3 и некоторые разделы главы 4, где дополнительно приводится сводка основных теорем теории подобия, дается представление о теории подобия и методе анализа размерностей, которые на практике с успехом применяются при обработке и интерпретации данных теплофизического эксперимента. Поскольку процессы обработки применяются к деталям самых различных форм, то для изучения в курсе теплофизики полезной будет глава 5, где приводится сводка уравнений теплопроводности для различных систем координат, даются примеры практически полезных задач, в том числе для проблем тепловой защиты, конвективной теплопередачи. Шестая глава включает частные задачи с объемными источниками тепла разной физической природы, например, связанные с электрическим нагревом. Интерес для будущих инженеров и исследователей представляет, например, задача об ошибках термопары. Собственно аналитическим методам решения задач теплопроводности посвящены 7-я и 8-я главы. Но, в отличие от известных учебников по методам решения задач, здесь не доказываются теоремы. Рекомендации по практическому использованию тех или иных методов даются на примерах задач, имеющих непосредственное отношение к современным

высокотемпературным технологическим процессам. Основные законы теплового излучения и ряд частных задач теории переноса излучения даны в главе 9. Сопутствующим явлениям – фазовым переходам, химическим превращениям и явлениям диффузии посвящены главы 10 и 11, где помимо основных понятий, приводятся частные задачи, варианты которых встречаются в процессах обработки материалов, ряд простых, но полезных задач химической кинетики и теории диффузии. Всюду уделяется внимание физической интерпретации постановок задач и получаемых решений. Заключительной главой в курсе является 12-я глава, где можно найти самые разные задачи, являющиеся повторением всего пройденного материала.

В пособие (в разные главы) включены ряд задач, которых нет в классических учебниках по теплофизике. Они заимствованы из научной (а иногда и из журнальных статей) литературы. В некоторых разделах учебного курса даны сноски, которые можно использовать для углубления в данную научную проблему. Каждый раздел (кроме последнего) содержит около десяти вопросов на повторение пройденного материала. В конце каждой главы представлены задачи, которые рекомендуются для самостоятельной проработки или для решения во время практических или лабораторных занятий. Численным методам решения задач теплообмена в данном курсе особого внимания не уделяется, так как в настоящее время имеются многочисленные специальные учебные курсы. Список литературы, в том числе и по численным методам, рекомендованной для дополнительного изучения, представлен в конце пособия.

Замечу, что в данном курсе во всех частных и численных примерах, а также в дополнительных заданиях использована смешанная система единиц измерения, включая систему единиц СИ и разные технические единицы. Так как в практике инженерам и исследователям (в том числе, при использовании справочной литературы) приходится сталкиваться с различными системами единиц, при решении частных задач полезно будет освоить, как разные системы единиц связаны между собой.

Представленное учебное пособие является лишь введением в моделирование технологических процессов и представляет собой первую часть задуманного автором курса. Во вторую часть предполагается включить комплексные модели технологических процессов обработки материалов и их поверхностей с использованием высокоэнергетических источников с подробным описанием физической основы постановок задач и методов их решения, что зачастую выпускается из научной и учебной литературы.

Д.ф.-м.н., профессор

Князева Анна Георгиевна

ЧАСТЬ 1

Введение в моделирование теплофизических процессов

1.1. Температура, теплофизика, теплообмен

Температура – одно из основных понятий, играющих важную роль не только в термодинамике, теории теплопроводности, но и в физике в целом. Температура тела есть мера его нагретости.

С точки зрения молекулярно-кинетической теории, температура есть мера интенсивности теплового движения молекул. Температура пропорциональна кинетической энергии частиц рабочего тела. Ее численное значение связано с величиной средней кинетической энергии молекул вещества

$$\frac{m\bar{V}^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

где k – постоянная Больцмана $1,380662 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, m – масса элементарных частиц (молекул), \bar{V} – среднеквадратичная скорость поступательного движения частиц. Температура, определенная таким образом, называется абсолютной.

В системе СИ единицей измерения температуры является Кельвин (К). Существуют другие шкалы для измерения температуры: Фаренгейта, Реомюра и Цельсия.

Для них справедливы соотношения

$$\frac{(T - 273)K}{5} = \frac{t^{\circ}C}{5} = \frac{t^{\circ}R}{4} = \frac{(t - 32)^{\circ}F}{9},$$

где K – градусы по Кельвину, C – по Цельсию, R – по Реомюру, F – по Фаренгейту.

Понятие температуры связано с весьма неопределенными понятиями тепла и холода. Пока температуру научились измерять, и пришли к понятию абсолютной шкалы температуры, прошло немало времени – от Галилея до Цельсия¹. Понятия «тепло» и «температура» разделить было еще сложнее. Когда нагревают тело, температура его повышается. Когда тепло перетекает от одного тела к другому, температура одного тела падает, а другого повышается. Великим законом природы нужно считать тот факт, что тепло всегда перетекает от горячего тела к холодному, и температура соприкасающихся тел стремится выровняться. Это

¹ Смородинский Я.А. Температура. М.: Наука, 1987. 192 с.

существенно отличает процесс передачи тепла от механических процессов, которые могут протекать в разных направлениях.

Самопроизвольный необратимый перенос теплоты (точнее, энергии в форме теплоты) между телами или участками внутри тела с различной температурой, называют теплообменом. В общем случае перенос теплоты может вызываться также неоднородностью полей иных физических величин, например, градиентом концентраций (так называемый диффузионный термоэффект). Теплообмен существенен во многих процессах нагревания, охлаждения, конденсации, кипения, выпаривания, кристаллизации, плавления и оказывает значительное влияние на массообменные (абсорбция, дистилляция, ректификация, сушка и др.) и химические процессы.

Движущиеся среды, участвующие в теплообмене и интенсифицирующие его, называются теплоносителями (обычно капельные жидкости, газы и пары, реже - сыпучие материалы). Известны два основных способа проведения тепловых процессов: путем теплоотдачи и теплопередачей. Теплоотдача – это теплообмен между поверхностью раздела фаз (чаще твердой поверхностью) и теплоносителем. Теплопередача – это теплообмен между двумя теплоносителями или иными средами через разделяющую их твердую стенку либо межфазную поверхность.

Теорией теплообмена или теплофизикой называется наука, изучающая процессы переноса тепла в пространстве с неоднородным температурным полем и теплофизические свойства веществ.

1.2. Количественные характеристики переноса теплоты

Интенсивность переноса теплоты характеризуется плотностью теплового потока, т.е. количеством теплоты, передаваемой в единицу времени через единичную площадь поверхности. Эта величина измеряется в Вт/см² или Дж/(см²с). Будем обозначать ее буквой q .

Количество теплоты, передаваемое в единицу времени через произвольную поверхность F , в теории теплообмена принято называть мощностью теплового потока или просто тепловым потоком - Q . Единицей ее измерения служит Дж/с или Вт.

Количество теплоты, передаваемое за произвольный промежуток времени τ через произвольную поверхность F есть Q_τ . Эта величина измеряется в Дж.

Эти величины связаны соотношениями

$$q = Q/F = Q_\tau / (F\tau). \quad (1.1)$$

Закономерности переноса теплоты и количественные характеристики этого процесса являются предметом изучения теории теплообмена (теплопередачи).

1.3. Механизмы переноса тепла: теплопроводность, конвекция, излучение

Теплота может распространяться в любых веществах и даже через вакуум.

Существует три основных механизма теплопереноса – теплопроводность, конвекция и излучение.

Во всех веществах теплота передается *теплопроводностью* за счет переноса энергии микрочастицами. Молекулы, атомы, электроны и другие микрочастицы, из которых состоит вещество, движущиеся со скоростями, пропорциональными их температуре, переносят энергию из зоны с более высокими температурами в зону с более низкими температурами.

В жидкостях, наряду с движением микрочастиц, между зонами с разными температурами, возможно перемещение макроскопических объемов. В теории теплообмена, как и в гидромеханике, термином «жидкость» обозначается любая сплошная среда, обладающая свойством текучести. Подразделение на капельную жидкость и газ используется только в случае, когда агрегатное состояние вещества играет в рассматриваемом процессе существенную роль. Перенос теплоты вместе с макроскопическими объемами вещества носит название *конвективного теплопереноса* или просто *конвекции*.

Конвекцией можно передавать теплоту на большие расстояния. Например, от ТЭЦ (теплоэлектроцентрали) теплота передается по трубам вместе с движущейся горячей водой на десятки километров для отопления жилых и промышленных зданий. В данном случае теплоносителем является вода.

Часто приходится рассчитывать конвективный теплообмен между жидкостью и поверхностью твердого тела. Этот процесс получил специальное название – конвективная теплоотдача (теплота отдается от жидкости к поверхности или наоборот).

Третьим способом переноса теплоты является *излучение*. За счет излучения теплота передается во всех лучепрозрачных средах, в том числе, и в вакууме, например, в космосе, где это – единственный способ передачи теплоты между телами. Носителями энергии при теплообмене излучением являются фотоны, излучаемые и поглощаемые телами, участвующими в теплообмене.

Часто перенос теплоты осуществляется одновременно различными способами (случай *сложного теплообмена*). Например, конвективная теплоотдача от газа к стенке практически всегда сопровождается параллельным переносом теплоты излучением.

Перенос массы вещества из одной точки пространства в другую возникает при наличии разности концентраций данного вещества в рассматриваемых точках. Например, компоненты газовой смеси, неравномерно распределенные по объему, будут переноситься из зон, где их концентрация повышена, в зоны с низкой концентрацией.

Способы переноса массы, как и теплоты, могут быть различными. Если масса переносится только за счет движения атомов или молекул, то такой процесс называется *диффузией*. Наиболее интенсивно диффузии протекает в газах, поскольку молекулы в них более подвижны, чем в жидкостях и твердых телах. В жидкостях и газах, наряду с диффузией, возможен и *конвективный массоперенос* за счет перемещения макроскопических объемов.

При сублимации, сушке, химических реакциях приходится рассчитывать конвективный перенос массы от поверхности тела в жидкую или газовую фазу. Такой процесс называется конвективной *массоотдачей*.

Аналогичные процессы тепло- и массопереноса описываются одинаковыми по форме математическими уравнениями, поэтому многие выводы теории теплопереноса будут справедливы и для теории переноса массы.

Существуют *более сложные механизмы* переноса тепла и массы, которые также наблюдаются в технологических процессах (например, диффузионная теплопроводность и термодиффузия, многокомпонентная диффузия и др.)

1.4. Исторический экскурс²

Основы математической теории теплопроводности были заложены еще трудами Ломоносова, Ньютона, Ламберта, Био, Фурье, Лапласа, Пуассона и других ученых. Длительное время эта теория оставалась достоянием теоретиков и только в некоторых случаях находила практическое применение. Однако с течением времени положение существенно изменилось.

² Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел: учебное пособие. М.: Высш. шк., 1985. 480 с.; Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике, под общей ред. Авдеевского В.С. М.: Машиностроение, 1992. 528 с. и др.

Основоположником учения о теплоте был великий русский ученый М.В.Ломоносов. В середине XVIII века, опередив на сто с лишним лет науку Западной Европы, Ломоносов создал единую теорию теплоты и вещества, изложив основы ее в работе «Размышления о причине теплоты и холода» (1744). Эта теория теплоты содержала в себе все основные элементы современной теории: закон сохранения массы и энергии, представление о теплоте как о результате движения элементарных частиц тела; о степени нагрева как меры интенсивности движения этих частиц; о механизме теплопроводности как обмене энергии движения между отдельными частицами; об абсолютном нуле температуры.

В 1807 г. Французский ученый Ж. Фурье сформулировал основную гипотезу теплопроводности, положившую начало развитию математической теории теплопроводности. Им же в 1822 г. изложена теория распространения теплоты в твердых телах в труде «Аналитическая теория тепла».

В 1831 году знаменитый русский математик М.Б. Остроградский опубликовал работу «Замечания по теории теплоты», в которой дал общее решение уравнения теплопроводности для твердого, однородного и изотропного тела.

С развитием техники роль процессов переноса теплоты в различных тепловых устройствах и машинах возросла, и тепловым процессам стало уделяться значительно больше внимания, особенно со второй половины XIX века.

В научных исследованиях все шире стали использоваться методы математического анализа. В 1881–1882 годах в Москве А.Г. Столетов прочел свои знаменитые лекции по теории теплопроводности. В книге «Теория теплоты» (1882 г.) он писал: «С исторической точки зрения учение о теплопроводности есть начало теории теплоты и вообще математической физики». Столетова А.Г. считают первым создателем курса современной теплофизики, которая выделяется в самостоятельную науку в конце XIX – начале XX в.

Русский ученый В.А. Михельсон (1890) был первым исследователем, поставившим вопрос о зависимости лучеиспускания от температуры и длины волны.

В 20-е годы XX века развитие учения о теплообмене возглавил академик М.В. Кирпичев, школа которого заложила основы теории подобия и ее приложения к вопросам теплопередачи.

Большое влияние на развитие теории тепло- и массообмена оказали работы А.В. Лыкова и его школы. Широкое признание получили исследования С.С Кутателадзе, развившего теорию подобия в процессах изменения агрегатного состояния вещества.

Из работ зарубежных ученых, посвященных теории теплоты, кроме названных выше, широко известны труды Кирхгофа, Пуассона, Вебера, Томсона, Планка, Ламе, Пуанкаре, Карслоу, Егера, Эккерта, Дрейка и др.

Теория теплопроводности является основой большинства современных методов определения теплофизических свойств, позволяет разрабатывать способы управления технологическими процессами обработки и получения материалов, рассчитывать конструкции установок и строительных объектов, объяснять и предсказывать те или иные природные явления. Рассмотрим некоторые примеры.

1.5. Высокотемпературные технологии

Под *высокотемпературными технологическими процессами* (ВТП³) зачастую понимают такие технологические процессы, которые реализуются при использовании концентрированных источников энергии. Условно к ВТП относят те, при которых достигаются температуры выше температуры плавления железа.

Типичными примерами высокотемпературных технологических процессов (ВТП) являются: лазерная и электронная технологии (сварка, резка, термическая обработка); дуговая сварка и другие способы соединения материалов (диффузионная пайка; термитная и СВС – сварка); плазменные технологии нанесения покрытий и поверхностной обработки; ионные технологии; кислородная резка; совмещенные технологии резки, сварки, наплавки; процессы получения тонких пленок и выращивание монокристаллов; процессы химической и диффузионной обработки поверхностей материалов и др. К высокотемпературным технологиям можно отнести и многие технологии получения новых материалов в химической промышленности; переработки и сжигания природного топлива; различные металлургические процессы.

Но любое определение оказывается весьма условным.

Во всех высокотемпературных технологиях происходит преобразование различных видов энергии в тепловую энергию и (или) ее непосредственное использование для получения, переработки и модификации материалов и их поверхностей.

³ Такого типа сокращения используются, например, в книге Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Анищенко Л.М. Высокотемпературные технологические процессы. Теплофизические основы. М.: Наука, 1986. – 174 с

Каждый из названных ВТП, в свою очередь, включает множество частных технологий, зависящих от конкретного технического решения, условий и материалов, для которых процесс предназначен.

Например, из термических способов резки (незаменимых при разделке устаревшей техники на металлолом, в заготовительных цехах машиностроительных и судостроительных предприятий, в ремонтном, строительном производстве и пр.) выделяют газокислородную (ГКР); воздушно-плазменную (ВПР); электродуговую полуавтоматическую резку порошковой проволокой (ЭДР); лазерную резки.

В настоящее время существует много различных способов сварки⁴, которые классифицируются по различным признакам: кузнечная (горновая) сварка; газопрессовая сварка; контактная сварка; термитная сварка; электрическая дуговая сварка; электрошлаковая сварка; дуговая сварка в среде защитного газа; атомноводородная сварка; газовая сварка и т.д.

Для высокотемпературных технологий характерны следующие особенности:

- существенная неравновесность процессов, связанная с неоднородным распределением температуры и ее изменением во времени;
- высокие скорости нагрева и охлаждения различных элементов системы;
- наличие сложного теплообмена;
- существование нескольких различных фаз, соотношение между которыми изменяется;
- разнообразные физико-химические явления, сопутствующие нагреву и охлаждению или лежащие в основе технологии.

В последние годы высокотемпературные технологии, использующие высококонцентрированные источники энергии (технологический электронный луч, лазерное излучение; потоки плазмы, кислородная струя и др.), нашли широкое применение в электронной промышленности и машиностроении для решения таких проблем, как сварка, резка, получение отверстий, термообработка, химико-термическая обработка, оплавление поверхностного слоя, лазерно-плазменная обработка, осаждение пленок, зонная очистка, выращивание монокристаллов и др.

Технологический процесс можно представить в виде схемы, показанной на рис. 1.1. Технологическая камера (вакуумная или газонаполняемая камера, реактор, печь и т.п.) предназначена для поддержания заданных технологических режимов в замкнутом пространстве, для ис-

⁴ Сваркой называется процесс получения неразъемного соединения деталей путем применения местного нагрева.

ключения влияния окружающей среды на технологический процесс; для сбора и отвода отходов технологического процесса. Технологическая камера имеет систему датчиков контроля и управления технологическим процессом.

Следует отметить, что для ряда технологических процессов (например, таких, как сварка в открытой атмосфере) технологическая камера отсутствует. Основные энергетические источники используются непосредственно в технологических операциях (например, при сварке, резке, испарении и др.).

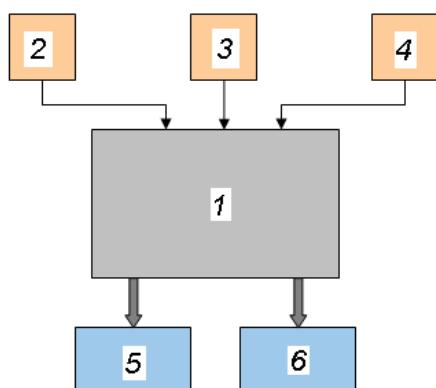


Рис. 1.1. Блочная структура технологического процесса: 1 – технологическая камера; 2 – основные энергетические источники; 3 – вспомогательные энергетические источники; 4 – материальные потоки; 5 – готовый продукт; 6 – технологические отходы

Вспомогательные энергетические источники используются для создания определенных температурных режимов некоторых точек технологического аппарата (например, для подогрева подложек при нанесении тонких пленок). Материалы и заготовки для получения готового изделия образуют материальные потоки. Технологические отходы складываются из энергетических и материальных.

Основные и вспомогательные энергетические источники, материальные потоки имеют свои автономные системы регулирования и управления, которые могут быть связаны с системой контроля технологического процесса, что позволяет осуществлять

управляемый во времени технологический процесс. В противном случае, если такая связь отсутствует, технологический процесс контролируется по конечному продукту.

Принципиальной особенностью высокотемпературных технологий является использование современных высокоэнергетических источников. Ввиду большой технологической значимости, остановимся на особенностях применения некоторых видов ВКИЭ.

*Электронно-лучевые технологии*⁵. Как источник энергии для ВТП технологический электронный луч (ТЭЛ) применяется с конца 50-х годов 20-го века.

⁵ Шипко А.А., Поболь И.Л., Урбан И.Г. Упрочнение сталей и сплавов с использованием электронно-лучевого нагрева. Минск: Наука и техника, 1995. 280 с.

Сущность процесса электронно-лучевой обработки заключается в том, что кинетическая энергия электронов, ускоренных в электрическом поле, при соударении с обрабатываемым изделием, помещенным в вакуумную камеру, превращается в тепловую. Глубина проникновения электронов (длина пробега) в твердое тело зависит от ускоряющего напряжения и плотности обрабатываемого вещества. Так, для ускоряющего напряжения в десятки киловольт глубина проникновения электронного потока в металлы составляет десятки микрометров. В зависимости от диаметра пятна нагрева на поверхности тела тепловой источник, обусловленный действием электронного луча, может быть как поверхностным, так и объемным.

Так как диапазон мощности и плотности энергии в электронном луче велик (до единиц мегаватт и 10 Вт/см^2), возможно получение всех видов термического воздействия ТЭЛ на материалы: нагрев до заданных температур, плавление практически любых материалов, испарение с весьма большими скоростями.

Электронно-лучевая технология развивается в следующих направлениях: плавка и испарение в вакууме, сварка и прецизионная обработка. Обычно обработку проводят в среднем вакууме, $p \approx 10^{-4}$ Па, когда потери мощности ТЭЛ на рассеяние невелики. В некоторых исследовательских центрах имеется опыт по сварке и обработке ТЭЛ, выведенным в атмосферу (с использованием системы шлюзования).

При плавке и испарении в вакууме, для нанесения пленок и покрытий используют мощные (до нескольких мегаватт) электронно-лучевые печи при ускоряющем напряжении 20–30 кВ. Плотность мощности здесь относительно невелика и обычно не превышает 10^4 – 10^5 Вт/см^2 . Преимущество электронно-лучевой переплавки перед дуговой обусловлено частичным удалением вредных примесей из переплавляемого металла и повышением однородности слитков.

Использование ТЭЛ для нанесения пленок дает возможность получить скорости напыления, практически недостижимые для других методов нанесения пленок и покрытий.

Для сварки металлов – основного направления в применении ТЭЛ для ВТП – используют установки трех классов: низко– средне– и высоковольтные, которые охватывают диапазоны ускоряющих напряжений от 20 до 150 кВ. Мощность сварочных установок обычно составляет от 1 до 120 кВт и более при максимальной удельной мощности 10^5 – 10^6 Вт/см^2 . Установки с ускоряющим напряжением выше 150 кВ в производственных процессах, как правило, не применяются, поскольку они

требуют дополнительной защиты обслуживающего персонала от длинноволнового рентгеновского излучения.

В последние годы исследуется возможность использования для ВТП высокоэнергетических электронных потоков с энергией 20 МэВ. Основное преимущество таких пучков заключается в большой глубине проникновения электронного пучка в объем вещества.

При использовании ТЭЛ в сварочных процессах возможно получение в металлах глубоких проплавлений, называемых также по форме шва кинжальными, для которых характерно большое значение отношение глубины проплавления h_f к характерному диаметру зоны проплавления d_f . Для ТЭЛ достигнуто соотношении h_f/d_f и более при проплавлении металлов. Это открывает широкие возможности для однопроходной сварки изделий большой толщины в различных пространственных положениях. ТЭЛ часто используют для сварки особо важных изделий в ракетной и космической технике, в самолетостроении и энергомашиностроении, где требуется высокая надежность сварных швов.

Важным направлением внедрения ТЭЛ является прецизионная обработка изделий из сверхтвердых и тугоплавких металлов, детали из которых все шире используют при создании новой техники. Для прецизионной обработки таких деталей (сверления, резки, фрезерования и др.), в основном, применяют высоковольтные установки (с ускоряющим напряжением до 150 кВ) небольшой мощности (до 1 кВт), обеспечивающие удельную мощность до 10^8 Вт/см². Особенностью этих процессов является высокая локальность ТЭЛ (диаметр зоны воздействия – несколько микрометров), а также возможность управлять пространственно-временными характеристиками луча практически безинерционно, что на деле недоступно для других ВКИЭ.

Электронно-лучевая поверхностная закалка - перспективный технологический процесс. Для многих практических задач она имеет такие решающие преимущества по сравнению с другими методами (лазерная, ионная, ТВЧ), как большая глубина закалки, вакуумная защита обрабатываемой поверхности, более высокая производительность процесса, лучшие характеристики модифицированного поверхностного слоя. Электронно-лучевую закалку поверхностей развивают, прежде всего, в автомобилестроении, производстве сельскохозяйственной техники и машин для переработки сельскохозяйственной продукции, в инструментальной и легкой промышленности, турбостроении. Во многих случаях электроннолучевая закалка заменяет технологические процессы нанесения упрочняющих покрытий, несмотря на их сравнительную дешевизну.

Лазерная технология (ЛТ)⁶. Взаимодействие излучения лазера с веществом приводит к поглощению электромагнитной энергии в тонком поверхностном слое металла, а в случае диэлектриков и полупроводников лазерное излучение может проникать вглубь объема, создавая объемный источник теплоты.

Поглощение энергии излучения приводит к развитию процессов тепло – и массообмена, протекающих на поверхности и в объеме материала. Теплофизические процессы играют существенную роль в развитии разнообразных физических явлений и в значительной степени определяют результат воздействия излучения на вещество.

Развитие ЛТ началось практически одновременно с созданием первых лазеров (1960 г.). В настоящее время лазерная технология относится к числу наиболее развивающихся технологий. Она применяется при поверхностной закалке, легировании, плавке, сварке, пробивании отверстий и др.

Исследования показывают, что при обработке материала основное значение имеют энергетические параметры – энергия, мощность, длительность воздействия, пространственно – временное распределение плотности мощности, условия фокусировки, физические свойства материалов (коэффициенты поглощения, теплопроводность, плотность и т.д.).

В промышленной технологии используются лазеры нескольких типов, различающиеся длиной волны (от 0,7 до 10,6 мкм) и видом генерации излучения (непрерывное, импульсно-периодическое, импульсное). Наибольшее распространение получили импульсные лазеры для электронной промышленности, радиопромышленности, приборостроения и др., средняя мощность которых не превышает 1 кВт, хотя в импульсе мощность может превосходить сотни и тысячи киловатт. Лазерные установки для импульсной сварки, термообработки и получения отверстий внедрены в промышленность с экономическим эффектом в десятки миллионов рублей.

Промышленные лазеры с большой непрерывной мощностью более 1-5 кВт весьма перспективны для сварки, термообработки и других технологических процессов в машиностроении, станкостроении, автомобильной и других отраслях промышленности.

В последнее время интенсивно разрабатываются конструкции импульсно – периодических лазеров, перспективных для технологических процессов получения и обработки материалов. Импульсно-

⁶ Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Кокора А.Н. Лазерная обработка материалов. М.: Машиностроение, 1975. 296 с.

периодические воздействия позволяют уменьшить размер зоны термического влияния и тем самым повысить КПД процесса. Кроме того, это приводит к ускорению образования отверстий, так как в промежутках между импульсами канал в веществе освобождается от продуктов разрушения. Важными для технологических применений являются автоколебания потока энергии на поверхности обрабатываемого материала. Использование автоколебательных режимов дает возможность лучше контролировать ход технологического процесса.

В последние годы получила развитие лазерно-плазменная металлургия. Ее главное отличие от лазерной обработки материалов заключается в том, что лазерному воздействию подвергаются материалы и изделия, находящиеся в среде активных газов (азота, углекислого газа и др.) при повышенном и высоком давлении (несколько десятков атмосфер). Присутствие газов способствует образованию плазменного сгустка вблизи поверхности металла, если плотность потока излучения превышает 10^6 Вт/см². Одновременное воздействие плазменного сгустка и прошедшего через него лазерного излучения формирует зону обработки на поверхности изделия, вызывая нагрев, последующее плавление вещества и синтез на поверхности таких веществ как карбиды и нитриды. Если использовать атмосферу восстановительных газов, например, водорода, то возможно восстановление тугоплавких и других металлов на поверхности окислов (гетерогенное восстановление). В лазерном эрозионном факеле возможно также гомогенное восстановление.

Плазменная технология. Применение плазмы для металлургии и обработки материалов в машиностроении и др. отраслях активно началось в конце 50-х годов 20-го века. Первоначально основное внимание было сосредоточено на таких технологических процессах как сварка и резка металлов. В дальнейшем плазменная технология начала активно применяться в металлургических процессах, включая процессы восстановления и синтеза, переплавки и рафинирования тугоплавких металлов, получения порошковых материалов, сфероидизации частиц, нанесения покрытий и др.

Генерация низкотемпературной плазмы осуществляется двумя основными способами – с помощью дуги прямого действия (когда один из электродов, обычно – анод, является одновременно обрабатываемым материалом) или с помощью ионизованного газа, который подается через отверстие в аноде в свободное пространство. Обработка материала производится при введении в плазму дисперсных материалов, проволоки, которая плавится, дробится на мелкие капли под действием газового потока и подвергается плазменной обработке.

Наряду с дуговой плазмой в технологических процессах используется ВЧ – и СВЧ – плазма. ВЧ – плазма зажигается внутри кварцевого цилиндра и практически не контактирует со стенками камеры, что делает ее «стерильной», т.е. незагрязненной продуктами испарения. ВЧ – плазма обычно неравновесна, и это дает возможность получения веществ с уникальными свойствами.

Плазменный поток распределен по некоторому закону, при этом максимум мощности приходится на центральную часть зоны воздействия – анодное пятно. В некотором приближении можно считать интенсивность теплового источника распределенной по нормальному закону. Плотность потока в анодном пятне может достигать 10^6 Вт/см², а в свободной плазменной струе, истекающей в пространство, она несколько ниже – до 10^4 Вт/см².

Особенно перспективным является использование плазменных процессов в металлургии и технологии неорганических материалов. Достоинства плазменной технологии обусловлены не только высокой интенсивностью энергетических потоков, но и возможностью проведения плазмо – химических реакций, приводящих к синтезу новых веществ.

1.6. Тепловая защита

Особенно сложные и важные задачи стоят в области изучения теплообмена в современной авиационной и ракетно-космической технике⁷. При сверхзвуковых скоростях полета значительно меняются условия теплопередачи в отдельных элементах конструкций летательных аппаратов. Возникает необходимость его охлаждения или защиты от аэродинамического нагрева, являющегося следствием трения между поверхностью летательного аппарата и набегающим потоком воздуха или потоком каких-либо других газов, составляющих атмосферы планет. Проблема тепловой защиты летательного аппарата от высоких удельных тепловых потоков и высоких температур разрабатывается с 50-60-х годов XX века. За это время проведено исследование различных видов теплозащитных материалов и теплозащитных покрытий, обеспечивающих надежную защиту летательного аппарата. Разработана теория и исследованы основные закономерности термодинамики и теплообмена процессов воздействия высокоэнергетических и высокотемпературных газовых потоков на различные конструкционные материалы. Не менее

⁷ Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б. Тепловая защита. М.: Энергия, 1976. 392 с.; Полежаев Ю.В., Фролов Г.А. Тепловое разрушение материалов. Киев: Академперіодика, 2006. 354 с.

сложные и важные проблемы возникают при конструировании современных авиационных и ракетных двигателей. Высокая тепловая напряженность реактивных двигателей, использование современных топлив требуют от конструктора умение провести сложный инженерный расчет теплообмена. Для проведения такого рода расчетов важно знать методы моделирования конвективного и радиационного нагрева, методы теории теплопроводности, свойства теплозащитных материалов, энергетические параметры и кинетику физико-химических процессов, происходящих на поверхностях и в объеме (раздел 11).

Большое значение теория теплообмена имеет в расчетах тепловых режимов летательных аппаратов, кабин аппаратов, систем жизнеобеспечения и кондиционирования, надежной работы радиоэлектронной аппаратуры, в современной атомной энергетике, в обеспечении тепловых режимов ядерных энергетических установок и их безопасности.

При проектировании гражданских и промышленных зданий⁸ возникает много инженерных задач, которые сходны с проблемами тепловой защиты и для решения которых необходимо знать режимы работы и регулирования системы кондиционирования в условиях годовой изменчивости процессов тепло- и массообмена между помещением, элементами системы и окружающей средой.

В строительной теплофизике воздушным режимом здания называется совокупность факторов и явлений, определяющих общий процесс обмена воздуха между всеми его помещениями, наружным воздухом, включая перемещение воздуха внутри помещений, движение его через каналы и воздухопроводы и обтекание здания потоком воздуха. Отдельные процессы весьма сложны. Их описание базируется на классических уравнениях переноса массы, энергии, импульса в турбулентных потоках. Естественные силы, влияющие на характер движения воздуха, это – гравитация и ветер. Воздухообмен с учетом этих сил трудно рассчитывать и прогнозировать.

Воздушный режим связан с тепловым режимом зданий. Инфильтрация наружного воздуха приводит к дополнительным тратам тепла на его подогрев. Эксфильтрация влажного внутреннего воздуха увлажняет стены и перекрытия и снижает теплозащитные свойства ограждений.

Наружные ограждения зданий должны предохранять помещения зданий от непосредственных атмосферных воздействий. Эти функций ограждений оказываются достаточно важными в общей задаче создания микроклимата помещений. На внутреннюю поверхность наружного ог-

⁸ Богословский В.Н. Строительная теплофизика. М.: Высш. шк., 1982. 415 с.; Шильд Е., Киссельман Х.Ф. Строительная физика. М.: Стройиздат, 1982. 296 с.

раждения излучением и конвекцией передается определенное количество теплоты. В холодный период года это тепло теряется через ограждения в сторону внешней среды. Основное сопротивление потерям тепла оказывают теплозащитные свойства материалов ограждения. В стационарных условиях все тепло, воспринятое поверхностью ограждения в помещении, передается наружному воздуху. Такой режим характерен для зимних условий при небольших колебаниях температуры внутри и снаружи зданий. В летний период ограждения должны защитить помещения от полуденного зноя, воспрепятствовать резкому колебанию температуры в течение суток.

Для строителей важны многие вопросы, относящиеся к области строительной теплофизики. Это – промерзание, пучение грунтов и их взаимодействие с инженерными сооружениями в районах сезонного промерзания и в районах «вечной» мерзлоты, тепловлажностный режим гидротехнических сооружений, особенно в зоне переменного горизонта воды и фильтрации грунтовых вод; вопросы морозостойкости материалов, сушки изделий, процессы тепло- и массообмена при твердении бетона и изготовлении строительных деталей и конструкций на заводах.

Проблемы тепловой защиты и теплоизоляции неразрывно связаны с разработкой и усовершенствованием новых материалов. Теплоизоляционные материалы, применяемые для теплоизоляции зданий (сооружений), технологического оборудования, узлов авиационной и ракетной техники и др., характеризуются высокой пористостью и низкой теплопроводностью. Высокая пористость этих материалов достигается добавлением в материал пористого наполнителя (природного или искусственного), вспучиванием при нагревании, введением и последующим удалением различных добавок (обычно выгорающих), введением воздуха в суспензию или расплав, выделением газообразных продуктов вследствие протекания химических реакций, использованием волокон. По температуре применения различают неогнеупорные и огнеупорные теплоизоляционные материалы. Для неогнеупорных теплоизоляционных материалов, используемых обычно в строительстве жилых зданий и промышленных сооружений, регламентируется плотность, прочность, теплопроводность, в ряде случаев – водо-, био-, морозостойкость и способность к возгоранию. Огнеупорные теплоизоляционные материалы применяют в тепловых агрегатах, агрессивных средах или при значительном перепаде температуры. К ним предъявляются дополнительные требования. Собственно теплоизоляционные материалы предназначены для уменьшения потерь тепла объектом, а теплозащитные – главным образом, для защиты персонала и оборудования от тепла, поступающего извне.

1.7. Теплообменники

Теплообменные аппараты, или теплообменники, предназначены для передачи теплоты от одних теплоносителей к другим и подразделяются на рекуперативные, смесительные и регенеративные. Расчет теплообменной аппаратуры непосредственно связан с теорией теплообмена и термодинамикой⁹.

В рекуперативных аппаратах, наиболее распространенных в химической технологии, теплоносители проходят по различным объемам, разделенным твердой стенкой, через которую происходит теплообмен. Для уменьшения термического сопротивления стенка выполняется из материала с хорошей теплопроводностью: меди, латуни, сплавов алюминия и т.д. Наиболее распространены трубчатые теплообменники, в которых один теплоноситель движется в трубах, а другой – в межтрубном пространстве. В таких теплообменниках смешения теплоносителей не происходит, и они используются для самых разнообразных сочетаний греющего и нагреваемого веществ.

В смесительных аппаратах оба теплоносителя одновременно поступают в один объем и обмениваются теплотой непосредственно через поверхность раздела фаз. Наиболее распространены смесительные теплообменники, в которых смешиваются теплоносители, не требующие дальнейшего разделения, например, при подогреве воды паром или горячей водой. Для поддержания заданных температур в системе горячего водоснабжения ($60\text{ }^{\circ}\text{C} \leq T \leq 75\text{ }^{\circ}\text{C}$) и в радиаторах отопления ($T < 95\text{ }^{\circ}\text{C}$) смешивают воду, идущую из котельной или ТЭЦ ($T \leq 150\text{ }^{\circ}\text{C}$), с водой ($T \leq 20 \div 70\text{ }^{\circ}\text{C}$), возвращающейся от потребителя тепла.

Используют смесительные теплообменники и для легко разделяющихся теплоносителей: газ – жидкость, газ – дисперсный твердый материал, вода – масло и т.д.

В регенеративных аппаратах в единственный рабочий объем сначала поступает горячий теплоноситель, нагревающий массу твердого материала (кирпичную кладку или массу металла), а затем в тот же объем подается нагреваемая среда, которая воспринимает теплоту от нагретого материала. В регенеративных теплообменниках в качестве промежуточного теплоносителя используется твердый достаточно массивный материал – листы металла, кирпичи, различные засыпки. Регенеративные теплообменники незаменимы для высокотемпературного подогрева газов ($T > 1000\text{ }^{\circ}\text{C}$), поскольку жаростойкость металлов ограничена, а насадка

⁹ Кейс В.М., Лондон А.Л. Компактные теплообменники. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1962. 160 с.; Теплотехника, под общей ред. Крутова В.И., 1986, 432 с.

из огнеупорных кирпичей может работать при очень высоких температурах. Иногда регенеративные теплообменники выгодно использовать и для охлаждения запыленных газов, которые способны быстро изнашивать и забивать трубки рекуперативов.

В зависимости от технологического назначения различают три типа теплообменников: а) нагреватели (охладители), в которых теплоносители не изменяют фазового состояния; б) испарители (кипятильники) и конденсаторы, предназначенные для изменения фазового состояния теплоносителей; в) для осуществления одновременно теплообмена и химико-технологического процесса (выпарные аппараты, кристаллизаторы, химические реакторы и др.).

В теплообменниках с внутренними источниками энергии применяют не два, как обычно, теплоносителя, а один теплоноситель, который отводит теплоту, выделившуюся в самом аппарате. Примером таких аппаратов могут служить ядерные реакторы, электронагреватели и другие устройства. Независимо от принципа действия, теплообменные аппараты, применяемые в различных областях техники, имеют свои названия, определяемые назначениями и техническими особенностями.

Общим уравнением при расчете теплообменника любого типа является уравнение теплового баланса. Количество теплоты Q_1 , полученной в теплообменнике при охлаждении горячего теплоносителя от температуры T_1' до температуры T_1'' , равно разности энтальпий теплоносителя на входе в теплообменник H_1' и на выходе из него H_1'' :

$$Q_1 = H_1' - H_1'' = M_1(c_{p1}'T_1' - c_{p1}''T_1''),$$

где M_1 – массовый расход теплоносителя, c_p – изобарная теплоемкость (раздел 1.10).

Несколько процентов (от 1 до 10) тепла теряется в окружающую среду через стенки теплообменника, а основная часть $Q_2 = \eta Q_1$ (коэффициент полезного действия теплообменника η учитывает теплопотери) – передается второму теплоносителю. Количество теплоты, получаемое холодным теплоносителем, есть

$$Q_2 = H_2'' - H_2' = M_2(c_{p2}''T_2'' - c_{p2}'T_2') = \eta Q_1.$$

Это уравнение теплового баланса позволяет найти один неизвестный параметр: либо расход одного из теплоносителей, либо одну из температур. Все остальные параметры должны быть известны либо из эксперимента, либо из специальных теплофизических расчетов.

1.8. Химические технологии

Теплообмен в химико-технологических процессах часто определяет основные характеристики работы аппаратуры. Так, температурная зависимость константы скорости k химической реакции, $k = k_0 \exp(-E_a/RT)$ (раздел 11), где k_0 - предэкспоненциальный множитель, E_a - энергия активации химической реакции, R - универсальная газовая постоянная, определяет существенное влияние теплообмена на устанавливаемую в ходе технологического процесса температуру и, следовательно, на степень завершенности реакции.

Перемешивание жидких сред с помощью механических мешалок применяют для выравнивания температур и концентраций в объеме реакционной массы и для интенсификации теплообмена со стенками аппаратов.

При работе промышленных химических реакторов стационарный процесс теплообмена может протекать в ряде случаев только при некоторых определенных температурах. Например, для реактора непрерывного действия с интенсивным перемешиванием реакционной массы и внешним отводом теплоты, в котором происходит необратимая экзотермическая реакция первого порядка по концентрации C основного компонента, уравнение теплового баланса можно представить в виде:

$$M_1 C_1 T_1 + Q_{ch} V k_0 \exp(-E_a/RT) C = M_2 C_2 T_2 + \Lambda F (T - T_x).$$

Левая часть этого соотношения соответствует теплоте, поступающей в реактор с массовым потоком M_1 исходных компонентов (M_1, C_1, T_1) и тепловыделению в результате реакции (Q_{ch} – удельная теплота реакции, V – объем аппарата). В правой части уравнения первое слагаемое – теплота, отводимая с продуктами реакции (M_2, C_2, T_2), и теплота, передаваемая через теплообменную поверхность F хладагенту с температурой T_x . Коэффициент теплопередачи Λ [Вт/(м²·К)] (раздел 3) представляет собой величину, зависящую от многих факторов), и рассчитывается на основе теории конвективного теплообмена.

В ряде химико-технологических процессов, например, каталитических процессов в неподвижном слое дисперсного катализатора, важную роль играет интенсивность отвода (подвода) теплоты химического превращения от внутренних участков слоя к его периферии, теплоотвода от слоя к теплообменной поверхности реактора и теплообмен между фильтрующимся через слой потоком реагентов и поверхностью частиц. Интенсивность межфазного теплообмена в неподвижном слое также определяется на основе теории теплообмена и теплопередачи. Анало-

гичные процессы теплообмена происходят в аппаратах с движущимися слоями материалов, предназначенными для непрерывного контакта фильтрующегося потока с дисперсным материалом.

Некоторые химико-технологические процессы (нагревание, прокаливание, сушка, кристаллизация, растворение) осуществляются в потоке сплошной фазы (газ, пар или капельная жидкость), несущем с собой мелкие твердые частицы. Относительная скорость фаз в вертикальных аппаратах, в которых проводятся указанные процессы, может существенно изменяться (от скорости сплошной фазы до скорости осаждения частиц), что влияет на характер теплообмена.

1.9. Отношение теплообмена к термодинамике

В курсе термодинамики, как он преподается для студентов инженерных специальностей, имеются постоянные ссылки на теплообмен между термодинамическими системами. Чтобы установить связь теплообмена с термодинамикой, вспомним кратко основные понятия.

Первый закон термодинамики для закрытых систем может быть сформулирован в следующей форме: *теплота, сообщаемая системе, идет на приращение ее внутренней энергии и на совершение работы*

$$\delta Q_{\tau} = dU + \delta A, \quad (1.2)$$

где $dU > 0$, если внутренняя энергия системы возрастает; $\delta A > 0$, если работа совершается самой системой. Единицей измерения величин, входящих в (1.2), является Джоуль (Дж, в системе единиц СИ) или калория (*кал*)

Это равенство можно переписать для удельных величин (отнесенных к единице массы)

$$\delta q_{\tau} = du + \delta w,$$

В этом случае все величины измеряются в единицах энергии, деленных на единицу массы, например, Дж/кг, Дж/г и т.д.

Под *внутренней энергией* в термодинамике понимают энергию хаотического движения молекул и атомов, включающую энергию поступательного, вращательного и колебательного движений, как молекулярного, так и внутримолекулярного, а также потенциальную энергию взаимодействия между молекулами. Кинетическая энергия молекул является однозначной функцией температуры; значение потенциальной энергии зависит от среднего расстояния между молекулами, и, следовательно, от занимаемого объема. Поэтому внутренняя энергия есть некоторая однозначная функция состояния.

Работа в термодинамике определяется произведением действующей силы на путь ее действия. Так, работа против сил внешнего давления есть работа расширения

$$\delta A = p \int_F dF dn,$$

где $p dF dn$ – элементарная работа, затраченная на перемещение каждой элементарной площадки, из которых состоит площадь F , ограничивающая объем V , или

$$\delta A = p dV.$$

Т.е., работа есть произведение давления на приращение объема. Если $dV > 0$, работа положительна, т.е. тело совершает работу. Если $dV < 0$, объем уменьшается, т.е. работа совершается над телом. Единицей измерения работы является, как сказано выше, Дж.

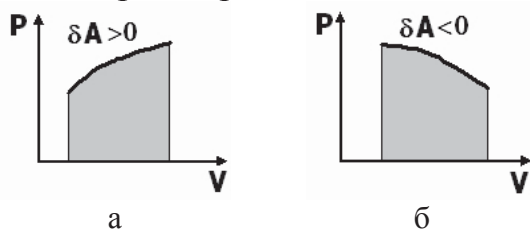


Рис. 1.2. К определению работы расширения: а) тело расширяется; б) тело сжимается

В термодинамике для исследования равновесных процессов широко используют $p-V$ диаграмму, в которой осью абсцисс служит удельный объем $\gamma = V/M$ (рис. 1.2). Состояние тела на этой диаграмме изображается точкой. Работа – работа расширения – при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 изображается площадью под кривой, соответствующей пути процесса. Следовательно, величина работы зависит от условий протекания процесса или условий совершения работы.

Итак, *теплота и работа – энергетические характеристики процессов теплового и механического взаимодействия системы с окружающей средой.*

Отношение количества теплоты δQ_τ , полученного телом при бесконечно малом изменении его состояния, к связанному с этим процессом изменению температуры dT называется полной *теплоемкостью* тела в данном процессе

$$C = \delta Q_\tau / dT. \tag{1.3}$$

Обычно величину теплоемкости относят к единице количества вещества и в зависимости от принятой единицы измерения различают:

1) *удельную массовую теплоемкость* c , отнесенную к 1 кг и измеряемую в Дж/(кг·К);

2) *удельную объемную теплоемкость* c' , отнесенную к количеству вещества, содержащемуся в 1 м^3 объема при нормальных физических условиях и измеряемую в Дж/($\text{м}^3 \cdot \text{К}$);

3) *удельную мольную теплоемкость* μc , отнесенную к одному киломолю и измеряемую в Дж/(кмоль \cdot К).

Связь между различными теплоемкостями следует из соотношений

$$c = \mu c / \mu; \quad c' = \mu c / 22,4; \quad c' = c \rho, \quad (1.4)$$

где $22,4 \text{ м}^3$ – объем одного киломоля и ρ – плотность в нормальных условиях.

Изменение температуры тела при одном и том же количестве сообщаемой теплоты зависит от характера происходящего при этом процесса, поэтому *теплоемкость является функцией процесса*. Это означает, что одно и то же тело в зависимости от процесса (или в зависимости от условий) требует для своего нагревания на 1 градус различного количества теплоты.

Теплоемкость и есть такое количество тепла, которое в данных условиях требуется для изменения температуры тела на один градус.

В термодинамических расчетах большое значение имеют *теплоемкость при постоянном давлении*

$$c_p = (\delta q_\tau / dT)_p \quad (1.5)$$

и *теплоемкость при постоянном объеме*

$$c_\gamma = (\delta q_\tau / dT)_\gamma. \quad (1.6)$$

В соответствии с первым законом термодинамики, записанным для удельных величин, имеем

$$\delta q_\tau = du + p d\gamma. \quad (1.7)$$

Так как внутренняя энергия – функция состояния $u = u(T, \gamma)$ (т.е. функция переменных состояния T, γ), для нее можем записать равенство

$$du = (\partial u / \partial T)_\gamma dT + (\partial u / \partial \gamma)_T d\gamma.$$

Из двух последних равенств находим

$$\delta q_\tau = (\partial u / \partial T)_\gamma dT + [(\partial u / \partial \gamma)_T + p] d\gamma.$$

Следовательно, для *изохорного процесса* ($\gamma = \text{const}$)

$$\begin{aligned} (\delta q_\tau)_\gamma &= (\partial u / \partial T)_\gamma dT; \\ c_\gamma &= (\delta q_\tau / dT)_\gamma = (\partial u / \partial T)_\gamma - \end{aligned} \quad (1.8)$$

теплоемкость тела при постоянном объеме равна частной производной от его внутренней энергии по температуре и характеризует скорость изменения внутренней энергии в изохорном процессе.

В *изобарном процессе* ($p = \text{const}$) имеем

$$(\delta q_\tau / dT)_p = (\partial u / \partial T)_\gamma + [(\partial u / \partial \gamma)_T + p] (\partial \gamma / \partial T)_p,$$

т.е.

$$c_p = c_\gamma + [(\partial u / \partial \gamma)_T + p] (\partial \gamma / \partial T)_p. \quad (1.9)$$

В термодинамике важное значение имеет такая функция состояния как *энтальпия*, которая связана с внутренней энергией соотношением

$$H = U + pV$$

или

$$h = u + p\gamma. \quad (1.10)$$

Так же как и внутренняя энергия, и теплота, в системе единиц СИ энтальпия *измеряется в джоулях или джоулях на кг*. Так как

$$dh = du + p d\gamma + \gamma dp,$$

то вместо (1.7) можем записать

$$\delta q_\tau = dh - \gamma dp. \quad (1.11)$$

Тогда для *изобарного процесса*

$$c_p = (\delta q_\tau / dT)_p = (\partial h / \partial T)_p. \quad (1.12)$$

Т.е., *теплоемкость при постоянном давлении равна частной производной от энтальпии по температуре*.

В таблице 3.1. Приложения 3 для сравнения приведены теплоемкости и плотности различных веществ при комнатной температуре и атмосферном давлении.

Уравнения первого закона термодинамики (1.7) или (1.11) мы можем представить в иной форме

$$\frac{dq_\tau}{dt} = \frac{du}{dt} + p \frac{d\gamma}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{dq_\tau}{dt} = \frac{dh}{dt} - \gamma \frac{dp}{dt}. \quad (1.13)$$

Так как

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_\gamma = \left(\frac{du}{dT} \right)_\gamma \frac{dT}{dt} \quad \text{и} \quad \left(\frac{dh}{dt} \right)_p = \left(\frac{dh}{dT} \right)_p \frac{dT}{dt},$$

то

$$c_\gamma \frac{dT}{dt} = \left(\frac{du}{dt} \right)_\gamma \quad \text{и} \quad c_p \frac{dT}{dt} = \left(\frac{dh}{dt} \right)_p. \quad (1.14)$$

В соответствии с размерностью входящих в (1.14) величин, размерность $(du/dt)_\gamma$ в системе единиц СИ есть Дж/(кг с)=Вт/кг.

Уравнения (1.14) можно записать для единицы объема

$$c_{\gamma} \rho \frac{dT}{dt} = \rho \left(\frac{du}{dt} \right)_{\gamma} \quad \text{и} \quad c_p \rho \frac{dT}{dt} = \rho \left(\frac{dh}{dt} \right)_p \quad (1.15)$$

Разность $(c_p - c_v)M\Delta T$, по определению, равна работе внешнего давления по изменению объема $p\Delta V$; M - масса сжимаемого вещества в объеме ΔV .

Второй закон термодинамики устанавливает существование такой термодинамической функции состояния как энтропия s , так что для равновесных процессов имеем

$$\delta q_{\tau} = Tds \quad \text{или} \quad \delta Q_{\tau} = TdS.$$

Подставляя это определение удельного потока тепла в (1.7) и (1.11), найдем

$$Tds = du + pd\gamma \quad \text{и} \quad Tds = dh - \gamma dp \quad (1.16)$$

Следовательно, вместо (1.13) получим

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{du}{dt} + p \frac{d\gamma}{dt} \quad \text{или} \quad T \frac{ds}{dt} = \frac{dh}{dt} - \gamma \frac{dp}{dt} \quad (1.17)$$

Уравнения (1.16), (1.17) есть частные формы уравнения Гиббса, записанного вдоль траектории движения центра масс.

Второй закон термодинамики может быть сформулирован различными способами.

Для необратимых процессов этот закон устанавливает только возможность и направление их протекания.

Законы классической термодинамики не могут установить, почему протекают необратимые процессы, почему все реальные процессы – необратимы.

Для необратимых процессов энтропия не определяется только как функция состояния. Чтобы описать необратимые процессы, в современной термодинамике существуют разные способы, которые используются в зависимости от целей конкретного исследования.

Третий закон термодинамики, устанавливающий свойства систем при температуре, стремящейся к абсолютному нулю, имеет не столь принципиальное значение как первые два.

Для термодинамики и для моделирования теплофизических процессов большую роль играют еще две функции состояния – *энергия Гельмгольца* f и *энергия Гиббса* g , связанные с h и u соотношениями

$$f = u - Ts; \quad g = h - Ts \quad (1.18)$$

Так как

$$df = du - Tds - s dT,$$

то вместо (1.16) найдем

$$df = -sdT - pdy . \quad (1.19)$$

Аналогично имеем

$$dg = dh - Tds - s dT$$

и

$$dg = -sdT + \gamma dp . \quad (1.20)$$

Уравнения (1.19) и (1.20) – тоже есть уравнения Гиббса.

Для того чтобы определить скорость теплопереноса, мы должны использовать новые физические принципы, а именно ввести законы переноса, которые не являются составной частью классической термодинамики. Это, например, законы теплообмена Фурье, Ньютона, Стефана-Больцмана и др. Но очень важно помнить, что описание теплопереноса требует, чтобы новые (дополнительные) физические принципы не противоречили фундаментальным термодинамическим законам.

1.10. Роль математического моделирования в разработке современных технологий

Использование технологических процессов такого типа, как лазерная, электронно-лучевая и плазменная технологии приводит к необходимости решать специальные задачи проектирования технологических процессов, составной частью которого является математическое моделирование. Для сложных технологических процессов математическая модель является основным инструментом, позволяющим проводить как предварительные исследования, так и оптимизировать разработанную технологию.

Математическое моделирование в области современных технологий включает:

- исследование и разработку физических и математических моделей технологических процессов;
- разработку аналитических и численных методов решения нелинейных теплофизических задач, соответствующих моделям разных технологий;
- получение инженерных соотношений для описания температурных и концентрационных полей в процессах обработки материалов;
- исследование и разработку методов решения обратных задач (в том числе, теплообмена) как средства проектирования технологических процессов;
- изучение сопряженных и связанных задач для получения более полной информации о тепло- и массопереносе в процессах обра-

ботки материалов, нахождение условий оптимизации технологических процессов и методов их реализации;

– нахождение условий контроля, управления и регулирования для технологических процессов.

Вычислительный эксперимент является одной из важнейших форм внедрения вычислительной техники в проектирование технологических процессов. Он используется как во время предварительного анализа технологического процесса (при идентификации параметров модели – как составная часть решения обратных задач, при проверке адекватности и при исследовании технологического процесса), так и в ходе синтеза технологических процессов – для проверки и сравнения проектных решений.

Под вычислительным экспериментом понимается такая организация исследования, когда на основе математической модели проводится изучение устройств и физических процессов с помощью ЭВМ, проигрывается их поведение в различных условиях, находятся оптимальные параметры и режимы действующих и проектных конструкций.

Необходимость использования вычислительного эксперимента как метода исследования вызвана тем, что решение современных научно-технических задач, отличающихся чрезвычайно сложным математическим описанием, традиционными методами становится затруднительным, а в некоторых случаях вообще невозможным.

Математическое моделирование и вычислительный эксперимент как методы исследования находят применение в самых различных областях, таких как энергетика, аэрокосмическая техника, обработка данных натурного эксперимента, экономические проблемы, гео – и астрофизика, химия, биология и др. Часто подготовка и проведение вычислительного эксперимента оказываются эквивалентными созданию крупных экспериментальных установок. Вычислительный эксперимент включается в программу проведения крупных физических экспериментов. Обладая общими с натурным экспериментом свойствами, вычислительный эксперимент имеет и некоторые, присущие только ему, особенности.

Во-первых, оказывается возможным проведение «эксперимента» в достаточно широком диапазоне значений параметров процесса и установки без модификации существующих установок или разработки новых. Благодаря этому возможно проведение большой серии экспериментов за сравнительно небольшое время.

Во-вторых, появляется возможность управлять детальностью анализа процесса. Это важно, если размеры области, где протекает процесс, и его длительность – малы, что типично, например, для лазерной и плазменной технологий.

В-третьих, изучаемые физические процессы часто имеют исключительно сложный характер из-за комплексного воздействия разных физических явлений. Вычислительный эксперимент позволяет изучать влияние каждого явления в отдельности.

В-четвертых, в случае зависимости физического процесса от большого числа параметров, влияние каждого из них также можно исследовать в отдельности.

В-пятых, возможно проведение большого числа экспериментов без модификации установки на основе банка моделей физических процессов.

В-шестых, вычислительный эксперимент позволяет определить причины несоответствия результатов натурального эксперимента теоретическим прогнозам посредством многократного «проигрывания процесса» для различных условий его проведения.

Таким образом, математическое моделирование, в том числе вычислительный эксперимент, являются исключительно целесообразными.

Основой всякого вычислительного эксперимента должно быть физическое описание явления, использующее точные и приближенные аналитические методы.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие механизмы теплопереноса Вы знаете?
2. Что понимают под ВТТП? Приведите примеры.
3. В чем состоят особенности ЭЛ-технологий?
4. Приведите примеры лазерных технологий.
5. В чем состоят особенности плазменных источников энергии?
6. В чем заключается роль математического моделирования для технологических процессов?
7. Какую роль играют процессы теплообмена в строительстве?
8. Что такое «тепловая защита»?
9. В каких природных системах важны процессы теплопроводности?
10. Назовите количественные характеристики переноса теплоты и единицы их измерения
11. Сформулируйте основные законы термодинамики.
12. Что такое «теплоемкость»?
13. Выпишите основную форму уравнения Гиббса.
14. Какие Вы знаете термодинамические функции состояния?

ЧАСТЬ 2

Основные понятия и уравнения

2.1. Источники энергии

Источники тепла, используемые в высокотемпературных технологических процессах (ВТП), могут быть поверхностными или объемными; непрерывными, импульсными и импульсно-периодическими; сосредоточенными и распределенными; неподвижными и движущимися.

Такая классификация источников является условной и зависит как от реальных технологических параметров, так и от свойств материалов. Один и тот же источник при разных пространственно-временных масштабах может быть отнесен к разным типам.

Если выделение тепла происходит, в основном, на поверхности (на границе обрабатываемого тела), то такой источник принято называть поверхностным. К числу поверхностных источников энергии относят технологический электронный луч; лазерное излучение различных длин волн, действующее на металлы; потоки плазмы, генерируемые плазмотронами или другими методами; сварочную дугу; световое излучение широкого спектрального диапазона (например, сфокусированное излучение ксеноновых ламп). Поверхностные источники характеризуются мощностью Q и поверхностной удельной мощностью q (т.е., мощностью на единицу площади), а также пространственно-временным распределением.

В случае, когда выделение теплоты происходит, в основном, внутри обрабатываемого тела, источники называются объемными. К числу объемных источников относят *резистивные и высокочастотные нагреватели*, использующие теплоту Джоуля–Ленца. Объемные источники характеризуются мощностью и объемной удельной мощностью (т.е. мощностью, приходящейся на единицу объема).

В ряде случаев поверхностные источники тепла могут превращаться в объемные. Например, при действии лазерного излучения на некоторые диэлектрики выделение и поглощение энергии происходит не на поверхности, а в объеме вещества. При увеличении мощности электронного луча максимум энерговыделения также смещается в объем материала. Так, поток релятивистских электронов можно отнести, скорее, к объемным пространственно-распределенным источникам.

Пространственно-временные характеристики источников тепла (распределение энергии по объему или по поверхности, временные параметры) играют существенную роль в ВТП. Наиболее распространен-

ным типом источников являются гауссовы, энергия в которых распределена по поверхности в соответствии с законом нормального распределения.

Традиционные объемные источники теплоты (например, резистивные) характеризуются относительно большим временем нагрева до рабочей температуры (от долей секунды до нескольких минут или даже часов). В некоторых высокочастотных плазмотронах выход на рабочий режим может составлять тысячные доли секунды. Мощность объемных источников достигает нескольких сотен киловатт или даже мегаватт, в то же время концентрация энергии обычно невелика по сравнению с так называемыми концентрированными источниками.

Основными областями применения объемных источников теплоты в ВТП являются плавка металлов, выращивание монокристаллов, получение пленок методом термического испарения в вакууме, химико-термическая обработка материалов и др.

Широкое применение в ВТП получили концентрированные источники энергии (раздел 1.4).

Обычно концентрированными источниками энергии называют те, зоны воздействия (пятно нагрева) которых на обрабатываемое тело малы по сравнению с характерными размерами тела. Поскольку главным назначением концентрированных источников является нагрев определенной зоны тела до высокой температуры за малый промежуток времени, удельная мощность источников должна быть большой (10^3 – 10^6 Вт/см² и выше).

Из числа концентрированных источников условно выделяют высококонцентрированные источники энергии (ВКИЭ), удельная мощность которых на определенном участке превышает 10^4 Вт/см². К ВКИЭ относят потоки электронов и ионов, сфокусированные на поверхности тел, струи и сгустки низкотемпературной плазмы, генерируемые с помощью специальных устройств – дуговых плазмотронов, взрывных плазменных генераторов, сфокусированное излучение лазеров различных типов. Под действием ВКИЭ на участках металлических тел температуру, близкую к температуре плавления, получают за несколько миллисекунд.

ВКИЭ могут быть как импульсными (импульсно–периодическими), так и непрерывными. Мощность импульсных ВКИЭ может существенно превышать единицы мегаватт, а непрерывных – достигать мощностей единиц и даже десятков мегаватт.

Многие вопросы взаимодействия высокоэнергетических источников с веществом исследованы не достаточно полно, что в определенной степени сдерживает их применение в промышленной технологии. Однако уже сейчас ясно, что определяющую роль в процессах играют явления,

связанные с переносом тепла и массы, поэтому для направленного формирования зон обработки и оптимального управления вводом энергии в вещество необходимо знать их пространственно-временные характеристики.

Итак, большое разнообразие систем и подсистем в современных технологиях приводит к многообразию источников и стоков теплоты, возникающих в реальных процессах. Однако, не смотря на это, все источник и стоки могут быть классифицированы по основным признакам, что позволяет схематизировать и в известной мере унифицировать решения задач технологической теплофизики. К основным признакам относятся форма и размеры источника; закон распределения плотности тепловыделения; скорость перемещения; длительность действия. В реальных технологических системах источники и стоки теплоты имеют форму и размеры, которые не всегда точно можно описать математически. При анализе тепловых процессов реальные источники заменяют идеализированными, форма которых в той или иной степени приближена к фактической. Идеализированные источники тепла могут быть трехмерными, двумерными, одномерными и точечными. Трехмерными (объемными) источниками называют такие, энергия в которых распределено по некоторому объему. Вообще говоря, все источники теплоты - трехмерные, так как в любом процессе (в процессах трения, деформирования, резки, сварки, наплавки и т.д.) выделение энергии происходит в некотором объеме. Однако если размер объемного источника в направлении одной из осей координат много меньше размеров в других направлениях, источник можно считать двумерным. Одномерными называют источники, один из размеров которых настолько превышает другие, что значением последних можно пренебречь. Наконец, если все размеры источника весьма малы по сравнению с размерами области твердого тела, в которой он действует, источник можно полагать точечным. Такой источник используется в качестве некоторой математической абстракции, с помощью которой удобно конструировать формулы для описания процесса распространения теплоты от источников реальной формы.

Зона тепловыделения реального источника всегда имеет ограниченные размеры. Чтобы определить количество теплоты Q_τ , выделившееся в области действия источника V за время τ , нужно вычислить интеграл

$$Q_\tau = \int_0^\tau \left[\int_V q(x, y, z, t) dV \right] dt,$$

где функция $q(x, y, z, t)$ описывает распределение энергии в области действия источника теплоты в произвольный момент времени.

Можно принять,

$$q(x, y, z, t) = q_0 f(x, y, z, t),$$

где q_0 - максимальная плотность тепловыделения, Дж/(м²с).

Для источников и стоков, действующих в технологических системах, вид функций $f(x, y, z, t)$ очень сложен и, как правило, заранее неизвестен. В связи с этим при схематизации теплообмена на основе анализа физических явлений и физических величин, определяющих тепловыделение, составляют представление о возможном виде этой функции.

Например, при моделировании процессов резания распределение плотности тепловыделения на площадке контакта между стружкой и передней поверхностью резца, как правило, описывают одномерными законами:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, 0 < x < x_s, \\ f(x) &= \exp(-kx), 0 < x < x_s, \\ f(x) &= \exp(-kx^2), 0 < x < x_s \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

При воздействии одиночного импульса неподвижного лазерного луча на поверхность материала закон тепловыделения можно представить в виде

$$f(x, y) = \exp\left[-\frac{(x-a)^2 + (y-a)^2}{R^2}\right], t \leq t_i \text{ и } f(x, y) = 0, t > t_i.$$

Если максимум тепловыделения имеет место в объеме материала, то функция f становится трехмерной

$$f(x, y, z) = \exp\left[-\frac{(x-a)^2 + (y-a)^2}{R^2} + \frac{z-c}{d}\right], t \leq t_i.$$

В процессах сварки с использованием различных источников энергии, термической обработки сканирующим электронным лучом и др. вид эффективной функции тепловыделения в существенной мере зависит от характера движения источника по поверхности и интенсивности воздействия. Например, при обработке поверхности детали, перемещающейся вдоль оси Ox со скоростью V , сканирующим электронным лучом, часто можно использовать функцию вида

$$f(x, y, z) = \exp\left[-\frac{x^2 + (y-Vt)^2}{R^2} + \frac{z-c}{d}\right], |x| \leq h_x,$$

где h_x - полуширина сканирования. Для невысокой плотности мощности q_0 электронно-лучевых установок, широко применяемых в промышленности, источник становится двумерным

$$f(x, y, z) = \exp\left[-\frac{x^2 + (y - Vt)^2}{R^2}\right], |x| \leq h_x.$$

С увеличением сложности характера тепловыделения возрастает и число параметров, необходимых для описания характера воздействия.

Источники тепла, связанные с химическими реакциями, также могут быть поверхностными и объемными. Их особенности будут рассмотрены в разделе 11.8.

2.2. Характеристики температурного поля

В любом случае процесс передачи теплоты теплопроводностью сопровождается изменением температуры тела, как в пространстве, так и во времени. Аналитическое исследование процесса теплопроводности сводится к изучению пространственно-временного распределения температуры, т.е. к нахождению уравнения

$$T = T(x, y, z, t). \quad (2.1)$$

Это есть математическое выражение температурного поля.

Различают стационарные и нестационарные температурные поля.

Если тепловой режим является установившимся, то температура в каждой точке поля с течением времени не изменяется, и такое температурное поле называется стационарным.

В этом случае можно написать

$$T = T_1(x, y, z); \quad \partial T / \partial t = 0. \quad (2.2)$$

Температурное поле может быть трехмерным (2.1), двумерным

$$T = f_2(x, y, t); \quad \partial T / \partial z = 0 \quad (2.3)$$

и одномерным

$$T = f_3(x, t); \quad \partial T / \partial z = 0; \quad \partial T / \partial y = 0. \quad (2.4)$$

Это зависит от конкретной физической ситуации.

Выберем в твердом теле поверхность таким образом, чтобы в какой-либо момент времени температура всех ее точек была одинаковой и равной T_i . Такая поверхность называется *изотермической поверхностью* температуры T_i ; можно сказать, что эта поверхность отделяет части тела с температурой, большей T_i , от частей с меньшей температурой. Мы можем представить себе изотермические поверхности, прове-

денные в данный момент времени t для различных значений T_i , отличающихся друг от друга на целые градусы или на доли градуса. Эти изотермические поверхности могут располагаться любым образом. Но две такие поверхности не могут пересекаться, ибо никакая часть тела не может иметь две температуры одновременно.

Пересечение изотермических поверхностей плоскостью дает на этой плоскости семейство изотерм. Они обладают теми же свойствами, что и изотермические поверхности. Так, на рис. 2. 1 показаны изотермы, температуры которых отличаются на ΔT .

Температура в теле меняется только в направлениях, пересекающих изотермические поверхности. При этом наибольший перепад температуры на единицу длины происходит в направлении нормали к изотермической поверхности.

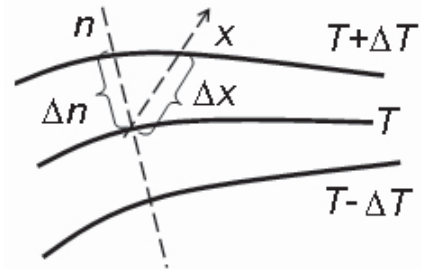


Рис. 2.1. Изотермы

Возрастание температуры в направлении нормали к изотермической поверхности характеризуется *градиентом температуры*. Градиент температуры есть вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры и численно равный производной температуры по этому направлению

$$\nabla T \equiv grad T = \vec{n}_0 \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (2.5)$$

где \vec{n}_0 – единичный вектор, нормальный к изотермической поверхности и направленный в сторону возрастания температуры; $\partial T/\partial n$ – производная температуры по нормали.

Скалярная величина температурного градиента не одинакова для разных точек изотермической поверхности. Она больше там, где расстояние Δn между изотермическими поверхностями меньше.

Проекции вектора градиента температуры ∇T на координатные оси Ox, Oy, Oz определяются равенствами

$$\begin{aligned} (\nabla T)_x &= \frac{\partial T}{\partial n} \cdot \cos(n, x) = \frac{\partial T}{dx}; \\ (\nabla T)_y &= \frac{\partial T}{\partial n} \cdot \cos(n, y) = \frac{\partial T}{dy}; \\ (\nabla T)_z &= \frac{\partial T}{\partial n} \cdot \cos(n, z) = \frac{\partial T}{dz}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Основным условием распространения теплоты в пространстве является наличие разности температур в различных его точках.

2.3. Теплопроводность

Как и другие виды теплообмена, теплопроводность имеет место только при условии, что в различных частях (точках) тела температура неодинакова.

Основным законом передачи теплоты теплопроводностью является гипотеза Фурье (1768–1830), согласно которой элементарное количество теплоты dQ (Дж), проходящее через элемент изотермической поверхности dF за промежуток времени dt , пропорционально температурному градиенту

$$dQ = -\lambda \frac{dT}{dn} dF dt. \quad (2.7)$$

Опытным путем установлено, что коэффициент пропорциональности в (2.7) есть физический параметр вещества. Он характеризует способность вещества проводить теплоту и называется *коэффициентом теплопроводности*.

Количество теплоты, проходящее в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности, т.е. плотность теплового потока, есть вектор, определяемый соотношением

$$\vec{q} = -\lambda \vec{n}_0 \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.8)$$

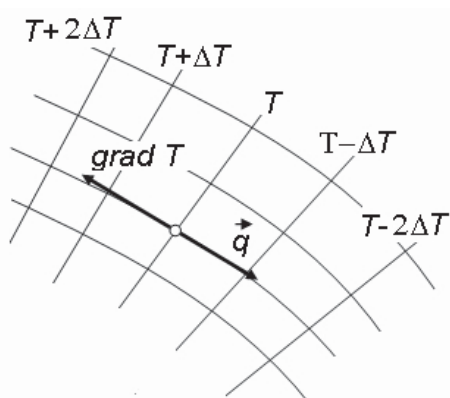


Рис. 2.2. Изотермы и линии тока

Вектор плотности теплового потока направлен по нормали к изотермической поверхности. Его положительное направление совпадает с направлением убывания температуры, т.е. теплота всегда передается от горячих точек к холодным.

Линии, касательные к которым совпадают с направлением вектора \vec{q} , называются *линиями теплового потока*. Линии теплового потока ортогональны изотермическим поверхностям (рис. 2. 2). Скалярная величина плотности теплового потока есть

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (2.9)$$

Измеряется эта величина в системе СИ в Дж/(с·м²)

Гипотеза Фурье была подтверждена экспериментально.

Если градиент температуры для разных точек изотермической поверхности различен, то количество теплоты, которое пройдет через всю изотермическую поверхность F в единицу времени, будет

$$Q = \int_F q dF = - \int_F \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF \quad (2.10)$$

Единицей измерения Q в системе СИ служит Дж/с.

Полное количество теплоты (Дж), прошедшее за время τ через поверхность F , есть

$$Q_\tau = - \int_0^\tau \int_F \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF dt. \quad (2.11)$$

Очевидно, что компоненты вектора плотности теплового потока определяются равенствами

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (2.12)$$

так что

$$\mathbf{q} = \mathbf{i}q_x + \mathbf{j}q_y + \mathbf{k}q_z,$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ единичные векторы декартовой системы координат.

2.4. Коэффициент теплопроводности

Как уже было сказано, коэффициент теплопроводности является характеристикой вещества и в общем случае зависит от температуры, давления и типа вещества. Коэффициент теплопроводности численно равен количеству теплоты, которое проходит в единицу времени через единицу изотермической поверхности при температурном градиенте, равном единице:

$$\lambda = \frac{|\vec{q}|}{|\nabla T|}.$$

В чистом виде теплопроводность наблюдается только в твердых телах. Конкретный механизм передачи теплоты теплопроводностью зависит от физических свойств среды.

В газах при обычных температуре и давлении перенос энергии теплопроводностью осуществляется за счет хаотичного молекулярного движения, диффузии молекул, интенсивность которой пропорциональна температуре. Коэффициент теплопроводности газов меняется в пределах от 0,006 до 0,6 Вт/(м·К). Наибольшей теплопроводностью обладает самый легкий газ – водород. При комнатных условиях коэффициент те-

плопроводности водорода $\lambda \approx 0,2$ Вт/(м·К). У более тяжелых газов теплопроводность меньше. Так у диоксида углерода – $\lambda \approx 0,02$ Вт/(м·К), а у воздуха – $\lambda \approx 0,025$ Вт/(м·К).

Коэффициент теплопроводности газов увеличивается с температурой и заметно не меняется с давлением (рис. 2.3).

Механизм распространения теплоты в капельных жидкостях можно представить как перенос энергии путем нестройных упругих колебаний.

Такое теоретическое представление о механизме переноса теплоты в жидкостях, выдвинутое А.С. Предводителевым, было использовано Н.Б. Варгафтиком для описания опытных данных по теплопроводности различных жидкостей. Эта теория нашла экспериментальное подтверждение. Коэффициент теплопроводности капельных жидкостей лежит в пределах от 0,07 до 0,7 Вт/(м·К). Для большинства жидкостей λ убывает с температурой (исключение составляют вода и глицерин) и растет с давлением.

В металлах и сплавах основным передатчиком теплоты являются свободные электроны, которые можно уподобить идеальному одноатомному газу. Передача теплоты посредством колебательных движений атомов или в виде упругих звуковых волн не исключается, но ее доля, как правило, незначительна по сравнению с переносом энергии электронным газом.

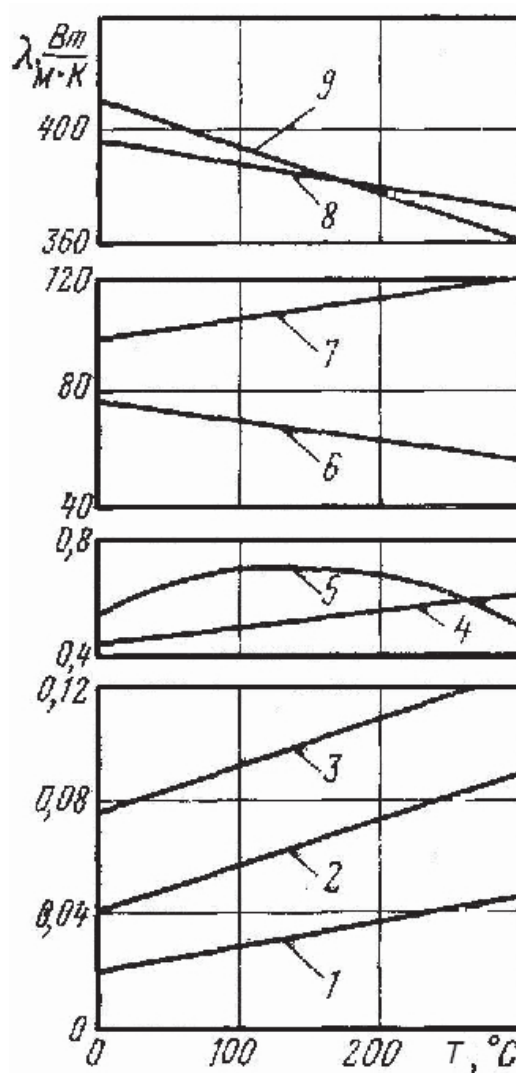


Рис. 2.3. Примеры зависимостей коэффициента теплопроводности от температуры¹⁰: 1 – воздух; 2 – минеральная вата, $\rho=150$ кг/м³; 3 – минеральная вата, $\rho=400$ кг/м³; 4 – сухой пористый красный кирпич; 5 – вода; 6 – железо, 99,9%; 7 – латунь (67% Cu, 33% Zn); 8 – медь, 99,9%; 9 – серебро, 9,9%.

¹⁰ Теплотехника, под ред. Баскакова А.П. М.: Энергоатомиздат, 1982. 264 с.

Так как в металлах носителями тепловой и электрической энергии являются электроны, то коэффициенты теплопроводности и электропроводности пропорциональны друг другу. При повышении температуры вследствие усиления роли тепловых неоднородностей рассеивание электронов увеличивается; это влечет за собой уменьшение коэффициентов тепло- и электропроводности у чистых металлов. При наличии разного рода примесей теплопроводность металлов резко убывает. Это связано с тем, что искажения кристаллической решетки при наличии примесей препятствуют движению электронов. В отличие от чистых металлов, коэффициенты теплопроводности сплавов растут с температурой.

В твердых телах – диэлектриках коэффициент теплопроводности увеличивается с ростом температуры. Как правило, для материалов с большей плотностью коэффициент теплопроводности имеет более высокое значение. Коэффициент λ зависит от структуры материала.

Многие строительные и теплоизоляционные материалы имеют пористое строение (кирпич, бетон, асбест, шлак...), и применение закона Фурье к таким телам достаточно условно; условным (эффективным) является и коэффициент теплопроводности. Коэффициент теплопроводности порошкообразных и пористых тел существенно зависит от их плотности. Например, при возрастании плотности от 400 до 800 кг/м³ коэффициент теплопроводности асбеста увеличивается от 0,105 до 0,214 Вт/(м·К). Эффективный коэффициент теплопроводности сильно зависит от влажности. Для влажного материала коэффициент теплопроводности существенно выше, чем для сухого материала и воды в отдельности. Например, для сухого кирпича $\lambda = 0,35$ Вт/(м·К); для воды $\lambda = 0,6$, а для влажного кирпича $\lambda = 1,0$ Вт/(м·К). Этот эффект может быть объяснен тем, что абсорбционно связанная влага имеет другие характеристики по сравнению со свободной водой. Увеличение коэффициента теплопроводности зернистых материалов с повышением температуры можно объяснить тем, что с повышением T возрастает теплопроводность среды, заполняющей поры между зёрнами, а также увеличивается теплопередача излучением в порах зернистого массива.

При очень низких и очень высоких давлениях и температурах физические свойства могут меняться очень сильно. Так, кварц SiO_2 при температуре -260 °С имеет коэффициент теплопроводности $\lambda > 1000$ Вт/(м·К), а при комнатной температуре $\lambda \approx 7$ Вт/(м·К).

Порядок величин коэффициента теплопроводности для различных материалов показан на рис. 2.4. Некоторые другие данные представлены в Приложении 3.

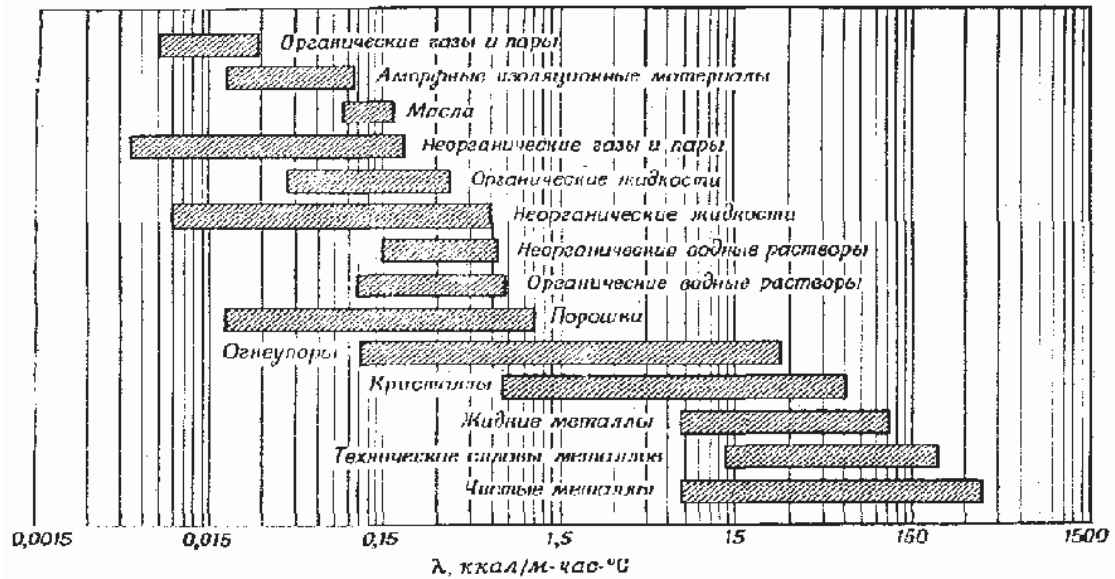


Рис. 2.4. Порядок коэффициента теплопроводности некоторых материалов¹¹

2.5. Задача о плоской стенке

Простейшим примером использования закона Фурье является задача о теплопереносе через плоскую стенку толщиной L (рис. 2.5), длина и ширина которой бесконечно велики по сравнению с толщиной.

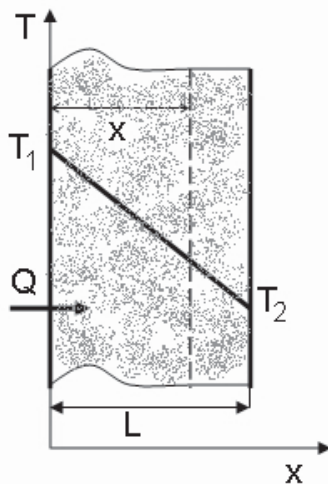


Рис. 2.5. Передача теплоты теплопроводностью через плоскую стенку

Если обе поверхности стенки имеют постоянные, но различные температуры ($T_1 > T_2$), то тепло будет переноситься только в одном направлении – по нормали к поверхностям стенки.

В соответствии с законом Фурье имеем

$$dQ = -\lambda F \frac{dT}{dx} dx.$$

Интегрируя это уравнение при условии постоянства λ , найдем

$$Q = \frac{\lambda F}{L} (T_1 - T_2) \text{ или } q = \frac{(T_1 - T_2)}{L/\lambda} \quad (2.13)$$

Величина, стоящая в знаменателе со-

¹¹ Шнейдер П. Инженерные проблемы теплопроводности. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. 480 с.

отношения (2.13), носит название *термического сопротивления или сопротивления теплопроводности плоской стенки*.

Пример. Пусть стеклянная витрина магазина имеет площадь 12 м^2 и толщину 1 см . Коэффициент теплопроводности стекла $\lambda = 0,8 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$. В холодный день температура внешней поверхности стекла составляет 272 К ($-1 \text{ }^\circ\text{C}$), а температура внутренней поверхности 296 К ($+3 \text{ }^\circ\text{C}$). Требуется найти тепловой поток через стекло и температуру в среднем сечении между внешней и внутренней поверхностями стекла.

Решение. Тепловой поток через стекло равен

$$Q = \frac{\lambda F}{L}(T_1 - T_2) = \frac{0,8 \cdot 12 \cdot 4}{0,01} = 3840 \text{ Вт.}$$

Температура в среднем сечении $x_* = L/2$ равна 274 К , так как в стекле создается линейный профиль температуры:

$$T = T_1 - \frac{Qx_*}{\lambda F} = T_1 - \frac{qx_*}{\lambda}.$$

Как уже известно, коэффициент теплопроводности многих материалов не является постоянной величиной. В определенных интервалах изменения температуры он может быть аппроксимирован линейной зависимостью

$$\lambda = \lambda_0(1 + \beta T),$$

где λ_0 - коэффициент теплопроводности при некоторой характерной температуре; β - эмпирическая постоянная.

В этом случае поток тепла удовлетворяет соотношению

$$Q = \frac{\lambda_0 F}{L} \left[(T_1 - T_2) + \frac{\beta}{2} (T_1^2 - T_2^2) \right] \quad (2.14)$$

или

$$Q = \frac{\lambda_m F}{L} (T_1 - T_2),$$

где λ_m - значение коэффициента теплопроводности при средней температуре $T_m = (T_1 + T_2)/2$.

Эти и другие задачи могут быть решены достаточно строго при использовании современных методов решения задач математической физики, что будет показано далее.

2.6. Уравнение теплопроводности

При решении задач, связанных с нахождением температурного поля, необходимо иметь дифференциальное уравнение теплопроводности. Вывести его можно различными способами.

В простейшем случае делают следующие предположения: тело однородно и изотропно; физические параметры постоянны; деформация объема, связанная с изменением температуры, является очень малой величиной по сравнению с самим элементарным объемом; внутренние источники теплоты, которые в общем случае могут быть заданы в виде

$$q_v = q_v(x, y, z, t), \quad (2.15)$$

распределены равномерно.

В основу вывода дифференциального уравнения теплопроводности положен закон сохранения энергии, который может быть сформулирован следующим образом:

количество теплоты dQ_1 , введенное в элементарный объем dV за время dt вследствие теплопроводности, а также от внутренних источников dQ_2 , равно изменению внутренней энергии или энтальпии dQ вещества (в зависимости от того, рассматривается изохорический или изобарический процесс), содержащихся в элементарном объеме:

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ. \quad (2.16)$$

Выделим в теле элементарный параллелепипед (рис. 2.6) со сторонами dx, dy, dz и с гранями, параллельными соответствующим координатным плоскостям. Количество теплоты, которое подводится к граням за время dt в направлении осей Ox, Oy, Oz , обозначим соответственно dQ_x, dQ_y, dQ_z . Количество теплоты, которое будет отводиться через противоположные грани, будет $dQ_{x+dx}, dQ_{y+dy}, dQ_{z+dz}$.

Очевидны соотношения

$$dQ_x = q_x dy dz dt; \quad dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dy dz dt,$$

где dQ_x – количество теплоты, подведенное к грани $dy dz$ за время dt ; dQ_{x+dx} – количество теплоты, отведенное от противоположной грани; q_x, q_{x+dx} – проекции плотности теплового потока на направление нормали к соответствующим поверхностям.

Количество теплоты, переносимое в этом направлении, есть

$$\begin{aligned} dQ_{x1} &= dQ_x - dQ_{x+dx} = \\ &= q_x dydzdt - q_{x+dx} dydzdt \end{aligned}$$

Пусть плотность теплового потока – непрерывная функция в рассматриваемом интервале dx . Тогда она может быть разложена в ряд Тейлора

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} dx dx \frac{1}{2!} + \dots$$

Ограничиваясь первыми членами ряда, найдем

$$dQ_{x1} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz dt.$$

Аналогично найдем количество теплоты, подводимое в направлениях других осей.

Следовательно, количество теплоты, подведенное теплопроводностью к рассматриваемому объему, есть

$$dQ_1 = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (2.17)$$

Количество теплоты, выделяемое внутренними источниками в единице объема за единицу времени, есть q_V , Вт/м³. Тогда

$$dQ_2 = q_V dV dt, \quad (2.18)$$

где $dV = dx dy dz$.

Вид третьего слагаемого зависит от типа процесса.

В *изохорном процессе* вся теплота, подведенная к элементарному объему, уйдет на изменение его внутренней энергии (см. формулы (1.15))

$$(dQ_3)_V = dU = \rho \frac{\partial u}{\partial t} dt dV = c_\gamma \rho \frac{\partial T}{\partial t} dt dV. \quad (2.19)$$

Тогда, используя (2.16)-(2.19), найдем уравнение теплопроводности в виде

$$c_\gamma \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_V \quad (2.20)$$

или

$$c_\gamma \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + q_V.$$

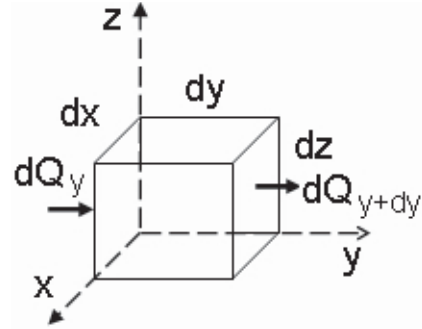


Рис. 2.6. Иллюстрация к выводу уравнения теплопроводности

В изобарном процессе вся теплота, подведенная к объему, уйдет на изменение энтальпии (см. (1.15)). Тогда

$$(dQ_3)_V = dH = \rho \frac{\partial h}{\partial t} dt dV = c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} dt dV, \quad (2.21)$$

и уравнение теплопроводности для изобарического процесса принимает вид

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_V \quad (2.22)$$

или

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + q_V.$$

Для твердых тел различие теплоемкостей c_p и c_v , как правило, можно пренебречь. Тогда, полагая, что для твердых тел справедлив закон Фурье, придем к уравнению теплопроводности вида

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_V. \quad (2.23)$$

2.7. О постановке задач в теории теплопроводности

В случае одномерного температурного поля, когда перенос теплоты теплопроводностью осуществляется только в одном направлении, например, вдоль оси Ox , уравнение теплопроводности упрощается. Мы приходим к одномерному нестационарному уравнению теплопроводности

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q_V \quad (2.24)$$

Если в теле отсутствуют объемные источники тепла, а теплофизические свойства можно считать постоянными в некотором интервале температур, то получаем совсем простое уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2.25)$$

где $a = \lambda / (c_p \rho)$ – коэффициент температуропроводности. Этот коэффициент является параметром вещества и характеризует скорость изменения температуры во времени. Если коэффициент теплопроводности характеризует способность вещества проводить теплоту, то коэффициент температуропроводности является мерой теплоинерционных свойств

тела. При прочих равных условиях быстрее нагревается то тело, которое обладает большим коэффициентом теплопроводности. Если прикоснуться рукой к деревянной раме и стеклу окна, то покажется, что стекло – холоднее, хотя температуры их одинаковы. Это объясняется тем, что стекло, имеющее в 4,5 раза больший коэффициент теплопроводности, обеспечивает более быстрый отвод тепла от руки.

Для одномерного стационарного температурного поля, т.е., когда температура не изменяется во времени ($\partial T/\partial t = 0$), одномерное уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0. \quad (2.26)$$

Именно такое дифференциальное уравнение нам требуется, чтобы решить задачу о плоской стенке. Дополнительно к (2.26) мы имеем 2 условия

$$x = 0: T = T_1 \text{ и } x = L: T = T_2. \quad (2.27)$$

Задав граничные условия, мы сформулировали краевую задачу.

Общее решение дифференциального уравнения (2.26) есть

$$T = C_1 x + C_2. \quad (2.28)$$

Подставляя последовательно в (2.27) условия при $x = 0$ и $x = L$, мы получим два уравнения, позволяющие определить постоянные интегрирования. В результате найдем

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x,$$

откуда с учетом закона Фурье следуют соотношения (2.13).

В случае коэффициента теплопроводности, зависящего от температуры, граничные условия (2.27) дополняют стационарное уравнение теплопроводности вида

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) = 0. \quad (2.29)$$

Первый интеграл уравнения (2.29) есть

$$\lambda \frac{dT}{dx} = C_1 \text{ или } \lambda_0 (1 + \beta T) \frac{dT}{dx} = C_1.$$

Последующее интегрирование дает

$$\lambda_0 T + \beta \frac{T^2}{2} = C_1 x + C_2,$$

откуда, используя граничные условия (2.27) и определение потока тепла $Q = qF$, находим уравнение (2.14).

Уравнение (2.23) описывает перенос теплоты в пространстве в самом общем виде. При интегрировании этого уравнения получается бесчисленное множество решений, удовлетворяющих ему. Для решения практической задачи необходимо задать вполне конкретные данные, т.е. ограничить рассматриваемую проблему определенными условиями, чтобы сделать решение однозначным.

Часть условий позволяет перейти от общей формы уравнения теплопроводности к его частному виду, справедливому для рассматриваемой проблемы. Это – физические и геометрические условия.

Другая часть условий позволяет выбрать из всей совокупности решений дифференциального уравнения только то, которое этим условиям отвечает. Эти условия называются условиями однозначности или краевыми условиями.

Краевые условия подразделяют на условия начальные и граничные.

Начальные условия определяют распределение температуры в теле в начальный момент времени.

В случае *граничных условий первого рода* на поверхности тела задается значение температуры для любого момента времени. Именно такие условия мы имели в нашей простой задаче.

В случае *граничных условий второго рода* задается плотность теплового потока в каждой точке поверхности тела для любого момента времени.

В случае *граничных условий третьего рода* задается температура окружающей среды и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой.

Таким образом, описывая математическими средствами условия однозначности при решении конкретных практических задач, в том числе и задач, относящихся к технологическим системам, прибегают к той или иной схематизации процесса теплообмена. Это значит, что фактические тела и источники, действующие в реальном природном или технологическом процессе, заменяют телами и источниками более простой формы, приближенно отражающими оригиналы. Реальные условия взаимодействия тел с окружающей средой и начальные условия также схематизируют, заменяя сложные ситуации, имеющие место в действительности, более простыми, идеализированными.

Схематизация делается с целью облегчения математического описания процесса теплообмена в конкретных задачах. Однако для исследования основных закономерностей при решении практических задач не всегда необходимо учитывать все стороны и детали явления, тем более что погрешности, вызванные усложнением математического аппарата, могут свести на нет уточнения, достигнутые детализацией процесса.

С усложнением условий однозначности чисто математические трудности решения нарастают очень быстро, иногда настолько, что само аналитическое описание интересующего нас процесса оказывается невозможным. Различные способы схематизации формы тел, условий их взаимодействия с окружающей средой, источников тепла различной природы и позволяют сформулировать и исследовать целый ряд практически важных задач, о которых речь пойдет далее.

2.8. Многослойная стенка

В практике часто встречаются стенки, состоящие из нескольких слоев различных материалов (рис. 2.7). Рассмотрим, например, перенос теплоты через стенку, состоящую из трех плотно прилегающих друг к другу слоев толщины L_1, L_2, L_3 . Коэффициенты теплопроводности этих слоев $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ различны. Температуры наружных поверхностей T_1 и T_2 заданы, причем $T_1 > T_2$, т.е. заданы граничные условия первого рода.

Так как *при стационарном температурном поле* тепловой поток, проходящий через многослойную стенку, одинаков для каждого слоя, то, вводя обозначения для температур контактирующих поверхностей T' и T'' и пользуясь уравнением (2.13), запишем

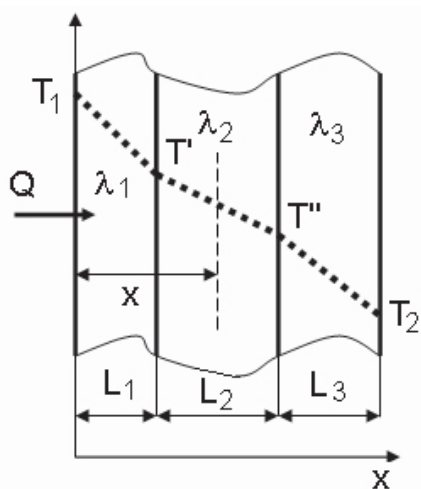


Рис. 2.7. Передача теплоты теплопроводностью через трехслойную стенку

$$Q = (T - T')F / (L_1 / \lambda_1);$$

$$Q = (T' - T'')F / (L_2 / \lambda_2);$$

$$Q = (T'' - T_2)F / (L_3 / \lambda_3).$$

Эти равенства легко разрешаются относительно разностей температур

$$T_1 - T' = Q(L_1 / \lambda_1) / F;$$

$$T' - T'' = Q(L_2 / \lambda_2) / F;$$

$$T'' - T_2 = Q(L_3 / \lambda_3) / F.$$

Складывая, правые и левые части равенств, найдем

$$T_1 - T_2 = Q(L_1 / \lambda_1 + L_2 / \lambda_2 + L_3 / \lambda_3) / F$$

или

$$Q = \frac{(T_1 - T_2)F}{L_1 / \lambda_1 + L_2 / \lambda_2 + L_3 / \lambda_3}. \quad (2.30)$$

Плотность теплового потока через стенку есть

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\sum_{i=1}^3 (L_i / \lambda_i)},$$

т.е., поток тепла и плотность теплового потока зависят от суммы термических сопротивлений всех слоев.

Эту задачу можно решить немного иначе, записывая краевую задачу для уравнения теплопроводности (2.26) и граничные условия на контакте слоев. В соответствии с законом Фурье, поток тепла пропорционален градиенту температуры, так что равенство потоков тепла и температур на границах разных материалов означает

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L_1-0} = \lambda_2 \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L_1+0} ; T_{x=L_1-0} = T_{x=L_1+0}$$

и

$$\lambda_2 \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L_1+L_2-0} = \lambda_3 \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L_1+L_2+0} ; T_{x=L_1+L_2-0} = T_{x=L_1+L_2+0}.$$

Граничные условия такого типа называют *граничными условиями четвертого рода*. Равенство температур на поверхностях раздела материалов означает, что между ними поддерживается *идеальный тепловой контакт*.

Тепловой поток через плоскую стенку, содержащую n слоев, есть

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\sum_{i=1}^n (L_i / \lambda_i)}. \quad (2.31)$$

Иногда вводят в рассмотрение *эквивалентный коэффициент теплопроводности*

$$\lambda_{eq} = \frac{\sum_{i=1}^n L_i}{\sum_{i=1}^n (L_i / \lambda_i)}, \quad (2.32)$$

который равен коэффициенту теплопроводности фиктивной однослойной стенки с толщиной, равной сумме толщин слоев многослойной стенки. Предполагается, что при этом разности температур на границах однослойной и многослойной стенок одинаковы, и количества тепла, проходящие через них в единицу времени, совпадают.

Пример. Пусть стенка печи состоит из внутреннего слоя нержавеющей стали, толщиной 1,2 см, покрытого внешним слоем асбестовой изоляции толщиной 5 см. Температура внутренней поверхности нержавеющей стали равна 800 К, а температура наружной поверхности асбеста равна 350 К. Требуется найти плотность теплового потока через стенку печи и температуру контактной поверхности стали и асбеста. Коэффициенты теплопроводности для стали и асбеста равны соответственно $\lambda_1 = 19$ Вт/(м·К) и $\lambda_2 = 0,7$ Вт/(м·К).

Решение. Используя полученные выше формулы, найдем тепловой поток

$$Q = \frac{(T_1 - T_2)F}{L_1/\lambda_1 + L_2/\lambda_2}.$$

Следовательно, плотность теплового потока есть

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{L_1/\lambda_1 + L_2/\lambda_2} = \frac{800 - 350}{0,012/19 + 0,05/0,7} = 6245 \text{ Вт/м}^2.$$

Теперь находим температуру на контакте

$$T_x = T_1 - q \frac{L_1}{\lambda_1} = 800 - 6245 \frac{0,012}{19} = 796 \text{ К.}$$

Следовательно, перепад температур на нержавеющей стали составляет всего лишь около 4 К, а перепад температур на асбесте 446 К.

2.9. Электрическая аналогия для теплопроводности

В некоторых случаях целесообразен иной подход к теплопередаче. Этот подход, в котором применяются концепции электрических цепей, часто называют *аналогией между переносом тепла и электричества*. Если считать, что тепловой поток аналогичен электрическому току, комплекс $L/(\lambda F)$ рассматривать как сопротивление, а разность температур как аналог разности потенциалов, то соотношение (2.13)

$$Q = \frac{\lambda F}{L}(T_1 - T_2)$$

можно записать в форме, аналогичной закону Ома

$$Q = \frac{\Delta T}{R_T},$$

где $\Delta T = T_1 - T_2$ – перепад температур (термический потенциал), $R_T = L/(\lambda F)$ – термическое сопротивление. Обратная величина терми-

ческого сопротивления называется тепловой проводимостью, а отношение λ/L – удельной тепловой проводимостью для кондуктивного теплового потока.

Аналогичным образом можно представить соотношение (2.30) для теплового потока через трехслойную стенку (рис. 2.7 и 2.8)

$$Q = \frac{\Delta T}{R_{T,1} + R_{T,2} + R_{T,3}},$$

где $\Delta T = T_1 - T_2$, $R_{t,i} = L_i / (\lambda_i F)$, $i = 1, 2, 3$.

Электрическую аналогию можно использовать и для решения более сложных задач. Например, во многих случаях процесс теплопроводности протекает в материалах, расположенных параллельно друг другу.

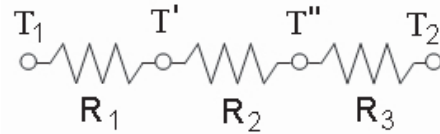
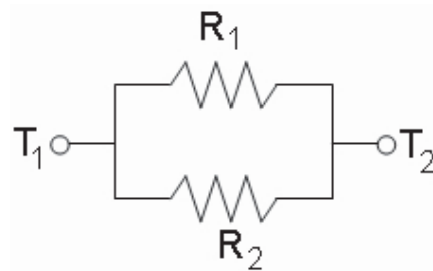
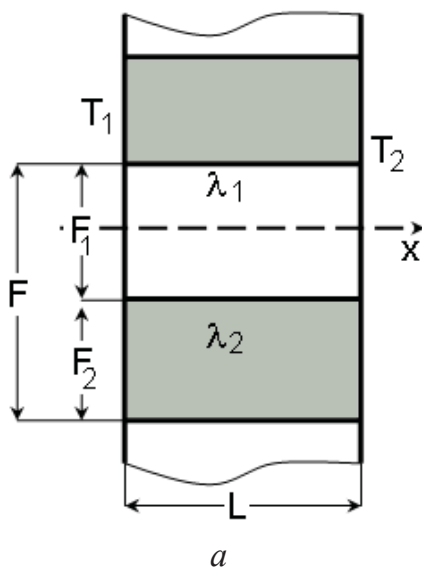


Рис. 2.8. Электрическая аналогия к рис. 2.7 для задачи с трехслойной стенкой

На рис. 2.9. показана плита, состоящая из двух материалов, расположенных параллельно и имеющих поперечные сечения F_1 и F_2 . Справа на этом же рисунке представлена соответствующая тепловая цепь.

Чтобы решить эту задачу при заданном перепаде температур поперек плиты, каждый слой составной конструкции можно рассматривать отдельно при условии, что для каждой из двух секций перенос тепла можно считать одномерным.



$$R_{T,1} = \frac{L}{\lambda_1 F_1}$$

$$R_{T,2} = \frac{L}{\lambda_2 F_2}$$

Рис. 2.9. Теплопроводность через составную стенку из двух параллельных секций

Если разность температур между контактирующими материалами мала, тепловой поток вдоль слоев будет намного больше теплового потока в поперечном направлении, и задачу можно считать одномерной без сколько-нибудь серьезной потери точности.

Поскольку тепловые потоки для различных материалов можно рассматривать по отдельности, общий тепловой поток представляет собой арифметическую сумму

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{T_1 - T_2}{L/(\lambda_1 F_1)} + \frac{T_1 - T_2}{L/(\lambda_2 F_2)} = \left(\frac{1}{R_{T,1}} + \frac{1}{R_{T,2}} \right) (T_1 - T_2).$$

Отметим, что общая площадь, которую пересекает тепловой поток, равна сумме двух отдельных площадей и что обратная величина суммарного термического сопротивления равна сумме обратных величин отдельных термических сопротивлений.

Тепловая цепь для этой задачи представляет собой параллельное соединение двух термических сопротивлений $R_{T,1}$ и $R_{T,2}$.

Более сложным примером использования понятия тепловых сопротивлений является задача о передаче тепла через составную стенку, которая должна представляться с помощью последовательно и параллельно соединенных термических сопротивлений (рис. 2.10). Для этой системы термическое сопротивление среднего слоя дается формулой

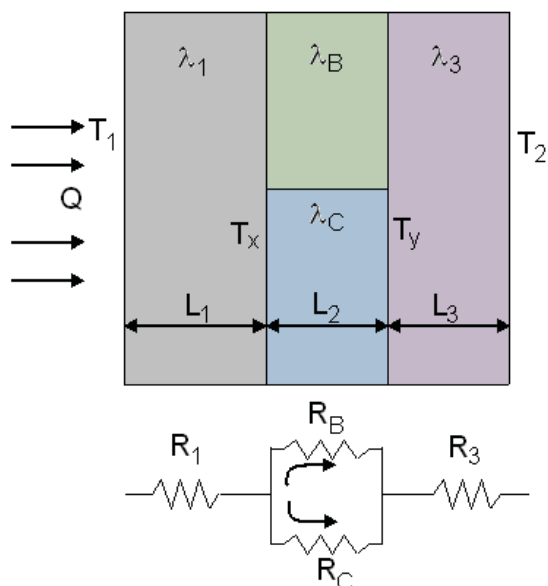


Рис. 2.10. Тепловая цепь с параллельно и последовательно соединенными элементами.

$$R_{T,2} = \frac{R_{T,B} R_{T,C}}{R_{T,B} + R_{T,C}},$$

а тепловой поток определяется следующим образом

$$Q = \frac{\Delta T}{\sum_{n=1}^{n=N} R_{T,n}},$$

где N – число слоев; $R_{T,n}$ – термическое сопротивление каждого слоя; ΔT – разность температур внешних поверхностей;

$$R_{T,1} = \frac{L_1}{\lambda_1 F_1}, \quad R_{T,3} = \frac{L_3}{\lambda_3 F_3}$$

$$R_{T,B} = \frac{L_B}{\lambda_B F_B}; \quad R_{T,C} = \frac{L_C}{\lambda_C F_C}.$$

В этой задаче также предполагается, что поток тепла является одномерным.

Если термические сопротивления $R_{T,B}$ и $R_{T,C}$ сильно отличаются друг от друга, могут проявиться существенные двумерные эффекты. Такие задачи должны рассматриваться в более сложной постановке.

2.10. Контактное термическое сопротивление

Если различные теплопроводящие слои находятся в контакте, на поверхности раздела твердых тел возникает термическое сопротивление. Это термическое сопротивление, которое часто называют *контактным термическим сопротивлением*, возникает, когда поверхности двух материалов недостаточно плотно прижаты друг к другу и между ними остается тонкий слой жидкости или газа. Исследование сильно увеличенной картины контакта между двумя твердыми поверхностями показывает, что материалы касаются друг друга только вершинами профилей шероховатости поверхностей, а впадины контактирующих поверхностей заполнены инородной средой, возможно воздухом, жидкостью или вакуумом.

Контактное термическое сопротивление зависит, прежде всего, от шероховатости поверхностей; давления, прижимающего две поверхности друг к другу; среды в районе контактной поверхности и температуры в зоне контакта. Механизм теплопередачи в зоне контакта довольно сложен. В местах непосредственного контакта твердых поверхностей осуществляется процесс теплопроводности, а перенос тепла через зазоры, заполненные жидкостью или газом, производится конвекцией или излучением.

Если плотность теплового потока через две контактирующие поверхности составляет Q/F , а разность температур поперек заполненного жидкостью или газом зазора, который разделяет две твердые поверхности, равна ΔT_i , то контактное термическое сопротивление $R_{T,i}$ определяется выражением

$$R_{T,i} = \frac{\Delta T_i}{Q/F}.$$

Считается, что две поверхности находятся в *идеальном тепловом контакте*, когда контактное термическое сопротивление стремится к нулю, и на поверхности раздела нет перепада температур. При неидеальном тепловом контакте на поверхности раздела существует перепад температур. При постановке конкретных задач всегда следует иметь в

виду существования такого термического сопротивления. Для сильно шероховатых поверхностей оно может быть значительным.

Проблема контактного термического сопротивления достаточно сложна, и не существует единой теории, позволяющей достаточно точно рассчитывать контактное сопротивление в инженерных задачах.

Пример. Пусть стена здания состоит из слоя обычного кирпича ($L_1 = 0,1$ м; $\lambda_1 = 0,7$ Вт/(м·К)) и слоя гипсовой штукатурки ($L_2 = 0,038$ м; $\lambda_2 = 0,48$ Вт/(м·К)). Сравнить тепловые потоки через эту стену и через такую же стену с термическим сопротивлением на границе раздела между кирпичом и штукатуркой, равным $R_{T,k} = 0,1$ К/Вт (рис. 2.11).

Решение. Плотность теплового потока через идеализированную стенку при разности температур $\Delta T = T_{10} - T_{20}$ в 1 К равна

$$\frac{Q}{F(T_{10} - T_{20})} = \frac{1}{L_1/\lambda_1 + L_2/\lambda_2} = \frac{1}{0,1/0,7 + 0,038/0,48} = 4,5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

Поверхность раздела представляется третьим, последовательно соединенным термическим сопротивлением, после чего плотность теплового потока записывается в виде

$$\frac{Q}{F(T_{10} - T_{20})} = \frac{1}{R_{T,1} + R_{T,2} + R_{T,k}} = \frac{1}{0,222 + 0,1} = 3,11 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

Достаточно строгая математическая формулировка задачи о нахождении поля температуры в этой двухслойной стенке включает уравнение теплопроводности (2.26) для каждого слоя стенки

$$\frac{d^2 T_i}{dx^2} = 0, \quad i = 1, 2$$

и граничные условия

$$x = 0: \quad T_1 = T_{10};$$

$$x = L_1 + L_2: \quad T_2 = T_{20};$$

$$x = L_1: \quad \lambda_1 \frac{dT_1}{dx} = \lambda_2 \frac{dT_2}{dx} = \frac{Q}{F};$$

$$T_1 - T_2 = R_{T,k} \frac{Q}{F}.$$

Решение уравнения теплопроводности для каждого слоя имеет вид

$$T_i = A_i x + B_i, \quad (2.33)$$

где A_i, B_i – постоянные интегрирования, которые находим с помощью граничных условий.

Подставляя соотношение (2.33) в граничные условия (которых имеется четыре, как и постоянных A_i, B_i), находим систему четырех алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} B_1 &= T_{10}; \\ A_2(L_1 + L_2) + B_2 &= T_{20}; \\ \lambda_1 B_1 &= \lambda_2 B_2 = \frac{Q}{F}; \end{aligned}$$

$$L_1(A_1 - A_2) + (B_1 - B_2) = R_{T,k} \frac{Q}{F}.$$

Последовательно определяем постоянные интегрирования:

$$B_1 = T_{10}; \quad B_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} T_{10}; \quad A_2 = \frac{T_{20} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} T_{10}}{L_1 + L_2};$$

$$A_1 = \frac{T_{20} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} T_{10}}{L_1 + L_2} + \frac{T_{10}}{L_1} \left(R_{T,k} \lambda_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right).$$

Решение принимает вид

$$T_1 = T_{10} + \left(T_{20} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} T_{10} \right) \frac{x}{L_1 + L_2} + T_{10} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + R_{T,k} - 1 \right) \frac{x}{L_1};$$

$$T_2 = \left(T_{20} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} T_{10} \right) \frac{x}{L_1 + L_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} T_{10}.$$

Эти уравнения дают температуру в произвольной точке стены здания.

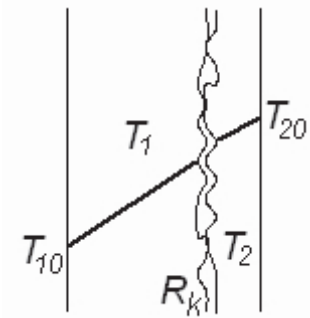


Рис. 2.11. Иллюстрация к задаче с термическим сопротивлением

Вопросы для самоконтроля

1. Какие типы источников энергии Вы знаете?
2. Назовите основные характеристики температурного поля.
3. Сформулируйте закон Фурье.

4. Опишите физические механизмы переноса тепла в газах, жидкостях и твердых телах.
5. Дайте общий вид уравнения теплопроводности.
6. Какие Вы знаете виды граничных условий в задачах теплопроводности?
7. Как определить сопротивление теплопроводности для однослойной и многослойной плоской стенки?
8. В чем заключается электрическая аналогия для процесса теплопроводности?
9. Что такое «контактное термическое сопротивление»?
10. Как формулируются граничные условия на контакте при наличии контактного сопротивления?

Задания

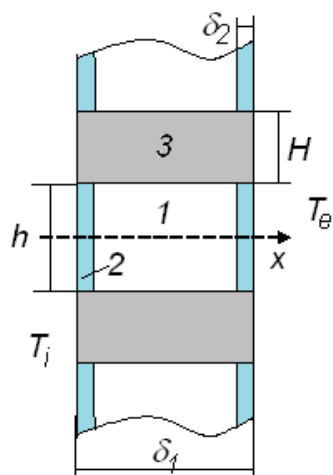


Рис. 2.12. Иллюстрация к постановке задачи 1

1. Пользуясь представлением об электрической аналогии, рассчитать тепловой поток через стенку, изображенную на рис. 2.12, при условиях:

$h = 75$ мм; $H = 50$ мм; $\delta_1 = 150$ мм; $\delta_2 = 17$ мм; $T_i = 100$ С; $T_e = 0$ С; $\lambda_1 = 0,744$, $\lambda_2 = 1,488$; $\lambda_3 = 1,932$ ккал/(м·час·град).

2. Как изменится тепловой поток через эту стенку, если между материалами 1 и 2 имеется термическое сопротивление величиной $0,1$ К/Вт.

3. В задаче из раздела 2.9. рассчитать зависимости потока тепла через стенку и температуры на контакте стали и асбестовой изоляции при варьировании ширины последней в пределах от 1 до 7 см.

ЧАСТЬ 3

Конвективный теплообмен и теплопередача

3.1. Конвективный теплообмен

Под конвекцией понимают процесс переноса вещества в среде за счет перемещения макрочастиц жидкости (газа). Перемещение этих частиц можно наблюдать невооруженным глазом, сделав их видимыми с помощью красителей или дыма. Естественно, что конвекция возможна только в текучей среде. Перенос теплоты конвекцией всегда сопровождается теплопроводностью, причем главную роль в совместной передаче теплоты играет конвективный перенос.

Совместный процесс переноса теплоты конвекцией и теплопроводностью называется *конвективным теплообменом*.

Различают свободную и вынужденную конвекцию. Конвекция, создаваемая принудительным способом (мешалкой, вентилятором и т.д.) носит название *вынужденной*. Если же движение элементов объема среды вызвано наличием в ней температурных градиентов, а, следовательно, разных плотностей, то такая конвекция называется *свободной* или *естественной*. Она создается за счет того, что более холодные частицы жидкости или газа, имеющие большую плотность, под действием *гравитационного поля* Земли опускаются вниз, а более нагретые под действием *архимедовой силы* поднимаются вверх. Типичными примерами естественной конвекции являются теплоотдача от стен или с крыш здания в безветренный день; конвекция в сосуде с жидкостью, в которую погружена нагревательная спираль (кипятильник); теплоотдача от солнечного коллектора в безветренную погоду. В этом случае естественная конвекция возникает при теплообмене за счет теплового расширения нагретой около теплоотдающей поверхности жидкости.

Интенсивность теплового расширения характеризуется температурным коэффициентом объемного расширения

$$\alpha_T = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right)_{p=\text{const}}, \quad (3.1)$$

где $\gamma = \rho^{-1}$ – удельный объем жидкости или газа.

Для идеальных газов коэффициент удельного теплового расширения можно получить, воспользовавшись уравнением состояния идеального газа (уравнением Клапейрона)

$$p\gamma = m^{-1}RT, \quad (3.2)$$

где $R = 8,31$ – универсальная газовая постоянная, m – молярная масса.

Находим из (3.1) и (3.2):

$$\alpha_T = \frac{R}{\gamma p m} \equiv \frac{1}{T}.$$

Для капельных жидкостей температурный коэффициент объемного расширения значительно меньше, чем для газов, а иногда может принимать нулевые и отрицательные значения.

При небольшом перепаде температуры вместо дифференциального соотношения (3.1) можем записать

$$\alpha_T \approx \frac{1}{\gamma_f} \frac{\gamma_s - \gamma_f}{T_s - T_f} = \frac{1}{\rho_f} \frac{\rho_f - \rho_s}{T_s - T_f}, \quad (3.3)$$

где индекс "f" – относится к жидкости вдали от поверхности; индекс "s" – к жидкости вблизи теплоотдающей стенки (T_s – температура поверхности). Наличие разности плотностей $\rho_f - \rho_s$ приводит к тому, что на любой единичный объем будет действовать подъемная сила, равная алгебраической сумме выталкивающей архимедовой силы $\mathbf{A} = \rho_f \mathbf{g}$ (\mathbf{g} – ускорение свободного падения) и силы тяжести $\mathbf{G} = \rho_s \mathbf{g}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{G} = \mathbf{g}(\rho_f - \rho_s) = \alpha_T \rho_f \mathbf{g}(T_s - T_f). \quad (3.4)$$

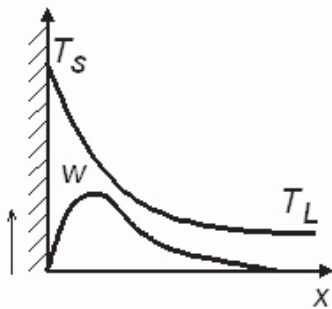


Рис. 3.1. Распределение скорости и температуры около вертикальной теплоотдающей стенки при естественной конвекции

Подъемная сила \mathbf{F} перемещает перегретую жидкость вверх без каких-либо побуждающих устройств – возникает *естественная конвекция* (рис. 3.1).

Все рассуждения о возникновении естественной конвекции справедливы и для случая охлаждения жидкости с той лишь разницей, что подъемная сила, как и вектор \mathbf{g} , будет направлена вниз, так как плотность теплоносителя около холодной поверхности будет больше, чем вдали от нее.

Движению теплоносителей вблизи поверхности всегда противодействует сила внутреннего трения, возникающая из-за наличия у газов и жидкостей сил вязкости. Благодаря вязкому трению, течение жидкости около поверхности затормаживается, поэтому, не смотря на то, что наибольший прогрев жидкости, а следовательно, и величина подъемной силы при естественной конвекции будут около теплопроводящей поверхности, скорость движения частиц жидкости, «прилипших» к самой по-

верхности, равна нулю (рис. 3.1). Нулевая скорость жидкости у самой поверхности имеет место и при вынужденной конвекции.

Поскольку скорость жидкости при вынужденной конвекции больше, чем при свободной, то в первом случае может быть передано больше тепла, чем во втором при заданном перепаде температур.

Процесс конвективного теплообмена может быть стационарным и нестационарным. В первом случае температурное поле жидкости не изменяется во времени, а во втором – переменное.

О. Рейнольдс в 1884 году установил существование двух режимов движения жидкости, один из которых получил название *ламинарного*, а другой – *турбулентного*.

Если жидкость или газ вступают в контакт с поверхностью твердого тела, имеющей другую температуру, процесс обмена тепловой энергией или теплом называют *теплоотдачей*. Такой процесс часто встречается в жизни, но подробно описать его механизм довольно сложно.

При ламинарном течении все частицы жидкости движутся параллельно друг другу, не перемешиваясь по нормали n к направлению движения. Следовательно, перенос теплоты в этом направлении осуществляется только теплопроводностью (рис. 3.2,а). Из-за сравнительно малых коэффициентов теплопроводности жидкостей (или газов) теплота по всему объему жидкости в ламинарном потоке распространяется достаточно медленно.

При турбулентном режиме частички жидкости, участвуя в общем поступательном движении, перемещаются хаотично, неупорядоченно, с образованием вихрей и появлением нерегулярной пульсации скорости, давления и других параметров. Чем чаще образуются вихри, тем интенсивнее перемешивание потока, тем больше его турбулентность. Перенос теплоты в возмущенном вихрями потоке осуществляется конвекцией, но вблизи стенки этого не наблюдается из-за «прилипания» частиц жидкости к поверхности тела. На поверхности стенки в результате действия сил вязкости формируется тонкий слой заторможенной жидкости, получивший название *гидродинамического пограничного слоя* (т.е., это – область течения около обтекаемой поверхности, в которой скорость жидкости замедляется под действием сил вязкости), который движется параллельно стенке (рис. 3.2,б). Гипотеза о прилипании жидкости к стенке и образовании пограничного слоя была разработана Л. Прандтлем в 1904 году. Скорость внутри пограничного слоя при вынужденном движении жидкости изменяется от нуля на поверхности тела до скорости внешнего потока, т.е. характеризуется большим поперечным градиентом. В пределах этого слоя перенос тепла осуществляется теплопровод-

ностью. Следовательно, характер движения жидкости предопределяет механизм переноса теплоты (энергии) в потоке.

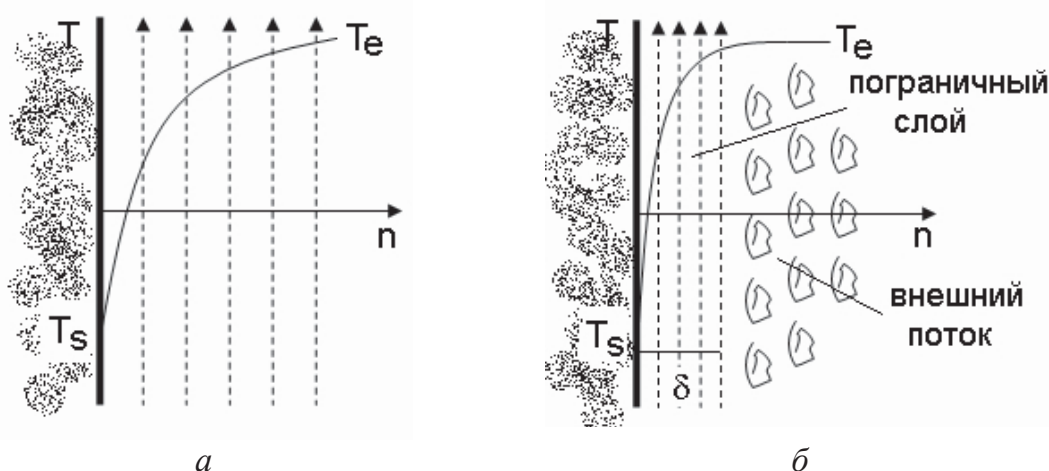


Рис. 3.2. Теплоотдача при различных режимах течения: а) при ламинарном; б) при турбулентном¹²

Пограничным слоем называют область течения (вблизи стенки) вязкой теплопроводной жидкости, характеризуемую малой толщиной и большим поперечным градиентом скорости или температуры, изменением которых обусловлены процессы переноса вещества, количества движения и теплоты.

Под внешним потоком подразумевают область потока жидкости, в которой влияние сил вязкости ничтожно мало по сравнению с силами инерции, в то время как в пограничном слое силы вязкости и инерции соизмеримы.

Толщина гидродинамического пограничного слоя δ – величина условная, так как переход от пограничного слоя к внешнему потоку не является резким. За толщину пограничного слоя δ принимают расстояние от поверхности стенки до слоя жидкости, скорость которого отличается от скорости внешнего потока на малую, заранее заданную величину. Толщина пограничного слоя возрастает с увеличением расстояния от передней кромки. На некотором критическом расстоянии влияние инерционных сил становится существенно большим по сравнению с силами вязкости, и в потоке начинают возрастать слабые возмущения. Постепенно они усиливаются, и упорядоченный режим вязкого течения (ламинарный) сменяется турбулентным режимом. В области турбулентно-

¹² Лашутина Н.Г., Макашова О.В., Медведев Р.М. Техническая термодинамика с основами теплопередачи и гидравлики. М.: Машиностроение, 1988. 336 с.

го течения происходит интенсивный перенос как тепловой энергии, так и количества движения.

При теплообмене между стенкой и средой в области, граничащей с поверхностью тела, возникает *тепловой пограничный слой*, представляющий собой пристенный слой жидкости, в котором температура меняется от температуры стенки T_s до температуры внешнего потока T_e .

Термическое сопротивление¹³ $r_T = \delta/\lambda$ пограничного слоя во много раз превышает термическое сопротивление турбулентного внешнего потока и является определяющим в процессах конвективного теплообмена. Изменение температуры от T_e до T_s происходит, в основном, в пределах пограничного слоя.

И. Ньютон впервые обратил внимание на то, что разность температур является решающим фактором в процессе теплообмена между телом и средой. В XVIII веке Г. Рихман первым дал обстоятельный анализ процессов охлаждения нагретых тел в воздухе и показал их зависимость не только от разности температур, но и от площади поверхности и объема тела. Последующие исследования выявили большую сложность процессов теплообмена, тесно переплетающихся с гидродинамическими процессами. Было найдено, что в процессе теплообмена количество теплоты, отдаваемой или получаемой телом от окружающей среды, прямо пропорционально площади поверхности тела F , разности температур T_e и T_s , длительности процесса, а также зависит от физических свойств среды, характера ее движения, формы тела и его геометрических размеров. Для элементарной площадки и элементарного времени процесс описывается уравнением

$$dQ_\tau = \alpha(T_e - T_s)dF d\tau, \quad (3.5)$$

названным *основным уравнением конвективного теплообмена* или *законом Ньютона–Рихмана*. В уравнении (3.5) $T_e - T_s$ – температурный напор; α – коэффициент пропорциональности, названный коэффициентом теплоотдачи, Вт/(м²·К).

Для стационарного процесса теплообмена при неизменных температуре среды и площади поверхности тепловой поток определяется равенством

$$Q = \alpha(T_e - T_s)F, \quad (3.6)$$

а плотность теплового потока –

$$q = Q/F = \alpha(T_e - T_s) \quad (3.7)$$

¹³ В части 2 введено термическое сопротивление $R_T = L/(\lambda F)$.

Из (3.7) и (3.5) имеем

$$\alpha = \frac{dQ_{\tau}}{(T_e - T_s)dF d\tau} = \frac{q}{(T_e - T_s)},$$

т.е. коэффициент теплоотдачи равен количеству теплоты, воспринимаемой (или отдаваемой) единицей поверхности в единицу времени при разности температур между поверхностью и движущейся средой в 1 К.

Коэффициент теплоотдачи характеризует интенсивность теплообмена между поверхностью тела и омывающей средой и учитывает конкретные условия протекания этого процесса. В отличие от коэффициентов теплопроводности и температуропроводности, коэффициент теплоотдачи не является теплофизической характеристикой вещества, и его значения не приводятся в справочниках.

Наиболее существенное влияние на величину α оказывают коэффициент теплопроводности λ , удельная теплоемкость c , плотность ρ , вязкость жидкости (динамическая μ или кинематическая $\nu = \mu/\rho$), коэффициент объемного расширения α_T .

Все реальные жидкости обладают вязкостью. *Вязкость* – свойство жидкости оказывать сопротивление перемещению (сдвигу) ее слоев. Динамическая вязкость μ характеризует собой силу, которая возникает на квадратном метре поверхности двух перемещающихся друг относительно друга слоев жидкости при градиенте скорости $dw/dn = 1$.

Таблица 3.1

Значения коэффициента конвективной теплоотдачи

Вид конвекции и среда	α , Вт/(м ² ·К)
Свободная конвекция, воздух	5–25
Свободная конвекция, вода	20–100
Вынужденная конвекция, воздух	10–200
Вынужденная конвекция, вода	50–10 000
Кипящая вода	3000–100 000
Конденсирующийся водяной пар	5000–100 000

Соотношение (3.7) служит для определения коэффициента теплообмена. При кажущейся простоте соотношения, найти α – довольно трудная задача (примеры см. в разделе 3.3). Аналитическое определение α наталкивается на математические трудности, которые иногда оказываются непреодолимыми. Результаты экспериментального определения α справедливы только для данного конкретного случая. В таблице 3.1.

указаны некоторые приближенные значения коэффициента конвективной теплоотдачи, включая случаи кипения и конденсации, которые обычно относят к области конвекции.

Одной из основных задач конвективной теплопередачи и является определение коэффициента теплоотдачи. С некоторыми примерами расчетных (теоретических или определенных на основе эксперимента) формул мы далее познакомимся.

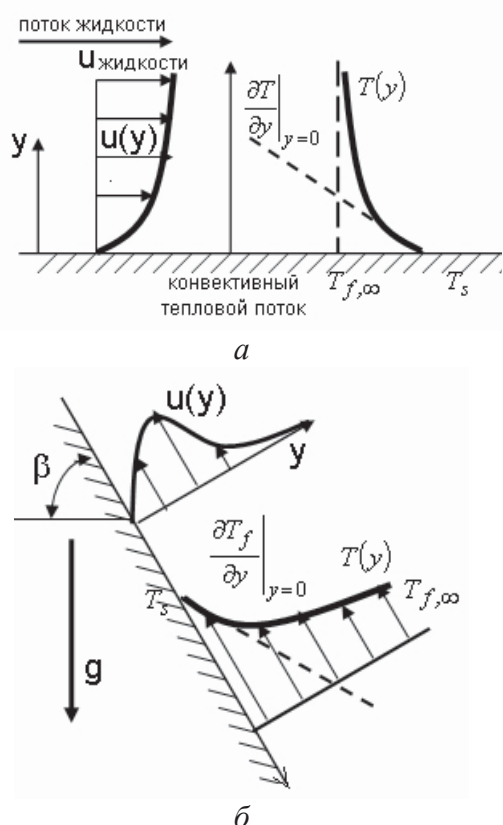


Рис. 3.3. К описанию особенностей конвективного теплопереноса: а) профили скорости и температуры при вынужденной конвекции около нагретой пластины; б) профили скорости и температуры при свободной конвекции около нагретой пластины, отклоненной от горизонтали на угол β

скорость течения, тем больше и градиент температуры, и тепловой поток. В то же время существенную роль играет и коэффициент теплопроводности жидкости. Например, коэффициент теплопроводности воды

Укажем основные особенности конвективного переноса тепла к потоку жидкости. На рис. 3.3, а показана нагретая плоская пластина, охлаждаемая обтекающим ее воздушным потоком. Кроме того, показаны профили скорости и температуры. Прежде всего, отметим, что из-за действия сил вязкости скорость $w(y)$ уменьшается по направлению к стенке. Поскольку скорость слоя жидкости, примыкающего к стенке, равна нулю, плотность теплового потока (тепловой поток на единицу площади) от стенки к этому слою жидкости определяется только теплопроводностью

$$\frac{Q}{F} = q = -\lambda_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \alpha (T_s - T_{f,\infty}) \quad (3.8)$$

Хотя при рассмотрении процесса с такой точки зрения предполагается, что передача тепла осуществляется теплопроводностью, градиент температуры на стенке $(\partial T / \partial y)|_{y=0}$ определяется скоростью переноса тепла жидкостью от стенки в основной поток. Поэтому градиент температуры на стенке зависит от поля течения, и чем выше

примерно на порядок больше, чем воздуха. Поэтому и коэффициент теплоотдачи для воды больше, чем для воздуха.

Аналогичные особенности имеет и свободная конвекция (рис. 3.3,б; рис. 3.1). Основное отличие заключается в следующем. В условиях вынужденной конвекции скорость при удалении от стенки приближается к скорости набегающего потока, обусловленной внешней силой. В условиях свободной конвекции скорость при удалении от пластины сначала возрастает, а затем под действием вязкости довольно быстро снижается до нуля, в то время как разность плотностей меняется медленнее. Однако, в конце концов, подъемная сила также уменьшается, по мере того, как плотность жидкости приближается к плотности окружающей среды; это вызывает повышение скорости до некоторого максимального значения, а затем ее падение до нуля на достаточно большом расстоянии от нагретой поверхности. Температурные поля при свободной и вынужденной конвекции аналогичны по форме, и в обоих случаях механизмом переноса тепла на поверхности раздела между жидкостью и твердым телом является теплопроводность.

При вынужденной конвекции движение среды обычно создается насосом или вентилятором и его скорость можно непосредственно измерить. При свободной конвекции скорость зависит от перепада температур между стенкой и жидкостью, коэффициента теплового расширения жидкости (который определяет изменение плотности на единицу перепада температуры) и силового поля, которое в системах, расположенных на Земле, обусловлено просто силой тяжести.

3.2. Дифференциальные уравнения конвективного теплопереноса¹⁴

Поскольку конвективный перенос тепла всегда происходит при одновременном переносе массы и количества движения, в данном разделе представлен один из многочисленных способов вывода соответствующих уравнений. Уравнения, выражающие законы сохранения массы, количества движения и энергии, можно вывести, анализируя характеристики потока, втекающего и вытекающего из бесконечно малого контрольного объема, показанного на рис. 3.4. Закон сохранения произвольной величины A для контрольного объема можно записать следующим образом:

¹⁴ Если возникают трудности математического характера, при изучении курса при первом чтении этот и последующий параграфы могут быть опущены.

$$\begin{aligned}
 & \text{Изменение величины } A \text{ в контрольном объеме} \\
 & \text{по времени} \quad \equiv \\
 & \equiv \text{поток величины } A \text{ через} \quad \text{поток величины } A \text{ через} \\
 & \text{ограничивающие поверхности} \quad \text{ограничивающие поверхности} \quad + \\
 & \text{внутри контрольного объема} \quad \text{из контрольного объема} \\
 & + \text{сумма источников и стоков} \\
 & \text{величины } A \text{ внутри объема}
 \end{aligned}$$

Например, чтобы получить уравнение неразрывности, примем
 $A = \text{плотность} \times \text{объем}$

или

$$A = \rho dx dy dz .$$

Изменение во времени этой величины есть

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz .$$

Поток массы через грань, перпендикулярную направлению Ox , равен произведению плотности на составляющую скорости, перпендикулярную грани, и на площадь грани. Тогда для грани, проходящей через точку P , имеем

$$\rho u dy dz .$$

Для противоположной грани, проходящей через точку Q , поток определяется равенством

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy dz .$$

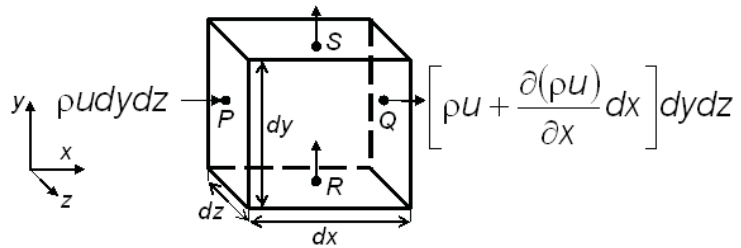


Рис. 3.4. Бесконечно малый контрольный объем

Следовательно, результирующий поток массы в этом направлении есть

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz .$$

Аналогично для двух других направлений найдем

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz \text{ и } \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz.$$

Масса в объеме не производится, т.е. сумма источников и стоков массы в объеме равна нулю.

Подставляя полученные выражения в общее уравнение «сохранения» величины A , найдем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = - \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz.$$

Поскольку выделенный объем – произвольный, можем записать

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \quad (3.9)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (3.10)$$

где \mathbf{u} - вектор скорости с компонентами u, v, w .

Величину $\rho \mathbf{u}$ называют плотностью потока жидкости (газа).

Частный случай уравнения неразрывности получается из (3.9) или (3.10) при условии, что жидкость (газ) – несжимаемы, т.е.

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \text{ или } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.11)$$

Имеем из (3.10)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \operatorname{grad}(\rho) = \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{d\rho}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Рассматривая аналогичным образом контрольный объем, можно вывести уравнения сохранения количества движения.

В случае невязкой жидкости или газа имеем уравнения Эйлера

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \operatorname{grad}) \mathbf{u} \right] = -\operatorname{grad}(p), \quad (3.13)$$

впервые установленные Л. Эйлером в 1755 году.

Представим более подробную запись системы уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Простейшим примером объемных сил является сила тяжести. Жидкость, находящаяся в контрольном объеме, испытывает воздействие силы тяжести, равной произведению \mathbf{g} на массу, заключенную в контрольном объеме

$$\rho \mathbf{g} dx dy dz.$$

При учете силы тяжести уравнение (3.13) принимает вид

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{u} \right] = -\text{grad}(p) + \rho \mathbf{g}. \quad (3.15)$$

В случае вязкой жидкости (газа) имеем уравнения Навье–Стокса.

В случае вязкой сжимаемой жидкости эти уравнения имеют вид

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\lambda_v + \mu}{\rho} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}, \quad (3.16)$$

где использованы обозначения $\nabla p \equiv \text{grad}(p)$; $\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv \text{div}(\mathbf{u})$; $\Delta \dots = \nabla \cdot \nabla \dots$ - оператор Лапласа, действующий на каждую компоненту вектора скорости \mathbf{u} .

В скалярной форме имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \end{aligned}$$

где $\nu = \mu/\rho$ – кинематический коэффициент вязкости.

В другом частном случае, учитывая условие несжимаемости (3.11), приходим к уравнениям движения вязкой несжимаемой жидкости

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}. \quad (3.17)$$

В частном случае одномерного движения жидкости (газа), когда

$$u \neq 0, v = w = 0, u = u(x, t),$$

уравнение Эйлера (3.13) и уравнение Навье–Стокса (3.17) принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Уравнение баланса внутренней энергии в форме уравнения теплопроводности следует из формулы

$$\begin{aligned} & \text{Изменение во времени} \\ & \text{внутренней энергии в} \\ & \text{контрольном объеме} = \\ \\ = & \text{поток внутренней энергии} \\ & \text{через поверхность в} \\ & \text{контрольный объем} - \text{поток внутренней энергии} \\ & \text{через поверхность} \\ & \text{из контрольного объема} + \\ \\ & + \text{изменение внутренней энергии} \\ & \text{вследствие совершения работы} \\ & \text{поверхностными и объемными силами} \end{aligned}$$

Поток через поверхность, ограничивающую контрольный объем, может быть связан как с конвекцией, так и с явлениями теплопроводности. Работу над контрольным объемом могут совершать силы, имеющие самое разное происхождение – связанные как с явлением вязкости, так и с возможными химическими превращениями. Выделение или поглощение тепла в реакциях обеспечит дополнительное источниковое слагаемое. К работе сил давления можно отнести и тепловые эффекты, связанные с объемным тепловым расширением. Избегая громоздких выкладок, представим две наиболее распространенные формы уравнения баланса внутренней энергии.

Так, в случае невязкого теплопроводного однокомпонентного газа справедливо уравнение вида

$$\rho T \dot{s} = \rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T, \quad (3.18)$$

где s – энтропия единицы массы вещества, $s = s(T, \gamma)$ или $s = s(T, p)$ (см. раздел 1.5). Если газ течет в условиях постоянного объема, то, воспользовавшись уравнением Гиббса (1.19)

$$df = -p d\gamma - s dT,$$

найдем

$$\begin{aligned} ds &= \frac{c_\gamma}{T} dT + \gamma_T d\gamma, \\ dp &= \gamma_T dT - \frac{\xi_T}{\gamma} d\gamma, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$c_\gamma = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\gamma = -T \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \right)_\gamma -$$

теплоемкость при постоянном объеме;

$$\gamma_T = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_T = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_\gamma = - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma \partial T} \right) -$$

изохорный коэффициент термического увеличения давления;

$$\xi_T = -\gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \gamma} \right)_T = \gamma \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} \right)_T -$$

изотермический модуль упругости; а ξ_T^{-1} – изотермическая сжимаемость.

Имеет место соотношение

$$\gamma_T = \alpha_T \xi_T,$$

где α_T – объемный коэффициент термического расширения (3.1)

$\alpha_T = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right)_p$. Действительно, для идеального газа с уравнением со-

стояния (3.2) $p\gamma = m^{-1}RT$ находим

$$\xi_T = -\gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \gamma} \right)_T = \frac{RT}{m\gamma} = p;$$

$$\gamma_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\gamma = \frac{R}{m\gamma} = \frac{p}{T} = \alpha_T \xi_T.$$

Записывая первое уравнение (3.19) в виде

$$\frac{ds}{dt} = \frac{c_\gamma}{T} \frac{dT}{dt} + \gamma_T \frac{d\gamma}{dt},$$

подставим производную энтропии в уравнение (3.18). Найдем

$$\rho c_\gamma \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T - \rho \gamma_T T \frac{d\gamma}{dt}. \quad (3.20)$$

Воспользуемся уравнением неразрывности (3.10)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{u}) \equiv 0.$$

Так как $\rho = \gamma^{-1}$, то

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\operatorname{div}(\mathbf{u})}{\rho} \equiv \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}}{\rho}.$$

В результате из (3.20) получим

$$\rho c_\gamma \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T - \gamma_T T \nabla \cdot \mathbf{u}$$

или

$$\begin{aligned} \rho c_\gamma \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \\ = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T - \alpha_T \xi_T T \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

В случае несжимаемого газа вторым слагаемым в уравнении теплопроводности можно пренебречь. Этим слагаемым, как правило, пренебрегают и в случае сжимаемого газа, полагая, что множитель $\alpha_T \cdot \xi_T$ — мал. Таким образом, имеем уравнение теплопроводности

$$\rho c_\gamma \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T.$$

Используя вместо уравнения Гиббса для свободной энергии Гельмгольца уравнение Гиббса (1.20), можно показать, что в условиях, когда задается (или ищется) давление, будет справедливо уравнение теплопроводности

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T.$$

При наличии вязких сил вместо (3.18) имеем

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad (3.22)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — тензор вязких напряжений. Символом « $\cdot\cdot$ » обозначено двойное скалярное произведение тензоров. Вид второго слагаемого в правой части (3.22) целиком определяется законами вязкого трения.

Дифференциальные уравнения неразрывности, движения и энергии выражают фундаментальные законы сохранения. Для получения единственного решения конкретных гидродинамических и тепловых задач необходимо сформулировать краевые условия. Задание краевых условий сводится к уже известным нам условиям четырех типов. Область науки, называемая теорией конвективного теплообмена, в настоящее

время очень широко развита, Результаты решения частных задач можно почерпнуть в специальной литературе, в том числе, учебного характера.

Для задач поверхностной обработки и синтеза материалов в условиях воздействия высокоэнергетическими источниками большую роль могут играть задачи конвективного теплообмена, позволяющие рассчитать коэффициенты теплоотдачи. Ввиду их повышенной математической сложности ограничимся достаточно простыми примерами.

3.3. Задача об обтекании плоской пластины

Как видно, процессы теплопередачи в жидкости осложняются по сравнению с теплопередачей в твердых телах, что связано с движением жидкости. Погруженное в движущуюся жидкость нагретое тело охлаждается значительно быстрее, чем в неподвижной жидкости, где теплопередача осуществляется только за счет процесса теплопроводности.

Будем полагать, что имеющиеся в жидкости разности температуры достаточно малы для того, чтобы ее физические свойства можно было считать постоянными (не зависящими от температуры). С другой стороны, эти разности температуры будем полагать настолько большими, чтобы можно было пренебречь изменением температуры за счет диссипации энергии в результате внутреннего трения, обусловленного вязкостью.

Будем рассматривать такие условия, когда конвекцию можно считать стационарной. Тогда все производные по времени из уравнений выпадают, и для несжимаемой вязкой жидкости мы имеем уравнения

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\ \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Мы имеем систему 5 уравнений для определения пяти неизвестных: температуры, компонент вектора скорости и давления. Решение этой

системы уравнений зависит от двух постоянных параметров – коэффициента температуропроводности и коэффициента вязкости. Эти две величины имеют одинаковую размерность, и из них можно составить комплекс

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}, \quad a = \frac{\lambda}{c_p \rho}.$$

Этот комплекс называется числом Прандтля.

Кроме этих двух физических параметров, решение будет зависеть от некоторого характерного размера l , характерной скорости течения u_* и характерного перепада температур $T_* - T_0$.

Для описания течения и теплообмена большое значение имеют комплексы

$$\text{Re} = \frac{u_* l}{\nu} \quad \text{и} \quad \text{Nu} = \frac{\alpha l}{\lambda}$$

число Рейнольдса и число Нуссельта. С их физическим смыслом мы познакомимся позже.

Для описания течения в пограничном слое и теплообмена эту систему уравнений можно существенно упростить.

Предположим, что жидкостью обтекает плоская стенка. Пусть ось x направлена вдоль стенки, а ось y – перпендикулярна к ней.

В этих условиях вместо системы пяти уравнений имеем

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3.23)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (3.24)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.26)$$

Обозначим толщину пограничного слоя буквой δ , а характерной длиной в продольном направлении будет расстояние от начала пограничного слоя L . За характерную скорость в направлении Ox , очевидно, можно принять скорость за пределами пограничного слоя $u_* = u_\infty$.

Пограничный слой является тонким, так что $\delta \ll L$.

Тогда последнее уравнение (3.26) системы позволяет оценить скорость в направлении Oy

$$v \sim -u_{\infty} \frac{\delta}{L}.$$

Следовательно, оценка слагаемых первого из уравнений движения дает

$$\frac{u_{\infty}^2}{L} + u_{\infty} \frac{\delta}{L} \frac{u_{\infty}}{\delta} \sim -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{L} + v \left(\frac{u_{\infty}}{L^2} + \frac{u_{\infty}}{\delta^2} \right).$$

Это означает, что слагаемые в левой части уравнения (3.23) сравнимы по величине, а вот первым слагаемым в скобках справа можно пренебречь по сравнению со вторым.

Таким образом, ввиду тонкости пограничного слоя, движение в нем будет происходить, в основном, параллельно обтекаемой поверхности, т.е. скорость v будет мала по сравнению со скоростью u . Вдоль направления Oy скорость меняется быстро – заметное изменение ее происходит на расстояниях порядка δ . В направлении же оси Ox скорость u меняется медленно; заметное изменение ее происходит лишь на протяжении расстояний порядка характеристической длины задачи, например, размера тела. Поэтому ее производные по y велики по сравнению с производными по x . А сравнивая уравнение (3.23) с уравнением (3.24), заметим, что производная $\partial p / \partial y$ мала по сравнению с производной $\partial p / \partial x$. Отношение этих производных порядка v/u .

Вне пограничного слоя движение является установившимся и адиабатическим, и для него справедливо уравнение Бернулли

$$\frac{U^2}{2} + h = \text{const}$$

(здесь h – энтальпия, U – скорость основного потока, $U = U(x)$).

В адиабатических условиях из уравнения Гиббса (из второго уравнения (1.16)) следует:

$$\frac{1}{\rho} \text{grad}(p) = \text{grad}(h).$$

Тогда

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U \frac{dU}{dx},$$

где частные производные заменены на полные, так как и давление, и скорость основного потока являются функциями лишь одной координаты.

Таким образом, пренебрегая малыми слагаемыми, приходим к уравнениям пограничного слоя Прандтля:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.28)$$

Граничные условия к этим уравнениям требуют обращения в нуль скорости на стенке

$$v = u = 0 \text{ при } y = 0.$$

При удалении от стенки продольная скорость должна асимптотически стремиться к скорости основного потока, т.е.

$$u = U(x) \text{ при } y \rightarrow \infty.$$

Постановка же отдельного условия для v на бесконечности не требуется.

Приближение тонкого пограничного слоя справедливо и для тепловой функции, и для температуры. По тем же самым соображениям, что и выше, производной $\partial^2 T / \partial x^2$ можно пренебречь по сравнению с производной $\partial^2 T / \partial y^2$, так что в случае установившегося течения уравнение теплопроводности (3.25) сводится к уравнению

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (3.29)$$

Перейдем в системе уравнений (3.27), (3.28) к новым (безразмерным) переменным

$$u' = \frac{u}{u_\infty}, \quad v' = \frac{v\sqrt{Re}}{u_\infty}; \quad x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y\sqrt{Re}}{L}, \quad U' = \frac{U}{u_\infty},$$

где $Re = \frac{u_\infty L}{\nu}$ (т.е. в качестве характерной скорости принята скорость

на бесконечном удалении от стенки, а в качестве характерного пространственного масштаба – размер тела), приходим к уравнениям

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = U' \frac{dU'}{dx'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2},$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0,$$

которые не содержат вязкости, т.е. их решения не зависят от числа Рейнольдса. Это говорит о том, что при изменении Re вся картина движе-

ния в пограничном слое подвергается лишь подобному преобразованию, при котором продольные расстояния и скорости остаются неизменными, а поперечные – меняются обратно пропорционально корню из Re .

Далее можно утверждать, что получающиеся в результате решения системы уравнений безразмерные скорости, как не зависящие от Re , должны быть порядка единицы. Следовательно,

$$v \sim \frac{u_\infty}{\sqrt{Re}}, \quad (3.30)$$

т.е. отношение поперечной скорости к продольной обратно пропорционально корню из Re . То же самое относится к толщине пограничного слоя: в безразмерных координатах x', y' толщина пограничного слоя $\delta' \approx 1$, а в реальных координатах

$$\delta \sim \frac{L}{\sqrt{Re}}. \quad (3.31)$$

В случае реальной пластинки все величины являются функциями двух пространственных координат. В случае же полубесконечной пластинки нет никаких характерных размеров длины. Поэтому скорость $u' = u/u_\infty$ может зависеть только от такой комбинации координат x', y' , которая не содержит масштаба длины. Например,

$$\xi = \frac{y'}{\sqrt{x'}} = y \sqrt{\frac{U}{vx}}. \quad (3.32)$$

Что же касается v , то здесь функцией ξ должно быть произведение $v' \sqrt{x'}$.

Введем функцию тока ψ , такую, что

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Указанным свойствам удовлетворяет функция тока вида

$$\psi = \sqrt{xvU} f(\xi).$$

Тогда

$$u = U \frac{\partial f}{\partial \xi} \equiv U f', \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{vU}{x}} \left(\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} - f \right) \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\frac{vU}{x}} (\xi f' - f). \quad (3.33)$$

Следовательно, основной характеристикой движения в пограничном слое является распределение в нем продольной скорости u (поскольку поперечная скорость v – мала). Эта скорость возрастает от нуля на поверхности обтекаемой пластинки до определенного значения скорости внешнего потока при определенном значении ξ . Поэтому можно заключить, что толщина пограничного слоя в окрестности обтекаемой

пластинки (определенная как значение y , при котором $u/U \sim 1$) имеет порядок величины

$$\delta \sim \sqrt{xy/U}.$$

Т.е., толщина пограничного слоя возрастает пропорционально корню из расстояния от края пластинки.

Подставляя (3.33) в (3.27) при условии постоянства скорости основного потока $U = const = u_\infty$, получим уравнение для функции $f(\xi)$

$$ff'' + 2f''' = 0.$$

Граничными условиями для этого уравнения будут

$$f(0) = f'(0) = 0; \quad f'(\infty) = 1.$$

(распределение скоростей, очевидно, симметрично относительно плоскости $y = 0$, поэтому достаточно рассмотреть только правую полуплоскость).

Решение полученной краевой задачи найдено численно и подробно затабулировано, что можно найти в литературе¹⁵. При малых значениях ξ справедлива аппроксимация

$$f(\xi) = \frac{1}{2}\alpha\xi^2 + O(\xi^5), \quad \alpha = 0.332. \quad (3.34)$$

При больших ξ имеем $f(\xi) = \xi - 1.72$.

Компоненты вектора скорости легко можно вычислить с помощью соотношений (3.33).

Переходя в (3.29) к безразмерным переменным u', v', x', y' и $\theta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0}$, придем к задаче для теплового пограничного слоя вида

$$u' \frac{\partial \theta}{\partial x'} + v' \frac{\partial \theta}{\partial y'} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y'^2}, \quad (3.35)$$

$$x' = 0, \quad \theta = 0; \quad y' = 0, \quad \theta = 1; \quad y' \rightarrow \infty, \quad \theta = 0.$$

Решение этой задачи также ищется в виде $\theta = \theta(\xi)$, что приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для θ

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \text{Pr} f(\xi) \frac{d\theta}{d\xi} = 0;$$

$$\xi = 0, \quad \theta = 1; \quad \xi \rightarrow \infty, \quad \theta \rightarrow 0.$$

Решение этой задачи может быть записано в виде

¹⁵ Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя, М.: Наука, 1974. 711 с.

$$\theta = \int_{\xi}^{\infty} [f''(\xi)]^{\text{Pr}} d\xi \bigg/ \int_0^{\infty} [f''(\xi)]^{\text{Pr}} d\xi.$$

Используя аппроксимацию (3.34), найдем выражение для безразмерного теплового потока на поверхности пластинки

$$\mathbf{J} = - \left(\frac{\partial \theta}{\partial y'} \right)_{y'=0} = \frac{B(\text{Pr})}{\sqrt{x'}}, \quad (3.36)$$

где

$$B(\text{Pr}) = \frac{(0.332)^{\text{Pr}}}{\int_0^{\infty} [f''(\xi)]^{\text{Pr}} d\xi}. \quad (3.37)$$

Приведем асимптотики для функции $B(\text{Pr})$ для малых и больших значений числа Прандтля:

$$\begin{aligned} B(\text{Pr}) &\rightarrow \sqrt{(\text{Pr}/\pi)}, \quad \text{Pr} \rightarrow 0; \\ B(\text{Pr}) &\rightarrow 0.339\text{Pr}^{1/3}, \quad \text{Pr} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Во всем диапазоне изменения чисел Прандтля функция $B(\text{Pr})$ в выражении (3.36) аппроксимируется выражением

$$B(\text{Pr}) = 0.0817 \left[(1 + 72\text{Pr})^{2/3} - 1 \right]^{1/2}. \quad (3.38)$$

Запишем теперь выражение для локального числа Нуссельта или безразмерного локального коэффициента теплоотдачи

$$\text{Nu}_x = \frac{\alpha_T x}{\lambda} = - \frac{x}{T_s - T_0} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \sqrt{\text{Re}_x} B(\text{Pr}), \quad (3.39)$$

где $\text{Re}_x = xU/\nu$ – локальное число Рейнольдса.

Это решение корректно в случае обтекания пластины ламинарным потоком.

В случае обтекания пластины турбулентным потоком аналогичное решение приводит к формуле

$$\text{Nu}_x = 0,0296\text{Pr}^{1/3}\text{Re}_x^{4/5}. \quad (3.40)$$

Эти результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

3.4. Теплопередача через плоскую стенку

Передача теплоты от одной среды (жидкости или газа) к другой через разделяющую их стенку называется *теплопередачей*. Примерами теплопередачи являются передача теплоты от горячей воды к воздуху помещения через металлические стенки батарей центрального отопления, передача теплоты от горячих паров хладагента к воде или воздуху через стальные стенки труб в конденсаторах водяного или воздушного охлаждения и т.д. В этих случаях стенки не должны препятствовать теплопередаче от одной среды к другой, и поэтому они изготавливаются из материалов, имеющих высокую теплопроводность.

Когда же требуется уменьшить теплопритоки (например, в камеры холодильника, к холодным трубопроводам и аппаратам) или уменьшить потери теплоты от горячих поверхностей в окружающую среду, то стенки и аппараты покрывают теплоизоляционными материалами.

Рассмотрим процесс передачи теплоты через однородную плоскую стенку с толщиной L и коэффициентом теплопроводности материала λ (рис. 3.5). Стенка разделяет две среды – теплую и холодную, имеющие температуры T_{e1} и T_{e2} . В качестве температур T_{e1} и T_{e2} принимают температуры сред на достаточно большом удалении от стенки. Качественное распределение температуры в средах и плоской стенке в условиях стационарной теплопередачи показано на этом же рисунке.

Удельный тепловой поток, который получает стенка, определяется законом Ньютона-Рихмана

$$q = \alpha_1(T_{e1} - T_1). \quad (3.41)$$

Из условия непрерывности он должен равняться потоку тепла, отводимому теплопроводностью вглубь стенки. Как мы уже знаем, этот поток тепла может быть записан в виде

$$q = \frac{\lambda}{L}(T_1 - T_2), \quad (3.42)$$

но, в отличие от предыдущего, температуры T_1 и T_2 нам неизвестны. Тепловой поток, отводимый тепловоспринимающей средой, в соответствии с тем же законом, может быть представлен в виде

$$q = \alpha_2(T_2 - T_{e2}) \quad (3.43)$$

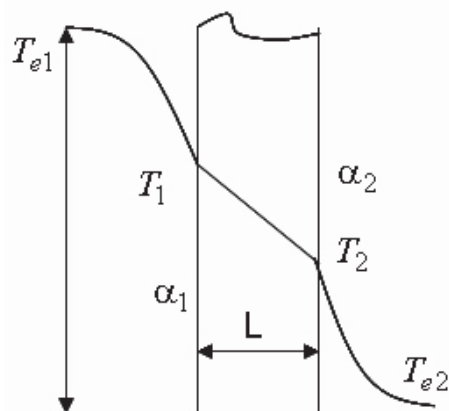


Рис. 3.5. Качественное распределение температуры в стенке и в омывающих средах

и также равен потоку тепла, следующему через стенку посредством теплопроводности. Система уравнений (3.41) – (3.43) может быть легко решена. Из нее следует

$$q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = T_{e1} - T_{e2}$$

или

$$q = \Lambda (T_{e1} - T_{e2}), \quad (3.44)$$

где

$$\Lambda = \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)^{-1} - \quad (3.45)$$

коэффициент теплопередачи (или термическая проводимость) плоской стенки. Его размерность – Вт/(м²·К).

Обратная величина

$$r_T = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} - \quad (3.46)$$

есть полное термическое сопротивление с размерностью (м²·К)/Вт (в отличие от $R_T = r_T/F$, имеющего размерность К/Вт; индекс «Т» можно опустить). Его величина определяется суммой уже известного нам сопротивления теплопроводности и двух сопротивлений теплоотдачи $1/\alpha_1$ и $1/\alpha_2$.

Используя (3.41) и (3.43), найдем температуры поверхностей стенок

$$T_1 = T_{e1} - \frac{q}{\alpha_1}; \quad T_2 = T_{e2} - \frac{q}{\alpha_2}. \quad (3.47)$$

Пример. Кирпичная стена толщиной 0,1 м с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 0,7$ Вт/(м·К) обдувается холодным ветром с температурой 270 К при коэффициенте конвективной теплоотдачи 40 Вт/(м²·К). С другой стороны стены находится неподвижный воздух с температурой 330 К при коэффициенте конвективной теплоотдачи 10 Вт/(м²·К). Требуется рассчитать плотность теплового потока.

Решение. По формулам (3.46) вычисляем три термических сопротивления.

$$r_{T1} = \frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{40} = 0,025 \quad (\text{м}^2\text{К})/\text{Вт};$$

$$r_T = \frac{L}{\lambda} = \frac{0,1}{0,7} = 0,143 \quad (\text{м}^2\text{К})/\text{Вт};$$

$$r_{T2} = \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{10} = 0,10 \text{ (м}^2\text{К)/Вт.}$$

Следовательно, плотность теплового потока равна

$$q = \frac{T_{e1} - T_{e2}}{r_T} = \frac{330 - 270}{0,025 + 0,141 + 0,10} = 224 \text{ Вт/м}^2.$$

Строгая математическая постановка задачи включает уравнение теплопроводности

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

и граничные условия третьего рода

$$x = 0: -\lambda \frac{dT}{dx} = \alpha_1 (T_{e1} - T); \quad x = L: -\lambda \frac{dT}{dx} = \alpha_2 (T_{e2} - T).$$

Решение этой задачи осуществляется аналогично задачам, рассмотренным в предыдущем разделе, или следует из (2.28), (3.47) и (3.45)

$$T - T_{e1} = (T_{e2} - T_{e1}) \left[1 + \Lambda \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} \right] \frac{x}{L} + \frac{\Lambda}{\alpha_1}.$$

3.5. Многослойная стенка

При расчете многослойной стенки учитываются термические сопротивления всех ее слоев. По аналогии с предыдущим, полное термическое сопротивление теплопередачи стенки из n слоев с толщинами δ_i есть

$$r_T = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_2}$$

или

$$r_T = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (3.48)$$

Тогда коэффициент теплопередачи (или термическая проводимость) многослойной стенки определим по формуле

$$\Lambda = 1/r_T = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad (3.49)$$

а плотность теплового потока – по формуле

$$q = \Lambda(T_1 - T_2). \quad (3.50)$$

Уравнение (3.45) – частный случай уравнения (3.49) для $n = 1$.
Тепловой поток через стенку с площадью поверхности F есть

$$Q = Fq = F\Lambda(T_1 - T_2). \quad (3.51)$$

Это – основное уравнение теплопередачи.

Уравнения для определения температуры поверхности на стыке двух любых i -го и $i+1$ -го слоев многослойной стенки аналогичны (3.47)

$$T_{i+1} = T_i - q \left[\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{k=1}^i \frac{\delta_k}{\lambda_k} \right]. \quad (3.52)$$

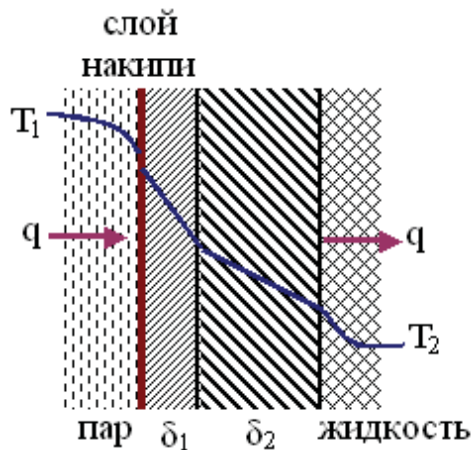


Рис. 3.6. Иллюстрация к задаче

Пример. Теплообменник (рис. 3.6) пар–жидкость с площадью лицевой поверхности 3200 м^2 изготовлен из слоя никеля толщиной $0,635 \text{ см}$ и покрыт со стороны пара слоем меди толщиной $0,12 \text{ см}$. Сопротивление слоя накипи воды со стороны пара составляет $r_T = 0,00205 \text{ (м}^2 \text{ час град)/ккал}$, а коэффициенты теплоотдачи от пара к стенке и от стенки к жидкости соответственно равны 4700 и 528

$\text{ккал}/(\text{м}^2 \text{ час град})$.

Решение. Греющий пар имеет температуру $110 \text{ }^\circ\text{C}$, а подогретая жидкость температуру $74 \text{ }^\circ\text{C}$. Определить: общую теплоотдачу от пара к жидкости; падение температуры в слое накипи и температуру границы раздела «медь – никель», если их коэффициенты теплопроводности равны соответственно 334 и $50,6 \text{ ккал}/(\text{м час град})$.

Согласно уравнению (3.49) коэффициент теплопередачи вычислим по формуле

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + r_T + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2}} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{4700} + 0,00205 + \frac{0,0012}{334} + \frac{0,00635}{50,6} + \frac{1}{528}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{0,000213 + 0,00205 + 0,0000036 + 0,000125 + 0,00189} =$$

$$= \frac{1}{0,0042816} = 234 \text{ ккал}/(\text{м}^2\text{час град}).$$

Следовательно, тепловой поток через стенку заданной площади составляет

$$Q = 234 \times 0,32 \times (110 - 74) \text{ ккал/час}$$

Зная сопротивление слоя накипи, получаем для перепада температуры

$$\Delta T = 2700 \times \frac{0,00205}{0,32} = 17,3 \text{ }^\circ\text{C}.$$

И, наконец, вычисляем температуру на границе раздела «медь–никель»:

$$T_{Cu-Ni} = 110 - \frac{2700}{0,32} (0,000213 + 0,00205 + 0,0000036) = 110 - 19,2;$$

$$T_{Cu-Ni} = 90,8 \text{ }^\circ\text{C}.$$

При заданном температурном перепаде и неизменной площади поверхности теплообмена, величиной, определяющей теплопередачу, является коэффициент теплопередачи Λ . Необходимая величина поверхности теплообмена последовательно–составной стены, рассчитанной для заданной разности температуры между наружным источником и стоком тепла, определяется термической проводимостью системы или величиной коэффициента теплопередачи, который, в свою очередь, является функцией отдельных термических сопротивлений. Из анализа зависимости коэффициента теплопередачи от входящих в него величин следует способ интенсификации теплопередачи в теплообменных аппаратах при снижении их габаритов и металлоемкости. Так, из (3.45) при малой термической толщине металлической стенки $L/\lambda \rightarrow 0$, следует

$$\Lambda = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Поэтому при существенном различии коэффициентов α_1 и α_2 коэффициент теплопередачи увеличивается примерно во столько же раз, во сколько раз увеличивается меньший из коэффициентов теплоотдачи.

В заключение раздела еще раз подчеркнем, что соотношения (3.5) – (3.8) не представляют собой закон передачи тепла, а дают лишь формулу для определения коэффициента теплоотдачи, если известны разность температур и поток тепла. Величина α зависит от свойств жидкости,

геометрии и шероховатости поверхности обтекания, характера течения и т.п., т.е. от всех параметров, характеризующих гидродинамику течения и теплообмен. В экспериментальных методах исследования теплоотдачи и технических расчетах эти формулы являются ключевыми для оценки величины α , а точнее, ее безразмерного аналога – числа Нуссельта

$$Nu = \frac{\alpha L}{\lambda}$$

как функции скорости потока, вязких и теплофизических свойств жидкости. Экспериментальные и теоретические исследования по определению числа Нуссельта и составили основу теории теплопереноса как инженерной и научной дисциплины.

3.7. Вопросы для самоконтроля

1. Что понимают под конвективным теплообменом?
2. Какие виды конвекции Вы знаете?
3. В чем состоит смысл понятия «теплоотдача»?
4. Запишите основное уравнение конвективного теплообмена.
5. В чем состоят особенности распределения скорости в пограничном слое в случае свободной и вынужденной конвекции?
6. Сформулируйте закон сохранения произвольной величины A для контрольного объема.
7. Перечислите основные дифференциальные уравнения конвективного теплопереноса.
8. Чем отличается уравнение теплопроводности для подвижной среды от уравнения теплопроводности для твердого тела?
9. Что такое «коэффициент теплопередачи»?
10. Определите термическое сопротивление теплопередачи многослойной стенки.

3.8. Задания

1. Для примера из раздела 3.4 рассчитайте зависимость величины теплового потока и температур T_1 и T_2 от температуры на улице в интервале 230–280 К.
2. Как изменится решение, если в расчетах учесть, что со стороны помещения кирпичная стена покрыта слоем штукатурки толщиной $L = 0,035$ м и коэффициентом теплопроводности $\lambda = 0,48$ Вт/(м·К)?

3. На рис. 3.7 показано поперечное сечение типичного потолка жилого дома. Составить тепловую цепь типичной секции потолка. Рассчитать термические сопротивления слоев. Где уходит больше тепла: через перемычки или через изоляцию? Задачу теплопроводности считать одномерной.

Использовать следующие данные для теплопроводности материалов: сосна $0,15 \text{ Вт}/(\text{м К})$; стекловолокно $0,035 \text{ Вт}/(\text{м К})$; штукатурка $0,814 \text{ Вт}/(\text{м К})$.

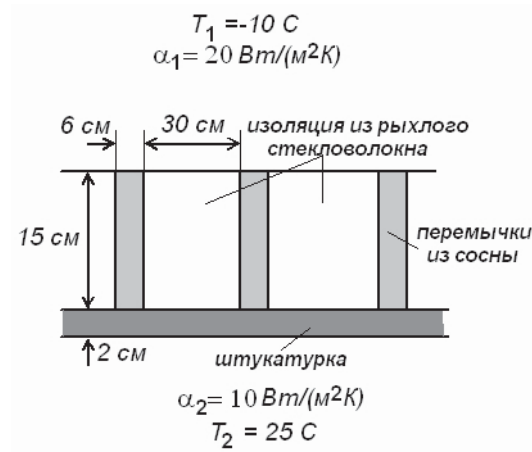


Рис. 3.7. Иллюстрация к постановке задачи 3

ЧАСТЬ 4

Элементы теории подобия и метода анализа размерностей

4.1. Понятие о теории подобия

В теории теплообмена и гидродинамике велика роль эксперимента. Чтобы осуществить экспериментальное исследование какого-либо процесса, необходимо, по крайней мере, знать, от каких величин зависит искомая величина (например, коэффициент теплоотдачи). Говоря другими словами, нужно знать перечень величин, существенных для изучаемого процесса. Если мы располагаем сведениями, позволяющими составить физическую модель процесса и сформулировать его математическое описание в виде замкнутой системы уравнений и граничных условий, то перечень существенных величин известен. Если же по тем или иным причинам получить математическое описание процесса невозможно, то перечень физических величин устанавливается из физических соображений, предварительных наблюдений и экспериментов качественного характера.

Перечень существенных величин включает зависимые переменные (искомые величины), независимые переменные (координаты, время) и постоянные. Чем сложнее изучаемый процесс, тем, как правило, большее число величин содержит перечень, а по мере увеличения числа существенных величин многократно возрастают трудности в проведении эксперимента, представлении его результатов, их трактовке и обобщении. Поэтому в экспериментальных исследованиях в области гидродинамики, теплообмена и других областях возникает необходимость изыскать способ постановки эксперимента и представления его результатов, чтобы при минимальном объеме измерений получить максимум информации.

Эта цель может быть достигнута путем качественного анализа перечня существенных величин методом размерностей или математического описания процесса методом подобия.

С понятием подобия впервые встречаются в курсе геометрии при рассмотрении геометрических фигур. Прямоугольники подобны, если отношения линейных размеров сходственных сторон равны между собой, т.е. если для них можно записать (рис. 4.1)

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = C$$

или

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2}{b_3} = C,$$

где величина C есть константа геометрического подобия.

По аналогии можно утверждать, что прямые трубы подобны, если соблюдается равенство

$$\frac{l_1}{d_1} = \frac{l_2}{d_2} = \frac{l_3}{d_3} = C,$$

где d_i – диаметр труб, l_i – их длина.

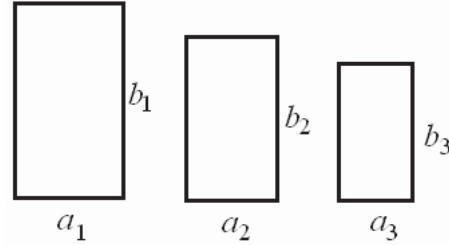


Рис. 4.1. Подобные фигуры

Понятие подобия может быть распространено на любые физические величины, а также на процессы и явления.

Пример задачи теории конвективного теплообмена, опирающейся на теорию подобия, продемонстрирован в разделе 3.3.

Для сложных процессов, характеризующихся многими физическими величинами, каждая переменная величина имеет свою константу подобия. Если явления подобны, то константы подобия находятся между собой в определенном соотношении, и для данного физического процесса (или системы) их выбор обусловлен условием подобия физических явлений. Эти безразмерные соотношения представляют собой комплексы, составленные из физических величин, характеризующих это явление и процесс. Называются они критериями или числами подобия. Для всех подобных явлений критерии подобия имеют одинаковые числовые значения.

Таким образом, критерием подобия называется безразмерный комплекс, составленный из величин, существенных для данного процесса.

Все критерии подобия имеют определенный физический смысл, а их нулевая размерность может служить проверкой правильности их составления. Обычно их называют именами ученых, внесших большой вклад в изучение процессов теплообмена, гидродинамики и других наук, и обозначают начальными латинскими буквами их фамилий.

Методы подобия и размерностей лежат в основе моделирования. Так принято называть метод изучения физических или физико-химических процессов, протекающих в какой-либо системе (образце), в техническом устройстве или сооружении посредством их воспроизведения и экспериментального исследования на модели системы. Модель по отношению к образцу может быть выполнена в масштабе, как меньшем, так и большем единицы. Метод подобия или метод размерностей позволяют сформулировать условия, которым должен удовлетворять процесс в мо-

дели, чтобы результаты его исследования, представленные в форме зависимостей между безразмерными комплексами, были справедливы и для образца.

Моделирование широко используется в различных областях техники: энергетике, авиационной и ракетной технике, гидротехнике и др.

Значение методов размерностей и подобия не исчерпывается их применением в экспериментальных исследованиях. Эти методы очень полезны и при теоретическом анализе задач гидродинамики, теплообмена, макрокинетики, механики и д.т. Особенно плодотворно сочетание методов размерностей и подобия с физическими соображениями, опытными данными и результатами теоретического анализа.

Итак, основная идея теории подобия заключается в том, что первое частное описание явления (искомую закономерность) получают экспериментально на основе модельной системы (или «модельного явления»), а результаты представляют в критериальном виде, что позволяет легко и быстро получать данные для других явлений, подобных модельному. Теория подобия дает методические указания по выбору величин, измеряемых в опыте, по обработке полученных результатов, по обобщению результатов эксперимента на другие явления, подобные исследованному, а также позволяет рассчитать и построить модель, подобную натуре.

4.2. Теоремы теории подобия

Теория подобия базируется на трех теоремах.

В знаменитой книге «Математические начала натуральной философии» И. Ньютон в 1686 году на примере подобного течения двух жидкостей впервые распространил геометрическое подобие на физические явления. Но если Ньютон высказал только основную идею подобия, то французский математик Ж. Бертран в 1848г. дал строгое доказательство и установил основное свойство подобных явлений, названное позже первой теоремой подобия. Звучит она следующим образом.

1. Теорема подобия. *Подобные между собой явления имеют одинаковые критерии подобия.*

Эта теорема позволяет вывести уравнения для критериев подобия и указывает, что в опытах нужно измерять лишь те величины, которые содержатся в критериях подобия изучаемого процесса.

Следующий шаг в развитии теории подобия был сделан в начале XX века, когда российский ученый А. Федерман в 1911 г. и американский физик Дж. Букингам в 1914 г. независимо друг от друга предложили вторую теорему подобия:

2. Теорема подобия. *Исходные математические уравнения, характеризующие данное физическое явление, всегда могут быть представлены в виде зависимости между критериями подобия, характеризующими это явление.*

Эти функциональные зависимости между критериями подобия называются уравнениями подобия или критериальными уравнениями. Из теоремы следует, что результаты опытов необходимо обрабатывать и представлять в виде критериальных уравнений.

Третья теорема подобия была предложена советскими учеными А.А. Гухманом и М.В. Кирпичевым в 1936 году.

3. Теорема подобия. *Подобны те явления, условия однозначности которых подобны и для которых критерии подобия, составленные из условия однозначности, численно равны.*

Третья теорема устанавливает признаки, по которым определяют, какие явления подобны друг другу, т.е. она позволяет выявить те явления, на которые могут быть распространены результаты эксперимента, полученные на модельной системе.

4.3. Основные критерии теории подобия

Все основные критерии подобия тепловых, механических и гидромеханических явлений получаются из математических уравнений, описывающих соответствующий процесс. Например, соотношение сил инерции

$$F_i = ma = \frac{\rho l^3 w}{\tau}$$

и массовых сил (сил тяжести)

$$F_m = mg = \rho l^3 g$$

в потоке жидкости характеризуется безразмерным комплексом

$$\frac{F_m}{F_i} = \frac{\rho l^3 g}{(\rho l^3 w)/\tau} = \frac{gl}{w(l/\tau)} = \frac{gl}{w^2},$$

который называется *критерием Фруда*:

$$Fr = \frac{gl}{w^2}. \quad (4.1)$$

В этих уравнениях g – ускорение свободного падения; ρ – плотность жидкости; l_0 – характерный линейный размер; w – скорость; τ – время (или масштаб времени).

Критерий Фруда характеризует отношение массовых сил (сил тяжести) и сил инерции при вынужденном движении жидкости.

Связь между силами инерции F_i и силами давления $F_p = \Delta p l^2$ (Δp – перепад давления) при вынужденном движении жидкости

$$\frac{F_p}{F_i} = \frac{\Delta p l^2}{(\rho l^3 w)/\tau} = \frac{\Delta p}{(\rho l w)/\tau} = \frac{\Delta p}{\rho w^2}$$

характеризуется критерием Эйлера

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho w^2}. \quad (4.2)$$

Из выражения (4.2) следует, что число Эйлера является мерой отношения перепада статических давлений в потоке (гидравлического сопротивления) к кинетической энергии потока.

Очень важным для решения задач гидродинамики и вынужденной конвекции является безразмерный комплекс, показывающий связь между силами инерции F_i и силами вязкости $F_\mu = \frac{\mu l^2 \Delta w}{\Delta l}$:

$$\frac{F_i}{F_\mu} = \frac{\rho l^3}{\mu l^2} \frac{\Delta w / \Delta \tau}{\Delta w / \Delta l} = \frac{\rho l \Delta l / \Delta \tau}{\mu} = \frac{\rho w l}{\mu}.$$

Этот комплекс назван *критерием Рейнольдса*

$$Re = \frac{\rho w l_0}{\mu} = \frac{w l_0}{\nu}, \quad (4.3)$$

где ν – кинематическая вязкость.

Число Рейнольдса характеризует отношение между силами инерции и молекулярного трения (вязкости), которое определяет гидродинамический режим вынужденного движения среды.

При свободном движении среды (естественная конвекция), когда движение осуществляется только за счет разности плотностей, вызванной неравномерностью температурного поля, критерием подобия, определяющим распространение теплоты в среде, является *критерий Грасгофа*. Он находится из произведения числа Рейнольдса на отношение подъемной силы $F_p = \rho g \beta_T \Delta T l^3$, где β_T – температурный коэффициент объемного расширения, к силе вязкости F_μ :

$$Re \frac{F_p}{F_\mu} = \frac{\rho w l}{\mu} \frac{\rho g \beta_T \Delta T l^3}{\mu l^2 w / l} = \frac{g l^3}{(\mu / \rho)^2} \beta_T \Delta T$$

или

$$Gr = \frac{g l_0^3 \beta_T \Delta T}{\nu^2} \quad (4.4)$$

Число Грасгофа характеризует соотношение между подъемной силой, возникающей в среде вследствие разности плотностей, и силой молекулярного трения (вязкости).

Таким образом, если речь идет о гидромеханическом подобии потоков, то для них в любых сходственных точках критерии подобия Fr (или Gr), Eu и Re имеют одинаковые значения.

Важнейшие критерии теплового подобия могут быть получены из основных уравнений передачи теплоты.

Количество теплоты, переданной теплопроводностью, в соответствии с законом Фурье (2.7) есть

$$Q_\lambda = [(T_1 - T_2) / (\delta / \lambda)] F \tau = \lambda (\Delta T / l) l^2 \tau. \quad (4.5)$$

Количество теплоты, переданной в процессе теплоотдачи, составляет

$$Q_\alpha = \alpha (T_1 - T_2) d F d \tau = \alpha \Delta T l^2 \tau. \quad (4.6)$$

Теплота, воспринятая телом массой M

$$Q = Mc(T_2 - T_1) = c \rho l^3 \Delta T \quad (4.7)$$

Разделив (4.5) на (4.7), получаем безразмерный комплекс

$$\frac{Q_\lambda}{Q} = \frac{\lambda \Delta T l^2 \tau (1/l)}{c \rho l^3 \Delta T} = \frac{a \tau}{l^2},$$

являющийся одним из важнейших критериев подобия – критерием Фурье:

$$Fo = a \tau / l_0^2, \quad (4.8)$$

где a – коэффициент температуропроводности, $a = \lambda / (c \rho)$.

Число Фурье представляет собой безразмерное время и характеризует связь между скоростью изменения температурного поля, физическими характеристиками и размерами тела.

Критерий Фурье вместе с критерием Био

$$Bi = \alpha l_0 / \lambda_w, \quad (4.9)$$

где λ_w – теплопроводность стенки, характеризуют нестационарные процессы распространения теплоты.

Физический смысл числа Био заключается в установлении соотношения между интенсивностями теплоотдачи с поверхности тела и подвода теплоты теплопроводностью из внутренних слоев тела к поверхности.

Если взять отношение (4.7) к (4.5), то получим

$$\frac{Q}{Q_\lambda} = \frac{c_p}{\lambda} \frac{l^3 \Delta T}{l^2 \Delta T (\tau/l)} = \frac{c_p w \Delta T}{\lambda (\Delta T/l)} = \frac{wl}{a}.$$

Этот комплекс называется *критерием Пекле*

$$Pe = \frac{wl_0}{a}. \quad (4.10)$$

Критерий Пекле есть отношение плотности теплового потока, передаваемого конвекцией, к плотности теплового потока, передаваемого теплопроводностью, т.е. число Пекле характеризует соотношение между переносом теплоты конвекцией и теплопроводностью в потоке.

Важный в теории конвективного теплообмена критерий Нуссельта может быть найден из соотношения выражений (4.5) и (4.6):

$$\frac{Q_\alpha}{Q_\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda} \frac{l^2 \Delta T \tau}{l^2 \Delta T \tau (1/l)} = \frac{\alpha l}{\lambda}.$$

Число Нуссельта является безразмерным коэффициентом теплоотдачи

$$Nu = \frac{\alpha l_0}{\lambda} \quad (4.11)$$

и характеризует интенсивность теплообмена на границе «твердое тело – жидкость». Чем интенсивнее протекает процесс конвективного теплообмена, тем больше коэффициент теплоотдачи α , тем больше Nu .

Следует отметить, что число Нуссельта является определяемым, так как в него входит коэффициент теплоотдачи, который при исследовании конвективного теплообмена является обычно искомой величиной. По внешнему виду критерий Nu совпадает с критерием Bi , но между ними существует принципиальное различие. В критерий Био входит теплопроводность стенки, а в критерий Нуссельта – теплопроводность среды, омывающей стенку. Критерий Био используют для описания внутреннего теплообмена, а критерий Нуссельта – для описания внешнего теплообмена.

Из критериев Пекле и Рейнольдса можно образовать еще один критерий – *критерий Прандтля*:

$$\frac{Pe}{Re} = \frac{wl}{a} \frac{v}{wl} = \frac{v}{a} = Pr \quad (4.12)$$

Критерий Прандтля, содержащий только теплофизические параметры жидкости, характеризует влияние теплофизических свойств среды на конвективный теплообмен и является мерой подобия полей температур и скоростей. Кинематическая вязкость существенно

влияет на характер поля скоростей, а температуропроводность – на процесс теплообмена.

С критериями Рейнольдса, Нуссельта и Прандтля мы встретились при рассмотрении частной задачи теории конвективного теплообмена (раздел 3.3).

При тепловом подобии систем их критерии подобия Fo, Pe (или Re), Nu должны иметь одинаковые числовые значения.

Для подобных систем, кроме теплового подобия, должно соблюдаться также гидродинамическое и геометрическое подобие.

4.4. Характерные масштабы

Во многие критерии входит линейная величина l_0 , называемая *определяющим линейным размером*. Определяющим называется размер, от которого в большей степени зависит развитие процесса конвективного теплообмена. Например, при движении жидкости внутри круглых гладких труб за определяющий размер принимают внутренний диаметр трубы $l_0 = d_{in}$. В случае поперечного омыwania гладкой трубы или пучка труб за определяющий размер принимают наружный диаметр трубы $l_0 = d_{ext}$. При движении жидкости в каналах в качестве определяющего размера используют эквивалентный диаметр

$$l_0 = d_{eq} = 4F/\Pi,$$

где F – площадь поперечного сечения канала, Π – периметр сечения, через который передается теплота.

Физические параметры жидкости, входящие в критерии подобия, зависят от температуры. Физические характеристики среды для расчета безразмерных критериев находятся при одной *определяющей температуре*, за которую может быть принята температура жидкости в ядре потока T_f или разность температур между стенкой и потоком $\Delta T = T_s - T_f$. При небольших изменениях температуры в пределах участка теплообмена часто используют среднеарифметическую температуру потока

$$T_m = \frac{T_{f,1} + T_{f,2}}{2}.$$

В общем случае находят среднелогарифмическую разность температуры между средней температурой стенки и температурой потока

$$\theta_m = \frac{\theta_e - \theta_f}{2.3 \cdot \lg(\theta_e/\theta_f)},$$

где θ_e – разность температур жидкости и стенки на входе, θ_f – на выходе рассматриваемого участка.

Для того чтобы указать, какая из температур жидкости принята в качестве определяющей, рядом с критерием проставляют индекс Pr_s, Nu_f, Re_m и т.д.

В критериальных уравнениях за скорость потока принимают усредненное ее значение в заданном поперечном сечении

$$w = V/F = M/(pF),$$

где V – объемный расход жидкости; F – площадь поперечного сечения потока; ρ – плотность жидкости.

4.5. Примеры критериальных уравнений

При изучении конвективного теплообмена наибольший практический интерес представляет определение коэффициента теплоотдачи α , который входит только в критерий Nu . Поэтому уравнения конвективного теплообмена решаются относительно этого числа. Теория подобия позволяет в общем виде установить критериальные зависимости, достаточно полно характеризующие процесс конвективного теплообмена. Обобщенное уравнение конвективного теплообмена имеет вид

$$Nu = f(Ho, Fo, Re, Pr, Gr, l/l_0), \quad (4.13)$$

где $Ho = w\tau/l_0$ – критерий гидродинамической гомохронности, характеризующий скорость изменения поля скоростей движущейся среды во времени.

Критерии подобия Ho и Fo являются основными критериями нестационарных процессов. Так как эксперименты по определению коэффициентов теплоотдачи проводят при стационарном режиме, то уравнение конвективного теплообмена запишется в виде

$$Nu = f(Re, Pr, Gr, l/l_0). \quad (4.14)$$

При необходимости учета влияния температуры на теплофизические свойства среды (в умеренном диапазоне их изменения), а также направления теплового потока, в уравнение подобия вводится отношение чисел Прандтля для жидкости, вычисленных при температуре потока и стенки

$$Nu = f\left(Re, Pr, Gr, \left(\frac{Pr_f}{Pr_s}\right), l/l_0\right)$$

или

$$Nu = C Re^m Pr^n Gr^p \left(\frac{Pr_f}{Pr_s} \right)^{0,25} (l/l_0)^q. \quad (4.15)$$

Теория подобия устанавливает только общий вид критериального уравнения. Действительная зависимость критерия Nu от определяющих критериев находится экспериментально, и константы m, n, p, q, C являются экспериментально определяемыми.

В отдельных случаях уравнение критериального теплообмена упрощается. Так, для вынужденного турбулентного движения влиянием свободной конвекции пренебрегают, т.е. не учитывают критерий Грасгофа

$$Nu = f \left(Re, Pr, \left(\frac{Pr_f}{Pr_s} \right), l/l_0 \right).$$

При свободном движении жидкости из критериального уравнения убирают критерий Рейнольдса ввиду отсутствия вынужденной конвекции

$$Nu = f \left(Pr, Gr, \left(\frac{Pr_f}{Pr_s} \right), l/l_0 \right).$$

Если омывающей средой является газ, то из критериального уравнения исключают отношение Pr_f/Pr_s , поскольку для газов число Прандтля от температуры почти не зависит.

Для идеальных газов критерий Прандтля зависит от атомности газа. Для одноатомных газов $Pr = 0,66$; для двухатомных (например, сухой воздух) $Pr = 0,71$; для трехатомных $Pr = 0,84$; для многоатомных - $Pr = 1,0$.

Примеры расчетов коэффициентов теплоотдачи содержатся в учебной литературе и литературе специального характера по теории конвективного теплообмена.

4.6. Некоторые эмпирические формулы

Доминирование экспериментальных данных в определении коэффициента теплоотдачи, а также недостаточность развития феноменологических моделей требуют обращать внимание на имеющиеся эмпирические формулы.

Работа с эмпирическими формулами, их выбор и применение требуют от исследователя и инженера, весьма объемных и проверенных знаний о рассматриваемом процессе, а также определенного опыта общения с этим капризным инструментом. Эмпирических формул суще-

ствуется достаточно много. Они отражают различные методики физических экспериментов, имеют определенную ориентацию на использование, для них свойственны существенные расхождения. И это естественно, так как условия эксперимента, на базе которых формулы получены, вполне конкретны. Поэтому при построении моделей эмпирические формулы следует использовать с большой осторожностью, более доверяя фундаментальным законам сохранения.

Теплообмен между твердой поверхностью и обтекаемой ее жидкостью может иметь различные формы. Это теплопроводность или кондуктивная теплопередача; конвективный теплообмен при обтекании поверхности; диффузный (вихревой) перенос тепла; теплообмен при конденсации паров на холодной поверхности; теплообмен при кипении жидкости на нагретой поверхности; теплообмен излучением.

Естественно предположить (это следует и из теоретического анализа, представленного в разделе 3.3), что интенсивность теплообмена на обтекаемой границе обусловлена скоростью и характером течения, вязкими и теплофизическими свойствами соприкасающихся сред. Поэтому при эмпирическом определении числа Нуссельта Nu принимают следующую формулу для выражения безразмерного коэффициента теплоотдачи

$$Nu = C Re^\alpha Pr^\beta, \quad (4.16)$$

где $\alpha, \beta, C > 0$ – численные коэффициенты, которые отражают качества течения и теплообмена, содержат всевозможные поправочные коэффициенты на усреднение числа Нуссельта по поверхности, учета естественной конвекции и т.д. Данный вид зависимости числа Нуссельта от безразмерных параметров не связан с какой-либо моделью, представлением о механизме теплообменного процесса, а определен, прежде всего, желанием понизить размерность задачи аппроксимации экспериментальных данных в предположении, что такая возможность существует. Вообще говоря, в данном случае нет иных безразмерных параметров, кроме чисел Re, Pr , которые бы содержали только скорость течения, вязкие и теплофизические свойства жидкости. Именно этим обстоятельством объясняется распространенность формулы (4.16) для качественно различных видов течения.

В качестве примеров полуэмпирических формул далее представлены некоторые практически полезные соотношения для ламинарных и турбулентных течений¹⁶

¹⁶ Дейнеко В.В. Математические модели динамики вязкой жидкости и теплообмена. Новосибирск: 1996. 360 с.

В представленных ниже формулах значения числа Нуссельта определены для среднего или «преобладающего» значения температуры. Теплофизические параметры определены при среднеарифметической температуре между стенкой и течением. Число Прандтля, определяющее соотношение диффузных свойств переноса импульса и тепла, изменяется в пределах, указанных в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Интервал изменения числа Прандтля

жидкие металлы	$Pr < 1$
газы	$Pr \in [0,5; 1]$
вода	$Pr \in [1; 14]$
легкие органические жидкости	$Pr \in [5; 60]$
масла	$Pr > 50$

Продольное обтекание пластины¹⁷

В случае обтекания плоской пластины торможение течения вызывают силы вязкости, зависящие от касательного напряжения τ

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4.17)$$

где $\mu = \nu \rho$ - коэффициент динамической вязкости. Если касательное напряжение выражено в Н/м^2 , а градиент скорости – в с^{-1} , то размерностью μ является $(\text{Н}\cdot\text{с})/\text{м}^2$. Критическое значение числа Рейнольдса Re , при котором происходит переход от ламинарного течения к турбулентному, зависит от шероховатости поверхности, величины турбулентных пульсаций и характера течения основного потока.

Коэффициент конвективной теплоотдачи изменяется с расстоянием от передней кромки пластины или от входа в трубу или в канал; параметром, отражающим это изменение, является местный коэффициент теплоотдачи $\alpha_T = \alpha_T(x) = \alpha_{T,x}$. Если необходимо рассчитать общую теплоотдачу от пластины, следует знать средний коэффициент теплоотдачи

¹⁷ В формулах этого раздела приняты обозначения: индекс «L» соответствует величинам, осредненным по длине; «x» – расстоянию от передней кромки обтекаемой пластины.

$$\tilde{\alpha}_T = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha_{T,x} dx. \quad (4.18)$$

Другие параметры течения также зависят от расстояния от передней кромки пластины или от входа в трубу.

Например, местный коэффициент сопротивления трения определяется так

$$C_{f,x} = \frac{2\tau_x}{\rho u_\infty^2}, \quad (4.19)$$

где u_∞ - скорость набегающего потока.

Средний коэффициент сопротивления трения для пластины длиной L равен

$$\tilde{C}_f = \frac{1}{L} \int_0^L C_{f,x} dx. \quad (4.20)$$

Коэффициент трения является безразмерной величиной, характеризующей касательное напряжение или силу сопротивления на границе с твердым телом.

Используем два вида числа Рейнольдса

$$Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu}; \quad Re_L = \frac{u_\infty L}{\nu}.$$

Приближенные (эмпирические) формулы для случая обтекания плоской пластины имеют следующий вид.

Ламинарное течение ($Re = Re_x < 10^5$)

$$Nu_x = 0,323 Re^{0,5} Pr^{0,33}; \quad Pr \geq 1;$$

$$Nu_L = 0,646 Re^{0,5} Pr^{0,33},$$

$$Nu_x = 0,66 Re^{0,5} \text{ – при течении воздуха;}$$

$$Nu_x = 0,76 Re^{0,5} \text{ – при течении капельных жидкостей;}$$

$Nu_L = 0,58(Gr \cdot Pr)^{0,25}$, $Gr \cdot Pr < 10^9$ – свободная конвекция вдоль вертикальной пластины.

Турбулентное течение ($5 \cdot 10^5 < Re = Re_L < 10^7$)

$$Nu_L = 0,036 Re_L^{0,8} Pr^{0,33}, \quad Pr > 0,5;$$

$$Nu_L = 0,036(Re_L^{0,8} Pr^{0,43} - 17400) + 289Pr^{0,33}, Pr \in [0,7; 380]$$

$Nu_L = 0,0,21(Gr \cdot Pr)^{0,66}$, $Gr \cdot Pr > 10^9$ – в условиях свободной конвекции вдоль вертикальной пластины

Течение в круглой трубе

Приблизительные формы профилей скоростей при ламинарном и турбулентном течениях в трубе показаны на рис. 4.2. За входным сечением на внутренней поверхности трубы формируется пограничный слой, который по мере удаления от входа все более заполняет площадь поперечного сечения. В случае ламинарного течения профиль скорости становится параболическим, причем средняя скорость составляет $\frac{1}{2}$ своего значения на оси трубы. При турбулентном течении профиль становится более наполненным, и средняя скорость составляет $\sim 83\%$ от значения на оси трубы.

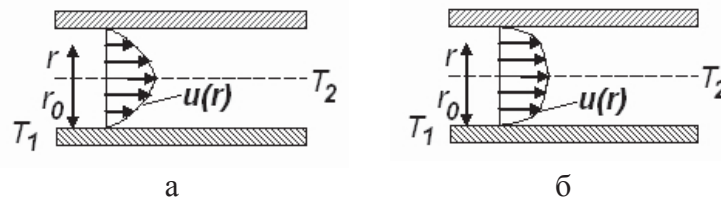


Рис. 4.2. Профили скоростей при ламинарном (а) и турбулентном (б) течениях в трубе

Для расчета числа Рейнольдса в трубах часто используют среднее значение по сечению скорости течения газа (жидкости) в трубе. В представленных ниже формулах $Re = \frac{u_0 D}{\nu}$; где u_0 – расходная скорость; $D = 2r_0$ – внутренний диаметр трубы (ширина канала).

Ламинарное течение ($Re < 2000$)

$Nu = 4,36$, если T_s – средняя температура в трубе;

$Nu = 2,66$, если T_s – максимальная температура в трубе;

$Nu = 1,86(Re \cdot Pr)^{0,33} (D/L)^{0,33}$ – усредненное значение (L – длина трубы)

Турбулентное течение ($Re > 2300$)

$Nu = 0,023Re^{0,8}Pr^{0,33}$; $0,5 < Pr < 100$, если T_s – средняя температура в трубе

$$Nu = 0,625Pe^{0,4}; Pe = Re \cdot Pr \in [100; 10000];$$

$$Nu = 0,023Re^{0,8}Pr^{0,4}, Pr \in [0,7; 2500]; Re \in [10^4; 10^5];$$

$$Nu = 0,022Re^{0,8}Pr^{0,6}, Pr \in [0,5; 1];$$

$$Nu = 0,0155Re^{0,8}Pr^{0,5}, Pr \in [1; 20].$$

Если привести эти формулы к размерному виду, то будут видны степени влияния разных физических факторов на коэффициент теплоотдачи.

Для каналов некруглого сечения можно использовать приведенный (гидравлический) диаметр $D = 4S / P$, где S – площадь сечения, P – периметр канала.

В практических задачах обычно требуется определять изменение температуры при течении жидкости в канале с заданной скоростью при данных температурах жидкости на входе и на стенке канала. Для течения в трубе длиной L и при температуре стенки T_s тепловой поток в жидкости можно записать в виде

$$q = c_p \rho \tilde{u} \frac{\pi D^2}{4} (T_2 - T_1), \quad (4.21)$$

где T_2, T_1 – средние по сечениям температуры (рис. 4.2) или температуры смешения соответственно. Тепловой поток на элементарной длине dx будет связан с изменением среднemasсовой температуры \tilde{T} , а также с разностью температур стенки $T_s(x)$ и среднemasсовой температуры жидкости $\tilde{T}(x)$ на этой длине следующей зависимостью

$$dq = m c_p dT = \alpha_T (\pi D) dx (T_s - \tilde{T}),$$

где m – массовый расход жидкости.

Следовательно,

$$\tilde{\alpha}_T = \frac{q}{F(T_s - \tilde{T})}, \quad (4.22)$$

где F – общая площадь поверхности контакта жидкости с теплопередающей поверхностью. Так как и T_s , и \tilde{T} могут меняться по длине тру-

бы, то для практического использования уравнения (4.22) необходимо разработать удобный способ осреднения температуры, что всегда является отдельной задачей.

4.7. Приближенный способ расчета коэффициентов теплоотдачи и трения

Вернемся к задаче о теплообмене между установившимся ламинарным потоком и плоской стенкой. В приближении тонкого пограничного слоя толщиной δ воспользуемся уравнениями пограничного слоя, выведенными в разделе 3.3, в которых пренебрежем изменением давления (что, конечно, корректно для установившегося потока)

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.24)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.25)$$

В качестве граничных условий примем

$$v = u = 0 \text{ при } y = 0; \quad (4.26)$$

$$u = U_\infty \text{ при } y \rightarrow \delta. \quad (4.27)$$

Для температуры имеем

$$T = T_s \text{ при } y = 0; \quad (4.28)$$

$$T = T_\infty \text{ при } y \rightarrow \delta, \quad (4.29)$$

где δ_T – толщина теплового пограничного слоя.

Первым шагом в приближенном методе¹⁸ является представление распределения скоростей и температуры в виде степенных рядов – полиномов. При выборе коэффициентов этих полиномов должны удовлетворяться граничные условия.

Предположим, что распределение скоростей описывается рядом

$$u(y) = a + by + cy^2 + dy^3. \quad (4.30)$$

Из условия (4.26) сразу находим

$$a = 0.$$

Из этого же условия следует $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ при $y = 0$.

¹⁸ Крейт Ф., Блэк У. Основы теплопередачи. М.: Мир, 1983. 512 с.

Из условия (4.27) и уравнения (4.23) имеем

$$\partial u / \partial y = 0 \text{ при } y \rightarrow \delta.$$

Этих условий достаточно, чтобы найти остальные коэффициенты:

$$b = \frac{3}{2} \frac{u_\infty}{\delta}; \quad c = 0; \quad d = -\frac{u_\infty}{2\delta^3}.$$

Подставляя их в уравнение (4.30), найдем

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3. \quad (4.31)$$

Касательное напряжение на стенке найдем по формуле (4.17), используя полученное распределение скорости

$$\tau = \frac{2}{3} \mu \frac{u_\infty}{\delta}. \quad (4.32)$$

Далее нам потребуется *интегральное уравнение баланса количества движения*. Пусть элементарный объем начинается на стенке и простирается в направлении оси Oy , выходя за пределы пограничного слоя. Он имеет толщину dx в направлении Ox и единичную толщину в направлении Oz (рис. 4.3).

Через поверхность AB передается поток количества движения

$$\int_0^\delta \rho u^2 dy,$$

а через поверхность CD – поток количества движения

$$\int_0^\delta \rho u^2 dy + \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho u^2 dy \right) dx.$$

Жидкость поступает в элементарный объем через поверхность BD с расходом

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho u dy \right) dx.$$

Рис. 4.3. Элементарный объем в ламинарном пограничном слое, рассматриваемый при выводе интегрального уравнения баланса импульса

Эта величина является разностью между расходом, вытекающим через поверхность CD и расходом, втекающим через поверхность AB . Так как жидкость, поступающая в объем через поверхность BD , имеет составляющую скорости в направлении оси x , равную скорости внешнего по-

тока, то через эту верхнюю поверхность в элементарный объем в направлении оси x поступит поток количества движения

$$u_{\infty} \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} \rho u dy \right) dx.$$

Суммируя все составляющие количества движения в направлении оси x , получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy + \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} \rho u^2 dy \right) dx - \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - u_{\infty} \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} \rho u dy \right) dx = \\ = - \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} \rho u (u_{\infty} - u) dy \right) dx. \end{aligned}$$

На поверхности BD касательное напряжение отсутствует, так как эта поверхность находится вне пограничного слоя, и $\partial u / \partial y = 0$. Однако существует касательная сила трения, действующая на поверхности раздела жидкости и твердой стенки, т.е. при $y = 0$. Имеются силы давления, действующие на элементарный объем со стороны поверхностей AB и CD . Суммируя все силы, получаем соотношение

$$p_x \delta - \left(p_x + \frac{dp_x}{dx} dx \right) \delta - \tau dx = -\delta \frac{dp_x}{dx} dx - \tau dx. \quad (4.33)$$

При обтекании плоской пластины градиентом давления в направлении оси x можно пренебречь, и тогда уравнение баланса количества движения можно записать в виде

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} \rho u (u_{\infty} - u) dy \right) = \tau. \quad (4.34)$$

Подставляя в это уравнение найденное распределение скорости (4.31) и касательное напряжение (4.32), найдем

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u_{\infty}^2 \left[\frac{3y}{2\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] \cdot \left[1 - \frac{3y}{2\delta} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] dy = \frac{2}{3} \mu \frac{u_{\infty}}{\delta}.$$

После интегрирования приходим к уравнению

$$\frac{d}{dx} \left(\rho u_{\infty}^2 \frac{39\delta}{280} \right) = \frac{2}{3} \mu \frac{u_{\infty}}{\delta}. \quad (4.35)$$

Решение этого уравнения дает зависимость толщины пограничного слоя от вязкости, расстояния от передней кромки и скорости невозмущенного потока

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{140\nu x}{13u_\infty} + C.$$

Так как на передней кромке (т.е. при $x = 0$) $\delta = 0$, то постоянная интегрирования равна нулю, и мы получаем

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,64}{\mathbf{Re}_x^{1/2}}. \quad (4.36)$$

Чтобы определить коэффициент трения, вычислим из (4.32) касательное напряжение, пользуясь формулой (4.36)

$$\tau_x = \frac{3}{9,28} \frac{\mu u_\infty}{x} \mathbf{Re}_x^{1/2},$$

следовательно, из формулы (4.19) находим

$$C_{f,x} = \frac{2\tau_x}{\rho u_\infty^2} = \frac{0,647}{\mathbf{Re}_x^{1/2}}. \quad (4.37)$$

Обратимся теперь к уравнению энергии.

Допустим, что распределение температуры удовлетворяет уравнению, аналогичному уравнению для скорости (4.30)

$$T(y) = e + fy + gy^2 + hy^3 \quad (4.38)$$

Из уравнения (4.25) и условий (4.26), (4.28) следует, что

$$\frac{d^2T}{dy^2} = 0 \text{ при } y = 0.$$

Из условия (4.29) следует, что

$$dT/dy = 0 \text{ при } y \rightarrow \delta_T.$$

Так что четырех условий вполне достаточно для определения всех четырех коэффициентов в (4.38). Имеем

$$e = T_s; \quad f = \frac{3}{2} \frac{T_\infty}{\delta_T}, \quad g = 0, \quad h = -\frac{T_\infty}{2\delta_T^2},$$

следовательно

$$\frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3. \quad (4.39)$$

Далее нам требуется интегральное уравнение баланса энергии, которое находится аналогично интегральному уравнению баланса импульса. Но в этом случае используется элементарный объем, выходящий за пре-

дела как теплового, так и динамического пограничных слоев. Приводим окончательную формулу

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} (T_\infty - T) u dy - \frac{\lambda}{c_p \rho} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (4.40)$$

Это уравнение обычно известно как интегральное уравнение энергии для ламинарного пограничного слоя при низких скоростях течения.

Подставляя в левую часть уравнения (4.40) скорость и температуру из (4.39) и (4.40), найдем

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta_T} (T_\infty - T) u dy &= \int_0^{\delta_T} [(T_\infty - T_s) - (T - T_s)] u dy = \\ &= (T_\infty - T_s) u_\infty \int_0^{\delta_T} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3 \right] \cdot \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] dy = \\ &= (T_\infty - T_s) u_\infty \left(\frac{3}{4} \frac{\delta_T}{\delta} - \frac{3}{4} \frac{\delta_T^2}{\delta} + \frac{3}{20} \frac{\delta_T^2}{\delta} - \frac{1}{8} \frac{\delta_T^4}{\delta^3} + \frac{3}{20} \frac{\delta_T^4}{\delta^3} - \frac{1}{28} \frac{\delta_T^4}{\delta^3} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^{\delta_T} (T_\infty - T) u dy = (T_\infty - T_s) u_\infty \delta \left(\frac{3}{20} \zeta^2 - \frac{3}{280} \zeta^4 \right),$$

где $\zeta = \delta_T / \delta$.

При условии $\zeta < 1$ (что, конечно, не всегда справедливо), вторым слагаемым в скобке можно пренебречь по сравнению с первым. Тогда, подставляя приближенное значение интеграла в уравнение (4.40) и используя (4.39), найдем

$$\frac{3}{20} u_\infty (T_\infty - T_s) \zeta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{c_p \rho} \frac{(T_\infty - T_s)}{\delta \zeta}$$

или

$$\frac{1}{10} u_\infty \zeta^3 \delta \frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{\lambda}{c_p \rho}.$$

Из уравнения (4.36) имеем:

$$\delta \frac{\partial \delta}{\partial x} = 10,75 \frac{v}{u_\infty},$$

что дает

$$\zeta^3 = \frac{10}{10,75} \frac{a}{\nu}, \quad a = \frac{\lambda}{c_p \rho}$$

или

$$\delta_T = 0,976 \delta \mathbf{Pr}^{-1/3}. \quad (4.41)$$

Теперь можно найти выражение для безразмерного коэффициента теплоотдачи (числа Нуссельта).

Поток тепла, поступающий в обтекаемую пластину или отводимый из нее (для единицы площади), удовлетворяет соотношению

$$q_T = \alpha(T - T_\infty) = -\lambda_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0},$$

где индекс f относится к жидкости. Следовательно, пользуясь соотношениями (4.39), (4.41), а затем – соотношением (4.36), найдем

$$\begin{aligned} q &= -\frac{2 \lambda_L}{3 \delta_T} (T_\infty - T_s) = -\frac{2 \lambda_L}{3 \delta} \frac{\mathbf{Pr}^{1/3}}{0,976} (T_\infty - T_s) = \\ &= -\frac{2 \lambda_L}{3 x} \frac{\mathbf{Pr}^{1/3} \mathbf{Re}_x^{1/2}}{0,976 \cdot 4,64} (T_\infty - T_s) = 0,33 \frac{\lambda_L}{x} \mathbf{Pr}^{1/3} \mathbf{Re}_x^{1/2} (T_s - T_\infty). \end{aligned}$$

Тогда локальное число Нуссельта можно будет вычислить по формуле

$$Nu_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda_L} = \frac{q}{(T_s - T_\infty) \lambda_L} x = 0,33 \mathbf{Pr}^{1/3} \mathbf{Re}_x^{1/2}.$$

Заметим, что этот приближенный метод, позволяющий получать удовлетворительные результаты, минуя математические трудности, возникающие при решении задач теории пограничного слоя, можно использовать только при условии хорошего понимания физических процессов, происходящих в процессе теплообмена.

Вопросы для самоконтроля

11. Какого типа величины входят в число существенных параметров при изучении физических процессов?
12. Что такое «критерии подобия»? В чем заключается основная идея теории подобия?
13. Сформулируйте теоремы подобия.
14. Охарактеризуйте физический смысл критериев Рейнольдса, Пекле и числа Нуссельта.
15. Чем отличаются число Нуссельта и критерий Био?

16. Как определить характерный масштаб в задачах конвективного теплообмена?

17. В чем состоит смысл «критериальных уравнений»? Приведите примеры.

18. В чем, по Вашему мнению, заключаются недостатки и достоинства эмпирических формул?

19. Как определить средние значения коэффициента теплоотдачи и коэффициента трения?

20. В чем заключается основная идея приближенного метода расчета безразмерного коэффициента теплоотдачи?

Задания

1. Пользуясь схемой решения, изложенной в разделе 4.7, найти соотношение между тепловым и гидродинамическим пограничным слоем, пригодное для произвольной величины $\zeta = \delta_T / \delta$.

2. Воздух при атмосферном давлении обтекает плоскую пластину длиной 3 м и шириной 5 м. Температуры воздуха и пластины 15 и 65 °С, а скорость воздуха 35 м/с. Рассчитать на задней кромке пластины (т.е., при $x = 3$ м) а) средний коэффициент трения; б) силу вязкого сопротивления пластины. Определить в) средний коэффициент конвективной теплоотдачи; полный поток с поверхности пластины.

3. Вода обтекает квадратную пластину со стороной 2 м. Температура воды составляет 90 °С., а ее скорость 10 м/с. Пластина имеет постоянную температуру 30 °С. Определить силу сопротивления пластины и поток тепла с ее поверхности.

ЧАСТЬ 5

Задачи теплопроводности в различных системах координат

5.1. Уравнение теплопроводности в различных системах координат

Уравнение теплопроводности в форме (2.23)

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_V$$

применимо только для декартовой или прямоугольной системы координат. В практике часто встречаются такие условия, которые приводят к необходимости записи уравнения теплопроводности в иной форме, более удобной для представления решения и его физической трактовки. Это относится, например, к телам, имеющим форму фигур вращения (цилиндр, диск, сфера), нагреваемым с поверхности. Оказывается, что слагаемые, выражающие тепловыделение и аккумулялирование энергии инвариантны относительно системы координат (т.е., неизменны); но слагаемые, выражающие результирующий кондуктивный тепловой поток, зависят от геометрии и, следовательно, от системы координат. На доказательстве этого утверждения мы останавливаться не будем. Познакомимся только с записью уравнения теплопроводности в цилиндрической и сферической системах координат в дополнение к (2.23).

Зависимость вида уравнения от принятой в задаче системы координат можно исключить, если выразить кондуктивные члены с помощью оператора Лапласа:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \frac{q_V}{\lambda}, \quad (5.1)$$

где $a = \lambda / (c_p)$. Вместо обозначения Δ для оператора Лапласа часто используют эквивалентное ему обозначение ∇^2 . Запись (5.1) вполне корректна, если теплопроводность считается постоянной. Если это условие не выполняется, то уравнение теплопроводности записывается в виде

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q_V, \quad (5.2)$$

где $\operatorname{div} \equiv \nabla \cdot$ – обозначение оператора дивергенции («набла с точкой»); $\operatorname{grad} \equiv \nabla$ – обозначение оператора градиента.

Форма лапласиана, а также операторов градиента и дивергенции для различных систем координат различна. Для декартовой прямоугольной системы координат (рис. 5.1) имеем $T = T(x, y, z, t)$ и

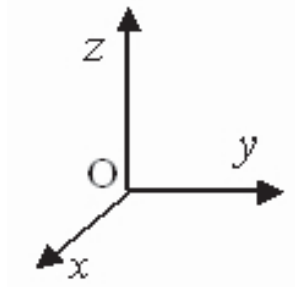


Рис. 5.1. Декартова система координат

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\nabla \equiv \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

т.е.

$$\mathbf{q} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k} \right) = -\lambda \text{grad } T.$$

В цилиндрической системе координат (рис. 5.2) $T = T(r, \varphi, z, t)$. Декартовы координаты x и y связаны с координатами r и φ цилиндрической системы координат простыми соотношениями

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi. \quad (5.3)$$

Операторы Лапласа и градиента имеют вид

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\nabla = \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Следовательно, в цилиндрической системе координат уравнение теплопроводности (5.1) записывается так

$$a \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_V}{\lambda}, \quad (5.4)$$

а компоненты вектора плотности теплового потока имеют вид

$$q_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}; \quad q_\varphi = -\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (5.5)$$

В сферической системе координат имеем $T = T(r, \theta, \varphi)$ (рис. 5.3) и

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$\nabla = \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{i}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Соответственно трехмерное уравнение теплопроводности и компоненты вектора плотности теплового потока принимают вид

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial T}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{q_Y}{\lambda}; \quad (5.6)$$

$$q_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}; \quad q_\Theta = -\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \Theta}; \quad q_\varphi = -\lambda \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi}. \quad (5.7)$$

Декартовы координаты x, y, z связаны с координатами сферической системы координат r, θ, φ соотношениями

$$x = r \sin \Theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \Theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \Theta \quad (5.8)$$

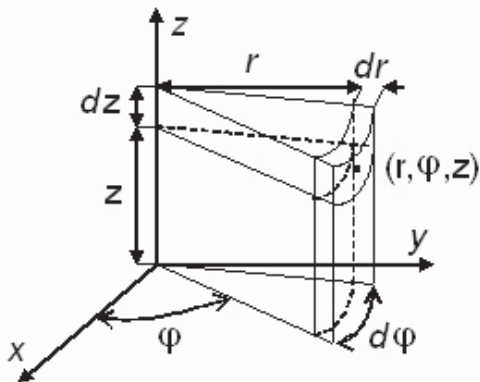


Рис. 5.2. Цилиндрическая система координат

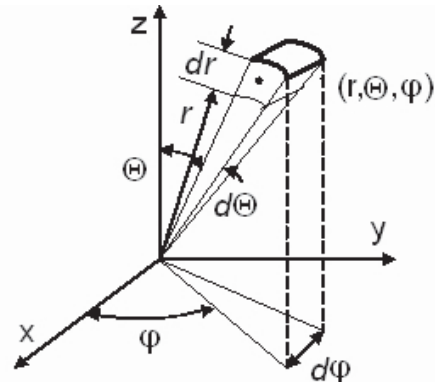


Рис. 5.3. Сферическая система координат

Формулы (5.3) и (5.8) позволяют легко переходить от одной системы координат к другой, если это необходимо.

5.2. Уравнения теплопроводности для тел канонической формы

Уравнения (5.4) и (5.6) особенно удобны, когда нужно найти распределение температуры в телах канонической формы – в цилиндре или шаре. В этих случаях уравнения существенно упрощаются при задании особых условий, когда поле температуры зависит только от одной координаты. Например, в случае длинного цилиндра, на боковой поверхности которого поддерживается постоянная температура (рис. 5.4, а), или в случае шара, находящегося в равномерно прогретой жидкости (рис. 5.4, б). Как и в случае пластины в декартовой системе координат (с однородными условиями по всей ее поверхности, рис. 5.4, в), уравнения теплопроводности становятся одномерными.

Так, в цилиндрической системе координат поле температуры, зависящее только от координаты r , описывается уравнением

$$a \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{q_V}{\lambda}, \quad (5.9)$$

следующим из (5.4), а в сферической системе координат – уравнением

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{q_V}{\lambda}, \quad (5.10)$$

следующим из (5.6).

В декартовой системе координат мы имели уравнение (2.24), которое при замене координаты x на r (для единообразия записи) и при условии постоянства коэффициента теплопроводности принимает вид

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{q_V}{\lambda}. \quad (5.11)$$

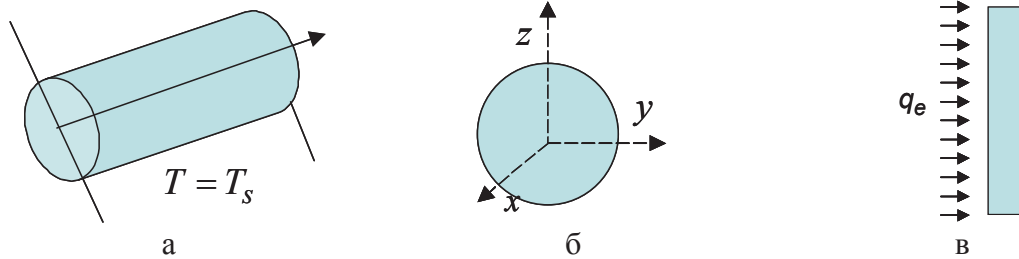


Рис. 5.4. К записи уравнения теплопроводности для тел канонической формы

Все три уравнения (5.9) – (5.10) можно объединить в одно

$$a \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{q_V}{\lambda}, \quad (5.12)$$

где $n=0$ – для пластины; $n=1$ – для цилиндра и $n=2$ – для сферы (рис. 5.4).

В безразмерных переменных

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_* - T_0}; \quad \tau = \frac{t}{t_*}; \quad \xi = \frac{r}{r_*},$$

где T_* – некоторая характерная для процесса температура (например, температура омывающей тело жидкости; или температура стенки); T_0 – начальная температура; r_* – характерный для задачи размер (например, ширина пластины, радиус цилиндра или сферы), уравнение (5.12) принимает вид

$$\frac{1}{Fo} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^n} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^n \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \bar{q}_V, \quad (5.13)$$

где $Fo = \frac{at_*}{x_*^2}$ – число Фурье; $\bar{q}_V = \frac{q_V x_*^2}{\lambda(T_* - T_0)}$ – безразмерная плотность

внутренних источников тепла. Заметим, что характерную или масштабную температуру можно выбрать из условия $\bar{q}_V = 1$. Тогда

$$T_* = T_0 + \frac{q_V}{\lambda} x_*^2.$$

5.3. Простейшие стационарные задачи теплопроводности в цилиндрической системе координат

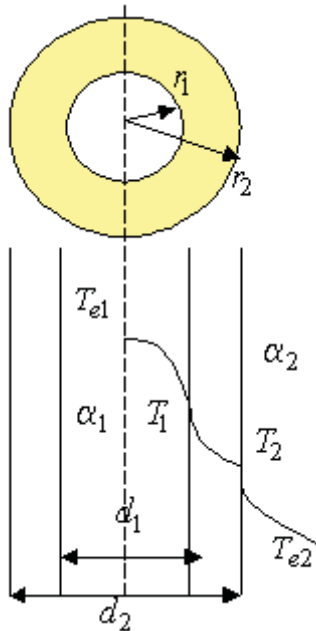


Рис. 5.5. К задаче теплопроводности в трубе

Рассмотрим стационарный процесс теплопроводности в цилиндрической стенке (трубе) с внутренним радиусом $d_1 = 2r_1$ и наружным радиусом $d_2 = 2r_2$ (рис. 5.5). Предположим, что цилиндр или труба имеют достаточно большую длину, чтобы теплоотводом с торцов можно было пренебречь, и что граничные условия на внутреннем и внешнем радиусах цилиндра не зависят от координат φ и z , так что задача об определении температурного поля становится одномерной.

Нас интересует установившееся распределение температуры, поэтому воспользуемся стационарным уравнением теплопроводности, которое следует из (5.9), если в нем производную по времени положить равной нулю:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0. \quad (5.14)$$

Обозначая $dT/dr = u$, найдем уравнение

$$\frac{du}{dr} + \frac{1}{r} u = 0,$$

откуда, разделяя переменные, имеем

$$\frac{du}{u} = -\frac{dr}{r}.$$

Интегрируем:

$$\ln u = -\ln r + \ln C_1,$$

откуда

$$\frac{dT}{dr} = u = \frac{C_1}{r}.$$

Повторное интегрирование дает

$$T = C_1 \ln r + C_2. \quad (5.15)$$

Из полученных соотношений сразу видно, что удельный тепловой поток не постоянен по толщине и убывает по направлению к внешней поверхности (вдоль радиуса r)

$$q_r = -\lambda \frac{dT}{dr} = -\lambda \frac{C_1}{r}. \quad (5.16)$$

В стационарных условиях должен быть постоянным полный тепловой поток, проходящий через участок цилиндрической трубы заданной длины l и равный

$$Q = q_r F = q_r 2\pi r l = \text{const} \quad (5.17)$$

Поскольку площадь поверхности F увеличивается с радиусом, поток q_r должен убывать.

Второе следствие полученных соотношений – температура по толщине трубы изменяется не линейно, а по логарифмическому закону, в отличие от аналогичной задачи в декартовой системе координат.

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 могут быть найдены, если будут заданы граничные условия.

Граничные условия первого рода. Пусть на поверхностях цилиндра $r = r_1$ и $r = r_2$ заданы температуры T_1 и T_2 . Тогда, используя (5.15), найдем

$$T_1 = T(r_1) = C_1 \ln r_1 + C_2;$$

$$T_2 = T(r_2) = C_1 \ln r_2 + C_2.$$

Определяя константы интегрирования из этой системы уравнений, получим

$$T = \frac{T_1 \ln(r_2/r) + T_2 \ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}, \quad (5.18)$$

Следовательно, количество тепла, проходящее через участок цилиндрической стенки длины l в единицу времени, согласно закону Фурье, есть

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot l \cdot 2\pi r \equiv \frac{\lambda \Delta T}{\ln(r_2/r_1)} \cdot 2\pi l, \text{ Вт}, \quad (5.19)$$

т.е., действительно, не зависит от радиуса.

В практике технических расчетов используют так называемый погонный тепловой поток (или линейную плотность теплового потока)

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{2\pi\lambda}{\ln(r_2/r_1)} \Delta T \quad (5.20)$$

Граничные условия третьего рода. Граничные условия третьего рода мы имеем, если заданы не температуры стенок, а температуры сред, омывающих трубу, и значения коэффициентов теплоотдачи.

Конвективный тепловой поток на единицу длины трубы с наружной и внутренней сторон может быть выражен с помощью закона Ньютона и должен равняться погонному тепловому потоку вследствие теплопроводности через цилиндрическую стенку (5.20). Т.е., мы имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} q_l &= \alpha_1 (T_{e1} - T_1) \cdot 2\pi r_1; \\ q_l &= \frac{\lambda}{\ln(r_2/r_1)} (T_1 - T_2) \cdot 2\pi; \\ q_l &= \alpha_2 (T_2 - T_{e2}) \cdot 2\pi r_2, \end{aligned}$$

решая которую, найдем погонную плотность теплового потока

$$q_l = \Lambda_c \pi (T_{e1} - T_{e2}), \quad (5.21)$$

где

$$\Lambda_c = \frac{1}{\frac{1}{2\alpha_1 r_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{2\alpha_2 r_2}} - \quad (5.22)$$

коэффициент теплопередачи (или термическая проводимость) цилиндрической стенки, Вт/(м·К). Его размерность отличается размерности коэффициента теплопередачи для плоской стенки. Коэффициент Λ_c численно равен количеству тепла, проходящему через стенку трубы единичной длины за единицу времени от одной среды к другой, если температурный напор между ними составляет 1 К.

Обратная величина

$$\Lambda_c^{-1} = \frac{1}{2\alpha_1 r_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{2\alpha_2 r_2} \quad (5.23)$$

называется *полным термическим сопротивлением трубы*; $1/(2\alpha_i r_i)$, $i=1,2$ – термическими сопротивлениями теплоотдачи; $(1/2\lambda)\ln(r_2/r_1)$ – термическим сопротивлением теплопроводности стенки трубы. Т.е., в

случае цилиндрической стенки сопротивление теплоотдачи зависит не только от величин α_1 и α_2 , но и от диаметров (или радиусов) стенки.

Из той же системы уравнений мы можем найти и температуры стенок

$$T_1 = T_{e1} - \frac{\Lambda_c (T_{e1} - T_{e2})}{2\alpha_1 r_1}; \quad T_2 = \frac{\Lambda_c (T_{e1} - T_{e2})}{2\alpha_2 r_2} + T_{e2},$$

подставляя которые в (5.18), найдем распределение температуры по толщине цилиндрической стенки.

5.4. Электрическая аналогия

Выражение (5.19) можно записать в форме закона Ома

$$Q = \frac{\Delta T}{\ln(r_2/r_1)/(2\pi l \lambda)},$$

где знаменатель представляет собой термическое сопротивление полого цилиндра

$$R_T = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi \lambda l}.$$

Принципы последовательного и параллельного соединений термических сопротивлений в цепь, справедливые для плоской стенки в прямоугольной системе координат, можно применить и для задачи о теплопроводности в полом цилиндре.

Предположим, например, что жидкость течет в трубе, покрытой теплоизоляционным материалом (рис. 5.6). Известно, что средняя температура жидкости равна T_0 , а температура внешней поверхности теплоизоляции – T_s . Характеристики материала трубы обозначим индексом 1, а теплоизоляции – индексом 2. Конвективное термическое сопротивление жидкости определяется формулой

$$R_{T,0} = \frac{1}{\alpha F} = \frac{1}{\alpha 2\pi r_1 l}.$$

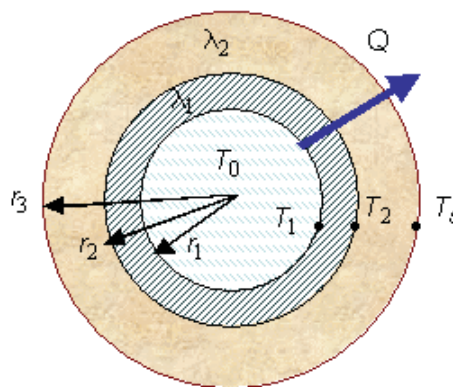


Рис. 5.6. Сечение теплоизолированной трубы

где $F = 2\pi r_1 l$ – площадь внутренней поверхности трубы.

Конвективное термическое сопротивление жидкости нужно последовательно соединить с двумя кондуктивными термическими сопротивлениями для двух твердых материалов, поскольку тепловой поток распространяется последовательно через каждый из этих материалов.

Следовательно, тепловой поток в этой задаче следует из соотношения

$$Q = \left(\frac{\Delta T}{R} \right)_{full} = \frac{T_0 - T_s}{\frac{1}{2\pi\alpha_1 r_1 l} + \frac{1}{2\pi l \lambda_1} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{2\pi l \lambda_2} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}, \quad (5.24)$$

где третье слагаемое в знаменателе есть сопротивление теплопроводности теплоизоляции.

Термическое сопротивление, входящее в соотношение (5.24), является суммой всех термических сопротивлений между двумя известными температурами.

Если известны температуры T_1 и T_s , то полное сопротивление должно равняться сумме только двух кондуктивных сопротивлений трубы и теплоизоляции.

$$Q = \left(\frac{\Delta T}{R} \right)_{full} = \frac{T_1 - T_s}{\frac{1}{2\pi l \lambda_1} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{2\pi l \lambda_2} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}. \quad (5.25)$$

При известном тепловом потоке температура внутренней стенки трубы легко находится из этого соотношения.

Пример. В алюминиевой трубе, имеющей теплопроводность $\lambda_1 = 185 \text{ Вт/(м К)}$, течет водяной пар при температуре $T_0 = 110 \text{ }^\circ\text{C}$. Внутренний диаметр трубы – 10 см, наружный диаметр – 12 см. Труба расположена в помещении с температурой $T_e = 30 \text{ }^\circ\text{C}$; коэффициент конвективной теплоотдачи от трубы к воздуху α_e равен $15 \text{ Вт/(м}^2\text{К)}$. Требуется найти тепловой поток на единицу длины трубы, если труба не теплоизолирована.

Чтобы снизить тепловые потери от трубы, она была покрыта слоем теплоизоляции ($\lambda_2 = 0,2 \text{ Вт/(м К)}$) толщиной 5 см. Найти тепловой поток на единицу длины от теплоизолированной трубы. Предположить, что конвективное термическое сопротивление пара пренебрежимо мало.

Решение. Для трубы без теплоизоляции наиболее существенными являются кондуктивное термическое сопротивление самой трубы и конвективное термическое сопротивление комнатного воздуха. Поскольку

конвективным термическим сопротивлением пара можно пренебречь, температура внутренней поверхности трубы равна температуре пара. Тепловой поток на единицу длины трубы следует из соотношения

$$q = \frac{T_0 - T_e}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda_1} + \frac{1}{2\pi r_2 \alpha_e}} = \frac{110 - 30}{\frac{\ln(6/5)}{2\pi \cdot 185} + \frac{1}{2\pi \cdot 0,06 \cdot 15}} = \frac{80}{1,57 \cdot 10^{-4} + 0,177},$$

$$q = 452 \text{ Вт/м.}$$

Для трубы с теплоизоляцией нужно добавить термическое сопротивление теплоизоляции, и соотношение для теплового потока примет вид

$$q = \frac{T_0 - T_e}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda_1} + \frac{1}{2\pi r_3 \alpha_e} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi\lambda_2}} = \frac{80}{1,57 \cdot 10^{-4} + 0,096 + 0,482},$$

$$q = 138 \text{ Вт/м.}$$

Использование теплоизоляции позволяет втрое снизить потери тепла паром. Отметим, что в обоих случаях можно пренебречь кондуктивным термическим сопротивлением алюминиевой трубы без сколько-нибудь заметного снижения точности результатов расчета теплового потока.

5.5. Многослойная цилиндрическая стенка

Результаты легко распространяются на многослойную цилиндрическую стенку.

Так, в случае трубы, состоящей из n слоев с коэффициентами теплопроводности λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, и граничных условий первого рода найдем

$$q = \frac{(T_n - T_{n+1})\pi}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}. \quad (5.26)$$

Для многослойной цилиндрической стенки остается справедливым понятие эквивалентного коэффициента теплопроводности. Тогда

$$q = \frac{2\pi\lambda_{\text{экв}}(T_1 - T_{n+1})}{\ln(r_{n+1}/r_1)},$$

где

$$\lambda_{\text{экв}} = \frac{\ln(r_{n+1}/r_1)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)}$$

эквивалентный коэффициент теплопроводности многослойной цилиндрической стенки.

Уравнения для определения температур между i -м и $i+1$ -м слоями примут вид

$$T_{i+1} = T_i - \frac{q_c}{2\pi} \left(\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \dots + \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right), \quad (5.27)$$

а выражение для коэффициента теплопередачи -

$$\Lambda_c = \frac{1}{\frac{1}{2\alpha_1 r_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right) + \frac{1}{2\alpha_2 r_2}}. \quad (5.28)$$

5.6. Критический диаметр теплоизоляции

Итак, мы знаем, что радиальный тепловой поток в трубе обратно пропорционален логарифму наружного радиуса, тогда как рассеяние тепла от наружной поверхности прямо пропорционально этому радиусу. Такого рода двойной эффект возрастающего сопротивления радиальной проводимости и одновременного увеличения площади охлаждающей поверхности по мере возрастания r означает, что существует определенный радиус, при котором потери тепла максимальны. Соотношение внутреннего и внешнего радиусов также играет важную роль.

Так, если при фиксированном, но небольшом r_1 (внутреннем радиусе) мы увеличим толщину стенки путем увеличения r_2 , то действие логарифмического слагаемого в формуле (5.22) окажется более сильным, чем при том же увеличении толщины стенки трубы с большим внутренним радиусом. Если r_1 фиксировано, то поток $q_l = q_l(r_2)$ (формула (5.21)) будет максимальным при таком значении r_2 , при котором

$$\frac{dq}{dr_2} = - \frac{2\pi\Delta T \left(\frac{1}{\lambda r_2} - \frac{1}{\alpha_2 r_2^2} \right)}{\left(\frac{1}{\alpha_1 r_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\alpha_2 r_2} \right)^2} = 0. \quad (5.29)$$

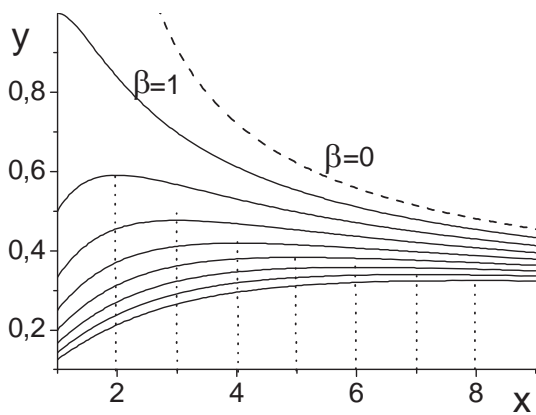
Это равенство дает нам критический радиус

$$(r_2)_* = \frac{\lambda}{\alpha_2}. \quad (5.30)$$

Рассуждения количественно иллюстрируются кривыми на рис 5.7. для однослойной трубы (рис. 5.5) с внутренним удельным поверхностным сопротивлением $1/\alpha_1 = 0$. В таком случае $T_1 = T_{e1}$ и

$$\Lambda_c = \frac{1}{\frac{1}{2\lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{2\alpha_2 r_2}}.$$

Вводя безразмерные переменные и параметры



$$x = \frac{r_2}{r_1}, \quad \beta = \frac{\lambda}{\alpha_2 r_2},$$

$$y = \frac{q_l}{2\pi\lambda(T_{e1} - T_{e2})},$$

придем к соотношению

$$y = \frac{1}{\ln x + \frac{\beta}{x}}. \quad (5.31)$$

Рис. 5.7. Влияние отношения радиусов на величину потока тепла сквозь однослойную стенку трубы. Кривые построены для $\beta = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и расположены в порядке возрастания параметра. Пунктирные линии указывают положение максимума на кривых, который соответствует критическому значению радиуса

критический наружный радиус соответствует фиктивным условиям: толщина стенки равна нулю. Для данного внутреннего радиуса величина критического наружного радиуса увеличивается, если увеличивается коэффициент теплопроводности трубы или если понижается коэффициент теплоотдачи на поверхности.

Существование критического наружного радиуса приводит к тому, что при некоторых реальных условиях, вопреки привычным для обывателя представлениям, потеря тепла изолированной трубой фактически может быть снижена путем уменьшения толщины теплоизоляции.

Так, для двухслойной трубы, сечение которой изображено на рис. 5.6, полное термическое сопротивление определяется по формуле

$$R_{T,C} = \frac{1}{\Lambda_C} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \frac{1}{2\lambda_2} \ln\left(\frac{d_3}{d_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2 d_3}, \quad (5.32)$$

где $d_1 = 2r_1$; $d_1 = 2r_1$; $d_1 = 2r_1$; λ_1 – теплопроводность материала трубы; λ_2 – теплопроводность изоляционного материала.

От толщины изоляции в (5.32) зависят два последних слагаемых. Термическое сопротивление теплопроводности изоляции (третье слагаемое) растет с увеличением толщины изоляционного покрытия, а термическое сопротивление теплоизоляции (четвертое слагаемое) падает. Последнее связано с увеличением поверхности теплоотдачи с ростом радиуса r_3 (или диаметра). Условие экстремума этой функции есть

$$\frac{\partial}{\partial d_3}(R_{T,C}) = \frac{\partial}{\partial d_3}\left(\frac{1}{\Lambda_C}\right) = \frac{1}{2\lambda_2 d_3} - \frac{1}{\alpha_2 d_3^2} = 0.$$

Следовательно, критическое значение диаметра

$$(d_3)_* = \frac{2\lambda_2}{\alpha_2} \quad (5.33)$$

не зависит от внешнего диаметра d_2 изолируемого трубопровода, а определяется коэффициентом теплопроводности выбранного изолятора λ_2 и коэффициентом теплоотдачи с внешней поверхности α_2 .

Находим вторую производную

$$\frac{\partial^2}{\partial d_3^2}\left(\frac{1}{\Lambda_C}\right) = \frac{1}{d_3^2}\left(\frac{2}{\alpha_2 d_3} - \frac{1}{2\lambda_2}\right)$$

или (с учетом (5.33))

$$\frac{\partial^2}{\partial d_3^2}\left(\frac{1}{\Lambda_C}\right) = \frac{\alpha_2^2}{8\lambda_2^3} > 0. \quad (5.34)$$

Следовательно, при $d = (d_3)_*$ полное термическое сопротивление минимально.

Можно сделать вывод: если диаметр изолируемой трубы больше критического диаметра, найденного для выбранного изоляционного материала $d > (d_3)_*$ и заданных условий теплообмена со средой, то покрытие трубы слоем такой изоляции уменьшает теплоотдачу через цилиндрическую стенку. Если же $d < (d_3)_*$, то нанесение на поверхность трубы выбранного изолятора первоначально приведет к возрастанию теплоотдачи. И лишь после того, как будет достигнут критический диа-

метр, тепловой поток через стенку начнет убывать; затем он достигнет той величины, которая была бы при отсутствии теплоизоляции, и лишь затем станет меньше ее.

В последнем случае следует подобрать другой изоляционный материал или сделать многослойную изоляцию с $\lambda_{\text{экв}} > \lambda_2$ и лишь, потом пойти на снижение теплоотдачи путем значительного увеличения толщины изоляционного слоя.

5.7. Шаровая стенка

Рассмотрим пространственно одномерную стационарную задачу теплопроводности в шаровой стенке с радиусами внутренней и внешней поверхностей r_1 и r_2 и коэффициентом теплопроводности материала λ . Одномерность задачи означает, что распределение температуры в стенке зависит только от радиуса r , что обеспечивается однородными граничными условиями на поверхности шара. Следовательно, для того, чтобы найти распределение температуры в шаровой стенке, нам потребуется стационарное уравнение теплопроводности, следующее из (5.10) для $q_V = 0$,

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0. \quad (5.35)$$

Решается задача аналогично предыдущему.

Введем обозначение

$$u = \frac{dT}{dr}.$$

Тогда вместо (5.35) получим

$$\frac{du}{dr} = -2 \frac{u}{r}.$$

Следовательно,

$$\ln u = -2 \ln r + \ln C_1.$$

Возвращаясь к температуре, найдем

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2; \quad \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2}. \quad (5.36)$$

В силу тех же причин, что и в случае цилиндрической стенки, распределение температуры – нелинейно.

В случае *граничных условий первого рода*

$$r = r_1 : \quad T = T_1;$$

$$r = r_2 : \quad T = T_2,$$

найдем температуру

$$T(r) = \frac{T_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) + T_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \quad (5.37)$$

и полный тепловой поток

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot 4\pi r^2 = -4\pi\lambda C_1,$$

который не зависит от текущего радиуса, так как общее количество тепла, проходящее в единицу времени через изотермическую поверхность, какой здесь является любая сфера с радиусом

$$r_1 \leq r \leq r_2,$$

должно быть одинаково.

Из двух последних равенств находим

$$Q = \frac{4\pi\lambda}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} (T_1 - T_2). \quad (5.38)$$

Для многослойной шаровой стенки в случае граничных условий первого рода аналогичным образом найдем равенство

$$Q = \frac{4\pi(T_1 - T_2)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right)},$$

где λ_i и r_i – коэффициент теплопроводности и внутренний радиус i -го слоя.

Найдем решение задачи в случае *граничных условий третьего рода*

$$r = r_1 : \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha_1 (T_{e1} - T), \quad (5.39)$$

$$r = r_2 : \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha_2 (T - T_{e2}).$$

Подставляя общее решение (5.36) в выписанные граничные условия, придем к системе уравнений для определения постоянных интегрирования

$$(\alpha_1 r_1 + \lambda) C_1 - \alpha_1 r_1^2 C_2 = -\alpha_1 r_1^2 T_{e1}, \quad (5.40)$$

$$(\alpha_2 r_2 - \lambda) C_1 + \alpha_2 r_2^2 C_2 = \alpha_2 r_2^2 T_{e2},$$

откуда имеем

$$C_1 = \frac{\alpha_1 r_1^2 (T_{e2} - T_{e1})}{(\alpha_1 r_1 + \lambda) + \frac{\alpha_1 r_1^2}{\alpha_2 r_2^2} (\alpha_2 r_2 - \lambda)},$$

$$C_2 = \frac{\frac{(\alpha_1 r_1 + \lambda)}{(\alpha_2 r_2 - \lambda)} T_{e2} + \frac{\alpha_1 r_1^2}{\alpha_2 r_2^2} T_{e1}}{\frac{(\alpha_1 r_1 + \lambda)}{(\alpha_2 r_2 - \lambda)} + \frac{\alpha_1 r_1^2}{\alpha_2 r_2^2}}.$$

Аналогичным образом решается задача о нахождении поля температуры в последовательно-составных шаровых оболочках.

Заметим, что тепловой поток (5.38) должен быть равен тепловому потоку, приходящему к внутренней стенке

$$4\pi r_1^2 \alpha_1 (T_{e1} - T)$$

и тепловому потоку, покидающему внешнюю стенку

$$4\pi r_2^2 \alpha_2 (T - T_{e2})$$

Поэтому в случае шаровой стенки ($T_{e1} > T_{e2}$) решение можно представить в виде (5.37), где

$$T_1 = \frac{r_1^2 \alpha_1 T_{e1} + \Lambda_s \left(T_{e2} + \frac{r_1^2 \alpha_1}{r_2^2 \alpha_2} T_{e1} \right)}{\Lambda_s \left(1 + \frac{r_1^2 \alpha_1}{r_2^2 \alpha_2} \right) + r_1^2 \alpha_1}, \quad (5.41)$$

$$T_2 = \frac{r_1^2 \alpha_1 T_{e2} + \Lambda_s \left(T_{e2} + \frac{r_1^2 \alpha_1}{r_2^2 \alpha_2} T_{e1} \right)}{\Lambda_s \left(1 + \frac{r_1^2 \alpha_1}{r_2^2 \alpha_2} \right) + r_1^2 \alpha_1},$$

$$\Lambda_s = \frac{\lambda}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \equiv \frac{\lambda r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

В некоторых случаях такое представление оказывается более удобным.

В пределе при идеальном теплообмене сред с заданными температурами поверхностей шаровой стенки (т.е., при бесконечных значениях α_i) решение задачи с граничными условиями третьего рода переходит в решение задачи с граничными условиями первого рода.

5.8. Решения простейших задач в безразмерной форме

Соберем решения стационарных задач для тел канонической формы с граничными условиями первого рода вместе:

$$T_p = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{r}{r_2};$$

$$T_c = \frac{T_1 \ln(r_2/r) + T_2 \ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)};$$

$$T_s = \frac{T_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) + T_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)},$$

где для общности записи координата x декартовой системы координат заменена на r ; а толщина пластины обозначена так же, как и больший радиус стенки в цилиндрической и сферической системах координат ($h = r_2$). Ни одно из этих решений, соответствующих установившемуся состоянию, не зависит от коэффициента теплопроводности.

В переменных

$$\theta = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2}; \quad \xi = \frac{r}{r_2}$$

выписанные простейшие решения принимают вид

$$\theta_p = 1 - \xi, \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

$$\theta_c = -\frac{\ln \xi}{\ln \varepsilon}, \quad \varepsilon^{-1} \leq \xi \leq 1, \quad (5.42)$$

$$\theta_p = \frac{(1 - \xi)}{\xi(\varepsilon - 1)}, \quad \varepsilon^{-1} \leq \xi \leq 1,$$

где

$$\varepsilon = \frac{r_2}{r_1} > 1.$$

Видим, что в плоской стенке качественное распределение температуры не зависит от ее толщины. А вот в цилиндрической и шаровой – нелинейно меняется с радиусом, причем характер распределения (кривизна кривой) зависит от соотношения внешнего и внутреннего радиусов. Разность температур стенок в формулы не входит.

В случае *граничных условий третьего рода* решения простейших задач зависят от параметров, характеризующих теплообмен. Полагая, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ представим решения простейших задач для плоской, цилиндрической и сферической систем координат в безразмерных переменных

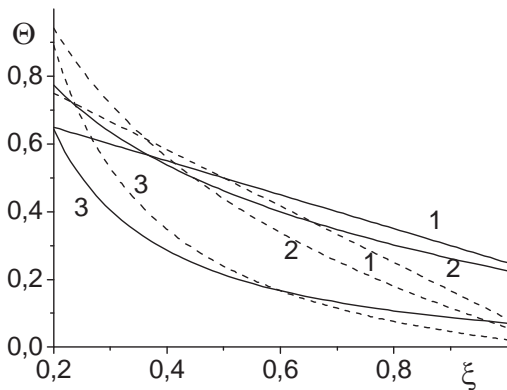


Рис. 5.9. Распределение температуры вдоль координаты в плоской (1), цилиндрической (2) и сферической (3) стенках в условиях конвективного теплообмена. Сплошные линии – $Bi = 2$; пунктирные – $Bi = 10$

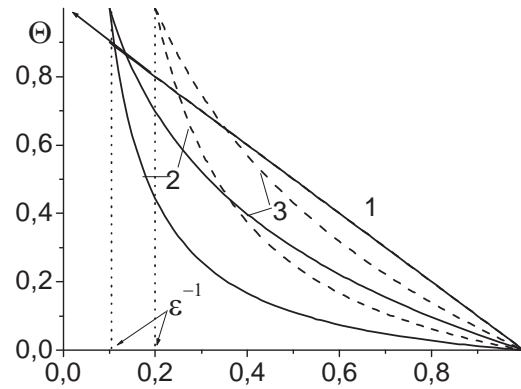


Рис. 5.8. Распределение температуры в плоской (1), цилиндрической (2) и шаровой (3) стенке. Сплошные линии – $\varepsilon = 10$; пунктирные линии – $\varepsilon = 5$

$$\theta = \frac{T - T_{e2}}{T_{e1} - T_{e2}}; \quad \xi = \frac{r}{r_2}.$$

Имеем для пластины

$$\theta_p = \theta_1 - (\theta_1 - \theta_2)\xi \quad (5.43)$$

$$\theta_1 = 1 - \frac{1}{2 + Bi}, \quad \theta_2 = \frac{1}{2 + Bi},$$

для цилиндра

$$\theta_c = \frac{-(\theta_1 - \theta_2)\ln \xi + \theta_2 \ln \varepsilon}{\ln \varepsilon}, \quad (5.44)$$

$$\theta_1 = 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon + \varepsilon Bi \ln \varepsilon},$$

$$\theta_2 = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon + \varepsilon Bi \ln \varepsilon}$$

и для сферы

$$\theta_s = \frac{(1-\xi)\theta_1 + (\xi\varepsilon - 1)\theta_2}{\xi(\varepsilon - 1)}, \quad (5.45)$$

$$\theta_1 = \frac{(\varepsilon - 1)Bi + 1}{1 + \varepsilon + (\varepsilon - 1)Bi},$$

$$\theta_2 = \frac{1}{1 + \varepsilon + (\varepsilon - 1)Bi},$$

где $Bi = \frac{\alpha r_1}{\lambda}$.

На рис. 5.9. представлено распределение температуры вдоль координаты ξ . Видно, что качественный характер кривых различен для стенок с разной кривизной. С увеличением числа Bi температуры стенок приближаются к температурам омывающих сред, что видно из сравнения сплошных и пунктирных кривых с одинаковыми номерами.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие системы координат Вам известны? Изобразите их графически.
2. Каков общий вид уравнения теплопроводности для произвольной системы координат?
3. Запишите уравнение теплопроводности для тел канонической формы (пластины, длинного цилиндра и сферы)
4. В чем состоит отличие решений простейших задач теплопроводности с граничными условиями первого рода для разных систем координат?
5. Запишите полный тепловой поток через поверхность длинной трубы.
6. Из чего складывается полное термическое сопротивление трубы в условиях конвективного теплообмена?
7. В чем заключается электрическая аналогия для многослойной цилиндрической стенки?
8. Что такое «критический диаметр теплоизоляции»?
9. Запишите полный поток тепла через поверхность сферической стенки.
10. Какие два безразмерных параметра появляются в задачах о распределении температуры при конвективном охлаждении цилиндрической и сферической стенок?

Задания

1. Пользуясь результатами разделов 3.4, 5.6 и 5.7, показать, что решения простейших стационарных задач теплопроводности с граничными условиями третьего рода в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат в безразмерной форме имеют вид (5.43) – (5.45).

2. Сформулировать задачу о распределении температуры в двухслойной шаровой оболочке при ее конвективном охлаждении, пользуясь материалом раздела 5.7. Тепловой контакт между слоями считать идеальным. Привести задачу к безразмерной форме. Построить точное аналитическое решение этой задачи.

3. Рассчитать температуры внутренней и внешней поверхностей шаровой оболочки в задаче 2, а также температуру на контакте; определить полный тепловой поток, уходящий с поверхности шара, принимая, что температуры среды внутри оболочки – $175\text{ }^{\circ}\text{C}$, температура окружающей среды – $25\text{ }^{\circ}\text{C}$; коэффициенты теплоотдачи одинаковы и равны – $28,8\text{ ккал}/(\text{м}^2\cdot\text{час}\cdot\text{град})$; внутренний, и внешний радиусы оболочки – 3 см и 5 см, толщина внутренней оболочки – 25 мм. Внутренняя оболочка изготовлена из материала с теплопроводностью $1,45\text{ ккал}/(\text{м}\cdot\text{час}\cdot\text{град})$; внешняя из материала с коэффициентом теплопроводности $0,137\text{ ккал}/(\text{м}\cdot\text{час}\cdot\text{град})$. Как будет изменяться тепловой поток при изменении толщины внешней оболочки в пределах от 25 мм до 300 мм?

ЧАСТЬ 6

Задачи с объемным тепловыделением

В веществе наряду с процессами теплопроводности возможно объемное выделение тепла, связанное с какими-либо физико-химическими явлениями: конденсацией, джоулевым нагреванием, ядерными и химическими реакциями и т.д. С позиций теплообмена такие процессы можно охарактеризовать количеством тепла, выделяющимся или поглощающимся в единице объема за единицу времени q_V , Вт/м³. Эта характеристика носит название **интенсивности объемного тепловыделения**. Для простоты в рассматриваемых в этой части задачах предположим, что интенсивность объемного тепловыделения – величина постоянная – не зависит от времени и пространственной координаты. Конечно, для физико-химических превращений это – весьма упрощенный способ описания. С возможностями более строгого способа описания физико-химических превращений мы познакомимся позже (части 10 и 11).

6.1. Задача о плоской стенке

Рассмотрим задачу о плоской стенке, омываемой средами с заданными температурами (рис. 6.1). При наличии объемного тепловыделения постоянной интенсивности уравнение теплопроводности для стационарного режима принимает вид (уравнение (5.11) при условии $\partial T/\partial t = 0$)

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q_V}{\lambda} = 0. \quad (6.1)$$

Граничными условиями, очевидно, будут слева – $T = T_1$; справа – $T = T_2$, (6.2)

либо

$$\begin{aligned} \text{слева:} \quad & -\lambda \frac{dT}{dx} = \alpha_1 (T_{e1} - T); \\ \text{справа:} \quad & -\lambda \frac{dT}{dx} = \alpha_2 (T - T_{e2}). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Если $(T_{e1} - T) > 0$, то омывающая слева среда является источником тепла для пластины. Если $(T_{e1} - T) < 0$, омывающая среда способствует охлаждению пластины. В любом случае задача решается простым интегрированием:

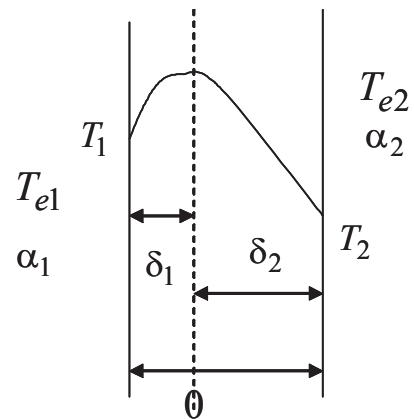


Рис 6.1. Иллюстрация к задаче о плоской стенке

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q_V}{\lambda}x + C_1;$$

$$T = -\frac{q_V}{\lambda} \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2. \quad (6.4)$$

Уравнение (6.4) есть общее решение уравнения (6.1). Чтобы найти постоянные интегрирования, нужно поместить начало координат на одной из поверхностей пластины и подставить (6.4) в нужные граничные условия.

Поступим иначе.

Очевидно, что при интенсивном тепловыделении внутри пластины тепло может отдаваться в омывающие ее среды с двух поверхностей. Т.е., кривая распределения температуры будет иметь максимум. Пусть ось координат проходит через этот максимум, который находится на расстоянии δ_2 от правой поверхности пластины. Величина δ_2 неизвестна и будет определена позже.

Из условия экстремума температурной кривой $dT/dx = 0$ при $x = 0$ следует, что в (6.4) $C_1 = 0$. Следовательно, решение примет вид

$$T = -\frac{q_V}{\lambda} \frac{x^2}{2} + C_2x.$$

Подставляя это уравнение в граничное условие на правой поверхности пластины, т.е. при $x = \delta_2$, найдем

$$\alpha_2 \left(C_2 - \frac{q_V \delta_2^2}{2\lambda} - T_{e2} \right) = q_V \delta_2. \quad (6.5)$$

Последнее соотношение можно интерпретировать из физических соображений. Так как плоскость $x = 0$ можно считать теплоизолированной, то

$$q \Big|_{x=0} = -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = 0$$

и все тепло, выделившееся в пластине справа, должно быть отведено в окружающую среду посредством теплоотдачи с правой стенки. В противном случае будет нарушено условие стационарности процесса. Величина $q_V \delta_2$ справа в (6.5) есть количество тепла, выделяющееся в единицу времени в объеме пластины с толщиной, равной единице.

Слева в (6.5) стоит выражение для потока теплоотдачи с единицы площади поверхности пластины.

Аналогичные рассуждения для левого слоя пластины с толщиной $\delta_1 = \delta - \delta_2$ приводят к уравнению

$$\alpha_1 \left(C_2 - \frac{q_V (\delta - \delta_2)^2}{2\lambda} - T_{e1} \right) = q_V (\delta - \delta_2). \quad (6.6)$$

Выражая C_2 из (6.5) и (6.6), приравнявая полученные формулы друг другу, найдем положение максимума температурной кривой

$$\delta_2 = \frac{2\lambda \alpha_1 \alpha_2 (T_{e1} - T_{e2}) + q_V \delta \alpha_2 (\delta \alpha_1 + \lambda)}{2q_V [\delta \alpha_1 \alpha_2 + \lambda (\alpha_1 + \alpha_2)]}. \quad (6.7)$$

Постоянную интегрирования теперь легко найти, используя (6.5) либо (6.6). Решение задачи принимает особенно простой вид, если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ и $T_{e1} = T_{e2} = T_e$. В этом случае, очевидно, $\delta_1 = \delta_2 = \delta/2$ (т.е., максимум температуры находится в центре пластины) и

$$C_2 = \frac{q_V \delta}{2\alpha} + \frac{q_V \delta^2}{8\lambda} + T_e;$$

$$T = \frac{q_V}{2\lambda} \left[\left(\frac{\delta}{2} \right)^2 - x^2 \right] + \frac{q_V \delta}{2\alpha} + T_e. \quad (6.8)$$

Максимальная температура в точке $x = 0$

$$T_{\max} = \frac{q_V \delta}{2\alpha} + \frac{q_V \delta^2}{8\lambda} + T_e \quad (6.9)$$

будет тем больше, чем меньше теплопроводность пластины.

Температуры стенок в этом случае одинаковы

$$T_1 = T_2 = \frac{q_V \delta}{2\alpha} + T_e$$

и растут с ухудшением теплоотдачи.

Решение задачи с граничными условиями первого рода легко получить с помощью системы уравнений, следующей из граничных условий (6.2),

$$-\frac{q_V \delta_2^2}{2\lambda} + C_2 = T_2;$$

$$-\frac{q_V (\delta - \delta_2)^2}{2\lambda} + C_2 = T_1.$$

Следовательно, максимум температуры будет располагаться на расстоянии δ_2 от правой поверхности стенки

$$\delta_2 = \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{2\lambda(T_1 - T_2)}{q_V \delta^2} \right).$$

Решение для температуры примет вид

$$T = T_2 + \frac{q_V}{2\lambda} \left\{ \left[\frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{2\lambda}{q_V \delta^2} (T_1 - T_2) \right) \right]^2 - x^2 \right\}. \quad (6.10)$$

При очень больших значениях α граничные условия третьего рода переходят в граничные условия первого рода. Тогда, полагая $\alpha \rightarrow \infty$, из решения симметричной задачи (6.8) найдем

$$T = \frac{q_V}{2\lambda} \left[\left(\frac{\delta}{2} \right)^2 - x^2 \right] + T_s, \quad (6.11)$$

где $T_s = T_1 = T_2 = T_e$ (температура стенок равна температуре омывающих сред), и максимальное значение температуры есть

$$T_{\max} = \frac{q_V \delta^2}{8\lambda} + T_s. \quad (6.12)$$

Пусть теперь коэффициент теплопроводности λ зависит от температуры

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \beta T). \quad (6.13)$$

Тогда для нахождения поля температуры в пластине нам потребуется уравнение теплопроводности

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) + q_V = 0.$$

Первый интеграл этого уравнения есть

$$\lambda_0 (1 + \beta T) \frac{dT}{dx} + q_V x + C_1 = 0.$$

Последующее интегрирование дает

$$\lambda_0 T + \lambda_0 \beta \frac{T^2}{2} + q_V \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 = 0. \quad (6.14)$$

С помощью (6.14) и граничных условий первого рода (6.2) найдем систему уравнений для определения постоянных интегрирования

$$\lambda_0 T_1 + \lambda_0 \beta \frac{T_1^2}{2} + C_2 = 0, \quad x = 0;$$

$$\lambda_0 T_2 + \lambda_0 \beta \frac{T_2^2}{2} + q_V \frac{\delta^2}{2} + C_1 \delta + C_2 = 0, \quad x = \delta.$$

Первое уравнение сразу дает C_2 , а из второго находим

$$C_1 = \lambda_0 \frac{T_1 - T_2}{\delta} + \frac{\lambda_0 \beta}{2} \frac{T_1^2 - T_2^2}{\delta} - q_V \frac{\delta}{2}.$$

В результате уравнение для температуры (6.14) можно представить в виде

$$\lambda_0 T + \lambda_0 \beta \frac{T^2}{2} + q_V \frac{x^2}{2} + \left[\lambda_0 (T_1 - T_2) + \frac{\lambda_0 \beta}{2} (T_1^2 - T_2^2) - q_V \frac{\delta^2}{2} \right] \frac{x}{\delta} - \lambda_0 \left(T_1 + \beta \frac{T_1^2}{2} \right) = 0$$

или

$$\frac{\gamma}{2} \theta^2 + (1 + \sigma \gamma) \theta + f(\xi) = 0, \quad (6.15)$$

где

$$f(\xi) = \frac{\Phi}{2} \xi^2 - \frac{\Phi}{2} \xi - (1 - \xi) \left(1 + \frac{\gamma}{2} + \gamma \sigma \right),$$

$$\gamma = \beta (T_1 - T_2), \quad \sigma = \frac{T_2}{T_1 - T_2}, \quad \Phi = \frac{q_V \delta^2}{\lambda_0 (T_1 - T_2)}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad \theta = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2},$$

так что

$$f(0) = - \left(1 + \frac{\gamma}{2} + \gamma \sigma \right),$$

$$f(1) = 0.$$

Из (6.15) находим

$$\theta = \frac{-(1 + \sigma \gamma) \pm \sqrt{(1 + \sigma \gamma)^2 - 2\gamma f(\xi)}}{\gamma}.$$

Подкоренное выражение всегда положительное и меняется от

$$(1 + \sigma \gamma)^2 + 2\gamma \left(1 + \frac{\gamma}{2} + \gamma \sigma \right) > 0$$

при $\xi = 0$, где $\theta = 1$, до

$$(1 + \sigma \gamma)^2 > 0$$

при $\xi = 1$, где $\theta = 0$.

Поэтому перед корнем выбираем знак «+».

Положение экстремума на температурной кривой найдем из условия

$$\frac{d\theta}{d\xi} = 0.$$

Имеем

$$\xi = \frac{1}{2} - \frac{1}{\varphi} \left(1 + \frac{\gamma}{2} + \gamma\sigma \right).$$

Следовательно, чтобы экстремум наблюдался при $\xi > 0$, необходимо выполнение условия

$$\varphi > 2 \left(1 + \frac{\gamma}{2} + \gamma\sigma \right).$$

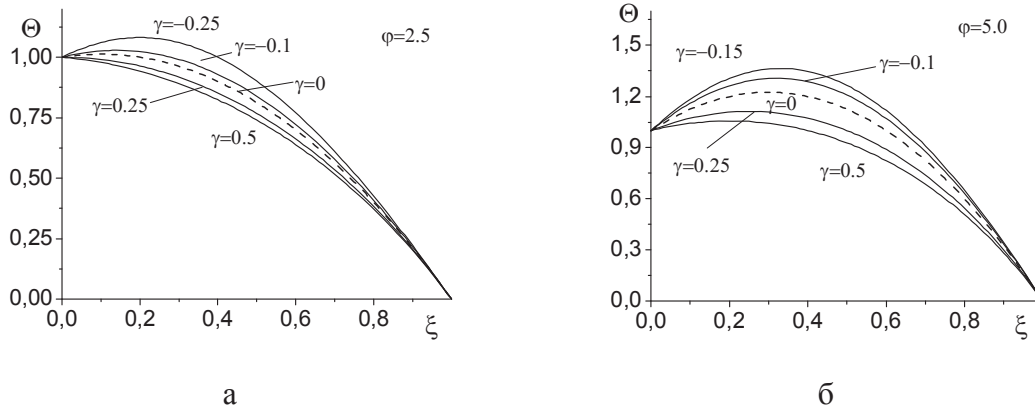


Рис. 6.2. Распределение температуры по радиусу цилиндра в нелинейной задаче с объемным тепловыделением. Пунктир соответствует случаю постоянного коэффициента теплопроводности: а) $\varphi=2,5$; б) $\varphi=5,0$

Если $\gamma = 0$ (т.е., коэффициент теплопроводности от температуры не зависит), из (6.15) имеем

$$\theta = -\frac{\varphi}{2} \xi^2 + \frac{\varphi}{2} \xi + (1 - \xi). \quad (6.16)$$

На рис. 6.2 изображено распределение температуры θ в плоском слое для различных значений γ и источника φ . Принято, что $\sigma = 0,5$ ($T_1 = 3T_2$). Если коэффициент теплопроводности растет с температурой, $\gamma > 0$, максимум смещается к левой границе.

Приведем решения еще некоторых задач для тел канонической формы.

6.2. Цилиндр с объемным тепловыделением

Рассмотрим бесконечный сплошной цилиндр, равномерно нагреваемый (или охлаждаемый) с боковой поверхности. В объеме цилиндра находится источник тепла постоянной интенсивности q_V . Требуется найти распределение температуры для установившегося режима.

Одномерное уравнение теплопроводности для цилиндра с объемным тепловыделением есть (уравнение (5.19) при условии $\partial T/\partial t = 0$)

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q_V}{\lambda} = 0.$$

С помощью новой функции $u = dT/dr$ уравнение переписывается в виде

$$r \frac{du}{dr} + u + \frac{q_V r}{\lambda} = 0.$$

или

$$\frac{d(ru)}{dr} + \frac{q_V r}{\lambda} = 0.$$

Следовательно, первый интеграл уравнения есть

$$ru = -\frac{q_V r^2}{2\lambda} + C_1.$$

Возвращаясь к температуре, найдем

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{q_V r}{2\lambda} + \frac{C_1}{r}$$

или

$$T = -\frac{q_V r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2. \quad (6.17)$$

Это и есть общее решение.

Для сплошного цилиндра из условия симметрии $dT/dr = 0$ при $r = 0$ имеем $C_1 = 0$.

Воспользуемся граничными условиями третьего рода на внешней поверхности цилиндра $r = R$:

$$-\lambda \frac{dT}{dr} = \alpha(T - T_e).$$

Подставляя сюда решение (6.17), находим

$$C_2 = \frac{q_V R}{2\alpha} + \frac{q_V R^2}{4\lambda} + T_e.$$

Следовательно, распределение температуры по радиусу цилиндра дается формулой

$$T = \frac{q_V}{4\lambda} (R^2 - r^2) + \frac{q_V R}{2\alpha} + T_e. \quad (6.18)$$

Из равенства (6.18) можем найти максимальную температуру (которая располагается, очевидно, на оси цилиндра)

$$T_{\max} = \frac{q_V}{4\lambda} R^2 + \frac{q_V R}{2\alpha} + T_e \quad (6.19)$$

и температуру стенок

$$T_s = \frac{q_V R}{2\alpha} + T_e.$$

Устремляя α к бесконечности, приходим к решению задачи с граничными условиями первого рода, когда $T_s = T_e$.

Найдем плотность теплового потока на поверхности цилиндра

$$q = \alpha(T_s - T_e) = \frac{q_V R}{2}$$

и полный тепловой поток с поверхности цилиндра

$$Q = qF = \frac{q_V R}{2} 2\pi R l = q_V \pi R^2 l.$$

Выражения (6.16) и (6.19) для температуры и максимальной температуры можем представить в безразмерной форме

$$\theta = \frac{T - T_e}{T_* - T_e} = \frac{\varphi}{4} (1 - \xi^2) + \frac{\varphi}{2Bi},$$

$$\theta_{\max} = \frac{T_{\max} - T_e}{T_* - T_e} = \frac{\varphi}{4} + \frac{\varphi}{2Bi},$$

где $\xi = \frac{r}{R}$, $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$, $\varphi = \frac{q_V R^2}{\lambda(T_* - T_e)}$.

Полагая $\varphi = 1$, определим масштабную температуру

$$T_* = T_e + \frac{q_V}{\lambda} R^2. \quad (6.20)$$

Это есть максимальная температура, до которой может «догреться» цилиндр радиуса R с теплопроводностью λ при «мгновенном» выделении в нем тепла мощностью q_V .

Следовательно,

$$\theta = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) + \frac{1}{2Bi},$$

$$\theta_{\max} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2Bi}.$$

Задача в цилиндрической системе координат с внутренним тепловыделением – типичная задача теории теплопроводности о проводе, по которому течет электрический ток. Мощность внутреннего источника тепла q_V определяется в этом случае формулой

$$q_V = \frac{I^2 R_e}{V},$$

где I – сила тока, А; R_e – электрическое сопротивление, V – объем проволоки (т.е., это – интенсивность тепловыделения на единицу объема провода).

Пример. Найти максимальную силу тока, который можно пропускать по алюминиевой проволоке ($\lambda = 204$ Вт/(м·К)) диаметром 1 мм, чтобы ее температура не превышала 200°C . Проволока подвешена в воздухе с температурой 25°C . Коэффициент конвективной теплоотдачи от проволоки к воздуху равен 10 Вт/(м²·К). Электрическое сопротивление на единицу длины проволоки есть $0,037$ Ом/м.

Решение. Воспользуемся формулой (6.19), из которой следует

$$T_{\max} = T_e + \frac{q_V R}{2 \alpha} \left[1 + \frac{R\alpha}{2\lambda} \right] = T_e + \frac{I^2}{2\pi R\alpha} \frac{R_e}{l} \left[1 + \frac{R\alpha}{2\lambda} \right].$$

Величина R_e/l и есть сопротивление проволоки на единицу длины. Подставляем заданные значения физических величин:

$$200 = 25 + \frac{I^2}{2 \cdot \pi \cdot (10^{-3}/2) \cdot 10} \cdot 0.037 \left[1 + \frac{(10^{-3}/2) \cdot 10}{2 \cdot 204} \right].$$

Отсюда находим силу тока $I = 12,2$ А.

Заметим, что не представляет особого труда найти решение задачи о распределении температуры в проволоке с током для переменного коэффициента теплопроводности, например, полагая $\lambda = \lambda_0(1 + \beta T)$. Первый интеграл в этом случае будет следовать из уравнения

$$\frac{d(ru)}{dr} + \frac{q_V r}{\lambda_0(1 + \beta T)} = 0.$$

Ход решения аналогичен задаче о плоской стенке с переменным коэффициентом теплопроводности $\lambda = \lambda(T)$.

Задача об охлаждении цилиндра с объемным тепловыделением представляет, в частности, интерес для нахождения распределения температуры в катодах, используемых в плазмотронах для генерации потоков ионов. В практическом приложении эта задача может быть переформулирована так: найти мощность источника, достаточную для распыления катода при условии, что для этого нужно достичь температуры плавления T_m материала катода. Для решения этой задачи можно использовать формулу (6.19), из которой следует

$$q_V = \frac{T_m - T_e}{\frac{R^2}{4\lambda} + \frac{R}{2\alpha}}.$$

В условиях теплообмена излучением (глава 9) задача усложняется и может быть решена только численно.

6.3. Провод с изоляцией

Используя общее решение (6.17), можно найти распределение температуры по толщине стенки полого цилиндра или по толщине цилиндра, покрытого защитным слоем. В первом случае нужно задать условия на внутренней поверхности цилиндра. Во втором случае (рис. 6.3) потребуется дополнительное условие на границе раздела двух материалов с разными свойствами, т.е. граничное условие четвертого рода.

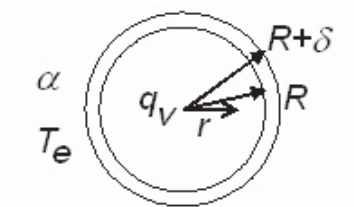


Рис. 6.3. К задаче об изолированном проводе

Строгая математическая постановка этой задачи включает уравнение теплопроводности для провода (индекс «1») и изоляции (индекс «2»)

$$\frac{d^2 T_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_1}{dr} + \frac{q_V}{\lambda_1} = 0, \quad (6.21)$$

$$\frac{d^2 T_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_2}{dr} = 0 \quad (6.22)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} r = 0: & \quad dT/dr = 0; \\ r = R: & \quad dT/dr = 0, \quad T_1 = T_2; \\ r = R + \delta: & \quad \lambda_2 \frac{dT_2}{dr} = \alpha(T_2 - T_e). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Первое условие есть условие симметрии; второе говорит о том, что тепловой контакт между проводом и изоляцией – идеальный, а третье

соответствует конвективному теплообмену провода с изоляцией с окружающей средой.

Общее решение задачи в соответствии с (6.17) можно представить так

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{q_V r^2}{4\lambda_1} + C_1 \ln r + C_2, \\ T_2 &= C_3 \ln r + C_4. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Подставляя (6.24) в первое граничное условие, найдем

$$C_1 = 0.$$

Второе условие дает

$$\lambda_1 \left(-\frac{q_V R}{2\lambda_1} \right) = \lambda_2 \frac{C_3}{R},$$

откуда имеем

$$C_3 = -\frac{q_V R^2}{2\lambda_2}.$$

Из равенства температур на границе раздела следует

$$-\frac{q_V R^2}{4\lambda_1} + C_2 = -\frac{q_V R^2}{2\lambda_2} \ln R + C_4.$$

Последнее из условий (6.23) позволяет определить C_4 . Имеем

$$-\lambda_2 \frac{C_3}{R} \equiv \frac{\lambda_2}{R} \cdot \frac{q_V R^2}{2\lambda_2} = \alpha \left[-\frac{q_V R^2}{2\lambda_2} \ln(R + \delta) + C_4 - T_e \right]$$

или

$$C_4 = T_e + \frac{q_V R^2}{2\lambda_2} \ln(R + \delta) + \frac{q_V R}{2\alpha}.$$

Теперь можно найти последнюю постоянную интегрирования

$$C_2 = T_e + \frac{q_V R^2}{4\lambda_1} \left(1 + \frac{2\lambda_1}{\alpha R} \right) + \frac{q_V R^2}{2\lambda_2} \ln \left(\frac{R + \delta}{R} \right).$$

Следовательно, распределение температуры в проводе с изоляцией описывается формулами

$$T_1 = T_e + \frac{q_V R^2}{4\lambda_1} \left(1 + \frac{2\lambda_1}{\alpha R} \right) + \frac{q_V R^2}{2\lambda_2} \ln \left(\frac{R + \delta}{R} \right) - \frac{q_V r^2}{4\lambda_1}, \quad (6.25)$$

$$T_2 = T_e + \frac{q_V R^2}{2\lambda_2} \frac{\lambda_2}{\alpha R} + \frac{q_V R^2}{2\lambda_2} \ln\left(\frac{R+\delta}{r}\right).$$

Окончательное решение представим в виде

$$\theta_1 = \frac{1}{4} \left(1 + 2 \frac{Bi}{K_\lambda} \right) + \frac{K_\lambda}{2} \ln(1+\varepsilon) - \frac{\xi^2}{4}, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (6.26)$$

$$\theta_2 = \frac{K_\lambda}{2Bi} + \frac{K_\lambda}{2} \ln\left(\frac{1+\varepsilon}{\xi}\right), \quad 1 \leq \xi \leq 1+\varepsilon,$$

где

$$\theta_i = \frac{T_i - T_e}{T_* - T_e}, \quad \xi = \frac{r}{R}, \quad T_* = T_e + \frac{q_V R^2}{\lambda_1}, \quad Bi = \frac{\alpha R}{\lambda_2}, \quad K_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \varepsilon = \frac{\delta}{R}.$$

Такая форма представления решения удобна для анализа.

Определим поток тепла с поверхности проводника

$$q = \alpha (T_2(R+\delta) - T_e) \text{ и}$$

$$Q = \pi R^2 R l \alpha (T_2(R+\delta) - T_e).$$

Подставим сюда T_2 из (6.25) и воспользуемся безразмерными параметрами

$$\frac{Q}{\pi R^2 R l \alpha (T_* - T_e)} = \frac{K_\lambda}{Bi}. \quad (6.27)$$

Если $K_\lambda/Bi < 1$, то изоляция не отводит тепло от проводника с током. Если $K_\lambda/Bi > 1$, то возможно его остывание за счет потерь тепла в окружающую среду.

Пример. Пусть по длинной алюминиевой проволоке диаметром 1 см течет электрический ток силой тока 1000 °А. Проволока покрыта слоем резиновой изоляции толщиной 3 мм ($\lambda_2 = 0,15$ Вт/(м·К)). Температура наружной поверхности изоляции 30 С. Найти температуру внутренней поверхности изоляции. Омическое сопротивление проволоки на единицу длины $3,7 \cdot 10^{-4}$ Ом/м.

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся второй формулой (6.25). С учетом того, что задана температура внешней поверхности

изоляция, т.е. $\alpha_2 \rightarrow \infty$, и $q_V = \frac{R_e I^2}{\pi R^2 l}$, имеем

$$T_2(r=R) = T_e + \frac{R_e}{l} \cdot \frac{I^2}{2\pi\lambda_2} \ln\left(\frac{R+\delta}{R}\right) =$$

$$= (273 + 30) + 3,7 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{(1000)^2}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,15} \ln\left[\frac{0,005 + 0,003}{0,005}\right] \approx 477,6 \text{ К.}$$

Используя значение коэффициента теплопроводности алюминиевой проволоки $\lambda_1 \approx 232 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ и первую из формул (6.25), можем рассчитать температуру в центре провода. В рассматриваемых условиях имеем

$$T_1(r=R) = T_e + \frac{R_e}{l} \frac{I^2}{2\pi\lambda_2} \ln\left(\frac{R+\delta}{R}\right) + \frac{R_e}{l} \frac{I^2}{4\pi\lambda_1} = T_2(r=R) + \frac{R_e}{l} \frac{I^2}{4\pi\lambda_1} =$$

$$= 477,6 + \frac{3,7 \cdot 10^{-4} (1000)^2}{4 \cdot 3,14 \cdot 232} \approx 477,7,$$

т.е. температура в центре провода практически не отличается от его температуры на границе с изоляцией.

6.4. Шар с объемным тепловыделением

Рассмотрим задачу о нахождении распределения температуры в шаре с объемным тепловыделением. Одномерное уравнение теплопроводности в этом случае имеет вид (формула (5.10) при условии $\partial T/\partial t = 0$)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dT}{dr} + \frac{q_V}{\lambda} \equiv \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q_V}{\lambda} = 0. \quad (6.28)$$

Общий интеграл этого уравнения находится аналогично задаче о цилиндре

$$T = -\frac{q_V r^2}{6\lambda} + \frac{C_1}{r_1} + C_2. \quad (6.29)$$

Из условия симметрии $dT/dr = 0$ при $r = 0$ для сплошного шара имеем $C_1 = 0$. Условие теплообмена с окружающей средой

$-\lambda \frac{dT}{dr} = \alpha(T - T_e)$ при $r = R$ дает

$$C_2 = T_e + \frac{q_V}{3\alpha} R + \frac{q_V}{6\lambda} R^2.$$

Следовательно,

$$T = T_e + \frac{q_V}{3\alpha} R + \frac{q_V}{6\lambda} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (6.30)$$

Находим далее максимальную температуру (в центре шара)

$$T_{\max} = T_e + \frac{q_V}{3\alpha} R + \frac{q_V}{6\lambda} R^2,$$

температуру его поверхности

$$T_S = T_e + \frac{q_V}{3\alpha} R$$

и полный поток тепла через поверхность шара

$$Q = -\pi \frac{R^2}{4} \lambda \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=R} = \frac{1}{3} \pi R^3 q_V.$$

В безразмерных переменных $\theta = \frac{T - T_e}{T_* - T_e}$, $\xi = \frac{r}{R}$, где, как и в задачах

о цилиндре, $T_* = T_e + \frac{q_V R^2}{\lambda}$, формула (6.30) принимает вид

$$\theta_s = \frac{1}{3Bi} + \frac{1 - \xi^2}{6} \quad (6.31)$$

Подобная задача о цилиндре дает нам формулу

$$\theta_c = \frac{1}{2Bi} + \frac{1 - \xi^2}{4},$$

следующую из (6.18).

Для пластины симметричная задача (с одинаковыми температурами омывающих сред и одинаковыми коэффициентами теплоотдачи) приводит к формуле (6.8), откуда при условии $R = \delta/2$ имеем

$$\theta_p = \frac{1}{Bi} + \frac{1 - \xi^2}{2}.$$

Сравнение полученных решений показано на рис. 6.4.

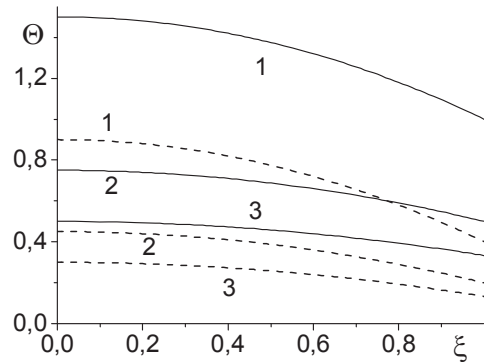


Рис. 6.4. Сравнение решений задач для тел канонической формы с объемным тепловыделением. Сплошные линии – $Bi = 1,0$; пунктирные линии $Bi = 2,5$. 1. – пластина, 2. – цилиндр, 3 – сфера.

6.5. Задача об ошибках термопары¹⁹

Если тепло выделяется или поглощается в одной или более локальных областях («точках»), то говорят, что система содержит местные или сосредоточенные источники тепла. К таким системам относятся системы с термопарами. Но прежде чем перейти к задаче об ошибках, связанных с теплопроводностью проводов термопары, рассмотрим стационарное распределение температуры в неизолированной бесконечной плоской пластине с помещенным в ней цилиндрическим источником тепла (рис. 6.5).

Пусть общее количество тепла, выделяемое источником тепла в цилиндрическом объеме $\pi r_s^2 \delta$ (r_s – радиус локального цилиндрического источника тепла; δ – толщина пластины), равно q_0 и источник всюду имеет одинаковую температуру T_0 .

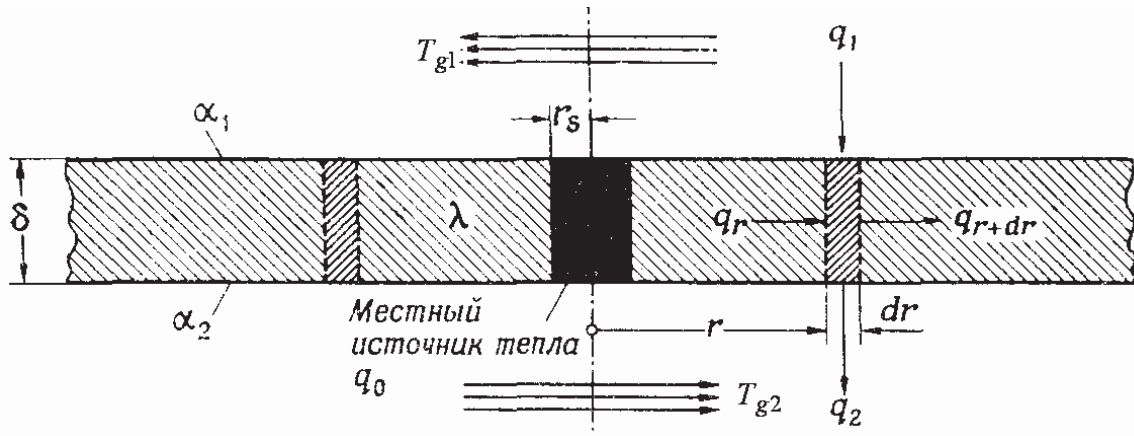


Рис. 6.5. Местный источник тепла в неадиабатической пластине

Дополнительно, кроме тепла от центрального источника, пластина получает тепло через лицевую поверхность 1 от омывающего ее газа с температурой T_{g1} и отдает тепло через поверхность 2 газу с температурой T_{g2} . Коэффициенты теплоотдачи на этих поверхностях равны α_1 и α_2 . Все эти величины, а также теплопроводность пластины считаются постоянными.

Если *пластина тонкая*, то в направлении ее нормали нет градиента температуры, т.е. $T_1 = T_2$. Требуется найти распределение температуры по радиусу $T(r)$ в стационарном состоянии для $r_s < r < \infty$.

¹⁹ Шнейдер П. Инженерные проблемы теплопроводности. М.:ИЛ, 1960. 480 с.

В общем случае для решения этой задачи нам потребуется стационарное двумерное уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (6.32)$$

Так как пластина тонкая, то пренебрегая распределением температуры в ней, проинтегрируем (6.32) по z в пределах от 0 до δ :

$$\int_0^{\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dz + \int_0^{\delta} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dz = 0$$

или

$$\delta \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=\delta} - \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = 0.$$

Так как при $z = \delta$ имеет место условие

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha_1 (T_{g1} - T),$$

а при $z = 0$ - условие

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha_2 (T - T_{g2}),$$

то уравнение теплопроводности после подстановки в него условий на поверхностях принимает вид

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda \delta} \left(T - \frac{\alpha_1 T_{g1} + \alpha_2 T_{g2}}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) = 0. \quad (6.33)$$

При отсутствии источника q_0 пластина была бы изотермической, т.е. имела бы постоянную всюду температуру. Такую температуру T_{∞} пластина имеет при $r \rightarrow \infty$, где $dT/dr = 0$:

$$T_{r \rightarrow \infty} = T_{\infty} = \frac{\alpha_1 T_{g1} + \alpha_2 T_{g2}}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad r > r_s. \quad (6.34)$$

Это есть температура всей пластины при $q_0 = 0$.

Перейдем к переменной $\Phi = T - T_{\infty}$. Тогда вместо (6.33) получим уравнение вида

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \varepsilon^2 \Phi = 0, \quad (6.35)$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda \delta}}.$$

Это есть уравнение Бесселя нулевого порядка, общее решение которого имеет вид

$$\Phi = T - T_\infty = C_1 I_0(\varepsilon r) + C_2 K_0(\varepsilon r),$$

где I_0 и K_0 – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка соответственно. Вид этих функций в небольшой области изменения аргумента показан на рис. 6.6.

Функция $I_0(\varepsilon r)$ неограниченно возрастает по мере того, как ее аргумент $\varepsilon r \rightarrow \infty$. Поэтому, чтобы температура оставалась конечной, нужно положить $C_1 = 0$.

Вследствие наличия источника тепла q_0 при $r = r_s$ пластина является неизотермической. При $r = r_s$ имеем

$$\begin{aligned} q_0 = -\lambda F_s \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=r_s} &= -2\pi\lambda\delta r_s \left[\frac{d}{dr} (C_2 K_0(\varepsilon r)) \right]_{r=r_s} = \\ &= 2\pi\lambda\delta r_s C_2 \varepsilon K_1(\varepsilon r_s), \end{aligned}$$

где K_1 – модифицированная функция Бесселя второго рода первого порядка, F_s – площадь поверхности тепловыделяющего элемента. Это соотношение дает нам постоянную интегрирования C_2 :

$$C_2 = \frac{q_0}{2\pi\lambda\delta r_s \varepsilon K_1(\varepsilon r_s)}.$$

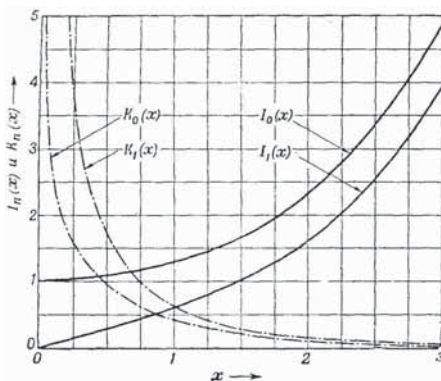


Рис. 6.6. Модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого и первого порядков

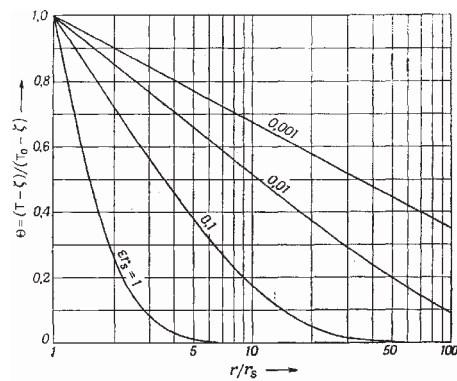


Рис. 6.7. Радиальное распределение температуры вокруг локального источника тепла в неадиабатической пластине

В результате радиальное распределение температуры определится формулой

$$T = T_{\infty} + \frac{q_0}{2\pi\lambda\delta\epsilon r_s} \cdot \frac{K_0(\epsilon r)}{K_1(\epsilon r_s)} \quad (6.36)$$

или

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{K_0(\epsilon r_s \xi)}{K_1(\epsilon r_s)}, \quad \xi = \frac{r}{r_s},$$

где температура T_0 определяется величиной q_0

$$T_0 = T_{\infty} + \frac{q_0}{2\pi\lambda\delta\epsilon r_s}.$$

Для малых значений $\epsilon r_s \xi$ можно воспользоваться асимптотическим представлением функции²⁰

$$K_0[\epsilon r_s \xi] \approx \ln\left(\frac{2}{\epsilon r_s \xi}\right) - 0,577, \quad \epsilon r_s \xi < 0,05 \quad (6.37)$$

Распределение температуры в пластине для различных значений ϵr_s показано на рис. 6.7.

Теперь можно перейти к задаче об ошибках термопары непосредственно. Как известно, измерение температуры поверхностей обычной термопарой сопряжено с рядом ошибок электрического, физико-химического и термического происхождения. Возможно, что наиболее серьезной из ошибок, встречающихся при измерении температуры термопарой обычного типа, является так называемая *ошибка за счет теплопроводности проводов термопары*.

Происхождение ошибок при измерении температуры термопарой иллюстрирует рис. 6.8. Если температура среды больше измеряемой температуры поверхности $T_{g1} > T_{g2}$, то провода термопары, находящиеся при более высокой температуре, будут подводить тепло к пластине с более низкой температурой, что вызовет местное повышение температуры как раз в той точке, где спай термопары должен измерять температуру поверхности. Следовательно, в этом случае показания термопары дадут завышенное по сравнению с истинным значением температуры.

²⁰ Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: 1978.

И наоборот, если $T_{g1} < T_{g2}$, то термопара будет регистрировать температуру, меньшую фактической. Такие ошибки полностью устраняются лишь в том случае, если $T_{g1} = T_{g2}$, что возможно только в идеальных условиях.

Если принять, что провода термопары питают источник Q_0 , то для определения ошибки можно воспользоваться только что полученным решением.

Если $T_{g1} > T_{g2}$, то термопара становится источником тепла, и Q_0 будет представлять собой разность между теплом, подводимым проводами к спая Q_{01} , и теплом, рассеянным на поверхности круглого источника Q_{02} . Имеем

$$Q_{01} = \Lambda_1 (T_{g1} - T_0);$$

$$Q_{02} = \Lambda_2 (T_0 - T_{g2}),$$

где Λ_1 – термическая проводимость проводов термопары ($\Lambda_1 = \pi l K_{T1}$); Λ_2 – поверхностная проводимость. Эти коэффициенты, как уже известно, рассчитываются через коэффициенты теплопроводности проводов и изоляторов, коэффициенты теплообмена и характерные линейные размеры (см. разделы 5.3, 3.4).

Следовательно,

$$Q_0 = Q_{01} - Q_{02} = (\Lambda_1 T_{g1} + \Lambda_2 T_{g2}) - (\Lambda_1 + \Lambda_2) T_0. \quad (6.38)$$

Воспользовавшись решением (6.36), найдем

$$T - T_\infty = \frac{(\Lambda_1 T_{g1} + \Lambda_2 T_{g2}) - (\Lambda_1 + \Lambda_2) T_0}{2\pi\lambda\delta\epsilon r_s} \cdot \frac{K_0(\epsilon r_s)}{K_1(\epsilon r_s)}$$

или

$$T - T_\infty = \frac{\Lambda_1 (T_{g1} - T_\infty) + \Lambda_2 (T_{g2} - T_\infty) + (\Lambda_1 + \Lambda_2) (T_\infty - T_0)}{2\pi\lambda\delta\epsilon r_s} \cdot \frac{K_0(\epsilon r_s)}{K_1(\epsilon r_s)}.$$

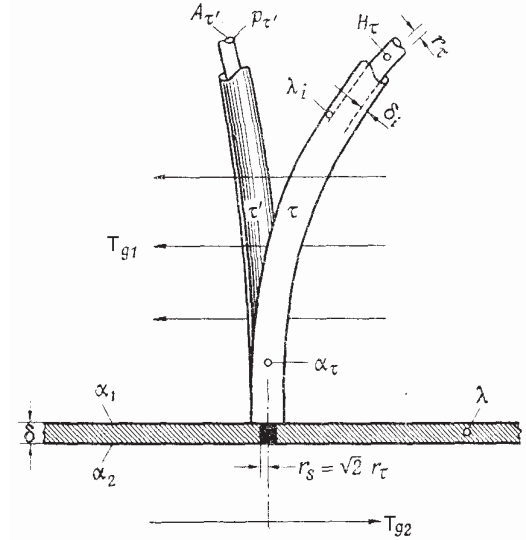


Рис. 6.8. Изолированная термопара в неадиабатической пластине

Принимая, что $T = T_0$ и есть температура, записываемая термопарой (при $r = r_s$), получим

$$(T_0 - T_\infty) \left[1 + \frac{K_0(\varepsilon r_s)}{K_1(\varepsilon r_s)} \cdot \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)}{2\pi\lambda\delta\varepsilon r_s} \right] = \\ = \frac{\Lambda_1(T_{g1} - T_\infty) + \Lambda_2(T_{g2} - T_\infty)}{2\pi\lambda\delta\varepsilon r_s} \cdot \frac{K_0(\varepsilon r_s)}{K_1(\varepsilon r_s)}$$

или

$$T_0 - T_\infty = \frac{\Lambda_1(T_{g1} - T_\infty) + \Lambda_2(T_{g2} - T_\infty)}{(\Lambda_1 + \Lambda_2) + [2\pi\lambda\delta\varepsilon r_s K_1(\varepsilon r_s)]/K_0(\varepsilon r_s)}. \quad (6.39)$$

Итак, T_0 – температура, записанная термопарой; T_∞ – характеризует температуру пластины в отсутствие термопары ($q_0 = 0$) или же температуру в бесконечно удаленной точке. Т.е., разность $T_0 - T_\infty$ и есть абсолютная ошибка для температуры, измеренной термопарой.

На практике, как правило, $\Lambda_1 \gg \Lambda_2$. В этом случае решение можно представить в виде

$$\theta = \frac{T_0 - T_\infty}{T_{g1} - T_\infty} = \frac{1}{1 + 2\pi(\lambda\delta/\Lambda_1) \varepsilon r_s K_1(\varepsilon r_s)/K_0(\varepsilon r_s)}. \quad (6.40)$$

Для расчетов можно воспользоваться асимптотическим представлением функции K_1 для малых значений аргумента

$$K_1(x) \approx x^{-1}, \quad x < 0,05. \quad (6.41)$$

Если термопары не теплоизолированы, то термическая проводимость Λ_1 определяется коэффициентом теплоотдачи термопары в среде), т.е. $\Lambda_1 = \pi l \alpha_1 r_\tau$ (l – длина проводов термопары, r_τ – их радиус).

Тогда с учетом (6.41), (6.37) запишем (6.40) следующим образом

$$\theta = \frac{1}{1 + 2\pi x \frac{1}{\ln(2/y) - 0,577}}, \quad (6.42)$$

где $x = \frac{\lambda\delta}{\pi l r_\tau \alpha_1}$, $y = \varepsilon r_s = \sqrt{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda\delta}} r_s$ (см. формулу (6.35)).

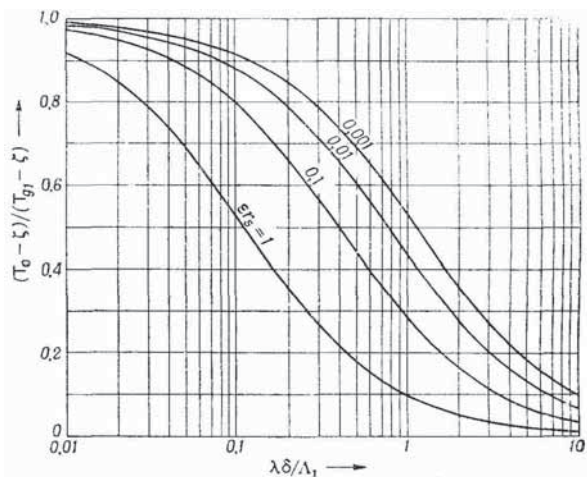


Рис. 6.9. Общая ошибка за счет теплопроводности термопары для неадиабатической пластины.

В качестве радиуса источника тепла можно принять величину

$$r_s = 1.414 r_\tau,$$

где r_τ – радиус проволоки.

На рис. 6.9. изображена абсолютная ошибка термопары в зависимости от x при различных значениях комплекса y . Чем толще пластина, тем больше x , но тем меньше y , так что добиться нулевой ошибки практически невозможно.

6.6. Охлаждение рабочих лопаток турбины

Хорошо известно, что максимальные циклические температуры в газовых турбинах, прежде всего, ограничиваются характеристиками высокотемпературного разрушения турбинных лопаток, работающих при высокой центробежной нагрузке и подвергнутых, кроме того, напряжениям изгиба со стороны газа, вибрационным и термическим напряжениям. Решение задачи повышения максимальных вибрационных температур с целью улучшения характеристик работы газовой турбины возможно двумя путями. Первый путь связан с созданием материалов, способных работать в условиях высоких температур и напряжений длительное время. Второй – связан с использованием и усовершенствованием методов искусственного охлаждения лопаток в процессе работы. Например, турбинные лопатки можно охлаждать непосредственно, нагнетая охлаждающую жидкость по канавкам внутри лопаток или, отводя тепло теплопроводностью от лопаток к турбинному ротору с внутренним охлаждением. Второй способ называют охлаждением за счет проводимости. Эффективность этого метода оценивается, например, по условиям, при которых фактическая температура в любой точке лопатки достигает максимально допустимой для данного материала температуры.

Перенос тепла в лопатке турбины представляет собой случай непрерывного притока тепла к поверхности. Выведем дифференциальное уравнение, пригодное для описания охлаждения лопатки, используя рис. 6.10.

Предположим, что поперечное сечение лопатки A и периметр p остаются постоянными для любых промежуточных значений координаты x . Коэффициент теплоотдачи α и эффективная температура газа T_g постоянны вдоль p и L ; градиентами температуры во всех поперечных сечениях лопатки можно пренебречь. В этих условиях распределение температуры в лопатке будет одномерным, $T = T(x)$.

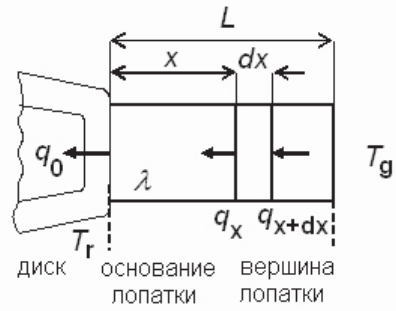


Рис. 6.10. Лопатка турбины, охлаждаемая за счет проводимости

Рассмотрим элемент лопатки dx (рис. 6.10). Элемент проводит тепло в продольном направлении q_x и q_{x+dx} , а с боков получает тепло за счет вынужденной конвекции газа в количестве q_g (газ имеет температуру T_g).

Если в точке x температура есть T , то в точке $x + dx$ будем иметь температуру

$$T_{x+dx} = T + \frac{dT}{dx} dx.$$

Тепловой баланс для этого элемента имеет вид

$$q_g + q_{x+dx} - q_x = 0$$

или

$$\alpha p dx (T_g - T) + \left[-\lambda A \frac{dT}{dx} \left(T + \frac{dT}{dx} dx \right) \right] - \left[-\lambda A \frac{dT}{dx} \right] = 0$$

или

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - N^2 (T - T_g) = 0, \quad (6.43)$$

где $N = \sqrt{\frac{\alpha p}{\lambda A}}$. Т.е., мы имеем уравнение теплопроводности с объемным источником тепла, зависящим от температуры.

Введем новые переменные

$$\theta = \frac{T - T_g}{T_r - T_g}, \quad \xi = \frac{x}{L},$$

где T_r – температура у основания лопатки.

Тогда уравнение (6.43) примет вид

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} - B^2\theta = 0 \quad (6.44)$$

Граничными условиями к уравнению (6.43) будут

$$\begin{aligned} x=0: T &= T_r; \\ x=L: dT/dx &= 0, \end{aligned}$$

или в новых переменных

$$\begin{aligned} \xi=0: \theta &= 1; \\ \xi=1: d\theta/d\xi &= 0. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Второе условие означает, что вершина лопатки непроницаема для тепла.

Легко понять смысл параметра B ,

$$B^2 = \frac{\alpha p L}{\lambda A / L} = \frac{\Lambda_s}{\Lambda_i}.$$

Квадрат этого параметра равен отношению поверхностной и внутренней проводимостей лопатки.

Общее решение уравнения (6.44) имеет вид

$$\theta = C_1 \exp(B\xi) + C_2 \exp(-B\xi). \quad (6.46)$$

Для нахождения постоянных интегрирования имеем систему уравнений, которая следует из (6.46) при подстановке его в условия (6.45)

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ C_1 B \exp(B) - C_2 B \exp(-B) &= 0. \end{aligned}$$

Находим

$$C_1 = \frac{\exp(-B)}{2\operatorname{ch}(B)}, \quad C_2 = \frac{\exp(B)}{2\operatorname{ch}(B)}.$$

В результате распределение температуры в лопатке можно представить в виде

$$\theta = \frac{T - T_g}{T_r - T_g} = \frac{\operatorname{ch}(B(1-\xi))}{\operatorname{ch}(B)}, \quad (6.47)$$

т.е., для заданных температур газа и основания лопатки температура самой лопатки зависит от единственного параметра B . Очевидно, что при $B \rightarrow 0$ имеем $\theta = 1$, т.е. $T = T_r$, а при $B \rightarrow \infty$ имеем $\theta = 0$ или $T = T_g$.

Малые значения параметра B , желательные для повышения эффективности охлаждения, могут быть получены либо снижением поверхно-

стной проводимости лопатки, $\Lambda_s = \alpha p L$, либо увеличением ее внутренней проводимости, $\Lambda_i = \lambda A/L$. Практическое снижение рабочего значения B в значительной степени связано либо с применением поверхностной изоляции, либо с повышением коэффициента теплопроводности самой лопатки.

Вопросы для самоконтроля

1. С какими процессами может быть связано объемное тепловыделение?
2. Запишите простейшее уравнение теплопроводности с объемным источником.
3. В чем состоит качественное отличие в распределении температуры в плоской стенке без объемных источников тепла и с объемными источниками тепла?
4. От каких физических параметров зависит положение максимума температуры?
5. Где находится максимум температуры при теплообмене с окружающей средой сплошных шара и цилиндра, содержащих внутренние источники тепла постоянной интенсивности?
6. Приведите примеры практических задач теплопроводности, где встречаются внутренние источники тепла.
7. Какие граничные условия формулируются в задачах о теплообмене сплошных шара и цилиндра с окружающей средой?
8. Какие новые безразмерные параметры встретились в задачах с объемными источниками тепла?
9. С чем могут быть связаны ошибки при измерении температуры с помощью термопары?
10. Как выглядит уравнение теплопроводности при расчете процесса охлаждения рабочих лопаток турбины? С чем связано объемное тепловыделение (поглощение) в этом случае?

Задания

1. По длинному полому цилиндру длиной L пропускается в осевом направлении ток постоянной силы I . Внутренняя поверхность цилиндра ($r = R_1$) теплоизолирована, а температура наружной поверхности ($r = R_2$) поддерживается равной температуре T_e . Электрической сопротивлением цилиндра R_e . Найти стационарное распределение температуры в цилиндре.

2. Ток силой $I = 200$ А пропускается через проволоку из нержавеющей стали диаметром 2 мм и длиной 1 м. Электрическое сопротивление проволока – 0,125 Ом, коэффициент теплопроводности 17 Вт/(м К). Температура поверхности проволоки 150 С. Требуется рассчитать температуру на оси проволоки.

Предположить, что проволока покрыта слоем изоляции (коэффициент теплопроводности изоляции 0,15 Вт/(м К)), а коэффициент теплоотдачи на поверхности изоляции равен 60 Вт/(м²К). Как нужно изменить силу тока (увеличить или уменьшить), чтобы температура поверхности проволоки осталась равной 150 С.

3. Плоская пластина толщиной L имеет постоянный коэффициент теплопроводности. Поверхность $x = 0$ - теплоизолирована, а поверхность $x = L$ омывается жидкостью, которая обеспечивает постоянную температуру T_1 . В стенке равномерно распределены источники тепла с интенсивностью тепловыделения q_V . Найти максимальную интенсивность тепловыделения в объеме плоской стенки, при которой температура T_1 не превысит 120 С, если $L = 0,1$ м, $\lambda_0 = 0,15$ Вт/(м К).

Рассчитать температуру теплоизолированной поверхности стенки.

Найти температуру теплоизолированной поверхности стенки, максимальную температуру и ее положение, если

$$\lambda = \lambda_0 \left[1 + 0,01T + 10^{-4}T^2 \right].$$

4. (Задача на повторение) В шаровой емкости радиусом R_1 находится жидкость с температурой T_1 . Стенки емкости толщиной δ изготовлены из металла с теплопроводностью λ_1 и покрыты слоем теплоизоляции толщиной Δ с теплопроводностью λ_2 . Требуется найти температуру внешней поверхности изоляции при условии конвективного теплообмена с окружающей средой с коэффициентом теплоотдачи α_2 . Решить задачу для трех вариантов граничных условий:

- а) температура внутренней стенки емкости поддерживается равной T_1 ;
- б) внутренний коэффициент теплоотдачи равен α_1 ;
- в) температура внутренней стенки – T_1 , внешней поверхности теплоизоляции – T_2 , на границе раздела металла и изоляции имеется термическое сопротивление величиной R_T вследствие неидеального теплового контакта (см. раздел 2.10).

ЧАСТЬ 7

Нестационарные задачи теплопроводности

7.1. Обзор задач и методов решения задач теплопроводности

Для дальнейшего нам потребуется некоторое представление о методах решения задач теплопроводности. Речь будет идти о точных методах. Почти все (или все) из известных аналитических методов решения задач математической физики применимы к задачам теории теплопроводности, а методы, хорошо разработанные для решения задач теплопроводности, весьма полезны в других областях. Наиболее известными являются метод функций Грина, метод Дюамеля-Неймана, метод разделения переменных (метод Фурье), методы интегральных преобразований в конечных и бесконечных пределах. Изучение методов решения задач математической физики требует много времени и должно проходить в специальных курсах лекций и на практических занятиях. Тем не менее, примеры решения частных задач могут оказаться весьма полезными.

Задачи теплопроводности можно классифицировать по разным признакам. Возможный вариант классификации представлен на рис. 7.1.

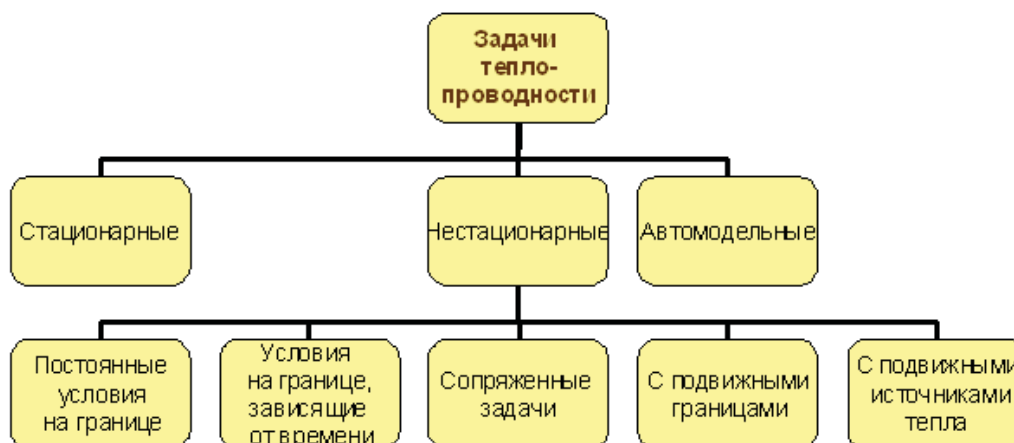


Рис. 7.1.

До сих пор мы занимались анализом только стационарных задач теплопроводности, в которых поле температуры не зависело от времени. В этом и следующем разделах мы будем изучать, в основном, нестациона-

нарные задачи различной степени сложности и для тел разной геометрии, решая которые мы будем знакомиться с некоторыми точными и приближенными аналитическими методами.

В этом разделе, как и в предыдущих, изложение ведется достаточно простым языком, без доказательства специальных теорем, которые можно найти в любом учебнике по математической физике.

Доступным языком основные методы решения задач теплопроводности с многочисленными примерами подробно описаны в учебной литературе, далеко не полный список которой представлен в конце пособия.

7.2. Простейшие нестационарные задачи теплопроводности

Итак, до сих пор мы рассматривали системы, в которых в результате теплопроводности процессы изменения температуры во времени были завершены. Но для установления стационарного состояния с заданной точностью требуется некоторое время. Кроме того, большинство технологических процессов обработки материалов высокоэнергетическими источниками являются существенно нестационарными. На анализе некоторых нестационарных задач остановимся, не прибегая к изучению теоретических основ точных аналитических методов.

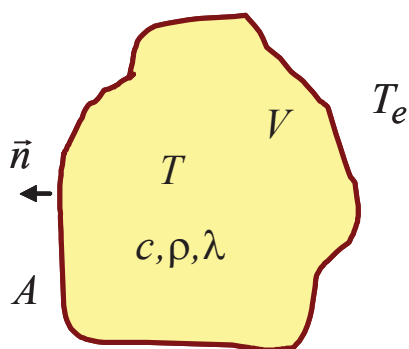


Рис. 7.2. Иллюстрация к формулировке простейшей задачи теплопроводности

Пусть имеется тело, обладающее большой («бесконечной») теплопроводностью. Если при этом тело обладает низким коэффициентом теплообмена, то тепловой поток к телу или от тела определяется, главным образом, конвективным сопротивлением. В этом случае в теле существуют бесконечно малые градиенты температуры, либо они совсем отсутствуют. Некоторые реальные тела малых размеров и большой теплопроводности удовлетворяют таким условиям. Таким условиям, например, удовлетворяют образцы, подвергаемые в печи изотермическому отжигу, спекаемые образцы, когда существует требование однородного прогрева. Для описания эволюции температуры в образце вместо уравнения теплопроводности

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T \quad (7.1)$$

с граничными и начальными условиями вида

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_A = \alpha(T - T_e), \quad (7.2)$$

$$t = 0: T = T_0, \quad (7.3)$$

нам потребуется уравнение теплового баланса

$$c\rho V \frac{\partial T}{\partial t} = -\alpha A(T - T_e), \quad (7.4)$$

которое получается из (7.1) интегрированием по объему V с учетом граничных условий (7.2) на поверхности A .

Температуру окружающего потока считаем постоянной.

Введем безразмерные переменные

$$\theta = \frac{T - T_e}{T_0 - T_e}, \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad (7.5)$$

где $t_* = L^2/a$, $a = \lambda/(c\rho)$, L – характерный линейный размер тела, который определяется как отношение его объема к площади его внешней поверхности:

*Характерный
размер тела*

$$L = \frac{V}{A} = \frac{\text{объем}}{\text{площадь}}$$

Для тел канонической формы характерный размер легко вычисляется. Так, для шара радиуса r_0 имеем

$$L = \frac{(4/3)\pi r_0^3}{4\pi r_0^2} = \frac{r_0}{3};$$

для цилиндра радиуса r_0 и длины $l \gg r_0$ –

$$L = \frac{\pi r_0^2 l}{2\pi r_0 l} = \frac{r_0}{2};$$

для куба с размером ребра l –

$$L = \frac{l^3}{6l^2} = \frac{l}{6}.$$

Безразмерное время в (7.5) есть не что иное, как число Фурье.

Условие применимости постановки задачи (7.4), (7.3) можно записать так

$$\frac{L}{\sqrt{\lambda t_*/(c\rho)}} \ll 1,$$

где t_* – некоторое характерное время (например, время выхода на нужный режим).

Используя (7.5), вместо (7.4) и (7.3) найдем

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{\alpha A t_*}{c\rho V} \theta = -\frac{\alpha L}{\lambda} \theta = -Bi\theta, \quad (7.6)$$

$$\tau = 0: \quad \theta = 1,$$

где $Bi = \frac{\alpha L}{\lambda}$ – критерий Био.

Эта задача легко интегрируется:

$$\frac{d\theta}{\theta} = -Bi d\tau \quad \text{или} \quad \theta = \exp(-Bi \cdot Fo). \quad (7.7)$$

Использование безразмерных критериев позволяет представить результат (7.7) для всех тел с бесконечной теплопроводностью одним универсальным графиком для разных критериев Био (рис. 7.3).

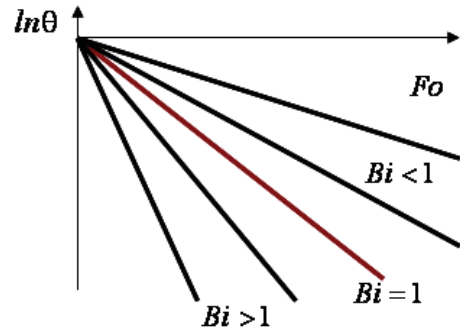


Рис. 7.3. Решение простейшей нестационарной задачи

Пример. При измерении температуры термометром важно знать, на сколько быстро термометр реагирует на изменение температуры.

Полупериодом называют интервал времени, в пределах которого начальная разность между истинной температурой и показаниями термометра сокращается наполовину после внезапного изменения истинной температуры. Определим этот полупериод для ртутного термометра, находящегося в потоке воздуха. Пусть ртутный шарик имеет форму цилиндра $r = 0$ мм. Коэффициент теплопроводности ртути $\lambda = 7,45$ ккал/(м час град). Коэффициент температуропроводности $a = 0,0166$ м²/час. Термическим сопротивлением тонкой стеклянной стенки пренебрегаем. Коэффициент теплообмена с потоком воздуха примем равным $\alpha = 50$ ккал/(м²·час·град).

Решение. Находим параметр теплообмена:

$$Bi = \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{50 \cdot 0,003}{7,45 \cdot 2} = 0,01.$$

Отношение температур T и T_0 будет равно 0,5, когда численное значение показателя степени в (7.7) станет равным 0,693. Тогда для определения полупериода имеем соотношения

$$Bi \cdot Fo = \frac{at}{L^2} \frac{\alpha L}{\lambda} = 0,693 \quad \text{или} \quad \frac{at_{0,5}}{L^2} = \frac{0,693}{0,01},$$

следовательно

$$t_{0,5} = \frac{69,3 \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{0,0166 \cdot 4} = 33,8 \text{ с.}$$

Т.е., можно полагать, что показания термометра правильно отражают истинное изменение температуры, если это изменение происходит более медленным темпом.

Пусть теперь температура окружающего потока – линейная функция времени:

$$T_e = Bt + T_0.$$

Тогда уравнение теплового баланса примет вид

$$c_p V \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha A T = \alpha A (Bt + T_0),$$

а в начальный момент времени выполняется то же условие (7.3)

В переменных $\theta = \left(\frac{T - T_0}{T_* - T_0} \right)$ и τ , где T_* пока не определена, имеем

задачу

$$\frac{d\theta}{d\tau} + Bi\theta = Bi \cdot \beta \cdot \tau, \quad (7.8)$$

$$\tau = 0: \quad \theta = 0,$$

где $\beta = \frac{Bt_*}{T_* - T_0}$.

Общее аналитическое решение уравнения (7.8) (как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения) имеет вид

$$\theta = \beta \left(\tau - Bi^{-1} \right) + C_1 \exp(-Bi \cdot \tau).$$

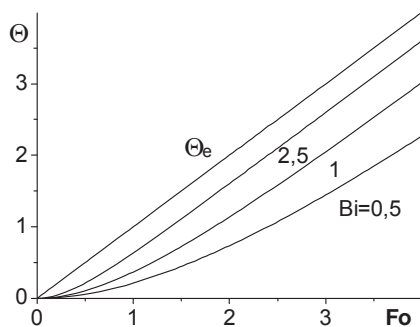


Рис. 7.4. Температура тела в среде, температура которой меняется по линейному закону

Используя начальное условие, найдем постоянную интегрирования $C_1 = \beta Bi^{-1}$. Так как $\tau \equiv Fo$, то запишем окончательное решение

$$\theta = \beta Fo - \frac{\beta}{Bi} [1 - \exp(-Bi \cdot Fo)]. \quad (7.9)$$

Принимая $\beta = 1$, определим масштабную температуру

$$T_* = T_0 + \frac{BL^2}{a}.$$

Из (7.9) следует, что температура детали всегда отстает от температуры среды, меняющейся по закону

$$\theta_e = \frac{T_e - T_0}{T_* - T_0} = \beta Fo.$$

При $\tau = Fo \rightarrow \infty$, это отставание становится постоянным (рис. 7.4).

7.3. Простейшие нестационарные задачи теории теплопроводности и элементы операционного метода

7.3.1. Задача с граничными условиями первого рода

Рассмотрим задачу о нахождении поля температуры в полубесконечном теле (полупространстве), на поверхности которого поддерживается температура T_s (рис. 7.5). Это условие выполняется, если размер тела H много больше зоны прогрева, формирующейся за время наблюдения

$$H \gg \sqrt{\lambda t_*/(c\rho)}.$$

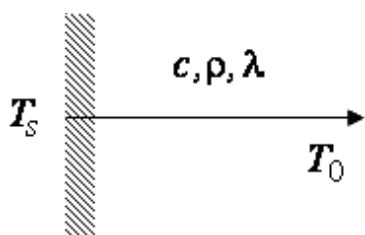


Рис. 7.5. Иллюстрация к формулировке первой краевой задачи теплопроводности для полупространства

Теплофизические характеристики тела c, ρ, λ считаются постоянными.

На бесконечном (в математическом смысле) удалении от зоны прогрева источники и стоки тепла отсутствуют или температура не отличается от начальной температуры тела. В математическом отношении эти условия эквивалентны.

Математическая формулировка такой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right); \\ x=0: \quad T &= T_s; \\ x \rightarrow \infty: \quad T &= T_0; \\ t=0: \quad T &= T_0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Это и есть первая краевая задача.

Предположим, что теплофизические свойства не зависят от температуры.

Перейдем к безразмерным переменным

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad \xi = \frac{x}{x_*}.$$

Если с масштабом времени все понятно, и безразмерное время представляет собой число Фурье, то пространственный масштаб пока не определен. При переходе к безразмерным переменным вместо уравнения (7.10) находим

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{t_* \lambda}{c \rho x_*^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}.$$

Используя допустимый произвол в выборе параметров и принимая $x_* = L$, приравняем коэффициент при второй производной по координате единице. Это даст нам характерный тепловой масштаб

$$L = \sqrt{a t_*}.$$

В результате в безразмерных переменных задача примет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2};$$

$$\xi = 0: \quad \theta = 1;$$

$$\xi \rightarrow \infty: \quad \theta = 0;$$

$$\tau = 0: \quad \theta = 0.$$

Эта задача совсем не содержит параметров (кроме числа Фурье, являющегося безразмерным временем). Ее точное аналитическое решение

$$\theta = \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right), \quad (7.11)$$

содержит функцию $\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty \exp(-t^2) dt$ – интеграл вероятности,

хорошо знакомую функцию тем, кто занимался обработкой данных эксперимента. Эта функция входит в число стандартных функций во многих языках программирования и имеет свойства:

$$\operatorname{erfc}(0) = 1; \quad \operatorname{erfc}(\infty) = 0.$$

Полезно знать асимптотические разложения этой функции:

$$z \ll 1: \quad \operatorname{erfc}(z) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} z;$$

$$z \gg 1: \quad \operatorname{erfc}(z) \approx \frac{\exp(-z^2)}{z\sqrt{\pi}}. \quad (7.12)$$

Итак, для всех возможных теплофизических свойств веществ решение первой краевой задачи имеет вид (7.11). Это решение изображено на рис. 7.6.

В физических переменных из (7.11) имеем

$$T = T_0 + (T_s - T_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right). \quad (7.13)$$

Такие задачи удобно решать *операционным методом* или методом интегральных преобразований по Лапласу. Это – один из самых эффективных методов решения нестационарных задач теплопроводности.

Интегральным преобразованием по Лапласу называют преобразование вида

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(\tau) \exp(-p\tau) d\tau, \quad (7.14)$$

переводящее функцию f действительной переменной τ в функцию F комплексной переменной p . Говорят, что функция $f(\tau)$ является оригиналом, а функция $F(p)$ – ее изображением. В литературе можно встретить разные обозначения и математические символы. Например, можно написать так:

$$\tau \rightarrow p, \quad f(\tau) \rightarrow F(p),$$

а можно и так

$$\tau \div p, \quad f(\tau) \div F(p).$$

Для изображения можно использовать и обозначение $\bar{f}(p)$.

Идея метода заключается в следующем.

Используя преобразование (7.14) и соответствующий ему набор теорем и правил, свести решение задачи в частных производных к решению более простой задачи, а потом, используя обратное преобразование

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{p\tau} dp,$$

перейти из пространства изображений в пространство оригиналов.

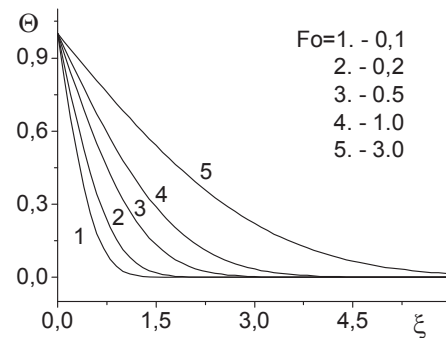


Рис. 7.6. Распределение температуры в полупространстве при заданной температуре на поверхности (решение первой краевой задачи)

Для ряда задач такой путь был бы весьма сложным, если бы не имеющиеся в настоящее время таблицы интегральных преобразований и теоремы, существенно упрощающие ход решения²¹. Сводка основных правил операционного исчисления представлена в приложении 1. Для более подробного знакомства с операционным методом и иными методами интегральных преобразований можно использовать дополнительную литературу из списка, представленного в конце пособия.

В некоторых случаях перейти к оригиналам все же не удастся. И тогда на помощь приходят разнообразные приближенные методы и асимптотические разложения, позволяющие построить приближенное решение изучаемой задачи, что очень важно для инженерных приложений. Некоторые простые примеры мы далее рассмотрим.

Описанная выше краевая задача является самой простой. В пространстве изображений по Лапласу она принимает вид

$$p\bar{\theta} - \theta(0, \xi) = \frac{d^2\bar{\theta}}{d\xi^2}; \quad (7.15)$$

$$\xi = 0: \quad \bar{\theta} = \frac{1}{p};$$

$$\xi \rightarrow \infty: \quad \bar{\theta} = 0.$$

Общее решение задачи (7.15) в пространстве изображений записывается следующим образом

$$\bar{\theta} = A e^{k_1 \xi} + B e^{k_2 \xi}, \quad (7.16)$$

где k_i , $i = 1, 2$ – корни характеристического уравнения

$$k^2 - p = 0;$$

$$k_1 = -\sqrt{p}; \quad k_2 = \sqrt{p}.$$

Используя граничные условия, найдем постоянные интегрирования

$$A = \frac{1}{p}, \quad B = 0.$$

Следовательно, в пространстве изображений имеем

$$\bar{\theta} = \frac{1}{p} \exp(-\sqrt{p}\xi). \quad (7.17)$$

²¹ Бейтмен Н.Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований в двух томах. Справочная математическая библиотека. Т.1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.1969 г. Т.2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. М., 1970.

Используя таблицы интегральных преобразований (приложение 2), находим решение (7.11).

Аналогичным образом можно найти решения задач теплопроводности для полупространства с другими граничными условиями на свободной поверхности.

7.3.2. Задача с граничными условиями второго рода

Пусть на поверхность полупространства падает *поток тепла постоянной величины* q_0 (рис. 7.7). Тогда в задаче теплопроводности (7.10) условие постоянства температуры заменяется граничным условием второго рода

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_0. \quad (7.18)$$

Другие условия и уравнение не изменяются.

Перейдем к безразмерным переменным θ, τ, ξ , где масштабная температура пока не определена:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_* - T_0}.$$

Тогда получим задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}; \\ \xi = 0: -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} &= \frac{q_0 \sqrt{at_*}}{\lambda(T_* - T_0)}; \\ \xi \rightarrow \infty: \theta &= 0; \\ \tau = 0: \theta &= 0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Принимая

$$\frac{q_0 \sqrt{at_*}}{\lambda(T_* - T_0)} \equiv \frac{q_0 \sqrt{t_*}}{\sqrt{c\rho\lambda}(T_* - T_0)} \equiv 1,$$

определим масштабную температуру как среднюю температуру, до которой нагреется слой толщины x_* за время t_* потоком величины q_0 .

В результате мы опять получим задачу без параметров, но с граничным условием на поверхности второго рода

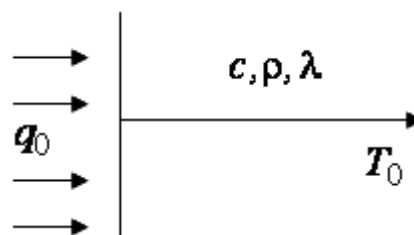


Рис. 7.7. Иллюстрация к формулировке второй краевой задачи для полупространства

$$\xi = 0: -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 1.$$

В пространстве изображений по Лапласу $\tau \rightarrow p$; $\theta \rightarrow \bar{\theta}$ имеем уравнение теплопроводности (7.15) и условия

$$\begin{aligned} \xi = 0: \quad \frac{d\bar{\theta}}{d\xi} &= \frac{1}{p}; \\ \xi \rightarrow \infty: \quad \bar{\theta} &= 0. \end{aligned}$$

Общее решение этой задачи также имеет вид (7.16).

Используя граничные условия, находим постоянные A и B

$$A = \frac{1}{p\sqrt{p}}, \quad B = 0$$

и решение в пространстве изображений

$$\bar{\theta} = \frac{1}{p\sqrt{p}} \exp(-\sqrt{p}\xi). \quad (7.20)$$

Используя таблицы интегральных преобразований (Приложение 2), находим окончательно решение

$$\theta = 2\sqrt{\tau} \operatorname{ierfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) \equiv 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right) - \xi \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right). \quad (7.21)$$

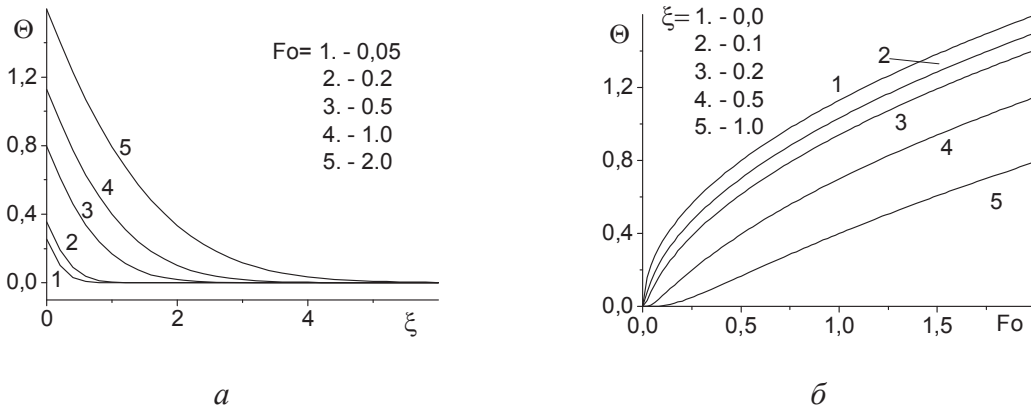


Рис. 7.8. Иллюстрация решения второй краевой задачи теории теплопроводности для полупространства: а) распределение температуры в полупространстве в последовательные моменты времени; б) зависимость температуры от времени на различном удалении от поверхности

Решение (7.21), справедливое для любых значений теплофизических свойств и любой величины внешнего потока тепла, изображено на рис. 7.8.

Видно качественное отличие этого решения от решения первой краевой задачи (рис. 7.6): в первой краевой задаче температура на поверхности поддерживается постоянной (по условию), а второй краевой задаче – меняется как $\sqrt{\tau}$:

$$\theta(0, \tau) = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}.$$

В физических переменных из (7.21) имеем

$$T = T_0 + \frac{q_0}{\sqrt{c\rho\lambda}} \left\{ 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) - \frac{x}{\sqrt{a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \right\}, \quad (7.22)$$

так что

$$T(0, t) = T_0 + \frac{q_0}{\sqrt{c\rho\lambda}} 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

Пусть теперь *поток тепла, падающий на поверхность, является произвольной функцией времени*. Тогда вместо (7.18) имеем

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_0 f(t) \quad (7.23)$$

или в безразмерных переменных

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = f(\tau).$$

В этом случае аналогичный путь приведет к решению задачи в пространстве изображений

$$\bar{\theta} = \frac{F(p)}{\sqrt{p}} \exp(-\sqrt{p}\xi), \quad (7.24)$$

где функция комплексной переменной $F(p)$ есть изображение функции $f(\tau)$:

$$f(\tau) \rightarrow F(p).$$

Переходя в (7.24) к оригиналам (см. приложение 1), найдем

$$\theta(\xi, \tau) = \int_0^\tau \frac{f(y)}{\sqrt{\tau-y}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4(\tau-y)}\right] dy \quad (7.25)$$

(y – переменная интегрирования) или в физических переменных –

$$T(x, t) = T_0 + \frac{q_0}{\sqrt{\pi c\rho\lambda}} \int_0^t \frac{f(y)}{\sqrt{t-y}} \exp\left[-\frac{c\rho}{\lambda} \frac{x^2}{4(t-y)}\right] dy. \quad (7.26)$$

Для одиночного импульса имеем

$$f(t) = \eta(t_i - t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t_i, \\ 0, & t > t_i, \end{cases}$$

где $\eta(z)$ – единичная функция Хевисайда, отличная от нуля только для положительного значения аргумента. Тогда

$$T(x, t) = T_0 + \frac{q_0}{\sqrt{\pi c \rho \lambda}} \int_0^t \frac{\eta(t_i - y)}{\sqrt{t - y}} \exp\left[-\frac{c \rho}{\lambda} \frac{x^2}{4(t - y)}\right] dy.$$

Введем новую переменную z по формуле

$$z^2 = \frac{x^2}{4a(t - y)},$$

где $a = \lambda / (c \rho)$ – коэффициент температуропроводности. Тогда

$$y = t - \frac{x^2}{4az^2} \text{ и } dy = -\frac{x^2}{2az^3} dz.$$

Если $y = 0$, то $z = \frac{x}{2\sqrt{at}}$; если $y = t$, то $z \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$T(x, t) = T_0 + \frac{q_0}{\lambda \sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{at}}^{\infty} x \frac{\exp[-z^2]}{z^2} \eta\left(t_i + \frac{x^2}{4az^2} - t\right) dz. \quad (7.27)$$

Подынтегральная функция в (7.27) равна нулю, если

$$z^2 \leq \frac{x^2}{4a(t_i - t)},$$

что имеет смысл, если $t \leq t_i$. Поэтому можно записать

$$T(x, t) = T_0 + \frac{q_0}{\lambda \sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{at}}^{x/2\sqrt{at_i}} x \frac{\exp[-z^2]}{z^2} dz.$$

Интегрируем по частям. Полагая $u = \exp(-z^2)$, $dv = dz/z^2$, найдем $du = -2z \exp(-z^2) dz$, $v = -1/z$ и

$$T(x, t) = T_0 + \frac{q_0}{\sqrt{c \rho \lambda}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) \sqrt{t} - \exp\left(-\frac{x^2}{4at_i}\right) \sqrt{t_i} \right] - \right.$$

$$-\frac{x}{\sqrt{a}} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at_i}} \right) \right] \Bigg\}.$$

При $t_i \rightarrow \infty$ из этого уравнения находим (7.22).

Если имеется импульсный источник тепла (рис. 7.9), запишем

$$f(t) = \begin{cases} 1, & (t_i + t_p)(k-1) \leq t < t_i + (t_i + t_p)(k-1) \\ 0, & t_i + (t_i + t_p)(k-1) \leq t < (t_i + t_p)k \end{cases}, \quad (7.28)$$

где t_i – длительность импульса; t_p – длительность паузы между двумя последовательными импульсами; k – номер импульса. Подобные источники тепла часто встречаются при обработке поверхностей внешними источниками энергии, соответствующим потоком ионов, электронов и т.п. Соотношение между длительностями импульсов и пауз, а также число импульсов могут быть различными²².

Для данного источника можем определить энергию, поглощаемую за один импульс единицей поверхности

$$I_0 = q_0 t_i, \text{ Дж/см}^2,$$

частоту следования импульсов

$$\Gamma = \frac{1}{t_i + t_p} \quad (7.29)$$

и полную энергию, закачанную в единицу поверхности вещества

$$I_n = q_0 t_i n.$$

Качественная зависимость температуры от времени в точках, находящихся на разном удалении от нагреваемой поверхности, показана на рис. 7.10.

Чем выше частота следования импульсов, тем менее заметен импульсный характер внешнего источника для достаточно большого времени наблюдения и для точек, удаленных от поверхности. Поэтому при моделировании поведения материалов в условиях импульсной обработ-

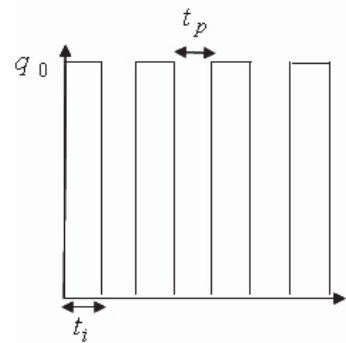


Рис. 7.9. Импульсный источник тепла

²² Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования, М.: Наука. 1971.

ки, особенно высокочастотной, импульсный источник заменяют непрерывным с некоторым эффективным значением плотности потока тепла, исходя из условия равенства полных энергий.

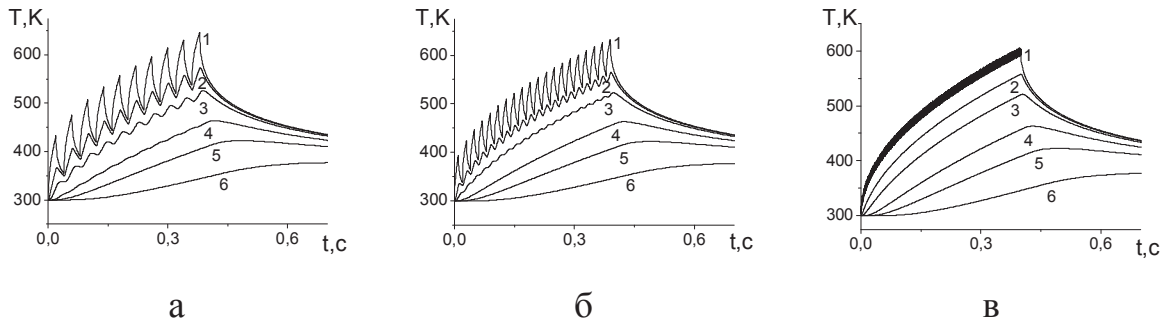


Рис. 7.10. Зависимость температуры от времени в разных точках полупространства при импульсном источнике тепла: $\Gamma = 20, 50, 2500$ для рисунков а, б, в; $x = 1 - 0; 2 - 0,025; 3 - 0,05; 4 - 0,1; 5 - 0,15; 6 - 0,25$ см; использованы свойства: $\lambda = 0,92$ Вт/см К с, $c = 0,482$ Дж/г К, $\rho = 8,2$ г/см³.

7.3.3. Задача с граничными условиями третьего рода

Задача с граничными условиями третьего рода соответствует нагреву или охлаждению полупространства или теплоизолированного с боковой поверхности стержня бесконечной длины в потоке газа или жидкости. На границе задается теплообмен с потоком по закону Ньютона. Математическая постановка такой задачи включает уравнение теплопроводности (7.10), граничное условие на поверхности

$$x = 0: \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T_e - T),$$

где T_e – температура окружающего потока, и условие ограниченности решения при бесконечном удалении от поверхности.

В безразмерных переменных θ, τ, ξ , где

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_e - T_0},$$

придем к задаче

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2};$$

$$\xi = 0: -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = Bi(1 - \theta); \quad (7.30)$$

$$\xi \rightarrow \infty: \theta = 0;$$

$$\tau = 0: \theta = 0,$$

содержащей единственный параметр – число Био.

В пространстве изображений по Лапласу $\tau \rightarrow p$; $\theta \rightarrow \bar{\theta}$ имеем уравнение теплопроводности (7.15) и условия

$$\xi = 0: -\frac{d\bar{\theta}}{d\xi} = \frac{Bi}{p} - Bi\bar{\theta}; \quad (7.31)$$

$$\xi \rightarrow \infty: \bar{\theta} = 0.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\bar{\theta} = \frac{Bi}{p(Bi + \sqrt{p})} \exp(-\xi\sqrt{p}) \quad (7.32)$$

или в пространстве оригиналов –

$$\theta = \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) - \exp(Bi\xi + Bi^2\tau) \operatorname{erfc}\left(Bi\sqrt{\tau} + \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right). \quad (7.33)$$

На поверхности $\xi = 0$ имеем

$$\theta = 1 - \exp(Bi^2\tau) \operatorname{erfc}(Bi\sqrt{\tau}). \quad (7.34)$$

Следовательно, при $\tau = 0$ температура поверхности – нулевая, а при увеличении времени – асимптотически стремится к температуре потока $\theta \rightarrow 1$ (рис. 7.11).

В точке, удаленной от поверхности, рост температуры, очевидно, начинается с запозданием.

Находим поток тепла на поверхности

$$-\left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = \exp(Bi^2\tau) \operatorname{erfc}(Bi\sqrt{\tau}). \quad (7.35)$$

В физических переменных имеем

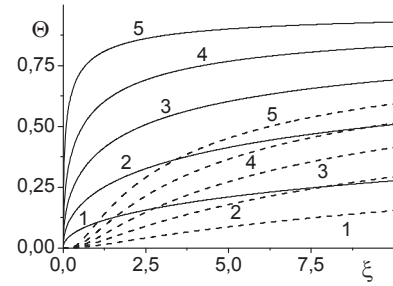


Рис. 7.11. Зависимость температуры поверхности (сплошные линии) и температуры в точке $\xi = 2$ (пунктирные линии) от времени в задаче для полупространства с граничным условием на поверхности III рода: $Bi = 1 - 0,1$; $2 - 0,25$; $3 - 0,5$; $4 - 1,0$; $5 - 2,5$

$$T = T_0 + (T_e - T_0) \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) - \exp \left(\frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}} \frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{\alpha^2}{c\rho\lambda} t \right) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}} \sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \right]$$

и

$$T(0,t) = T_0 + (T_e - T_0) \left[1 - \exp \left(\frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}} \frac{x}{\sqrt{a}} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}} \sqrt{t} \right) \right].$$

Интересно отметить асимптотические свойства полученного решения.

При больших значениях коэффициента теплообмена $\alpha \gg 1$, пользуясь асимптотическими свойствами функции ошибок (7.12), найдем

$$\operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}} \sqrt{t} \right) \approx \frac{\exp \left(-\frac{\alpha^2}{c\rho\lambda} t \right)}{\alpha^3 \sqrt{\pi t}} \sqrt{c\rho\lambda},$$

следовательно

$$T \approx T_0 + (T_e - T_0) \left[1 - O(\alpha^{-3}) \right].$$

Т.е., температура поверхности ведет себя так же, как и в первой краевой задаче с точностью до малых величин.

В противоположном случае, $\alpha \ll 1$, имеем

$$T = T_0 + (T_e - T_0) \left[1 - \left(1 + \frac{\alpha^2}{c\rho\lambda} t + \dots \right) \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}} \sqrt{t} \dots \right) \right] \approx \\ \approx T_0 + 2(T_e - T_0) \frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}} \sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

Т.е., температура поверхности меняется как \sqrt{t} , что соответствует решению задачи о нагреве потоком величины $q_0 \approx \alpha(T_e - T_0)$.

7.4. Метод Дюамеля

Для целого ряда нестационарных задач весьма удобным оказывается метод Дюамеля. Рассмотрим его на примере задачи

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned}
t = 0: \quad T = T_0; \quad x \geq 0 \\
t > 0: \quad x = 0: \quad T = f(t); \\
x \rightarrow \infty: \quad T = T_0.
\end{aligned}
\tag{7.36}$$

Полагая $T = u + v$, можно показать, что введенные функции u и v должны удовлетворять дифференциальному уравнению той же формы, но более простым краевым условиям для функции u

$$\begin{aligned}
u = T_0, \quad t = 0, \quad x \geq 0; \\
u = 0, \quad x = 0, \quad t > 0
\end{aligned}
\tag{7.37}$$

и для функции v –

$$\begin{aligned}
v = 0, \quad t = 0, \quad x \geq 0; \\
v = f(t), \quad x = 0, \quad t > 0.
\end{aligned}
\tag{7.38}$$

Решение задачи для функции u нам известно или, вернее, легко может быть получено из решения первой краевой задачи (7.11), записанного в размерных переменных

$$T = T_0 + (T_s - T_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right), \quad a = \frac{\lambda}{c\rho}.
\tag{7.39}$$

Следовательно, для функции u имеем

$$u = T_0 \left[1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \right] = T_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right),
\tag{7.40}$$

где

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy.$$

Для нахождения решения второй задачи воспользуемся теоремой Дюамеля, которая гласит:

Если $\varphi(x, t)$ есть решение для изменения температуры в твердом теле, начальная температура которого равна нулю, а поверхность поддерживается при температуре, равной единице, то решение $v(x, t)$ для случая, когда температура поверхности тела меняется со временем, т.е. $v = f(t)$, $x = 0$, дается формулой

$$v(x, t) = \int_0^t f(y) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t - y) dy.
\tag{7.41}$$

Теорема Дюамеля может быть применена и к случаям конвективно-теплообмена на поверхности, когда твердое тело, имеющее однородную начальную температуру, внезапно подвергается воздействию ок-

ружающей жидкости (газа), температура которой меняется со временем по заданному закону.

Чтобы применить теорему Дюамеля, найдем решение $\varphi(x, t)$, которое также содержится в (7.39).

$$\varphi = \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \right] = \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right).$$

Следовательно,

$$\varphi(x, t - y) = \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-y)}} \right)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t - y) = \frac{x}{2\sqrt{\pi a}} \frac{\exp(-x^2/(4a(t-y)))}{(t-y)^{3/2}}.$$

В результате решение для функции v принимает вид

$$v(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi a}} \int_0^t f(y) \frac{\exp(-x^2/(4a(t-y)))}{(t-y)^{3/2}} dy. \quad (7.42)$$

Если мы введем новую переменную $z^2 = x^2/4a(t-y)$, то найдем

$$\frac{dy}{(t-y)^{3/2}} = \frac{4\sqrt{a}}{x} dz \text{ и}$$

$$v(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{at})}^{\infty} f \left(t - \frac{x^2}{4az^2} \right) e^{-z^2} dz. \quad (7.43)$$

Полное решение дается суммой величин $u + v$.

Найдем решение для линейного изменения температуры поверхности $f(t) = T_0 + Ct$. Мы должны проинтегрировать уравнение (7.43).

Имеем

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{at})}^{\infty} \left(T_0 + C \left(t - \frac{x^2}{4az^2} \right) \right) e^{-z^2} dz = \\ &= \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_X^{\infty} e^{-z^2} dz + \frac{2Ct}{\sqrt{\pi}} \int_X^{\infty} e^{-z^2} dz - \frac{Cx^2}{2\sqrt{a\pi}} \int_X^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz, \quad X = \frac{x}{2\sqrt{at}}. \end{aligned}$$

В третьем слагаемом проинтегрируем по частям. Обозначим

$$p = e^{-z^2}; \quad dq = \frac{dz}{z^2},$$

тогда

$$dp = -2ze^{-z^2} dz; \quad q = -\frac{1}{z}.$$

Следовательно,

$$\int_X^\infty \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz = pq \Big|_X^\infty - \int_X^\infty q dp = -\frac{e^{-z^2}}{z^2} \Big|_X^\infty - 2 \int_X^\infty e^{-z^2} dz = \frac{e^{-X^2}}{X^2} - \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(X).$$

Объединяем результаты

$$T = T_0 + Ct \left[\left(1 + 2X^2\right) \operatorname{erfc}(X) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} X e^{-X^2} \right], \quad X = \frac{x}{2\sqrt{at}}. \quad (7.44)$$

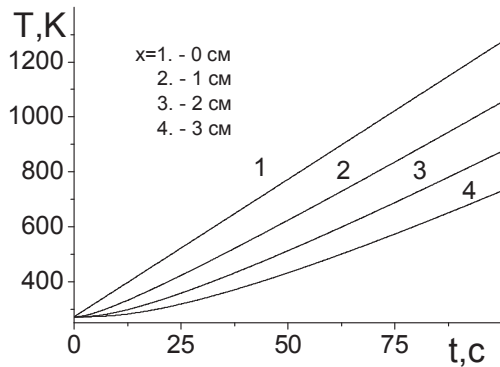


Рис. 7.12. Зависимость температуры от времени в точках, равноудаленных от поверхности (при линейном изменении температуры поверхности); $C = 1$, $T_0 = 273$ К.

Распределение температуры вблизи нагреваемой поверхности в различные моменты времени показано на рис. 7.12. В расчетах использованы свойства, близкие к свойствам железа

$$c = 452 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}),$$

$$\rho = 7870 \text{ кг}/\text{м}^3,$$

$$\lambda = 78 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К}).$$

Даже при линейном изменении температуры поверхности в точках, отличных от $x = 0$ температура меняется со временем нелинейно, что, естественно, связано с процессом теплопроводности.

Существует много практически важных случаев, в которых метод Дюамеля может найти применение.

Пример. Пусть большая алюминиевая отливка с начальной температурой, равной повсюду $26,7^\circ\text{C}$, внезапно погружается в ванну с температурой 260°C . После получасового нагревания отливка быстро вынимается и помещается в ванну с ледяной водой. Какова будет температура в точке, расположенной на расстоянии 30 см ниже поверхности отливки, после пребывания ее во второй ванне в течение 1 часа?

Решение. Если пренебречь поверхностным сопротивлением, мы можем принять, что температура поверхности отливки есть ступенчатая функция времени, определяемая равенствами

$$T(0,t) = T_1, \quad 0 < t < t_1;$$

$$T(0,t) = T_2, \quad t \geq t_1.$$

Разбивая в интеграле (7.42) промежуток интегрирования на два промежутка $(0, t_1)$ и (t_1, t) , получаем

$$v(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi a}} \left[\int_0^{t_1} T_1 \frac{\exp\left(-x^2/(4a(t-y))\right)}{(t-y)^{3/2}} dy + \int_{t_1}^t T_2 \frac{\exp\left(-x^2/(4a(t-y))\right)}{(t-y)^{3/2}} dy \right]$$

или, вводя переменную $\xi = \frac{x}{2\sqrt{a(t-y)}}$, запишем

$$v(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{x/2\sqrt{at}}^{x/2\sqrt{a(t-t_1)}} T_1 \exp(-\xi^2) d\xi + \int_{x/2\sqrt{a(t-t_1)}}^{\infty} T_2 \exp(-\xi^2) d\xi \right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{x/2\sqrt{at}}^{\infty} T_1 \exp(-\xi^2) d\xi - \int_{x/2\sqrt{a(t-t_1)}}^{\infty} T_1 \exp(-\xi^2) d\xi + \int_{x/2\sqrt{a(t-t_1)}}^{\infty} T_2 \exp(-\xi^2) d\xi \right]$$

Складывая этот результат с результатом для функции u , получаем решение для момента времени $t \geq t_1$

$$T = T_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + T_1 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + (T_2 - T_1) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-t_1)}}\right). \quad (7.45)$$

Используя исходные данные и свойства алюминия

$$\rho = 2710 \text{ кг/м}^3, \quad \lambda = 174 \text{ кал/(м час град)}, \quad c = 0,181 \text{ ккал/(кг град)},$$

получаем

$$\frac{x}{2\sqrt{at}} = \frac{0,3}{2\sqrt{\frac{1,5}{2,82}}} = 0,21, \quad \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_1)}} = \frac{0,3}{2\sqrt{\frac{1}{2,82}}} = 0,26.$$

Пользуясь табличными значениями для функции ошибок, находим
 $T = 26,7 \times 0,234 + 260 \times (1 - 0,234) + (0 - 260) \times (1 - 0,287) =$
 $= 6,3 + 198,7 - 185 = 20 \text{ }^\circ\text{C}.$

7.5. Примеры сопряженных задач теории теплопроводности

7.5.1. Термическая обработка материала в среде

Операционный метод незаменим при решении так называемых *сопряженных задач теплопроводности*, в которых присутствует граница раздела между материалами с разными свойствами. Рассмотрим некоторые примеры сопряженных задач, имеющих непосредственное отношение к обработке материалов и деталей с покрытиями высокоэнергетическими источниками.

Предположим, что термическая обработка материала тепловым потоком постоянной величины осуществляется в среде (рис. 7.13), свойства которой отличны от свойств обрабатываемого материала. Требуется оценить влияние среды на величину температуры материала по сравнению с его обработкой в вакууме.

Математическая постановка такой задачи будет включать уравнения теплопроводности для обрабатываемого материала и окружающей среды. Теплофизические свойства обозначим индексами 2 и 1 соответственно. Тогда

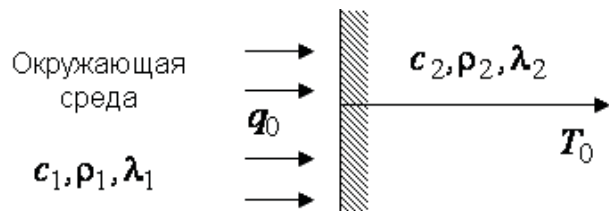


Рис. 7.13. Иллюстрация к постановке задачи о термической обработке материала в среде

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right), \quad x < 0$$

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right), \quad x > 0.$$

На границе раздела записываем условия четвертого рода

$$x=0: \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = q_0, T_1 = T_2.$$

На бесконечном удалении от поверхности обрабатываемого материала температуры неизменны

$$x \rightarrow \pm\infty: T_i = T_0, i = 1, 2$$

В начальный момент времени температуры одинаковы

$$t = 0: T_i = T_0, i = 1, 2$$

Очевидно, такая постановка задачи будет корректна, если тело можно считать бесконечным по сравнению с размером теплового пограничного слоя (зоной прогрева), формирующегося за время наблюдения, а поток тепла равномерно распределен по всей поверхности обрабатываемого тела. В противном случае математическая постановка задачи существенно усложняется.

Решить эту задачу можно операционным методом.

В пространстве изображений по Лапласу имеем

$$p\bar{T}_1 - T_0 = a_1 \frac{d^2\bar{T}_1}{dx^2}; x < 0$$

$$p\bar{T}_2 - T_0 = a_2 \frac{d^2\bar{T}_2}{dx^2}; x > 0$$

$$x=0: \lambda_1 \frac{d\bar{T}_1}{dx} - \lambda_2 \frac{d\bar{T}_2}{dx} = \frac{q_0}{p}; \bar{T}_1 = \bar{T}_2.$$

Аналогично более простым задачам, решения уравнений теплопроводности с учетом условий в бесконечности имеют вид

$$\bar{T}_1 - \frac{T_0}{p} = A_1 \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a_1}} x\right); \bar{T}_2 - \frac{T_0}{p} = A_2 \exp\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}} x\right).$$

Используя условия на границе раздела сред, найдем

$$A_1 = A_2 = A = \frac{q_0}{p\sqrt{p}} \frac{1}{\sqrt{c_1\rho_1\lambda_1} + \sqrt{c_2\rho_2\lambda_2}} = \frac{q_e}{p\sqrt{p}\sqrt{c_2\rho_2\lambda_2}},$$

где

$$q_e = \frac{q_0}{1 + K_\varepsilon}, K_\varepsilon = \sqrt{\frac{c_1\rho_1\lambda_1}{c_2\rho_2\lambda_2}}.$$

Следовательно,

$$\bar{T}_2 - \frac{T_0}{p} = \frac{q_e}{p\sqrt{p}\sqrt{c_2\rho_2\lambda_2}} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a_2}}x\right),$$

$$\bar{T}_1 - \frac{T_0}{p} = \frac{q_e}{p\sqrt{p}\sqrt{c_2\rho_2\lambda_2}} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a_1}}x\right).$$

Перейти к оригиналам достаточно легко, используя таблицы интегральных преобразований (приложение 2)

$$T_2 = T_0 + \frac{q_e}{\sqrt{c_2\rho_2\lambda_2}} \left\{ 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a_2t}\right) - \frac{x}{\sqrt{a_2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2t}}\right) \right\}. \quad (7.46)$$

Полученное решение внешне ничем не отличается от того, которое найдено при анализе простейшей второй краевой задачи для полупространства (7.22). Влияние внешней среды проявляется таким образом, как будто действующий внешний поток тепла уменьшился в $(1 + K_\varepsilon)$ раз. Параметр K_ε иногда называют коэффициентом активности одного материала (среды) по отношению к другому (к обрабатываемому материалу). Следовательно, если нагрев материала осуществляется на воздухе и, скажем в среде аргона, то его температура при прочих равных условиях будет различной.

Предположим, что обрабатываемый материал – железо, а окружающая среда – воздух. Тогда, используя данные таблицы 7.1, найдем

$$K_\varepsilon \approx 3,19 \cdot 10^{-4}.$$

Таблица 7.1

Свойства веществ, использованные в расчетах

вещество	c , Дж/(кг·К)	ρ , Кг/м ³	λ , Вт/(м·К)
железо	452	7870	81,1
вода	4182	998,2	0,597
воздух	1012	1,163	0,025

Если окружающая среда обладает свойствами воды, то найдем

$$K_\varepsilon \approx 0,093.$$

Т.е., в первом случае влиянием окружающей среды можно пренебречь. А во втором случае – среда приводит к уменьшению действующего потока тепла почти на 10 процентов.

Качественное распределение температуры в окрестности границы раздела показано на рис. 7.14.

Так как температуропроводность окружающей среды много меньше, чем температуропроводность обрабатываемого материала, зона прогрева в среде оказывается незначительной, и на малом расстоянии от поверхности нагревом среды можно пренебречь.

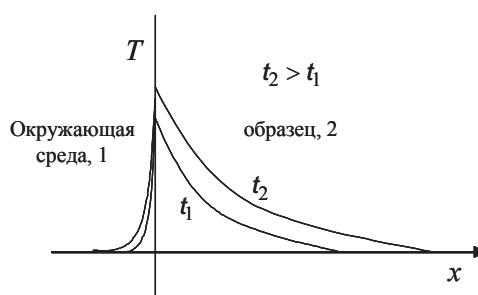


Рис. 7.14. Качественное распределение температуры в окрестности границы раздела «материал – окружающая среда»

7.5.2. Обработка материала с покрытием

Рассмотрим *возможные формулировки* задач о термической обработке детали большого размера с покрытием тепловым потоком постоянной величины, равномерно распределенным вдоль поверхности детали. Математическая постановка задачи в этом случае аналогична предыдущему, но уравнение теплопроводности с индексами «1» теперь имеет место в ограниченной области

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right), \quad 0 < x < h; \quad (7.47)$$

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right), \quad x > h;$$

$$x = h: \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}, \quad T_1 = T_2; \quad (7.48)$$

$$x = 0: -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = q_0; \quad (7.49)$$

$$x \rightarrow \infty: T_2 = T_0; \quad (7.50)$$

$$t = 0: T_i = T_0, \quad i = 1, 2. \quad (7.51)$$

Если внешний поток – радиационный (см. раздел 9) или лазерный, то в постановке задачи нужно учитывать оптические свойства материалов. Так, если покрытие является абсолютно прозрачным, а основной материал – непрозрачен, то на границе раздела вместо (7.48) имеем условие, аналогичное задаче, рассмотренной выше

$$x = h: \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = q_0; \quad T_1 = T_2. \quad (7.52)$$

Условие на внешней границе зависит от характера теплообмена материала с покрытием с окружающей средой (по кондуктивному механизму – теплопроводностью, конвективному механизму или излучением). Так, в адиабатических условиях вместо (7.49) имеем

$$x=0: \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = 0. \quad (7.53)$$

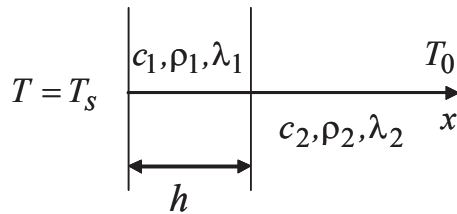


Рис. 7.15. Иллюстрация к постановке задачи об обработке материала с покрытием

При условии, что на внешней поверхности покрытия поддерживается постоянная температура (рис. 7.15), в математической постановке задачи (7.47) – (7.51) изменяется лишь внешнее граничное условие (7.49). Вместо него имеем

$$x=0: T_1 = T_s. \quad (7.54)$$

Остановимся на анализе последней

задачи достаточно подробно.

В безразмерных переменных

$$\theta = \left(\frac{T - T_0}{T_s - T_0} \right); \quad \tau = \frac{t}{t_*} = Fo; \quad \xi = \frac{x}{x_*}$$

система уравнений (7.47) с условиями (7.48), (7.50), (7.51) и (7.54) принимает вид

$$K_c \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = K_\lambda \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2}; \quad 0 < \xi < \delta$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2}; \quad \xi > \delta$$

$$\xi = 0: \quad \theta_1 = 1; \quad (7.55)$$

$$\xi = \delta: \quad K_\lambda \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi}; \quad \theta_1 = \theta_2$$

$$\xi \rightarrow \infty: \quad \theta_2 = 0;$$

$$\tau = 0: \quad \theta_i = 0; \quad i = 1, 2,$$

где в дополнение к уже знакомым параметрам $K_c = \frac{c_1 \rho_1}{c_2 \rho_2}$; $K_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ поя-

вился еще один $\delta = \frac{h}{x_*}$.

Требуется найти распределение температуры в покрытии и в основном материале в произвольный момент времени.

Будем решать эту задачу операционным методом.

В пространстве изображений по Лапласу ($\tau \rightarrow p, \theta_i \rightarrow \bar{\theta}_i$) вместо (7.55) имеем

$$\begin{aligned} K_c p \bar{\theta}_1 &= K_\lambda \frac{d^2 \bar{\theta}_1}{d\xi^2}; \quad 0 < \xi < \delta; \\ p \bar{\theta}_2 &= \frac{d^2 \bar{\theta}_2}{d\xi^2}; \quad \xi > \delta; \\ \xi = 0: \quad \bar{\theta}_1 &= 1/p; \\ \xi = \delta: \quad K_\lambda \frac{d\bar{\theta}_1}{d\xi} &= \frac{d\bar{\theta}_2}{d\xi}; \quad \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2; \\ \xi \rightarrow \infty: \quad \bar{\theta}_2 &= 0. \end{aligned} \tag{7.56}$$

Общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1 &= A_1 \exp(-k_1 \xi) + B_1 \exp(k_1 \xi), \\ \bar{\theta}_2 &= A_2 \exp(-k_2 \xi) + B_2 \exp(k_2 \xi), \end{aligned}$$

где $k_1 = \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda} p}$; $k_2 = \sqrt{p}$ – корни характеристических уравнений для областей 1 и 2.

Из условия конечности температуры при $\xi \rightarrow \infty$ имеем $B_2 = 0$.

Используя условия в нуле и на границе раздела материалов, находим систему уравнений для определения постоянных интегрирования A_1, B_1, A_2 :

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= \frac{1}{p}; \\ A_1 e^{-k_1 \delta} + B_1 e^{k_1 \delta} &= A_2 e^{-k_2 \delta}; \\ K_\lambda (-A_1 k_1 e^{-k_1 \delta} + B_1 k_1 e^{k_1 \delta}) &= -A_2 k_2 e^{-k_2 \delta}, \end{aligned}$$

решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{p} \frac{e^{k_1 \delta}}{e^{k_1 \delta} - \varepsilon e^{-k_1 \delta}}; \\ B_1 &= -\frac{\varepsilon}{p} \frac{e^{-k_1 \delta}}{e^{k_1 \delta} - \varepsilon e^{-k_1 \delta}}; \end{aligned}$$

$$A_2 = \frac{1-\varepsilon}{p} \frac{1}{e^{k_1\delta} - \varepsilon e^{-k_1\delta}}.$$

В результате в пространстве оригиналов находим

$$\bar{\theta}_1 = \frac{1}{p} \cdot \frac{e^{-k_1(\xi-\delta)} - \varepsilon e^{k_1(\xi-\delta)}}{e^{k_1\delta} - \varepsilon e^{-k_1\delta}}; \quad (7.57)$$

$$\bar{\theta}_2 = \frac{1}{p} \cdot \frac{(1-\varepsilon)e^{-k_2(\xi-\delta)}}{e^{k_1\delta} - \varepsilon e^{-k_1\delta}}, \quad (7.58)$$

где $\varepsilon = \frac{1 - \sqrt{K_c K_\lambda}}{1 + \sqrt{K_c K_\lambda}}$ - трансцендентная функция произведения $K_c K_\lambda$.

Параметр ε всегда меньше единицы, $|\varepsilon| < 1$. Следовательно,

$$|\varepsilon \exp(-2k_1\delta)| < 1.$$

Используя представление знаменателей в (7.57), (7.58) в виде ряда

$$z^{-1} = \frac{1}{e^{k_1\delta} - \varepsilon e^{-k_1\delta}} = \frac{e^{-k_1\delta}}{1 - \varepsilon e^{-2k_1\delta}} = e^{-k_1\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n e^{-2k_1n\delta},$$

запишем

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1 &= \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon^n \exp \left[-(\xi + 2n\delta) \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda} p} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon^{n+1} \exp \left[-(\delta - \xi + (2n+1)\delta) \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda} p} \right] \right\}; \\ \bar{\theta}_2 &= \frac{1-\varepsilon}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \exp \left\{ - \left[(2n+1)\delta \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} + (\xi - \delta) \right] \sqrt{p} \right\}. \end{aligned}$$

Для того чтобы перейти к оригиналам, воспользуемся таблицами интегральных преобразований (Приложение 2), в соответствии с которыми

$$\frac{1}{p} \exp(-\alpha\sqrt{p}) \div \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\tau}} \right).$$

Окончательно решение принимает вид

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon^n \operatorname{erfc} \left[-\frac{(\xi + 2n\delta)\sqrt{K_c/K_\lambda}}{2\sqrt{\tau}} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon^{n+1} \operatorname{erfc} \left[-\frac{(\delta - \xi + (2n+1)\delta)\sqrt{K_c/K_\lambda}}{2\sqrt{\tau}} \right] \right\}; \\ \theta_2 &= (1 - \varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \operatorname{erfc} \left\{ -\frac{(2n+1)\delta\sqrt{K_c/K_\lambda} + (\xi - \delta)}{2\sqrt{\tau}} \right\}. \end{aligned} \quad (7.59)$$

Это – точное решение задачи.

Используя практически любой современный математический пакет, с помощью полученных формул можно рассчитать значение температуры в любой точке в произвольный момент времени с любой заданной точностью.

Но зачастую в простых инженерных оценках, когда пакеты прикладных программ оказываются недоступными, подобные формулы оказываются малоприменимыми в силу своей громоздкости. Кроме того, в практических расчетах часто оказывается необходимым знать приближенное значение температуры лишь в отдельных точках и для малых значений времени. Здесь на помощь могут прийти приближенные методы представления решения как в пространстве оригиналов, так и непосредственно в пространстве изображений, что удобно и для более сложных задач.

Так, при $\xi = \delta$ в пространстве изображений имеем

$$\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \frac{1 - \varepsilon}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon^n \exp \left[-(2n+1)\delta \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda} p} \right] \right\}. \quad (7.60)$$

или в пространстве оригиналов

$$\theta_1 = \theta_2 = (1 - \varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon^n \operatorname{erfc} \left[-\frac{(2n+1)\delta\sqrt{K_c/K_\lambda}}{2\sqrt{\tau}} \right] \right\}, \quad \xi = \delta \quad (7.61)$$

что, разумеется, следует и из общего решения (7.59).

При условии $|\varepsilon| < 1$ ряд в (7.60) быстро сходится. Поэтому мы можем ограничиться несколькими членами ряда в (7.60):

$$\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \frac{1 - \varepsilon}{p} \left\{ \exp \left[-\delta \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda} p} \right] + \varepsilon \exp \left[-3\delta \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda} p} \right] + \dots \right\},$$

что тем более корректно, когда интерес представляют большие значения комплексной переменной p , соответствующие малым значениям времени τ .

Переходя к оригиналам, находим

$$\theta_1 = \theta_2 = (1 - \varepsilon) \left\{ \operatorname{erfc} \left[\frac{\delta \sqrt{K_c / K_\lambda}}{2\sqrt{\tau}} \right] + \varepsilon \operatorname{erfc} \left[\frac{3\delta \sqrt{K_c / K_\lambda}}{2\sqrt{\tau}} \right] + \dots \right\}, \quad (7.62)$$

что опять же соответствует учету только двух членов ряда в (7.61).

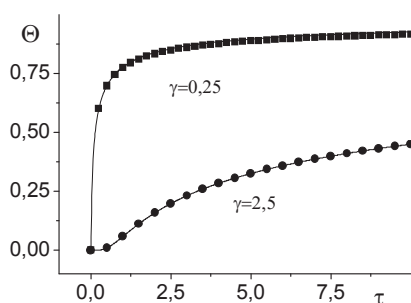


Рис. 7.16. Зависимость температуры на границе раздела сред от времени. $\varepsilon = 0,25$

Быструю сходимость ряда в решении иллюстрирует рис. 7.16, где представлены зависимости температуры на границе раздела материалов от времени для различных значений параметра

$$\gamma = \delta \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} = \frac{h}{\sqrt{\kappa_1 t_*}}.$$

Сплошные линии соответствуют расчету по формуле (7.61) с удержанием 25 членов ряда, а символы – расчету по формуле (7.62). Видно, что результаты совпадают.

Параметр γ , входящий в решение, можно трактовать как термическую толщину покрытия. Это отношение реальной толщины покрытия к толщине теплового пограничного слоя, формирующегося в нем за некоторое характерное время.

Тогда, если покрытие является термически тонким, $\gamma \ll 1$, мы можем воспользоваться асимптотическим представлением известной нам функции $\operatorname{erfc}(z)$. Для $z \ll 1$ имеем $\operatorname{erfc}(z) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} z$ и

$$\theta_1 = \theta_2 \approx (1 - \varepsilon) \left[\left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{\tau}} \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} \right) + \varepsilon \left(1 - \frac{3\delta}{\sqrt{\tau}} \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} \right) + \dots \right].$$

Малость параметра γ можно использовать непосредственно в пространстве изображений. Тогда из (7.60) находим

$$\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 \approx \frac{1 - \varepsilon}{p} \left[(1 + \varepsilon) - \delta(1 - 3\varepsilon) \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} p + \dots \right]$$

и

$$\theta_1 = \theta_2 = (1 - \varepsilon) \left[(1 + \varepsilon) - \frac{\delta(1 - 3\varepsilon)}{\sqrt{\pi\tau}} \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} + \dots \right] \approx \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{\pi\tau}} (1 - 4\varepsilon) \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} \right),$$

где использовано приближенное равенство

$$1 - \varepsilon \approx \frac{1}{1 + \varepsilon}.$$

В противоположной ситуации $z \gg 1$ имеем оценку

$$\operatorname{erfc}(z) \approx \frac{\exp(-z^2)}{z\sqrt{\pi}}.$$

В этом случае температура на границе раздела материалов длительное время практически не будет отличаться от начальной.

Рассмотрим еще один пример решения сопряженной задачи²³. Допустим, что тепловой контакт между покрытием и основой нельзя считать идеальным. Неидеальность контакта или наличие дополнительного термического сопротивления, как нам уже известно, может быть связана с шероховатостью поверхностей; процессами газификации и т.п. причинами. Математическая постановка задачи о нахождении поля температуры в этом случае отличается от предыдущего только условием на границе раздела материалов. Тепловые потоки, по-прежнему, равны друг другу, а вот температуры отличаются

$$T_1 - T_2 = -\frac{\Delta}{\lambda_3} \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)_{x=h}, \quad (7.63)$$

где Δ/λ_3 – термическое сопротивление на контакте материалов (раздел 2.10).

Переходя к безразмерным переменным, вместо равенства температур на границе в задаче (7.56) находим

$$\theta_1 - \theta_2 = -D \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi}, \quad \xi = \delta, \quad (7.64)$$

где $D = \frac{h\lambda_2}{\lambda_3\sqrt{a_2t^*}}$ - новый параметр.

Процедура решения этой задачи полностью аналогична предыдущему. Выпишем только некоторые ключевые формулы.

В пространстве изображений по Лапласу для температуры основного материала в точке $\xi = \delta$ имеем

²³ Князева А.Г., Дик .Г. Зажигание горячей пластиной конденсированного вещества с инертным экраном между ними // Физ. гор. и взр., 1990, Т. 26, № 2. С. 8–18

$$\bar{\theta}_2 = \frac{2K_\varepsilon \exp\left[-\delta\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}p}\right]}{1 + K_\varepsilon(1 + D\sqrt{p}) \left[1 - \beta \exp\left[-2\delta\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}p}\right]\right]}, \quad (7.65)$$

где $\beta = \frac{1 - K_\varepsilon(1 + D\sqrt{p})}{1 + K_\varepsilon(1 + D\sqrt{p})}$.

При очевидном условии малости параметра $D \ll 1$ можем записать

$$\beta \approx \varepsilon - \frac{2DK_\varepsilon\sqrt{p}}{(1 + K_\varepsilon)^2}.$$

Тогда уравнение для температуры основы можно будет представить в форме

$$\bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_2|_{D=0} - \frac{D}{\sqrt{p}} \frac{K_\varepsilon^2}{\left(\delta\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}p} + K_\varepsilon\right)^2}$$

В случае термически тонкого покрытия, переходя к оригиналам, можно ограничиться формулой

$$\theta_2 \approx \theta_2|_{D=0} - \frac{D}{\sqrt{\pi\tau}} + \dots,$$

т.е., с течением времени температуры покрытия и основы практически выравниваются. В оценках использованы следующие приближенные равенства

$$1 - \varepsilon \approx \frac{1}{1 + \varepsilon}, \quad 1 - \varepsilon \equiv \frac{2K_\varepsilon}{1 + K_\varepsilon}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Приведите пример классификации задач теплопроводности.
2. При каком условии справедливы «нульмерные» постановки нестационарных задач теплопроводности?
3. Как определить характерный размер тела?
4. В чем заключается качественное отличие в поведении температуры поверхности от времени для граничных задач с условиями 1, 2 и 3 рода?
5. В чем заключается основная идея операционного метода?

6. Какими физическими величинами можно характеризовать импульсно-периодический источник тепла?
7. В чем заключается метод Дюамеля?
8. Какие новые физические параметры появляются в сопряженных задачах теплопроводности? В чем их физический смысл?
9. В чем состоит суть приближенного метода решения задачи теплопроводности в этом случае?
10. Что можно сказать о температурах контактирующих сред в случае неидеального теплового контакта?

Задания

1. Используя полученные точные решения нестационарных задач теплопроводности, решить следующую задачу. Шарикоподшипники из хромистой стали ($\lambda = 50 \text{ Вт/(м·К)}$, $\kappa = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$) подвергаются термической обработке. Они нагреваются до температуры 650 С , а затем резко охлаждаются в ванне с маслом, имеющим температуру 55 С . Диаметр шарикоподшипника 4.0 см . Коэффициент теплоотдачи от шарикоподшипника к маслу $300 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$. Определить, сколько времени подшипники должны оставаться в масле, пока их температура не снизится до 200 С ; общее количество тепла, отданное каждым подшипником за это время; значения мгновенного теплового потока от подшипников в моменты времени, когда они погружаются в масло и когда их температура достигает 200 С .

2. Температура торцевой поверхности стального цилиндра большой длины мгновенно повышается до температуры 900 С и затем поддерживается постоянной. Найти, за какое время температура на расстоянии 1 см от нагреваемой поверхности повысится на 50 С , на 100 С , если боковые поверхности цилиндра теплоизолированы. Принять в расчетах $\lambda = 70 \text{ Вт/(м·К)}$, $a = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

3. Используя операционный метод, найти решение задачи

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$T(0,t) - T_0 = (T_s - T_0) \cos(\omega t)$$

$$x \rightarrow \infty : T = T_0$$

$$t = 0 : T = T_0$$

4. Найти решение этой же задачи, используя метод Дюамеля.

ЧАСТЬ 8

Классические методы решения стационарных и нестационарных задач

8.1. Решение краевых задач теории теплопроводности в виде произведения функций

Довольно часто решение краевой задачи теплопроводности в двух- и трехмерных областях можно записать в виде произведения решений одномерных задач. Для этого начальная температура должна выражаться в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одной пространственной переменной, а граничными условиями должны служить условия либо нулевой температуры, либо нулевого потока, либо конвективного теплообмена со средой нулевой температуры. Поясним это на примере решения следующей краевой задачи:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}, \quad (8.1)$$

$$0 < x_i < l_i, \quad t > 0, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$T(0, x_1, x_2, x_3) = \Phi_{10}(x_1) \cdot \Phi_{20}(x_2) \cdot \Phi_{30}(x_3), \quad (8.2)$$

$$\left(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \beta_i T \right)_{x_i=0} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8.3)$$

$$\left(\gamma_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + \delta_i T \right)_{x_i=l_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.4)$$

Так как у нас имеется дифференциальное уравнение второго порядка по каждой из трех независимых переменных x_i , у нас задано шесть граничных условий. Здесь независимые переменные обозначены через x_1, x_2, x_3 , а не через x, y, z .

Покажем, что решение краевой задачи (8.1) – (8.2) можно представить в виде произведения решений одномерных задач

$$T(t, x_1, x_2, x_3) = T_1(t, x_1) \cdot T_2(t, x_2) \cdot T_3(t, x_3), \quad (8.5)$$

если $T_i(t, x_i)$ удовлетворяют условиям ($i = 1, 2, 3$)

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_i}{\partial x_i^2}, \quad 0 < x_i < l_i, \quad t > 0, \quad (8.6)$$

$$T_i(0, x_i) = \Phi_{i0}(x_i), \quad (8.7)$$

$$\left(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \beta_i T \right)_{x_i=0} = 0, \quad \left(\gamma_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + \delta_i T \right)_{x_i=l_i} = 0. \quad (8.8)$$

Подставляя (8.5) в (8.1), найдем

$$T_2 \cdot T_3 \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^2} \right) + T_1 \cdot T_3 \left(\frac{\partial T_2}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2} \right) + T_1 \cdot T_2 \left(\frac{\partial T_3}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_3^2} \right) = 0,$$

так как выражения в скобках равны нулю в силу уравнений (8.6). При этом, очевидно, удовлетворяются начальное и граничные условия (8.7), (8.8).

В частности, если в начальный момент времени в прямоугольном параллелепипеде задано распределение температуры

$$T(t, x_1, x_2, x_3) = T_m \exp\left(-\frac{x_1^2}{R_1^2}\right) \exp\left(-\frac{x_2^2}{R_2^2}\right) \exp\left(-\frac{x_3^2}{R_3^2}\right), \quad (8.9)$$

то распределение температуры в этом параллелепипеде в произвольный момент времени будет следовать из решения задач (8.6)-(8.8), где

$$\Phi_{i0}(x_i) = T_m^{1/3} \exp\left(-\frac{x_i^2}{R_i^2}\right). \quad (8.10)$$

Заметим, что если температура окружающей среды отлична от нулевой, например, равна T_0 , то сделав замену переменных $\theta = T - T_0$, задачу легко свести к только что рассмотренной.

Аналогичный прием можно использовать при нахождении поля температуры в полом или сплошном цилиндре, если начальное распределение температуры в нем представляется в виде произведения функций, зависящих от радиальной и осевой координат.

8.2. Метод источников

Физическая сущность метода источников состоит в том, что любой процесс распространения тепла в теле теплопроводностью можно представить как совокупность процессов выравнивания температуры от множества элементарных источников тепла, распределенных как в пространстве, так и во времени. Решение задач теплопроводности по этому методу сводится, в основном, к правильному выбору источников и их распределению.

Так, действие элементарного источника в неограниченном теле при одномерном потоке тепла характеризуется формулой

$$G(x, \xi, t) = \frac{\theta}{\sqrt{4\pi at}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right), \quad (8.11)$$

называемой функцией источника (функцией Грина) на бесконечной прямой.

Функция $G(x, \xi, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (8.12)$$

Действительно, дифференцируем (8.11) по времени и дважды по координате

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{\theta}{\sqrt{4\pi at}} \left[\frac{(x-\xi)^2}{4at} - \frac{1}{2t} \right] \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right); \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} &= \frac{\theta}{\sqrt{4\pi at}} \left[\frac{(x-\xi)^2}{4at} - \frac{1}{2t} \right] \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right), \end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}.$$

Функцию $G(x, \xi, t)$ обычно называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция G представляет температуру в точке x , если в начальный момент времени в точке ξ выделяется количество тепла $Q = \theta c\rho$.

Количество тепла на прямой равно

$$Q = \frac{c\rho\theta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right) \frac{dx}{2\sqrt{at}} = \frac{c\rho\theta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du = c\rho\theta, \quad (8.13)$$

где $u = \frac{x-\xi}{2\sqrt{at}}$; $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Следовательно, количество тепла Q не меняется с течением времени и численно равно произведению площади, ограниченной кривой G и осью абсцисс x , на объемную теплоемкость $c\rho$. Для малых значений времени почти все тепло сосредоточено в окрестности точки ξ .

Функция температурного влияния мгновенного источника тепла для тела конечных размеров и одномерного потока тепла может быть представлена так:

$$G_l(x, \xi, t) = \frac{2\theta}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi \xi}{l}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} at\right). \quad (8.14)$$

Функция G_l дает распределение температуры в неограниченной пластине конечной толщины ($0 < x < l$) в момент времени t , если температура в начальный момент времени равна нулю и в этот момент в точке ξ мгновенно выделяется количество тепла $Q = \theta c\rho$.

Рассмотрим задачу о нахождении распределения температуры в неограниченном теле (в направлении оси Ox) в произвольный момент времени при условии, что распределение температуры в начальный момент времени задано:

$$T(x, 0) = f(x). \quad (8.15)$$

Для любого x справедливо уравнение теплопроводности вида (8.12), а на бесконечном удалении от начала координат источники и стоки тепла отсутствуют

$$\frac{\partial T(+\infty, t)}{\partial x} = \frac{\partial T(-\infty, t)}{\partial x} = 0.$$

Решим задачу методом источников, не налагающим никаких ограничений на функцию $f(x)$.

Частное решение уравнения (8.12), как показано выше, имеет вид

$$T = \frac{C}{\sqrt{4\pi at}} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4at}\right). \quad (8.16)$$

Из этого уравнения видно, что при заданном времени t кривая распределения температуры в направлении x имеет максимум, который находится в точке $x = \xi$ (рис. 8.1). Перенесем начало координат в эту точку. Площадь S под кривой, т.е. площадь, образованная кривой и осью абсцисс, есть величина конечная и равная интегралу от (8.16) в пределах от $-\infty$ до $+\infty$:

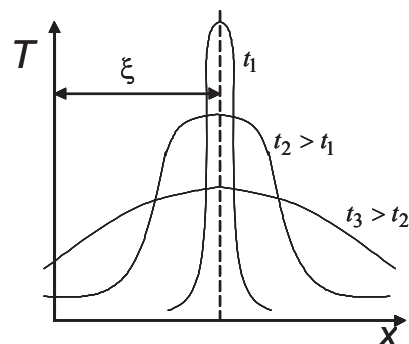


Рис. 8.1. Распределение температуры, соответствующее формуле (8.16)

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{\sqrt{4\pi at}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right) d(x-\xi) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = C.$$

Ордината кривой в точке максимума равна $\frac{C}{\sqrt{4\pi at}}$.

Следовательно, с увеличением времени ордината уменьшается, и кривая становится более полой. При уменьшении времени ($t \rightarrow 0$) получается бесконечно узкая полоска, но площадь ее сохраняется. Она равна постоянной C .

Пользуясь этим свойством, можно заданное начальное распределение температуры $T(x,0) = f(x)$ в неограниченном теле представить как сумму отдельных частных решений вида (8.16), т.е. кривую $f(x)$ заменить суммой бесконечного множества кривых вида

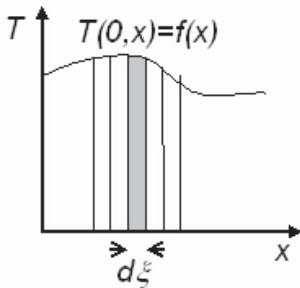


Рис. 8.2. Иллюстрация к методу источников

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{C}{\sqrt{4\pi at}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right) \right].$$

При этом, не смотря на бесконечно малую ширину отдельной полоски $d\xi$, высота ее будет величиной конечной и равной $f(\xi)$. Площадь такой полоски, равная C , будет постоянной величиной, т.е. (рис. 8.2)

$$T(\xi,0)d\xi = f(\xi)d\xi = C.$$

Полное начальное распределение температуры в неограниченном теле будет равно

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(x,t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right) d\xi \right].$$

Такое же соотношение будет справедливо не только для начального момента времени, но и для любого последующего промежутка времени, т.е. общим решением нашей задачи будет

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right) d\xi. \quad (8.17)$$

Можно сделать обобщение на случаи плоской и пространственной задач.

Так, если в плоскости задано начальное распределение температуры $T(0, x, y) = f(x, y)$, то в произвольный момент времени будем иметь распределение

$$T(x, y, t) = \frac{1}{4\pi at} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4at}\right) d\xi d\eta. \quad (8.18)$$

Аналогично в трехмерном пространстве распределение температуры описывается уравнением

$$T(x, y, z) = \frac{1}{(4\pi at)^3} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4at}\right) d\xi d\eta d\zeta \quad (8.19)$$

если в начальный момент времени $t = 0$ было задано

$$T(0, x, y, z) = f(x, y, z).$$

Пример. Пусть в начальный момент времени задана температура полуограниченного тела $T(x, 0) = f(x)$. В этот момент времени температура поверхности тела (или торца стержня) принимает температуру T_s , которая затем поддерживается постоянной. Требуется найти распределение температуры для произвольного времени. Фактически это – задача об остывании тела с заданной начальной температурой.

Решение. Мы имеем дифференциальное уравнение (8.12) и условия

$$T(x, 0) = f(x);$$

$$T(0, t) = T_s = const;$$

$$\frac{\partial T(+\infty, t)}{\partial x} = 0.$$

Для начала положим $T_s = 0$.

Решение этой задачи может быть получено из предыдущей задачи следующим образом. Для этого продолжим стержень в отрицательном направлении оси Ox , т.е. будем считать его неограниченным (рис. 8.3).

Начальная температура в точке $x > 0$ есть $f(x)$, а начальную темпе-

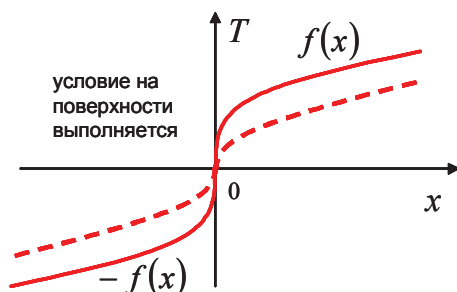


Рис. 8.3. Пояснение к решению задачи для полупространства

ратуру в точке $-x$ выбираем равной $-f(x)$, т.е. считаем функцию $f(x)$ нечетной, $f(x) = -f(-x)$.

Тогда из соображений симметрии распределение температуры в последующие моменты времени будет нечетной функцией, а для $x=0$ ее значение всегда будет равно нулю. Следовательно, условие на поверхности выполняется.

При замене x на ξ в кривой начального распределения температуры общее решение на основании предыдущего имеет вид

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} -f(-\xi) \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right) d\xi \right\}$$

или

$$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right) \right] d\xi. \quad (8.20)$$

Это и есть общее решение нашей задачи.

Если начальная температура постоянна и не зависит от x (например, температура стержня в начальный момент времени одинакова и равна T_0), т.е. $T(x,0) = T_0 = \text{const}$, то решение можно упростить. В первую часть подинтегральной функции подставим

$$\xi = x + 2u\sqrt{at},$$

а во вторую –

$$\xi = -x + 2u\sqrt{at}.$$

Тогда получим

$$T(x,t) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2\sqrt{at}}^{x/2\sqrt{at}} e^{-u^2} du.$$

Так как функция e^{-u^2} является симметричной по отношению к u , то можно записать

$$\frac{T(x,t)}{T_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{at}} e^{-u^2} du = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \quad (8.21)$$

знакомая нам функция.

Если $T_s \neq 0$, то, делая замену переменных $w = T - T_s$, сведем задачу к только что рассмотренной (так как $w(0, t) = T(0, t) - T_s = 0$).

Следовательно, решение этой задачи выглядит так

$$\frac{T(x, t) - T_s}{T_0 - T_s} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right). \quad (8.22)$$

Эту простую задачу, очевидно, можно решить и операционным методом, что мы и сделали в разделе 7.3.

8.3. Метод разделения переменных

8.3.1. Задача для круга

Двумерные стационарные краевые задачи теории теплопроводности сводятся к решению уравнения Лапласа

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q_V = 0$$

или

$$\Delta T + \frac{q_V}{\lambda} = 0$$

с заданными краевыми условиями. В случае некоторых простейших областей (круг, прямоугольник, шар, цилиндр) решение таких задач может быть найдено методом разделения переменных. Получающиеся в ходе решения задачи на собственные значения (так называемые задачи Штурма-Лиувилля) приводят к различным классам специальных функций, изучению свойств которых посвящены специальные разделы курсов и учебников по методам математической физики.

Пусть требуется найти стационарное распределение температуры внутри круга с заданным распределением температуры на его границе. В этом случае нам нужно решить задачу

$$\Delta T = 0, \quad (8.23)$$

$$T(0, R_0, \varphi) = f(\varphi), \quad (8.24)$$

где $f(\varphi)$ – заданная функция.

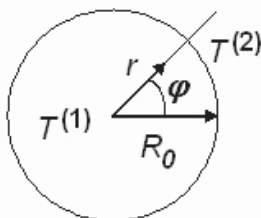


Рис. 8.4. К постановке задачи для круга

К такой задаче может привести изучение поведения образца в форме тонкого диска в условиях заданного несимметричного нагрева.

Введем полярную систему координат (рис. 8.4) с началом в центре круга. В этой системе координат уравнение Лапласа имеет вид

$$\Delta T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (8.25)$$

Будем искать частное решение уравнения (8.25) в виде

$$T(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0. \quad (8.26)$$

Подставив (8.26) в уравнение Лапласа (8.25), находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= \Phi(\varphi) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right), \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} &= R(r) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{\Phi''}{\Phi} = \text{const} = \lambda^2. \quad (8.27)$$

В уравнении (8.27) переменные разделены, т.е. левая часть уравнения зависит только от r , правая – только от φ . Поскольку r и φ не зависят друг от друга, то каждая часть этого уравнения должна быть константой, которую обозначили через λ^2 . В результате мы имеем два уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \lambda^2 \frac{R}{r} = 0, \quad R \neq 0, \quad (8.28)$$

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0, \quad (8.29)$$

решения которых мы можем найти независимо.

Процедура нахождения решение уравнения (8.29) представляет собой задачу на собственные значения или задачу Штурма–Лиувилля.

Решение уравнения (8.29) ищем в виде

$$\Phi = A \exp(-k\varphi). \quad (8.30)$$

Подставляя (8.30) в (8.29), приходим к характеристическому уравнению

$$k^2 = -\lambda^2,$$

откуда имеем

$$k = \pm i\lambda,$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Следовательно, общее решение уравнения (8.29) имеет вид

$$\Phi = A' e^{i\lambda\varphi} + B' e^{-i\lambda\varphi} = A \cos(\lambda\varphi) + B \sin(\lambda\varphi). \quad (8.31)$$

Заметим, что при изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $T(r, \varphi)$ должна вернуться к исходному значению, т.е.

$$T(r, \varphi) = T(r, \varphi + 2\pi).$$

Это есть условие периодичности. Отсюда имеем

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi).$$

Т.е., Φ является периодической функцией угла φ с периодом 2π . Это возможно только в том случае, если

$$\lambda = n,$$

где n – целое число, и

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi). \quad (8.32)$$

Функцию $R(r)$ будем искать в виде

$$R = r^\mu.$$

Подставляя это в уравнение (8.28), найдем

$$n^2 = \mu^2 \text{ или } \mu = \pm n, \quad n > 0.$$

Следовательно,

$$R(r) = Cr^n + Dr^{-n}, \quad (8.33)$$

где C, D - постоянные.

Внутри круга имеем

$$R(r) = Cr^n,$$

так как иначе решение в точке $r = 0$ обращалось бы в бесконечность.

Вне круга –

$$R(r) = Dr^{-n},$$

так как решение при $r \rightarrow \infty$ должно быть ограниченным.

Итак, частные решения нашей задачи найдены

$$T_n^{(1)}(r, \varphi) = r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad r \leq R,$$

$$T_n^{(2)}(r, \varphi) = r^{-n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad r \geq R. \quad (8.34)$$

Суммы этих решений

$$T^{(1)}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(1)}(r, \varphi), \quad r \leq R,$$

$$T^{(2)}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(2)}(r, \varphi), \quad r \geq R \quad (8.35)$$

при достаточно хорошей сходимости также будут гармоническими функциями.

Для определения коэффициентов A_n, B_n используем граничное условие

$$T(R, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f(\varphi). \quad (8.36)$$

Так как $f(\varphi)$ - заданная функция угла φ , то мы можем построить ее разложение в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \quad (8.37)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi) d\psi,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi) \cos(n\psi) d\psi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi) \sin(n\psi) d\psi, \quad n = 1, 2, \dots$$

Сравнивая (8.36) и (8.37), найдем

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \frac{\alpha_n}{R^n}, \quad B_n = \frac{\beta_n}{R^n} -$$

для внутренней задачи (т.е., в круге радиуса R) и

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \alpha_n R^n, \quad B_n = \beta_n R^n -$$

для внешней задачи.

Таким образом, мы получили формальное решение первой внутренней краевой задачи для круга в виде ряда

$$T(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) \quad (8.38)$$

а решение внешней краевой задачи в виде

$$T(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi). \quad (8.39)$$

Можно доказать, что ряды в (8.38), (8.39) действительно сходятся, и функция $T(r, \varphi)$ - непрерывна в замкнутой области $r/R \leq 1$.

8.3.2. Интеграл Пуассона

Преобразуем полученное решение к более простому виду. Для определенности рассмотрим только внутреннюю задачу. Подставляя коэффициенты Фурье функции f в уравнение (8.38) и меняя порядок суммирования и интегрирования, найдем

$$\begin{aligned} T(r, \varphi) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n (\cos n\psi \cos n\varphi + \sin n\psi \sin n\varphi) \right\} d\psi = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos(n(\varphi - \psi)) \right\} d\psi, \end{aligned} \quad (8.40)$$

так как

$$\begin{aligned} \cos n\psi \cos n\varphi &= \frac{1}{2} [\cos n(\psi - \varphi) + \cos n(\psi + \varphi)], \\ \sin n\psi \sin n\varphi &= \frac{1}{2} [\cos n(\psi - \varphi) - \cos n(\psi + \varphi)]. \end{aligned}$$

Проведем следующие тождественные преобразования

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos[n(\varphi - \psi)] &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} t^n [e^{in(\varphi - \psi)} + e^{-in(\varphi - \psi)}] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(te^{i(\varphi - \psi)} \right)^n + \left(te^{-i(\varphi - \psi)} \right)^n \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{te^{i(\varphi - \psi)}}{1 - te^{i(\varphi - \psi)}} + \frac{te^{-i(\varphi - \psi)}}{1 - te^{-i(\varphi - \psi)}} \right] = \frac{1}{2} \frac{1 - t^2}{1 - 2t \cos(\varphi - \psi) + t^2}, \end{aligned}$$

где $t = \frac{r}{R} < 1$.

Подставляя полученное выражение в (8.40), получаем

$$T(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{R^2 - r^2}{r^2 - 2rR \cos(\varphi - \psi) + R^2} d\psi. \quad (8.41)$$

Формула (8.41), дающая решение первой краевой задачи внутри круга, называется *интегралом Пуассона*, а подынтегральное выражение

$$K(r, \varphi, R, \psi) = \frac{R^2 - r^2}{r^2 - 2rR \cos(\varphi - \psi) + R^2} -$$

ядром Пуассона. Имеем $K > 0$ при $r < R$.

Интеграл Пуассона является непрерывной функцией в замкнутой области $r \leq R$.

Решение внешней задачи имеет вид (приводим без подробного описания)

$$T(r, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{r^2 - R^2}{r^2 - 2rR \cos(\varphi - \psi) + R^2} d\psi, & r > R; \\ f(\varphi), & r = R. \end{cases}$$

8.3.3. Нестационарные задачи

Рассмотрим первую краевую задачу на отрезке. Пусть требуется определить распределение температуры в пластине толщины L в произвольный момент времени, если в начальный момент времени распределение температуры задано

$$T - T_0 = (T_m - T_0)\varphi(x), \quad t = 0,$$

а в дальнейшем температуры поверхностей поддерживаются равными температуре T_0 . Математическая постановка этой задачи будет включать одномерное нестационарное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Перейдем к переменным $u = \frac{T - T_0}{T_m - T_0}$, $\tau = \frac{L^2}{\kappa} t$ и $\xi = \frac{x}{L}$. Тогда задача об определении температуры примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad (8.42)$$

$$0 < \xi < 1; \quad 0 < \tau < \infty;$$

$$u(0, \tau) = 0; \quad u(1, \tau) = 0, \quad (8.43)$$

$$u(\xi, 0) = \varphi(\xi); \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (8.44)$$

Решение ищем в виде

$$u = X(\xi)\theta(\tau). \quad (8.45)$$

Подставляя (8.45) в уравнение теплопроводности, найдем

$$X(\xi)\theta'(\tau) = X''(\xi)\theta(\tau)$$

или

$$\frac{\theta'(\tau)}{\theta(\tau)} = \frac{X''(\xi)}{X(\xi)} = k. \quad (8.46)$$

Так как ξ и τ не зависят друг от друга, то вместо (8.46) имеем два уравнения

$$\theta' - k\alpha^2\theta = 0; \quad (8.47)$$

$$X'' - kX = 0. \quad (8.48)$$

Граничными условиями к (8.48) будут

$$X(0) = 0; X(1) = 0, \quad (8.49)$$

следующие из (8.43).

Задача (8.48), (8.49) и есть задача на собственные значения (*задача Штурма–Лиувилля*), с которой мы встретились в разделе 8.3.1.

Отметим важное обстоятельство: $k < 0$, иначе (8.48), (8.49) будет иметь только тривиальное решение. Иначе, функция $\theta(\tau)$ должна убывать при $\tau \rightarrow \infty$, т.е.

$$k = -\lambda^2 \neq 0.$$

Уравнения (8.47), (8.49) решаются описанным выше способом. Решения имеют вид

$$\theta(\tau) = Ce^{-\lambda^2\tau}$$

$$X(\xi) = A\sin(\lambda\xi) + B\cos(\lambda\xi),$$

A, B, C – произвольные постоянные.

Из всего множества решений задачи (8.42) – (8.44)

$$u(\xi, \tau) = \exp(-\lambda^2\tau) [A\sin(\lambda\xi) + B\cos(\lambda\xi)]$$

нам нужно выбрать те, которые удовлетворяют граничным условиям. Подставляя полученное уравнение в условия (8.43), найдем

$$u(0, \tau) = B\exp(-\lambda^2\tau) = 0, \text{ если } B = 0;$$

$$u(1, \tau) = A\exp(-\lambda^2\tau)\sin(\lambda) = 0, \text{ если } \sin\lambda = 0$$

(так как нас интересуют нетривиальные решения). Это условие накладывает ограничения на возможные значения λ , т.е. нужно потребовать, чтобы

$$\lambda = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots, \text{ или } \lambda_n = \pm n\pi, n = 1, 2, \dots$$

$$u_n(\xi, \tau) = A_n \exp(-(\pi n)^2 \tau) \sin(\pi n \xi) = 0, n = 1, 2, \dots$$

и

$$u(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-(\pi n \alpha)^2 \tau\right) \sin(\pi n \xi).$$

Подставляя $u(\xi, \tau)$ в начальные условия, имеем

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\pi n \xi). \quad (8.50)$$

Система функций $\{\sin(\pi n \xi), n=1, 2, \dots\}$ обладает таким свойством как ортогональность. Это означает, что

$$\int_0^1 \sin(m\pi \xi) \sin(n\pi \xi) d\xi = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 1/2, & m = n. \end{cases} \quad (8.51)$$

Умножим обе части уравнения (8.50) на $\sin(m\pi \xi)$, где m – произвольное целое число, и проинтегрируем его затем от нуля до единицы. В результате получим

$$\int_0^1 \varphi(\xi) \sin(\pi m \xi) d\xi = A_m \int_0^1 \sin^2(\pi m \xi) d\xi = \frac{A_m}{2}.$$

Остальные слагаемые обратились в нуль, благодаря ортогональности.

Следовательно, решение примет вид

$$u(\xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp\left(-(\pi m)^2 \tau\right) \sin(\pi m \xi), \quad (8.52)$$

где коэффициенты A_m вычисляются по формулам

$$A_m = 2 \int_0^1 \varphi(\xi) \sin(\pi m \xi) d\xi. \quad (8.53)$$

Это решение кажется громоздким. Но здесь следует отметить, что наличие множителя $\exp\left(-(\pi m)^2 \tau\right)$ делает ряд в (8.52) быстро сходящимся при $\tau > 0$, так как слагаемые с большими номерами вносят несущественный вклад в сумму ряда. Это весьма удобно в практических вычислениях.

Мы уже знаем, что эта задача может быть решена другим методом. В результате мы получаем другую форму представления решения.

Преобразуем полученное решение (8.52), подставив в него выражения для коэффициентов

$$\begin{aligned}
u(\xi, \tau) &= \sum_{m=1}^{\infty} 2 \left[\int_0^1 \varphi(x) \sin(\pi m x) dx \right] \exp\left(-(\pi m)^2 \tau\right) \sin(\pi m \xi) = \\
&= \int_0^1 \left[2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-(\pi m)^2 \tau\right) \sin(\pi m x) \sin(\pi m \xi) \right] \varphi(x) dx
\end{aligned}$$

или

$$u(\xi, \tau) = \int_0^1 G(\xi, x, \tau) \varphi(x) dx,$$

где

$$G(\xi, x, \tau) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-(\pi m)^2 \tau\right) \sin(\pi m \xi) \sin(\pi m x) \quad (8.54)$$

функция мгновенного точечного источника, или функция температурного влияния мгновенного точечного источника тепла мощности $Q = \text{ср}$.

Рассмотрим более сложную краевую задачу теории теплопроводности. Предположим, что в пластине имеются объемные источники тепла, зависящие от пространственных координат и времени, а на границах заданы обобщенные условия третьего рода, включающие потоки тепла, зависящие от времени

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, t), \\
\alpha_1 \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} + \beta_1 T(0, t) &= g_1(t), \\
\alpha_2 \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} + \beta_2 T(L, t) &= g_2(t), \\
T(x, 0) &= \varphi(x).
\end{aligned}$$

Заменой переменных эту задачу можно свести к другой задаче. Если эта новая задача окажется однородной, то ее можно будет решить методом разделения переменных. Если она окажется неоднородной, то возможно использовать метод интегральных преобразований и разложение по собственным функциям.

Рассмотрим частные варианты.

Пусть $f(x, t) = 0$ и заданы постоянные температуры на концах отрезка $[0, L]$, т.е.

$$T(0,t) = k_1 = \text{const}; T(L,t) = k_2 = \text{const}. \quad (8.55)$$

Представим решение в виде

$$T = T_1(x) + T_2(x,t), \quad (8.56)$$

где $T_1(x)$ – стационарное или установившееся решение

$$T_1(x) = k_1 + \frac{x}{L}(k_2 - k_1). \quad (8.57)$$

Подставляя (8.56) в уравнение теплопроводности и условия (8.55), приходим к задаче для функции T_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_2}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \\ T_2(0,t) &= 0; T_2(L,t) = 0, \\ T_2(x,0) &= \varphi(x) - \left[k_1 + \frac{x}{L}(k_2 - k_1) \right] = \bar{\varphi}(x); 0 \leq x \leq L \end{aligned}$$

с однородными граничными условиями и новым, но известным, начальным условием.

Как решать такую задачу, мы уже знаем.

«Избавиться» от коэффициента теплопроводности в уравнении можно введением переменных $\tau = \frac{L^2}{\kappa}$ и $\xi = \frac{x}{L}$.

Пусть теперь граничные условия зависят от времени.

Имеем задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \\ T(0,t) &= g_1(t); \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} + hT(L,t) = g_2(t), \\ T(x,0) &= \varphi(x). \end{aligned} \quad (8.58)$$

После некоторых проб и ошибок останавливаются вот на такой форме решения

$$T(x,t) = A(t)[1 - x/L] + B(t)[x/L] + T_2(x,t), \quad (8.59)$$

где $A(t), B(t)$ выбирают так, чтобы «квазистационарная» часть решения удовлетворяла граничным условиям задачи (8.48). Введем обозначение

$$S(x,t) = A(t)[1 - x/L] + B(t)[x/L]. \quad (8.60)$$

В этом случае T_2 будет удовлетворять однородным граничным условиям.

Подставляя S в граничные условия (8.58), приходим к двум уравнениям, из которых определим функции $A(t), B(t)$:

$$A(t) = g_1(t); \quad B(t) = \frac{g_1(t) + Lg_2(t)}{1 + Lh}. \quad (8.61)$$

Следовательно, решение (8.59) примет вид

$$T(x, t) = g_1 \left[1 - \frac{x}{L} \right] + \frac{g_1(t) + Lg_2(t)}{1 + Lh} \frac{x}{L} + T_2(x, t). \quad (8.62)$$

Подставив $T(x, t)$ (8.62) в исходную задачу, найдем задачу для функции $T_2(x, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_2}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - S_t, \\ \frac{\partial T_2(L, t)}{\partial x} + hT_2(L, t) &= 0, \\ T_2(0, t) &= 0, \\ T_2(x, 0) &= \varphi(x) - S(x, 0). \end{aligned} \quad (8.63)$$

Эта задача с однородными граничными условиями, но само уравнение стало неоднородным. Задача (8.63) не может быть прямо решена методом разделения переменных. Нам потребуется метод разложения по собственным функциям.

8.4. Метод разложения по собственным функциям

Чтобы уяснить, в чем заключается метод разложения по собственным функциям, рассмотрим частный случай задачи (8.63), который в переменных u, τ, ξ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + f(\xi, \tau), \\ u(0, \tau) &= 0; \quad u(1, \tau) = 0, \\ u(\xi, 0) &= \varphi(\xi), \\ 0 &\leq \xi \leq 1. \end{aligned}$$

(Как мы видели выше, задачу на отрезке от 0 до L всегда можно свести к задаче на отрезке от нуля до единицы, воспользовавшись преобразованием координат).

Основная идея метода состоит в разложении функции плотности источника $f(\xi, \tau)$ в ряд по собственным функциям

$$f(\xi, \tau) = f_1(\tau)X_1(\xi) + f_2(\tau)X_2(\xi) + \dots + f_n(\tau)X_n(\xi) + \dots \quad (8.64)$$

и в определении откликов системы u_n на воздействие каждой компоненты $f_n(\tau)X_n(\xi)$. Если все отклики будут найдены, то решение задачи будет иметь вид

$$u(\xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\xi, \tau). \quad (8.65)$$

Основная трудность и состоит в разложении плотности источника на компоненты. Оказывается, что множители $X_n(\xi)$ в данной задаче являются собственными векторами системы Штурма–Лиувилля, которая возникает при решении соответствующей однородной краевой задачи методом разделения переменных, а именно задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \\ 0 < \xi < 1; \quad 0 < \tau < \infty; \\ u(0, \tau) &= 0; \quad u(1, \tau) = 0, \\ u(\xi, 0) &= \varphi(\xi); \quad 0 \leq \xi \leq 1. \end{aligned}$$

Задача Штурма-Лиувилля в этом случае нам тоже уже известна и имеет вид (8.47), (8.48)

$$\begin{aligned} X'' - kX &= 0, \\ X(0) &= 0; \quad X(1) = 0, \end{aligned}$$

Ее решениями являются функции

$$X_n(\tau) = \sin(\pi \xi n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.66)$$

Следовательно, разложение плотности источника представимо в виде ряда

$$f(\xi, \tau) = f_1(\tau)\sin(\pi \xi) + f_2(\tau)\sin(2\pi \xi) + \dots + f_n(\tau)\sin(n\pi \xi) + \dots \quad (8.67)$$

И, наконец, для того, чтобы найти функции $f_n(t)$, умножим обе части (8.67) на $\sin(m\pi x)$ и проинтегрируем от нуля до единицы по координате x

$$\int_0^1 f(x, \tau) \sin(m\pi x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) \int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx = \frac{1}{2} f_m(\tau)$$

или (после замены m на n)

$$f_n(\tau) = 2 \int_0^1 f(x, \tau) \sin(n\pi x) dx. \quad (8.68)$$

Это соотношение устанавливает связь между коэффициентами $f_n(t)$ и плотностью теплового источника

$$f(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) \sin(n\pi \xi). \quad (8.69)$$

Теперь попытаемся найти индивидуальные отклики, т.е. функции $\theta_n(\tau)$ в разложении

$$u(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(\tau) \sin(n\pi \xi). \quad (8.70)$$

Подставим (8.70) в исходную задачу с учетом (8.69). Имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n'(\tau) \sin(\pi n \xi) = - \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n)^2 \theta_n(\tau) \sin(\pi n \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) \sin(\pi n \xi) \quad (8.71)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \sin(0) = 0; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \sin(\pi 0) = 0;$$

(т.е., граничные условия удовлетворяются тождественно)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(0) \sin(\pi n \xi) = \varphi(\xi).$$

Уравнения (8.61) перепишем в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\theta_n'(\tau) + (\pi n)^2 \theta_n(\tau) - f_n(\tau) \right] \sin(\pi n \xi) = 0. \quad (8.72)$$

Следовательно, Функции $\theta_n(\tau)$ являются решениями задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\theta_n' + (\pi n)^2 \theta_n = f_n(\tau); \quad (8.73)$$

$$\theta_n(0) = 2 \int_0^1 \varphi(\xi) \sin(\pi n \xi) d\xi = a_n.$$

Все эти задачи легко решаются стандартными методами и их решения записываются в виде

$$\theta_n(\tau) = a_n \exp\left[-(n\pi)^2 \tau\right] + \int_0^\tau \exp\left[-(n\pi)^2(\tau - z)\right] f_n(z) dz,$$

откуда нетрудно получить полное решение задачи:

$$u(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(\tau) \sin(n\pi\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \exp\left[-(n\pi)^2 \tau\right] \sin(n\pi\xi) \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sin(n\pi\xi) \int_0^\tau \exp\left[-(n\pi)^2(\tau - z)\right] f_n(z) dz \right\}. \quad (8.74)$$

В (8.74) первое слагаемое в правой части обусловлено начальным условием, а второе слагаемое – обусловлено источником в уравнении теплопроводности.

8.5. Задача об остывании бесконечной пластины

Вспомним физическое содержание задач.

Задача (8.42)–(8.43) есть задача об остывании бесконечной пластины единичной толщины с заданным распределением температуры.

Пусть теперь в начальный момент времени пластина прогрета однородно. На левой ее границе задано условие адиабатичности (т.е., пластина теплоизолирована при $x = 0$), а на правой границе – осуществляется теплообмен с окружающей средой, имеющей температуру T_e , по

закону Ньютона. В переменных $u = \frac{T - T_e}{T_0 - T_e}, \tau, \xi$ такая задача примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}; \\ 0 < \xi < 1; \quad 0 < \tau < \infty; \\ \frac{\partial u(0, \tau)}{\partial \xi} &= 0; \quad -\frac{\partial u(1, \tau)}{\partial \xi} = Bi\theta; \\ u(\xi, 0) &= \theta_0 = 1; \quad 0 \leq \xi \leq 1, \end{aligned} \quad (8.75)$$

где $Bi = \frac{\alpha L}{\lambda}$, $\tau \equiv Fo = \frac{\kappa t}{L^2}$.

Эта задача легко решается описанным методом разделения переменных. Решение имеет вид

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n} \cos(\mu_n \xi) \exp[-\mu_n^2 \tau], \quad (8.76)$$

где μ_n - корни уравнения

$$\operatorname{ctg}\mu = \mu/Bi. \quad (8.77)$$

Каждому значению числа Био Bi соответствует свое семейство решений.

Если $Bi \rightarrow \infty$, то

$$\mu_1 = \frac{\pi}{2}; \mu_2 = \frac{3}{2}\pi; \mu_3 = \frac{5}{2}\pi; \dots; \mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}.$$

Если $Bi \rightarrow 0$, то

$$\mu_1 = 0; \mu_2 = \pi; \mu_3 = 2\pi; \dots; \mu_n = (n-1)\pi.$$

Для других значений Bi корни имеют промежуточное значение.

Коэффициенты

$$D_n = \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n} \quad (8.78)$$

являются функциями только числа Bi и легко могут быть рассчитаны.

Так как μ_n - ряды возрастающих чисел, то чем больше μ_n , тем меньше роль последующих членов ряда. Кроме того, чем больше число Фурье, тем члены ряда будут убывать быстрее с номером n .

При $Fo \geq 0.3$ достаточно ограничиться первым членом ряда, т.е.

$$u = D_1 \cos(\mu_1 \xi) \exp[-\mu_1^2 \tau],$$

где $D_1 = \frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1 \cos\mu_1}$.

Рассмотрим различные частные случаи.

1. Пусть $Bi \rightarrow \infty$. Практически достаточно $Bi > 100$. В этом случае температура поверхности пластины сразу же становится равной температуре окружающей среды, в которую помещена пластина, и мы имеем распределение температуры, показанное на рис. 8.5, а. В этом случае процесс охлаждения определяется внутренним теплообменом.

2. Если $Bi \rightarrow 0$, то $D_1 \sim 1$. Практически достаточно, чтобы $Bi < 0,1$. В этом случае интенсивность охлаждения определяется внешним сопротивлением (внешними условиями), и мы имеем распределение температуры, показанное на рис. 8.5, б. Можно показать, что в этом случае

$$\frac{u(\tau,0)}{u(\tau,1)} = \frac{\exp(Bi \cdot Fo)}{\cos \sqrt{Bi} \exp(Bi \cdot Fo)} \rightarrow 1.$$

3. Промежуточным значениям числа Bi соответствует качественное распределение температуры, показанное на рис. 8.5, в. В этом случае интенсивность процесса охлаждения определяется как внутренним, так и внешним термическим сопротивлением.

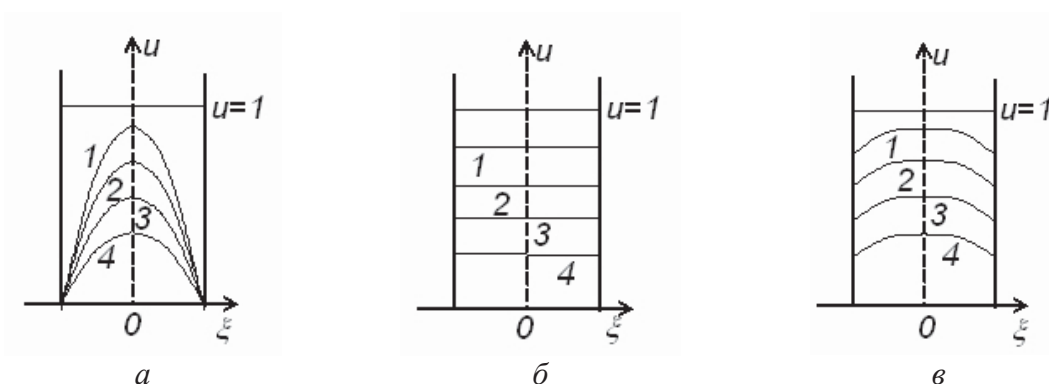


Рис. 8.5. Режимы охлаждения пластины

Вопросы для самоконтроля

1. При каких условиях решение задач в двух- и трехмерных областях можно представить в виде произведения решений более простых задач?
2. В чем заключается физическая сущность метода источников?
3. Что такое «фундаментальное решение уравнения теплопроводности»?
4. В чем состоит основная идея метода разделения переменных?
5. Где встретилась задача Штурма–Лиувилля?
6. Что такое «интеграл Пуассона»?
7. Какого вида задачи удобно решать методом разделения переменных?
8. Охарактеризуйте идею метода разложения по собственным функциям.
9. Какими физическими процессами определяется скорость охлаждения тел?

Задания

1. Найти решение однородной краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$0 < \xi < 1; \quad 0 < \tau < \infty;$$

$$u(0, \tau) = 0; \quad u(1, \tau) = 0,$$

$$u(\xi, 0) = \varphi(\xi); \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

для $\varphi = \varphi = [1 - \xi]^2 + \xi$.

2. Найти решение задачи (8.75) методом разделения переменных.

3. Металлическая болванка заданного линейного размера L и с заданными теплофизическими свойствами, имеющая температуру T_0 , в начальный момент времени приводится одним торцом в соприкосновение с телом, имеющим постоянную температуру T_s . Второй торец и боковые поверхности болванки – теплоизолированы. Найти время, за которое противоположный торец болванки прогреется до температуры T_s с заданной точностью ε . Решить задачу методом разделения переменных и операционным методом. Сравнить решения.

ЧАСТЬ 9

Сопутствующие явления: теплообмен излучением

9.1. Основные понятия теории теплового излучения

Тепловое излучение представляет собой процесс распространения внутренней энергии излучающего тела электромагнитными колебаниями и фотонами. Любые тела, температура которых выше абсолютного нуля, излучают электромагнитные колебания. Генераторами электромагнитных волн являются заряженные электромагнитные частицы – электроны и ионы, входящие в состав вещества. Согласно волновой теории, излучение можно представить волновыми колебаниями, имеющими частоту ν и длину волны λ . Произведение частоты и длины волны есть скорость распространения колебаний, равная скорости света: $c = \nu \cdot \lambda$. Помимо волновых свойств, излучение обладает и корпускулярными свойствами, т.е. лучистая энергия испускается и поглощается веществами не непрерывно, а дискретными порциями – фотонами. Каждый фотон движется со скоростью света и имеет определенную энергию, заданную соотношением $e = h\nu$, где h – постоянная Планка.

Интенсивность теплового излучения зависит от материала и температуры тела, длины волны, состояния поверхности, а для газов – еще и от толщины слоя и давления. С возрастанием температуры энергия излучения увеличивается, так как увеличивается внутренняя энергия тела. При высоких температурах основным видом переноса теплоты может оказаться тепловое излучение, так как интенсивность излучения зависит от температуры значительно сильнее, чем конвекция и теплопроводность.

В отличие от других видов теплообмена, поток лучистой энергии передается как от более нагретого тела к менее нагретому, так и наоборот. Конечным результатом такого воздействия и будут количества теплоты, переданной излучением. Теплообмен излучением возможен и в вакууме.

Для любой поверхности в любой данный момент времени многочисленные электроны совершают переходы на разные энергетические уровни, поэтому энергия фотонов, покидающих поверхность, распределена по спектру частот.

Все виды излучения различаются длиной волны. Для нас наибольший интерес представляют носители тепловой лучистой энергии: види-

мые (световые) лучи с длиной волны 0,4–0,8 мкм и особенно инфракрасные с длиной волны 0,8–800 мкм.

Есть другие способы, кроме нагревания поверхности, которые могут быть причиной испускания телом фотонов. На коротковолновом конце спектра, например, находится рентгеновское излучение, которое может быть вызвано бомбардировкой куска металла потоком электронов. На другом конце спектра находятся радиоволны с большими длинами волн, которые могут генерироваться электронным оборудованием и кристаллами.

Большинство твердых и жидких тел имеют сплошной спектр излучения, т.е. излучают энергию всех длин волн $0 \leq \lambda \leq \infty$. Чистые металлы, металлы с полированной поверхностью и газы характеризуются прерывистым *спектром излучения*, имеющим ограниченный диапазон длин волн. Излучение, соответствующее узкому интервалу длин волн, (от λ до $\lambda + d\lambda$), называется *монохроматическим* или однородным.

Тепловое излучение количественно характеризуется *полным потоком* и *плотностью потока*.

Суммарная энергия, излучаемая с поверхности тела, во всем интервале длин волн спектра в единицу времени, называется интегральным или *полным потоком излучения*. Измеряется в ваттах – Вт:

$$Q = \int_F E dF, \quad (9.1)$$

где E – энергия, излучаемая с единицы поверхности тела в единицу времени по всем направлениям сферического полупространства, Вт/см²:

$$E = dQ/dF. \quad (9.2)$$

Величина E зависит только от температуры и физических свойств тела и называется собственным излучением или излучательной способностью тела. Эта величина является *плотностью потока* интегрального излучения

$$E = q.$$

Отношение плотности интегрального лучистого потока, испускаемого в бесконечно малом интервале длин волн, к величине этого интервала называется *спектральной плотностью потока излучения*

$$E_\lambda = dE/d\lambda, \text{ Вт/м}^3.$$

Рассмотрим тело, участвующее в лучистом теплообмене с другими телами (рис. 9.1). На поверхность данного тела падает энергия излучения других тел Q – падающее излучение. Эта энергия частично поглощается телом, частично отражается, а частично проходит сквозь тело. Каждая из этих частей характеризуется соответствующими потоками –

потоком поглощенного излучения Q_A ; потоком отраженного излучения Q_R ; потоком пропускаемого излучения Q_D . Можно записать равенства

$$Q_A = A Q; Q_R = R Q; Q_D = D Q,$$

где A – поглощательная способность тела; R – отражательная способность тела; D – пропускательная способность тела.

В соответствии с законом сохранения энергии интегральный лучистый поток, падающий на тело, равен сумме всех составляющих

$$Q = Q_A + Q_R + Q_D,$$

откуда с учетом выражений для составляющих суммарного потока следует

$$A + R + D = 1. \quad (9.3)$$

Каждый из этих коэффициентов в общем случае может меняться в пределах от 0 до 1. Если поглощательная способность тела $A=1$, то два других коэффициента равны нулю ($R = D = 0$). Тела, поглощающие всю падающую на них энергию, называются *абсолютно черными*. Черное тело – это эталон, с которым можно сравнивать все другие излучатели. К этому эталону можно приблизиться на практике покрытием поверхности тела или видоизменением формы его поверхности.

Поглощенная энергия электромагнитных колебаний вновь превращается во внутреннюю энергию тела. Таким образом, *теплообмен излучением связан с двойным превращением энергии*: теплота трансформируется в энергию излучения, которая, частично поглощаясь другим телом, вновь превращается во внутреннюю энергию тела.

Если предмет поглощает все лучи, то он зрительно воспринимается как черное тело. Если же поверхность поглощает все лучи, кроме видимых, то она не кажется черной, хотя по лучистым свойствам может быть близка к абсолютно черному телу. Например, снег по поглощательной способности ($A = 0,95 \div 0,98$) относится к абсолютно черным телам, хотя имеет белый цвет. Дело в том, что белая поверхность хорошо отражает только видимые (световые) лучи, что используется в жизни: белые костюмы, окраска вагонов-рефрижераторов, цистерн и т.д., а

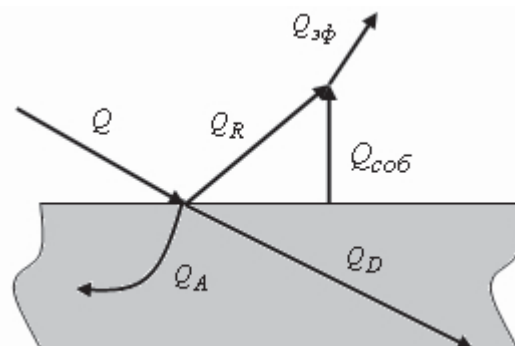


Рис. 9.1. Составляющие интегрального лучистого потока

невидимые тепловые лучи белая краска и ткань поглощают также хорошо, как и темные поверхности.

Тело, для которого $R = 1$ и, соответственно, $A = D = 0$, отражает всю лучистую энергию. Если это отражение происходит по законам геометрической оптики, то его поверхность называется *зеркальной*, если же отражение – рассеянное, то *абсолютно белой*.

Тело, для которого $D = 1$, а $A = R = 0$, пропускает всю лучистую энергию и называется *абсолютно прозрачным*. Тела, для которых $0 < D < 1$, называются полупрозрачными. Многие твердые тела и жидкости для тепловых лучей практически непрозрачны. Существуют тела, которые прозрачны только для определенных длин волн. Например, оконное стекло прозрачно для световых лучей и непрозрачно для ультрафиолетовых, а кварц – прозрачен для световых и ультрафиолетовых лучей, но не прозрачен для тепловых.

Таким образом, цветовые и оптические ощущения человека не всегда соответствуют способностям тела отражать, поглощать ли пропускать тепловое излучение. Для поглощения и отражения тепловых лучей решающую роль играет шероховатость поверхности: чем она больше, тем больше энергии поглощает и излучает поверхность. Пример со снегом свидетельствует о том, что для защиты аппаратов от воздействия теплового излучения их поверхность должна быть не только белой, но и очень гладкой.

Как было сказано, каждое тело характеризуется потоком собственного излучения Q_p . Его сумма с потоком отраженного излучения составляет *поток эффективного излучения тела* (рис. 9.1)

$$Q_{res} = Q_p + Q_R. \quad (9.4)$$

Таким образом, лучистым теплообменом называются совместные процесс взаимного испускания, поглощения, отражения и пропускания энергии излучения в системах различных тел. При этом тела, входящие в систему, могут иметь как различные, так и одинаковые температуры. Теплообмен излучением между этими телами характеризуется потоком результирующего излучения Q_{sum} , который представляет собой разность между собственным излучением тела и частью падающего излучения, которая поглощается данным телом:

$$Q_{sum} = Q_p - Q_A.$$

В природе абсолютно черных, белых и прозрачных тел не существует, а применительно к реальным телам эти понятия условны.

9.2. Основные законы теплового излучения

9.2.1. Закон Планка

В 1900 году М. Планк, исходя из электромагнитной природы излучения и разработанной им квантовой теории, установил для абсолютно черного тела (индекс 0) зависимость интенсивности собственного излучения тела от длины волны и температуры

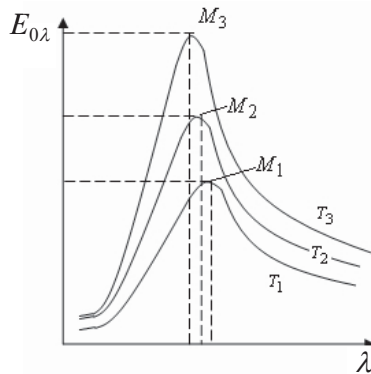


Рис. 9.2. Графическое представление закона Планка

$$E_{0\lambda} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{C_2/(\lambda T)} - 1}, \quad (9.5)$$

где λ — длина волны, м; T — абсолютная температура тела, К; C_1, C_2 — константы:

$$C_1 = 3,74 \cdot 10^{-16} \text{ Вт} \cdot \text{м}^2; \quad C_2 = 0,0144 \text{ м} \cdot \text{К}.$$

На рис. 9.2. закон Планка представлен графически. Из графика видно, что с увеличением длины волны при любой температуре (T_1, T_2, T_3) интенсивность излучения сначала быстро возрастает, достигая максимума (точки M_1, M_2, M_3), а затем медленно убывает. С повышением температуры тела ($T_3 > T_2 > T_1$) энергия его излучения существенно возрастает (на графике она изображается площадью под соответствующей изотермой). Кроме того, с повышением температуры увеличивается энергия луча одной и той же длины волны.

9.2.2. Закон смещения Вина

Из закона Планка можно определить длину волны, соответствующую максимальной плотности потока излучения. Разрешая уравнение

$$dE/d\lambda = 0, \quad (9.6)$$

получим зависимость

$$\lambda_{\max} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{T}, \quad (9.7)$$

представляющую собой математическое выражение закона Вина.

Величина λ_{\max} есть длина волны, при которой достигается максимум монохроматической плотности потока излучения черного тела с температурой T .

Максимальная спектральная плотность потока излучения с повышением температуры смещается в сторону более коротких длин волн.

Из рисунка 9.2. видно, что если $T_3 > T_2 > T_1$, то и

$$\lambda_{3,\max} > \lambda_{2,\max} > \lambda_{1,\max}.$$

Максимальное значение плотности потока монохроматического излучения черного тела можно получить подстановкой (9.7) в (9.5), что в результате дает

$$(E_{0\lambda})_{\max} = 1,287 \cdot 10^{-5} T^5 \text{ Вт/м}^3.$$

Солнце является примером источника энергии с высокой температурой. Внешняя поверхность Солнца имеет температуру ~ 5800 К. Согласно закону Вина, λ_{\max} при этой температуре равняется приблизительно $5,2 \cdot 10^{-7}$ м, что соответствует приблизительно середине видимой области. Глаз человека идеально приспособлен к восприятию максимума энергии монохроматического излучения Солнца.

9.2.3. Закон Стефана–Больцмана

Закон Стефана–Больцмана, открытый в 1879 году чешским ученым Й. Стефаном и теоретически обоснованный в 1884 году австрийским ученым Л. Больцманом, устанавливает зависимость излучательной способности абсолютно–черного тела от его температуры:

$$E_0 = \int_0^{\infty} E_{0\lambda} d\lambda = \sigma_0 T^4, \quad (9.8)$$

где $\sigma_0 = 5,77 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2\text{К}^4)$ – постоянная Стефана–Больцмана,

$$\sigma_0 = \left(\frac{\pi}{C_2} \right)^4 \frac{C_1}{15}.$$

Таким образом, плотность потока излучения абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры.

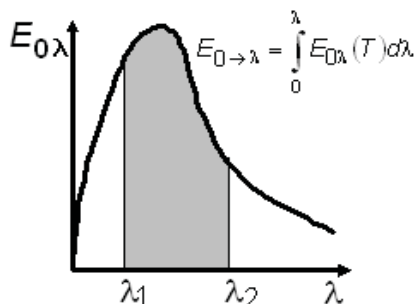


Рис. 9.3. Интегральное излучение абсолютно черного тела

Интегральное излучение абсолютно черного тела при данной температуре в пределах от $\lambda = 0$ до $\lambda = \infty$ графически изображается площадью, ограниченной кривой $T = \text{const}$ и осью абсцисс (рис. 9.3); C_1 и C_2 – те же постоянные, что и в законе Планка.

Из закона Стефана-Больцмана следует, что влияние излучения в большинстве

случаев незначительно при низких температурах вследствие малости коэффициента σ . При комнатной температуре или около 300 К, интегральная плотность потока излучения черной поверхности только $\sim 460 \text{ Вт/м}^2$. Эта величина составляет около 1/10 плотности теплового потока, передаваемого конвекцией от поверхности жидкости, когда коэффициенты конвективной теплоотдачи и перепад температур имеют достаточно низкие значения $\sim 100 \text{ Вт/(м}^2\text{К)}$ и 50 К соответственно.

Для удобства расчетов выражение (9.8) представляют в виде

$$E_0 = C_0 (T/100)^4, \quad (9.9)$$

где $C_0 = 5,77 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К}^4)$ – коэффициент излучения абсолютно черного тела.

Для реальных тел, т.е., неабсолютно черных (серых тел) плотность потока излучения выражается такой же формулой

$$E = C (T/100)^4,$$

но величина C относится уже к серым телам.

Для сопоставления плотностей потоков излучения реального и абсолютно черного тел при одной и той же температуре используют характеристику тела ε , называемую степенью черноты тела

$$\varepsilon = E/E_0 = C/C_0$$

или интегральной излучательной способностью.

Закон Стефана–Больцмана для серого тела записывается следующим образом

$$E = \varepsilon \sigma_0 T^4 = \varepsilon C_0 (T/100)^4.$$

Величина ε для серых тел всегда меньше единицы; она зависит от природы тела, состояния поверхности, температуры и находится экспериментальным путем.

9.2.4. Закон Ламберта

Распределение энергии излучения, испускаемой абсолютно черным телом, в различных направлениях пространства неодинаково. В 1760 году немецкий ученый И. Ламберт установил зависимость величины энергии излучения от направления ее распространения. Математическая запись закона Ламберта для плотности потока излучения в направлении m , составляющем с нормалью n к поверхности излучения угол φ , имеет вид (рис. 9.4)

$$E_{0\varphi} = E_{0n} \cos \varphi, \quad (9.10)$$

где $E_{0\varphi}$ – плотность потока излучения абсолютно черного тела в направлении нормали к поверхности ($\varphi = 0$).

Таким образом, для абсолютно черного тела поток излучения в данном направлении пропорционален потоку излучения в направлении нормали к излучающей поверхности и косинусу угла между ними.

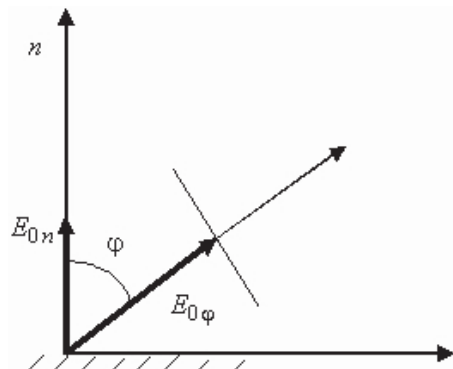


Рис. 9.4. К объяснению закона Ламберта

Из (9.10) следует, что в направлении нормали к поверхности ($\varphi = 0$) излучается наибольшее количество энергии. Интегрируя (9.10) по углу φ , найдем

$$E_{0n} = E_0 / \pi,$$

т.е., плотность потока излучения в направлении нормали к поверхности в π раз меньше полной плотности потока излучения.

Для реальных тел закон Ламберта подтверждается лишь при угле $\varphi = 0 \div 60^\circ$ (см. раздел 9.6)

9.2.5. Закон Кирхгофа

Закон Кирхгофа устанавливает взаимосвязь между способностями тела излучать и поглощать энергию. Эта связь может быть получена из рассмотрения термодинамического равновесия при лучистом теплообмене между двумя параллельными поверхностями (см. рис. 9.5), левая из которых – серая, а правая – черная. Серая поверхность характеризуется температурой T , поглощательной способностью A и плотностью потока собственного излучения E , а абсолютно черная – величинами T_0 , A_0 и E_0 . Собственное излучение серой поверхности E поглощается абсолютно черным телом. Абсолютно черная поверхность за то же время излучает поток, который частично поглощается (в количестве $A E_0$) серой поверхностью, а частично – в количестве $(1 - A) E_0$ отражается от нее. Отраженная часть затем поглощается абсолютно черным телом. Плотность потока результирующего излучения в случае $T > T_0$ находится из энергетического баланса на серой поверхности

$$E_{\text{sum}} = E - A E_0. \quad (9.11)$$

При $T = T_0$ система находится в термодинамическом равновесии, т.е. между поверхностями имеет место лучистый теплообмен, но $E_{\text{sum}} = 0$, откуда найдем

$$E/A = E_0. \quad (9.12)$$

Соотношение (9.12) справедливо для любых серых тел, поэтому

$$E_1/A_1 = E_2/A_2 = \dots = E_0. \quad (9.13)$$

Зависимость (9.13) есть математическое выражение закона Кирхгофа: отношение плотности потока излучения серого тела к его поглощательной способности не зависит от природы тела и равно плотности потока излучения абсолютно черного тела при такой же температуре.

Так как $E/E_0 = \varepsilon$, то $\varepsilon = A$. Это – вторая форма записи закона Кирхгофа, в соответствии с которой *при термодинамическом равновесии поглощательная способность и степень черноты численно равны между собой*.

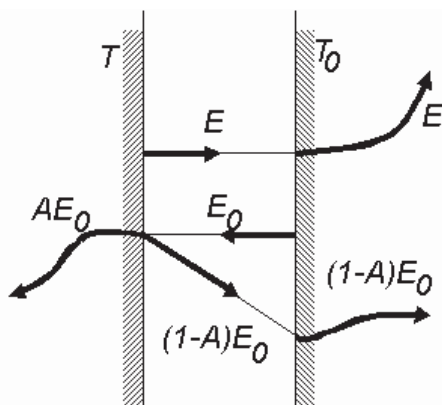


Рис. 9.5. К выводу закона Кирхгофа

Из закона Кирхгофа можно сделать следующие выводы:

1. Чем больше тело способно излучать, тем больше его возможность поглощать лучистую энергию.
2. Чем меньше поглощательная способность тела, тем меньше его излучательная способность. Следовательно, тела, хорошо отражающие лучистую энергию, сами излучают очень мало (излучательная способность абсолютно белого тела равна нулю). Поэтому для

уменьшения тепловых потерь аппарата его поверхность должна иметь наименьшее значение.

3. При одинаковой температуре излучательная способность абсолютно черного тела всегда больше излучательной способности серого тела.

Результаты подсказывают простой способ имитации черного излучателя с помощью изотермической полости, имеющей маленькое отверстие в поверхности (рис. 9.6).

Излучение, которое проходит через отверстие, будет многократно отражаться от внутренней поверхности полости, и независимо от состояния поверхности полости падающее излучение, в основном, поглотится.

Следовательно, практически все падающее на отверстие излучение поглотится, и отверстие в изотермической полости будет вести себя подобно черному телу. В литературе имеется ряд решенных задач о нахождении эффективной поглотительной способности ряда тел известных форм, таких как сферические, прямоугольные или цилиндрические. Изотермические полости могут быть использованы в лабораторных условиях для создания источника черного излучения.



Рис. 9.6. Изотермическая замкнутая полость, моделирующая поведение черного тела

9.3. Монохроматические радиационные свойства

Если проинтегрировать плотность потока монохроматического излучения, выраженную законом Планка, по всем длинам волн от $\lambda = 0$, до $\lambda = \lambda_1$, то в результате получим полное количество энергии излучения в интервале длин волн от 0 до λ_1 , испущенного черной поверхностью с температурой T . Результат является функцией только произведения $\lambda_1 T$:

$$E_{0 \rightarrow \lambda} = \int_0^{\lambda_1} E_{0\lambda}(T) d\lambda = E_0(0 \rightarrow \lambda_1, T) = E_0(\lambda_1 T).$$

Общее количество энергии излучения, испущенного в интервале длин волн $\lambda_1 \div \lambda_2$, определяется разностью двух таких интегралов

$$\int_0^{\lambda_2} E_{0\lambda}(T) d\lambda - \int_0^{\lambda_1} E_{0\lambda}(T) d\lambda = E_0(\lambda_2 T) - E_0(\lambda_1 T).$$

Физический смысл разности интегралов в этом уравнении показан на рис. 9.3 как площадь под кривой $E_{0\lambda}$ между длинами волн λ_1 и λ_2 .

Чтобы найти долю полной энергии излучения черного тела, испущенного во всем спектре, приходящемся на интервал длин волн $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, нужно разделить разность энергий на полный интеграл

$$\frac{E_0(\lambda_2 T) - E_0(\lambda_1 T)}{\sigma_0 T^4}.$$

Величины $E_0(\lambda T)/(\sigma_0 T^4)$ обычно называют радиационными функциями, которые затабулированы и используются в расчетах.

До сих пор мы определяли интегральные свойства, являющиеся величинами, относящимися ко всему электромагнитному спектру. Определим монохроматические свойства, относящиеся к отдельным длинам волн.

Монохроматическая поглощательная способность A_λ представляет собой поглощенное излучение с длиной волны λ , деленное на излучение с длиной волны λ , падающее на поверхность

$$A_\lambda = \frac{Q_{\lambda,A}}{Q_\lambda}.$$

Соотношение между монохроматической поглощательной способностью тела и его интегральной поглощательной способностью A определяется в виде

$$A = \frac{\int_0^\infty A_\lambda Q_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty Q_\lambda d\lambda}, \quad (9.14)$$

где индекс " λ " обозначает монохроматическую величину.

Подобные соотношения можно записать между монохроматическими и интегральными отражательными и пропускательными способностями. При составлении баланса энергии на поверхности для монохроматического излучения уравнение, аналогичное (9.3), будет иметь вид

$$A_\lambda + R_\lambda + D_\lambda = 1.$$

Монохроматическая или спектральная излучательная способность определяется в виде

$$\varepsilon_\lambda = \frac{E_\lambda(T)}{E_{0\lambda}(T)}, \quad (9.15)$$

а соотношение между монохроматической и интегральной излучательными способностями – в виде

$$\varepsilon = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda E_{0\lambda}(T) d\lambda}{\int_0^\infty E_{0\lambda}(T) d\lambda} = \frac{1}{\sigma_0 T^4} \int_0^\infty \varepsilon_\lambda E_{0\lambda}(T) d\lambda. \quad (9.16)$$

Если сравнить уравнения (9.14) и (9.16), то можно заметить существенное различие между интегральной поглотительной и интегральной излучательной способностями. Как поглотительная, так и излучательная способности являются свойствами поверхности и зависят от типа материала, состояния поверхности и температуры. Кроме того, поглотительная способность – функция свойств всех окружающих поверхностей, дающих вклад в падающее излучение Q_λ , как это видно из уравнения (9.14). Излучательная способность поверхности не зависит от свойств других поверхностей. Она является функцией только свойств собственного материала.

Излучательная способность не зависит от спектра падающего излучения, в то время как поглотительная способность зависит от Q_λ . Даже тогда, когда монохроматическая излучательная и поглотительная способности идентичны, интегральные величины A и ϵ могут различаться. Однако в случае, когда падающее излучение исходит от черного тела с температурой, равной температуре приемной поверхности, излучательная способность приемной поверхности равна ее поглотительной способности. Это следует из закона Кирхгофа.

Закон Кирхгофа для монохроматических свойств для тел, находящихся в тепловом равновесии, имеет вид

$$A_\lambda = \epsilon_\lambda.$$

Но монохроматическая форма закона Кирхгофа не ограничена случаем теплового равновесия. Монохроматические излучательная и поглотительная способности тела равны друг другу, даже если поверхности, которые вносят вклад в падающее излучение, находятся не при одной температуре.

9.4. Понятие серого тела

Понятие серого тела сильно упрощает расчеты излучения. Серое тело – это поверхность, монохроматические свойства которой постоянны для всех длин волн. Если поверхность серая, то

$$\epsilon_\lambda = \text{const}, \quad A_\lambda = \text{const}$$

и т.д. Интегральная поглотительная способность для серого тела есть

$$A = \frac{\int_0^\infty A_\lambda Q_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty Q_\lambda d\lambda} = \frac{A_\lambda \int_0^\infty Q_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty Q_\lambda d\lambda} = A_\lambda,$$

т.е. интегральная и монохроматическая поглощательная способности серого тела равны. Аналогично можем записать:

$$\varepsilon = \varepsilon_\lambda, R = R_\lambda, D = D_\lambda.$$

Для серого тела справедливы равенства

$$A_\lambda = \varepsilon_\lambda \text{ и } A = \varepsilon,$$

даже если серое тело не находится в тепловом равновесии с окружающей средой. Это – важная характеристика серого тела.

Понятие серого тела является идеализированным, поскольку серые тела на практике не существуют. Но даже если поведение реальных поверхностей лишь приближенно соответствует поведению серых поверхностей, расчеты, основанные на приближении серого тела, дают удовлетворительные результаты.

9.5. Лучистый теплообмен между телами

Лучистый теплообмен между параллельными плоскостями (рис. 9.7) происходит следующим образом. Пусть имеются две параллельные бесконечно большие пластины из разных серых материалов, каждая из которых характеризуется своей температурой (T_1 и T_2) и степенью черноты (ε_1 и ε_2). Примем $T_1 > T_2$ и определим теплоту, переданную лучеиспусканием от первой (левой) пластины ко второй (правой). Сначала определим теплоту, переданную от первой пластины ко второй, исключив из рассмотрения собственное излучение второй пластины. Собственный поток излучения первой пластины – E_1 . При попадании на вторую пластину часть этого потока $A_2 E_1$ – поглощается ею, а остальная – $R_2 E_1$ – отражается. Отраженная часть потока в количестве $R_2 A_1 E_1$ поглощается первой пластиной и частично (в количестве $R_2 R_1 E_1$) отражается от нее и т.д. Плотность теплового потока, обусловленного собственным излучением первой пластины и поглощенного второй в результате одностороннего теплообмена, определится как сумма

$$\begin{aligned} q_2 &= A_2 E_1 + A_2 R_2 R_1 E_1 + A_2 R_2^2 R_1^2 E_1 + \dots = \\ &= A_2 \left[1 + R_2 R_1 + (R_2 R_1)^2 + \dots \right] E_1. \end{aligned}$$

Так как $R_1 < 1$ и $R_2 < 1$, то выражение в скобках представляет собой убывающую геометрическую прогрессию, просуммировав которую, получим

$$q_2 = \frac{A_2 E_1}{1 - R_1 R_2}.$$

Аналогично определится плотность теплового потока, обусловленного собственным излучением второй пластины и поглощенного первой в результате одностороннего теплообмена

$$q_1 = \frac{A_1 E_2}{1 - R_1 R_2}.$$

Суммарная плотность теплового потока от первой пластины ко второй есть

$$q = q_2 - q_1 = \frac{A_2 E_1 - A_1 E_2}{1 - R_1 R_2}.$$

Учитывая, что

$$E = C(T/100)^4 \text{ и } R = 1 - A = 1 - \varepsilon,$$

получим

$$q = \varepsilon_{\Pi} C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (9.17)$$

где $\varepsilon_{\Pi} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}$ – приведенная степень черноты двух тел.

Тепловой поток лучеиспусканием через поверхность F

$$Q = qF = \varepsilon_{\Pi} C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F. \quad (9.18)$$

В холодильной технике (например, в сосудах для хранения сжиженных газов, при вакуумной изоляции криогенных установок и т.д.) для уменьшения лучистого теплообмена между поверхностями применяют экраны. Если степень черноты экранов и теплопередающих стенок одинакова, то плотность теплового потока от введения n экранов уменьшится и составит

$$q_{\text{э}} = \frac{q_{\text{б.э}}}{n+1},$$

где $q_{\text{э}}$ и $q_{\text{б.э}}$ – плотности теплового потока излучением при наличии экрана и без экрана.

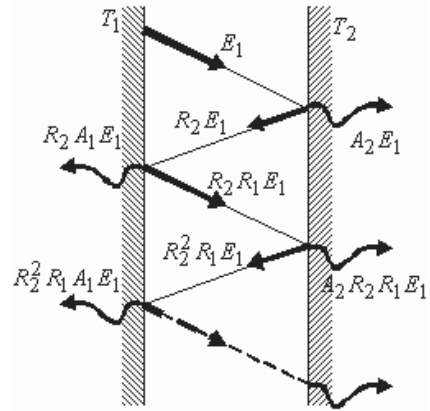


Рис. 9.7. Теплообмен излучением между параллельными поверхностями

Эффективность экранов резко возрастает, если материал, из которого они изготовлены, имеет малую степень черноты. Когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \gg \varepsilon_3$, расчет ведут по формуле

$$q_3 = \frac{\varepsilon_3 q_{б.э.}}{\varepsilon_1 n + 1}.$$

В качестве экранов в криогенных установках используют алюминиевую фольгу, металлизированные полимерные пленки и т.д.

Рассмотрим случай теплообмена излучением для тела произвольной формы, замкнутого внешним телом большей поверхности (рис. 9.8).

Тела характеризуются площадью поверхности, температурой, степенью черноты поверхности, причем $T_1 > T_2$.

Тепловой поток, передаваемый от первого тела ко второму, может быть определен по формуле, аналогичной (9.15)

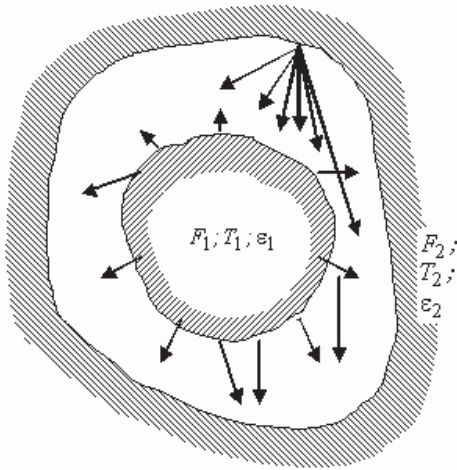


Рис. 9.8. Теплообмен излучением между телом и его оболочкой

$$Q_{12} = \varepsilon_{\Pi} C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_1, \quad (9.19)$$

где

$$\varepsilon_{\Pi} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + (F_1/F_2)(1/\varepsilon_2 - 1)}.$$

Из последнего уравнения следует, что при $F_2 \gg F_1$ приведенная степень черноты есть $\varepsilon_{\Pi} \approx \varepsilon_1$. Уравнение (9.19) справедливо только для случая, когда меньшее тело – выпуклое.

9.6. Направленные радиационные свойства

До сих пор мы полагали, что радиационные свойства реальных тел являются функциями только длины волны и условий, характеризующих поверхности приемника и излучателя. На самом деле радиационные свойства существенно зависят от направления. Для идеальных черных тел зависимость излучательной способности от направления устанавливает закон Ламберта (см. раздел 9.2.4). Свойства, которые описывают угловые изменения, называются направленными свойствами.

Направленная излучательная способность электропроводных материалов характерна тем, что для больших углов Θ она выше, чем для малых. Следовательно, проводник будет испускать больше излучения

по касательной, чем по нормали. Иначе ведут себя диэлектрики. Они испускают больше излучения в направлениях, близких к нормали, тогда как при увеличении угла Θ до 90° их излучательная способность падает до нуля.

Для установления направленных радиационных свойств нам нужно ввести некоторые понятия. Первое из них – это *телесный угол*, который используется в стереометрии.

Рассмотрим элементарную площадку dF , которая стягивает элементарный телесный угол $d\omega$ в точке O (рис. 9.9). Телесный угол – это безразмерная величина, определяемая как нормальная проекция dF , деленная на квадрат расстояния между точкой O и проектируемой площадкой:

$$d\omega = \frac{dF_n}{r^2} = \frac{dF \cos \Theta}{r^2}. \quad (9.20)$$

Измеряют телесный угол в стерadiansах, сокращенно ср.

Существует подобие между плоским и телесным углами. Плоский угол стягивается нормальной проекцией линии, деленной на расстояние до этой линии. Плоский угол безразмерен и измеряется в радианах. Угол в 2π радиан стягивается замкнутой линией, например, окружностью. Число стерadiansах в угле, ограниченном замкнутой поверхностью, например сферой, может быть определено интегрированием (9.20) по сфере

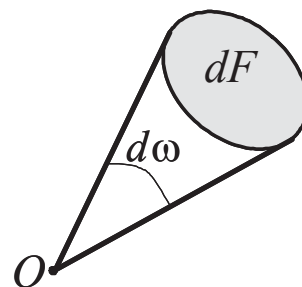


Рис. 9.9. Телесный угол

$$\omega_s = \int_{sphere} d\omega = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\Theta=0}^{\pi} \frac{r d\sin\Theta d\varphi}{r^2} = 4\pi. \quad (9.21)$$

Вторая величина, которая нам потребуется, это *интенсивность излучения*, которая определяется как энергия излучения, испускаемого за единицу времени, в единицу телесного угла, на единицу площади поверхности, перпендикулярной направлению переноса излучения

$$I(\Theta, \varphi) = \frac{dq}{\cos\Theta d\omega}, \quad (9.22)$$

где, как и в предыдущих главах q – энергия в единицу времени на единицу площади, $\text{Вт}/\text{м}^2 = \text{Дж}/(\text{м}^2\text{с})$. Единицей интенсивности служит $\text{Вт}/(\text{м}^2\text{ср})$. Если известно распределение интенсивности, то можно опре-

делить плотность потока излучения, покидающего плоскую поверхность

$$E = q = \int_{\text{hemisphere}} I(\Theta, \varphi) \cos \Theta d\omega = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\Theta=0}^{\pi/2} I(\Theta, \varphi) \sin \Theta \cos \Theta d\Theta d\varphi, \quad (9.23)$$

где использовано выражение для $d\omega$ из (9.21).

Уравнение (9.23) можно проинтегрировать, если известно распределение интенсивности по углам.

Самый простой вариант – постоянная интенсивность. Поверхность, которая излучает с постоянной интенсивностью по всем углам, называется *диффузной поверхностью* или иногда поверхностью, подчиняющейся закону косинусов Ламберта, поскольку энергия излучения, покидающая его диффузную поверхность в данном направлении, изменяется пропорционально косинусу угла между этим направлением и нормалью к поверхности. Следовательно, для диффузной поверхности имеем

$$I(\Theta, \varphi) = \text{const} \text{ и } E = \pi I. \quad (9.24)$$

Аналогичные соотношения имеют место и для черного тела: черная поверхность является диффузной,

$$E_0 = \pi I_0.$$

Итак, направленные радиационные свойства определяются через интенсивность излучения.

Например, направленная излучательная способность $\varepsilon(\Theta, \varphi)$ определяется как интенсивность излучения, испущенного поверхностью в направлении, определяемом углами Θ, φ , деленная на интенсивность излучения черного тела в том же направлении

$$\varepsilon(\Theta, \varphi) = I(\Theta, \varphi) / I_0. \quad (9.25)$$

Интегральная излучательная способность определяется соотношением $\varepsilon = E/E_0$ (раздел 9.2.3.). Если поверхность недиффузная, то приходим к выражению

$$\varepsilon = \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\Theta=0}^{\pi/2} I(\Theta, \varphi) \sin \Theta \cos \Theta d\Theta d\varphi}{\pi I_0},$$

откуда находим связь между интегральной ε и направленной $\varepsilon(\theta, \varphi)$ излучательными способностями

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\Theta=0}^{\pi/2} \varepsilon(\Theta, \varphi) \sin\Theta \cos\Theta d\Theta d\varphi. \quad (9.26)$$

Если направленная излучательная способность зависит только от угла Θ (что имеет место для многих реальных тел), то после интегрирования находим

$$\varepsilon = 2 \int_{\Theta=0}^{\pi/2} \varepsilon(\Theta, \varphi) \sin\Theta \cos\Theta d\Theta.$$

Существует несколько методов расчета теплообмена излучением, в том числе, геометрический метод, метод электрических цепей²⁴.

Для упрощения расчетов радиационного теплообмена введены два типа отражающих поверхностей. Первый – *диффузно отражающая поверхность*. Эта поверхность отражает отдельный падающий луч так, что его энергия имеет одну и ту же интенсивность для всех углов отражения. В этом случае нет необходимости следить за каждым отдельным лучом.

Другой тип отражающей поверхности – *зеркальный отражатель*. Подобно зеркалу, зеркальный отражатель изменяет направление падающего луча так, что угол падения равен углу отражения. Поверхность становится зеркальной, когда ее шероховатость мала по сравнению с длиной волны падающего излучения.

9.7. Перенос излучения в поглощающих пропускающих средах

Под процессом переноса энергии излучения принято понимать собственное излучение, поглощение, а также многократные отражения на границе и рассеяния в объеме среды. Эти явления имеют место при переносе излучения как в газовых средах, содержащих взвешенные в них частицы пыли, сажи, капельки жидкости и т.п., так и в твердых или жидких полупрозрачных телах. Явления встречаются как в природных условиях, так и в различных областях техники. Для радиационных свойств газов характерна крайне нерегулярная зависимость от длины волны. В результате поглощение и испускание излучения газом существенны только на некоторых участках спектра. Радиационные свойства непрозрачных твердых тел достаточно плавно изменяются в зависимости от длины волны, хотя в некоторых случаях наблюдаются довольно резкие изменения. Излучение, испускаемое твердым телом, исходит из-

²⁴ Крейт Ф., Блэк У. Основы теплопередачи. М.: Мир, 1983. 512 с.

нутри, так что твердое тело можно рассматривать как поглощающую и излучающую среду наподобие газа.

Излучающий газ может состоять из молекул, атомов, ионов и свободных электронов. Эти частицы имеют различные энергетические уровни. В молекуле, например, атомы образуют динамическую систему, которая имеет определенные колебательные и вращательные состояния с соответствующими энергетическими уровнями.

Радиационные процессы удобно описывать с помощью фотонов или квантовых представлений. Фотон является основной единицей энергии излучения. Испускание излучения – это процесс испускания фотонов, а поглощение – захват фотонов частицей. При испускании или поглощении фотона энергия испускающей или поглощающей частицы будет соответственно уменьшаться или увеличиваться. Помимо процессов испускания и поглощения возможны процессы неупругого рассеяния, при которых фотоны передают только часть своей энергии. Эти процессы менее существенны при рассмотрении инженерных задач радиационного теплообмена.

Если через вещество проходит поток лучистой энергии, он ослабляется на своем пути. Ослабление происходит как вследствие поглощения квантов, так и вследствие их рассеяния, т.е. отклонения от первоначального направления. Относительное ослабление параллельного пучка на элементе пути dx пропорционально этому элементу

$$dI_\lambda = -K_\lambda I_\lambda dx, \quad (9.27)$$

где K_λ – коэффициент ослабления излучения, физическая характеристика вещества. Коэффициент ослабления имеет размерность обратной длины и в общем случае зависит от температуры, давления, состава (выраженного концентрациями компонентов) и длины волны излучения

$$K_\lambda = K_\lambda(\lambda, T, p, C_i).$$

Из (9.27) находим

$$I_\lambda = I_{\lambda 0} \exp \left[- \int_0^x K_\lambda(y) dy \right]. \quad (9.28)$$

Уравнение (9.28) известно как *закон Бугера*, первоначально установленный экспериментально. Иногда его называют *законом Ламберта–Бугера*.

Закон Бэра или *Ламберта–Бугера–Бэра* связывает ослабление света с наличием поглощающих центров (их концентрацией) и математически следует из предположений, что относительное ослабление света в бес-

конечно тонком слое не зависит от интенсивности света и пропорционально толщине этого слоя dx и концентрации поглощающего вещества

$$\frac{dI}{I} = -\kappa_0 C dx. \quad (9.29)$$

Однако предположение о пропорциональности поглощения света концентрации C имеет лишь приближенный характер. При высоких значениях концентраций в газах и растворах показатель поглощения обычно начинает заметно изменяться вследствие физико-химического взаимодействия молекул. Независимость показателя поглощения $\kappa_0 C$ от интенсивности света выполняется для некоторых веществ в широких пределах изменения энергии поглощаемого света. Но вследствие квантовой природы света и конечной длительности возбужденных состояний молекул значительная часть поглощающих центров при достаточно большой мощности света вскоре оказывается в возбужденном состоянии, и поглощение уменьшается. Величина $\kappa_0 C$ зависит и от толщины поглощающего слоя при поглощении света в люминесцирующем веществе, когда расстояние между светящейся и поглощающей молекулами меньше длины световой волны. Причина этого заключается в резонансных взаимодействиях между светящейся и поглощающей молекулами.

Закон Бэра является частным случаем закона (9.28).

Коэффициент ослабления K_λ складывается из коэффициента поглощения κ_a и коэффициента рассеяния κ_s . Обратные им величины – есть длины пробега излучения: полная $l_\lambda = 1/K_\lambda$, по отношению к поглощению $l_a = 1/\kappa_a$ и по отношению к рассеянию $l_s = 1/\kappa_s$. Длины пробега характеризуют ослабление излучения по отношению к соответствующему процессу на единице пути.

Под рассеянием здесь понимается любое столкновение фотона с одной или более частицами другого сорта, при котором он не теряет всю свою энергию. Возможны изменение направления и частичная потеря или приращение энергии. Во всех этих случаях говорят, что фотон испытывает рассеяние.

Показатель экспоненты в (9.28) часто записывают в другом виде, вводя безразмерную величину

$$\bar{\kappa}_\lambda = \int_0^x K_\lambda dx,$$

которую называют *оптической толщиной слоя* по отношению к излучению длины волны λ . Излучение ослабляется в e раз на оптической толщине, равной единице.

Если можно пренебречь рассеянием, т.е. принять $\kappa_s = 0$, то $K_\lambda = \kappa_a = \kappa_\lambda$ и уравнение (9.28) принимает вид

$$I_\lambda = I_{\lambda 0} \exp \left[- \int_0^x \kappa_\lambda(y) dy \right]. \quad (9.30)$$

Если к тому же κ_λ не зависит от координаты (как, например, в случае газа с постоянными температурой и давлением и составом), то

$$I_\lambda = I_{\lambda 0} \exp[-\kappa_\lambda x]. \quad (9.31)$$

В проводящих средах $\kappa_\lambda = \frac{4\pi k}{\lambda}$, где k – показатель поглощения, связанный с магнитной проницаемостью, электрическим сопротивлением и диэлектрической проницаемостью среды, что показывается в электромагнитной волновой теории излучения²⁵.

Закон Бугера в форме (9.30) определяет ослабление излучения при прохождении через объем неизлучающего и нерассеивающего газа на пути x . В действительности при прохождении излучения через вещество помимо поглощения возникает дополнительное явление, заключающееся в том, что возбужденное состояние газа является неустойчивым и происходит спонтанный (самопроизвольный) переход на более низкий энергетический уровень. Излучение, испускаемое при наличии постороннего поля излучения, называется *вынужденным*, или *индуцированным*, излучением и имеет смысл отрицательного поглощения. Истинный коэффициент поглощения всегда больше коэффициента κ_λ , который может быть измерен по данным эксперимента на основании закона Бугера.

9.8. Теплообмен излучением при наличии других видов энергии

В реальных условиях перенос теплоты лучеиспусканием сопровождается другими видами теплопереноса – конвекцией или теплопроводностью. Такой совместный процесс теплопередачи носит название сложного теплообмена. Если перенос теплоты в пространстве осуществляется всеми тремя видами одновременно (радиацией, теплопроводно-

²⁵ Зигель Р., Авдеевский В.С. Теплообмен излучением. М.: Мир, 1975. 840 с.

стью и конвекцией), то он называется радиационно-конвективным теплообменом.

Типичным случаем сложного теплообмена является сочетание конвективного теплообмена с лучистым: при воздушном охлаждении продуктов в аппаратах туннельного типа, термобарокамерах и т.п. Во всех случаях важно оценить вклад каждого составляющего процесса в теплообмен. В процессах охлаждения воздуха определяющим, как правило, является конвективный теплообмен. Влияние лучистого теплообмена на суммарный перенос теплоты оказывается тем существеннее, чем меньше конвективная составляющая. Например, в термобарокамерах плотность воздуха при низких давлениях мала, и это существенно снижает отвод теплоты конвекцией. Поэтому для охлаждения изделий до нужной температуры в этих камерах охлаждающие устройства выполняют таким образом, чтобы максимально использовать эффект лучистого теплообмена. Доля лучистого теплообмена может быть существенной и для охлаждающих устройств с естественной конвекцией (пристенные и потолочные батареи). При глубоком вакууме (в космосе) перенос теплоты лучеиспусканием является практически основным способом передачи теплоты во внешнее пространство.

Различные виды переноса энергии по-разному зависят от температуры. Для нечерных поверхностей показатель степени при температуре может несколько отличаться от четырех, так как степень черноты меняется с температурой. При наличии теплопроводности зависимость теплового потока от локального градиента температуры описывается законом Фурье, что приводит к производной от первой степени температуры (если коэффициент теплопроводности от температуры не зависит). При наличии конвекции появляется тепловой поток, пропорциональный приблизительно первой степени разности температур. Изменение теплофизических свойств с температурой приводит к дополнительной зависимости от температуры. Поскольку слагаемые в уравнениях, учитывающие излучение от окружающих поверхностей, обычно описываются в виде интегралов, а слагаемые, учитывающие теплопроводность, содержат производные, то уравнения теплового баланса являются интегродифференциальными, которые в общем случае решаются только численно.

В наиболее простой форме уравнение энергии при наличии теплопроводности и излучения будет иметь вид (приводим без вывода)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (q_c + q_r) + q_V, \quad (9.32)$$

где q_c – поток тепла вследствие теплопроводности, q_r – вследствие излучения,

$$\nabla \cdot q_r = \int_{\lambda=0}^{\infty} \kappa_{\lambda} \left[4e_{\lambda 0}(\lambda, T) - \int_{\omega=0}^{4\pi} I_{\lambda}(\lambda, \omega) d\omega \right] d\lambda,$$

где $e_{\lambda 0}$ – поверхностная плотность излучения, соответствующая черному телу.

Пример 1. В качестве первого примера рассмотрим две параллельные бесконечные черные пластины, разделенные средой толщиной h с коэффициентом теплопроводности λ , которая прозрачна для теплового излучения. Каков результирующий поток энергии между пластинами, если их температуры равны T_1 и T_2 ?

Результирующий поток складывается из радиационной Q_R и кондуктивной Q_c составляющих. Он равен потоку энергии, который нужно подвести к пластине 1, чтобы поддерживать ее при заданной температуре

$$Q_1 = Q_R + Q_c$$

Плотность потока энергии, переносимой излучением, есть

$$\frac{Q_R}{F} = \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4),$$

а плотность потока энергии, переносимой теплопроводностью, составляет

$$\frac{Q_c}{F} = \frac{\lambda}{h} (T_1 - T_2).$$

Следовательно, если кондуктивная и радиационная составляющие не взаимодействуют (т.е., наличие одного вида теплообмена не влияет на другой), имеем

$$\frac{Q_1}{F} = \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) + \frac{\lambda}{h} (T_1 - T_2). \quad (9.33)$$

В большинстве случаев приходится иметь дело с задачами, в которых теплопроводность и излучение взаимодействуют друг с другом.

Рассмотрим этот же пример, но при условии, что пластина 2 находится при температуре T_2 , а к единице площади поверхности пластины 1 подводится известный поток энергии Q_1/F , который затем отводится к поверхности 2. Требуется найти температуру T_1 .

Перепишем уравнение (9.33) в иной форме

$$\sigma_0 T_1^4 + \frac{\lambda}{h} T_1 = \sigma_0 T_2^4 + \frac{\lambda}{h} T_2 + \frac{Q_1}{F}. \quad (9.34)$$

По отношению к искомой неизвестной температуре T_1 излучение и теплопроводность взаимодействуют друг с другом. Нелинейное уравнение (9.34) может быть решено относительно T_1 методом итераций.

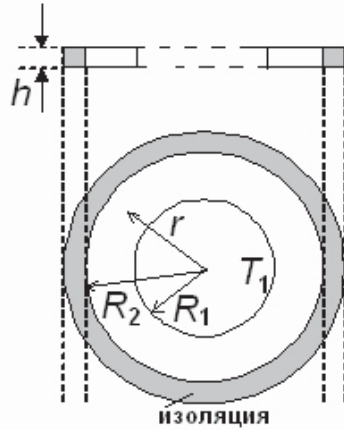


Рис. 9.10. К формулировке задачи об охлаждении кольцевого ребра

Пример 2. Тонкое кольцевое ребро, находящееся в вакууме, теплоизолировано с одной лицевой стороны и со стороны наружной кромки (рис. 9.10). Диск имеет толщину h , внутренний и наружный радиусы R_1 и R_2 . К внутренней кромке диска подводится энергия так, что ее температура остается постоянной и равной T_1 . Неизолированная поверхность является серой и имеет степень черноты ε . Эта поверхность излучает энергию в окружающее пространство с температурой T_e . Требуется найти распределение температуры по радиусу диска.

Предположим, что диск достаточно тонок, так что локальную температуру можно принять постоянной по толщине. Тогда баланс энергии для любого кольцевого элемента шириной dr можно представить в виде

$$A = B + C,$$

где A и C – подводимый к элементу и отводимый от него потоки тепла теплопроводностью, а B – тепловой поток вследствие излучения с поверхности элемента:

$$A = -\lambda 2\pi r h \frac{dT}{dr},$$

$$B = \varepsilon \sigma_0 (T^4 - T_e^4) 2\pi r dr,$$

$$C = -\lambda 2\pi r h \frac{dT}{dr} + \frac{d}{dr} \left(-\lambda 2\pi r h \frac{dT}{dr} \right) dr.$$

При условии постоянства свойств, уравнение теплового баланса примет вид

$$\lambda h \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) - \varepsilon r \sigma_0 (T^4 - T_e^4) = 0.$$

Граничными условиями к этому уравнению будут

$$r = R_1 : T = T_1;$$

$$r = R_2 : \frac{dT}{dr} = 0.$$

Уравнение является нелинейным и может быть решено численно.

В случае неустановившегося состояния (например, меняющейся во времени температуре T_1) температура будет не только функцией радиуса, но и времени t . Уравнение теплопроводности будет иметь вид

$$c_p \rho h r \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda h \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \varepsilon r \sigma_0 (T^4 - T_e^4). \quad (9.35)$$

Задачу можно было сформулировать, используя интегрирование по толщине диска уравнения теплопроводности, записанного в цилиндрической системе координат, и полагая, что задача является симметричной относительно оси диска.

Пример 3. Третьим примером будет задача о нагреве слоя радиационным потоком при условии, что коэффициент ослабления излучения (который часто называют показателем поглощения, так как κ_λ связан с ним линейной зависимостью) не зависит от координаты. Математическая постановка такой задачи имеет вид

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q_0 \kappa_\lambda \exp(-\kappa_\lambda x), \quad (9.36)$$

$$x = 0, \delta : \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

$$t = 0 : T = T_0.$$

При $\delta \rightarrow \infty$ эта задача решается методом интегральных преобразований по Лапласу довольно просто.

Действительно, в пространстве изображений ($t \rightarrow p$) вместо (9.36) имеем

$$p \bar{T} - T_0 = \frac{\lambda_T}{c_p \rho} \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} + \frac{q_0}{p c_p \rho} \kappa_\lambda \exp(-\kappa_\lambda x)$$

или

$$p u = \frac{\lambda_T}{c_p \rho} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{q_0}{p c_p \rho} \kappa_\lambda \exp(-\kappa_\lambda x), \quad (9.37)$$

где $u = \bar{T} - \frac{T_0}{p}$, $\kappa_T = \frac{\lambda_T}{c_p \rho}$.

Общее решение этого уравнения есть сумма частного решения и общего решения однородного уравнения

$$pu = \kappa_T \frac{d^2 u}{dx^2}. \quad (9.38)$$

Частное решение уравнения (9.37) ищем в виде

$$u_1 = A \exp(-\kappa_\lambda x). \quad (9.39)$$

подставляя (9.39) в (9.37), найдем

$$A = \frac{q_0 \kappa_\lambda}{p(p - \kappa_T \kappa_\lambda^2) c_p \rho}.$$

Общее решение уравнения (9.38) нам известно

$$u_2 = B \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{\kappa_T}} x\right) + C \exp\left(\sqrt{\frac{p}{\kappa_T}} x\right).$$

Следовательно, с учетом конечности температуры при $x \rightarrow \infty$ запишем

$$u_2 = B \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{\kappa_T}} x\right) + \frac{q_0 \kappa_\lambda}{p(p - \kappa_T \kappa_\lambda^2) c_p \rho} \exp(-\kappa_\lambda x).$$

Из условия при $x = 0$ находим постоянную интегрирования

$$B = -\frac{q_0}{c_p \rho p} \frac{\kappa_\lambda^2}{p - \kappa_T \kappa_\lambda^2} \sqrt{\frac{\kappa_T}{p}}.$$

Окончательное решение в пространстве изображений имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{T} = & \frac{T_0}{p} + \frac{q_0 \kappa_\lambda}{p(p - \kappa_T \kappa_\lambda^2) c_p \rho} \exp(-\kappa_\lambda x) - \\ & - \frac{q_0}{p \sqrt{p}} \frac{\kappa_T \kappa_\lambda^2}{(p - \kappa_T \kappa_\lambda^2) \sqrt{c_p \rho}} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{\kappa_T}} x\right). \end{aligned}$$

Для перехода к оригиналам воспользуемся таблицами интегральных преобразований (приложение 1).

Первое слагаемое:

$$\frac{T_0}{p} \div T_0.$$

Второе слагаемое:

$$\frac{1}{p(p - \alpha)} \div \frac{1}{\alpha} [e^{\alpha t} - 1],$$

где $\alpha = \kappa_T \kappa_\lambda^2$.

Третье слагаемое удобно представить в виде

$$\frac{1}{p\sqrt{p}(p-\alpha^2)}e^{-\gamma\sqrt{p}} = \frac{1}{2} \frac{1}{p\sqrt{p}} \left[\frac{1}{\sqrt{p}-\alpha} - \frac{1}{\sqrt{p}+\alpha} \right] e^{-\gamma\sqrt{p}},$$

где $\alpha^2 = \kappa_T \kappa_\lambda^2$, $\gamma = x/\sqrt{\kappa_T}$.

Для каждого слагаемого оригинал содержится в таблице:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p\sqrt{p}(p-\alpha^2)}e^{-\gamma\sqrt{p}} &\div \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\gamma^2/4t} - \frac{1+\alpha\gamma}{\alpha^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\gamma}{2\sqrt{t}}\right) + \\ &+ \frac{1}{\alpha^2} \exp(\alpha\gamma + \alpha^2 t) \operatorname{erfc}\left(\frac{\gamma}{2\sqrt{t}} + \alpha\sqrt{t}\right) = \\ &= \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\gamma^2/4t} - \frac{1+\alpha\gamma}{\alpha^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\gamma}{2\sqrt{t}}\right) + \Phi(t, x, \alpha) \end{aligned}$$

В результате решение задачи (9.36) для полубесконечного слоя примет вид

$$\begin{aligned} T = T_0 + \frac{q_0}{\lambda_T \kappa_\lambda} \exp(-\kappa_\lambda x) &\left[\exp(\kappa_T \kappa_\lambda^2 t) - 1 \right] + \frac{q_0}{\sqrt{c_p \rho \lambda_T}} \times \\ \times \left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa_T t}\right) - \frac{x}{\sqrt{\kappa_T}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_T t}}\right) - \frac{1}{2\kappa_T \kappa_\lambda^2} \right. &\left. \left(\Phi\left(t, x, \kappa_T \kappa_\lambda^2\right) - \Phi\left(t, x, -\kappa_T \kappa_\lambda^2\right) \right) \right] \end{aligned}$$

В частности, при $x = 0$ имеем

$$\begin{aligned} T = T_0 + \frac{q_0}{\lambda_T \kappa_\lambda} &\left[\exp(\kappa_T \kappa_\lambda^2 t) - 1 \right] + \frac{q_0}{\sqrt{c_p \rho \lambda_T}} \times \\ \times \left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\kappa_T \kappa_\lambda}} \exp(\kappa_T \kappa_\lambda^2 t) \operatorname{erfc}(\kappa_\lambda \sqrt{\kappa_T t}) \right]. & \end{aligned}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимают под тепловым излучением?
2. Определите интегральные величины: поглощательную способность, отражательную способность, пропускательную способность.
3. Какое тело называют абсолютно черным?
4. Какие поверхности называют зеркальной и абсолютно белой?

5. Сформулируйте основные законы теплового излучения (закон Планка, закон смещения Вина, закон Стефана-Больцмана, закон Ламберта и закон Кирхгофа).

6. В чем заключается простой способ имитации черного тела?

7. Как определяются монохроматические излучательные свойства?

8. Какое тело называют серым?

9. какие понятия требуются для установления направленных радиационных свойств?

10. Какими физическими процессами и параметрами можно характеризовать перенос излучения в поглощающих пропускающих средах?

Задания

1. Сформулировать задачу о нагреве тела произвольной формы с поверхности за счет теплового излучения, подобную задаче об охлаждении по закону Ньютона (раздел 7.2). Привести задачу к безразмерной форме и найти ее решение аналитически и численно. Сравнить полученное решение с решением задачи (7.6).

2. Задача об охлаждении конвекцией полупрозрачной пластины, нагреваемой излучением, может быть сформулирована следующим образом

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q_0 \kappa_\lambda \exp(-\kappa_\lambda x),$$

$$x = 0: \quad \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha (T - T_0),$$

$$x = \delta: \quad -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha (T - T_0),$$

$$t = 0: \quad T = T_0.$$

Считая пластину тонкой, 1) проинтегрировать уравнение теплопроводности по ее толщине с учетом граничных условий; 2) найти аналитическое решение полученной упрощенной задачи; 3) найти выражения для радиационного потока, пропущенного пленкой и поглощенного пленкой.

3. Найти распределение температуры в задаче об охлаждении диска (уравнение (9.35)) с помощью численного интегрирования, полагая, что на внутренней его поверхности задан поток тепла, а на внешней – обеспечена идеальная теплоизоляция:

$$r = R_1 : -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = q_0,$$
$$r = R_2 : \frac{\partial T}{\partial r} = 0.$$

Указание: используя неявную консервативную разностную схему, привести задачу к виду, удобному для применения метода прогонки.²⁶

²⁶ Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1982. 172 с.; Князева А.Г. Различные варианты метода прогонки – методическое пособие для выполнения лабораторных работ. Томск: Издательство ТПУ, 2006. 16 с.

ЧАСТЬ 10

Сопутствующие явления: фазовые превращения

10.1. Условия фазового равновесия

Процессы высокотемпературной обработки материалов и их получения неизбежно сопровождаются фазовыми превращениями, в том числе, плавлением и кристаллизацией, сублимацией (испарением) и конденсацией. И, естественно, возникает необходимость расчета температурных полей с учетом поглощения или выделения тепла, связанного с фазовыми превращениями. Разные фазы могут находиться в равновесии при одних и тех же условиях, которые устанавливаются на основе термодинамики. Чтобы записать условия фазового равновесия, нам потребуется еще один термодинамический потенциал (см. часть 1) – энергия Гиббса, которая связана с внутренней энергией формулой

$$g = u + p \frac{\gamma}{\gamma_0} - Ts. \quad (10.1)$$

Будем считать, что в (10.1) g и u записаны для единицы объема, т.е. имеют размерность Дж/м³.

Так как

$$dg = du + p\gamma_0^{-1}d\gamma + \gamma\gamma_0^{-1}dp - Tds - sdT,$$

то уравнения Гиббса (1.16) можно записать в виде

$$dg = -sdT + \frac{\gamma}{\gamma_0} dp. \quad (10.2)$$

Эти же равенства, очевидно, можно записать для единицы массы, т.е. когда g и u измеряются в Дж/кг:

$$g = u - p\gamma - Ts,$$

$$dg = -sdT + \rho^{-1}dp$$

или в расчете на один моль

$$g = u - pm\rho^{-1} - Ts \equiv u + pv - Ts;$$

$$dg = -sdT + vdp,$$

где $v = m/\rho$ – мольный объем, м³/моль.

Обозначения для энергии Гиббса, энтропии и др. величин мы при этом не изменяются. Соответственно, в этих формулах энтропия имеет размерность Дж/(м³·К), Дж/(кг·К), Дж/(моль·К).

Если система состоит из двух фаз, то основное уравнение термодинамики (1.16) для внутренней энергии примет вид

$$du = Tds - pdv + \sum_{k=1}^2 g_k dC_k, \quad (10.3)$$

где g_k – химические потенциалы фаз или их парциальные энергии Гиббса, $C_k, k = 1, 2$ – массовые доли или массовые концентрации фаз, так что

$$g = g_1 C_1 + g_2 C_2. \quad (10.4)$$

Аналогично, вместо (10.2) запишем

$$dg = -s dT + v dp + \sum_{k=1}^2 g_k dC_k.$$

Химические потенциалы имеют ту же размерность, что и иные термодинамические потенциалы.

В общем случае *фазами называют гомогенные области в гетерогенной системе*, которые отделены друг от друга *поверхностью раздела*. При переходе через поверхность раздела скачкообразно меняются химический состав (в случае химических реакций) или физические свойства вещества (в случае фазовых переходов)²⁷. Важнейшим вопросом в учении о фазах является выяснение условий, при которых система, состоящая из двух или нескольких фаз, находится в равновесии.

Если поверхность раздела является плоской, то ее энергетические и иные свойства не сказываются на условиях равновесия. Поэтому в первом приближении свойства этой поверхности не рассматриваем.

Если термодинамическая система изолированная (т.е. система не обменивается с окружающей средой ни массой

$$C = C_1 + C_2 = \text{const},$$

ни энергией

$$u = u_1 + u_2 = \text{const}),$$

и не совершает никакой работы, т.е.

$$v = v_1 + v_2 = \text{const},$$

то условием ее равновесия будет неизменность энтропии,

$$ds = 0. \quad (10.5)$$

²⁷ Вообще понятие «поверхности раздела» достаточно условно и следует говорить не о поверхности раздела, а о некотором тонком слое, в котором свойства вещества быстро меняются при переходе от одной фазы к другой.

Действительно, из (10.3) следует

$$ds = \frac{du}{T} + p \frac{dv}{T} - \sum_{k=1}^2 g_k \frac{dC_k}{T} \equiv (g_1 - g_2) \frac{dC_1}{T}. \quad (10.6)$$

Так как

$$\begin{aligned} dC &= 0 \text{ и } dC_1 = -dC_2, \\ du &= 0 \text{ и } du_1 = -du_2, \\ dv &= 0 \text{ и } dv_1 = -dv_2, \end{aligned} \quad (10.7)$$

то равенство дифференциала энтропии равно нулю, если

$$g_1 = g_2, \quad (10.8)$$

т.е. химические потенциалы фаз равны друг другу.

Равенства (10.7) означают, что в замкнутой системе изменение внутренней энергии и объема фазы может происходить только за счет другой фазы, так как в сумме изменение этих величин равно нулю. Первое из условий (10.7) фактически есть закон сохранения массы.

Чтобы понять, при каких условиях это возможно, воспользуемся свойством аддитивности энтропии, в соответствии с которым

$$s = s_1 + s_2,$$

где s_1 и s_2 – энтропии первой и второй фаз.

Тогда

$$ds_1 = -ds_2. \quad (10.9)$$

Так как уравнение Гиббса справедливо для каждой подсистемы в отдельности, т.е.

$$du_k = T_k ds_k - p_k dv_k + g_k dC_k, \quad k = 1, 2, \quad (10.10)$$

то выражая ds_1, ds_2 из (10.10) и подставляя их в (10.9), найдем

$$\frac{1}{T_1} [du_1 + p_1 dv_1 - g_1 dC_1] + \frac{1}{T_2} [du_2 + p_2 dv_2 - g_2 dC_2] = 0.$$

Учитывая равенства (10.7), запишем

$$\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) du_1 + \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) dv_1 - \left(\frac{g_1}{T_1} - \frac{g_2}{T_2} \right) dC_1 = 0. \quad (10.11)$$

Внутренняя энергия u , объем v и концентрация C_1 могут меняться независимо друг от друга, т.е. дифференциалы du_1, dv_1 и dC_1 независимы. Тогда, очевидно, для выполнения равенства (10.11) необходимо, чтобы были равны нулю множители при этих дифференциалах, т.е.

$$T_1 = T_2, p_1 = p_2, g_1 = g_2.$$

Следовательно, условие общего термодинамического равновесия двухфазной однокомпонентной системы может быть записано в виде

$$g_1(T, p) = g_2(T, p) \quad (10.12)$$

и означает равенство химических потенциалов фаз при одинаковых давлении и температуре фаз.

С учетом свойств поверхности раздела фаз условие равновесия получается аналогично (вывод этого условия можно найти практически в любом учебнике по термодинамике) и имеет вид

$$T_1 = T_f, T_2 = T_f, g_1 = g_2, \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) dv_1 - \frac{\sigma_f}{T_f} d\Sigma_f = 0.$$

Это условие означает, что в равновесии равны химические потенциалы фаз, равны их температуры, а вот давления в фазах связаны равенством

$$p_1 = p_2 + \sigma_f \frac{d\Sigma_f}{dv_f}, \quad (10.13)$$

где Σ_f – площадь поверхности раздела фаз, σ_f – поверхностное натяжение.

Производная от поверхности раздела фаз по объему

$$d\Sigma_f/dv_1 = -d\Sigma_f/dv_2$$

может быть представлена в виде

$$\frac{d\Sigma_f}{dv} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

где R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны поверхности. Следовательно,

$$p_1 = p_2 + \sigma_f \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (10.14)$$

В частном случае сферической поверхности раздела имеем

$$R_1 = R_2 = R \text{ и } p_1 = p_2 + \frac{2\sigma_f}{R}.$$

В случае плоской поверхности раздела – $R \rightarrow \infty$ и $p_1 = p_2$.

10.2. Уравнение Клапейрона–Клаузиуса

В общем случае фазовых переходов, сопровождающихся поглощением или выделением тепла, справедливо уравнение Клапейрона–Клаузиуса

$$\frac{dT_{ph}}{dp} = \frac{\Delta\gamma_{ph}}{\Delta s_{ph}} = \frac{\Delta\gamma_{ph} \cdot T_{ph}}{Q_{ph}}, \quad (10.15)$$

где $\Delta\gamma_{ph} = \gamma_2 - \gamma_1$ и $\Delta s_{ph} = s_2 - s_1$ – разности парциальных мольных объемов и мольных энтропий фаз, а

$$Q_{ph} = h_2 - h_1 = T_{ph}(s_2 - s_1) -$$

есть разность энтальпий фаз в точке перехода или теплота перехода. Если $Q_{ph} < 0$, а объем фазы 2 больше, чем объем фазы 1, то $dT_{ph}/dp < 0$, т.е. температура фазового перехода уменьшается с давлением. Уравнение (10.15) легко получается из условия равновесия фаз (10.12), записанного для мольных величин, с помощью разложения в ряд Тейлора химических потенциалов фаз по малым отклонениям T и p от их равновесных значений.

Действительно, пусть произошло отклонение от состояния равновесия температуры и давления на малые величины ΔT и Δp . Полагая, что система переходит в новое состояние равновесия, запишем

$$g_1(T + \Delta T, p + \Delta p) = g_2(T + \Delta T, p + \Delta p)$$

или

$$g_1(T, p) + \left(\frac{\partial g_1}{\partial T}\right)_p \Delta T + \left(\frac{\partial g_1}{\partial p}\right)_T \Delta p = g_2(T, p) + \left(\frac{\partial g_2}{\partial T}\right)_p \Delta T + \left(\frac{\partial g_2}{\partial p}\right)_T \Delta p.$$

Частные производные химических потенциалов по температуре и давлению есть соответственно мольная энтропия и мольный объем

$$\left(\frac{\partial g_k}{\partial T}\right)_p = -s_k, \quad \left(\frac{\partial g_k}{\partial p}\right)_T = v_k, \quad (10.16)$$

что следует из уравнения Гиббса для фазы k , записанного в расчете на один моль

$$du_k = T_k ds_k - p_k dv_k + g_k dC_k, \quad k = 1, 2.$$

Так как справедливо условие равновесия (10.12), то найдем

$$-(s_2 - s_1)\Delta T = (v_2 - v_1)\Delta p,$$

откуда в пределе получаем уравнение (10.15).

Уравнение Клапейрона–Клаузиуса, которое может быть получено и другим способом, описывает различные фазовые переходы – плавление,

парообразование, сублимацию. В некоторых случаях уравнение может быть легко проинтегрировано.

Так, при сублимации в области низких давлений пара, естественно удельный объем пара $v_2 = v_p$ много больше объема твердого тела $v_1 = v_s$

$$v_p \gg v_s.$$

В соответствии с уравнением (10.15), имеем

$$\frac{dp}{dT} = \frac{Q_{ph}}{T_{ph}(v_p - v_s)} > 0,$$

если осуществляется переход твердого тела в пар.

Пренебрегая величиной v_s по сравнению с v_p и используя уравнение Клапейрона (уравнение состояния идеального газа)

$$v_p = \frac{RT}{p},$$

которое с высокой точностью описывает мольный объем пара на линии фазового перехода, приведем наше уравнение к виду

$$\frac{d \ln p}{dT} = \frac{Q_{ph}}{RT^2}.$$

Если известна температурная зависимость теплоты сублимации $Q_{ph}(T)$, то это уравнение легко интегрируется. В частном случае $Q_{ph} = const$ имеем

$$\ln p = -\frac{Q_{ph}}{R} \frac{1}{T} + \ln C.$$

10.3. Следствия условия фазового равновесия

Рассмотрим различные следствия условия равновесия фаз, заключающегося в равенстве их потенциалов Гиббса (или, что то же самое, их химических потенциалов) (10.12) при неизменных температуре и давлении.

Состояние вещества будем изображать точкой на плоскости (T, p) (рис. 10.1). Для определенности рассмотрим фазовый переход типа «испарение – конденсация». Каждая точка этой плоскости соответствует однородному (однофазному) состоянию вещества – либо жидкости, либо ее пару. Исключение составляют точки линии DK . Эта линия соответствует уравнению (10.12). На линии DK химические потенциалы

жидкости и пара одинаковы; здесь эти фазы находятся в равновесии друг с другом. Каждая точка линии DK изображает либо жидкость, либо пар, либо их смесь в любых пропорциях. Разрешая уравнение (10.12) относительно давления p , можем представить уравнение кривой в виде

$$p = p(T). \quad (10.17)$$

Это уравнение дает зависимость давления насыщенного пара от температуры, а кривая DK называется *кривой равновесия жидкости и ее насыщенного пара или кривой испарения*.

Точка K на этом рисунке соответствует *критическому состоянию вещества* и называется *критической точкой*. При $T > T_k$, $p > p_k$ не существует различных фаз, и тело всегда однородно.

Эту точку можно определить как точку перегиба изотермы реального газа (рис. 10.2), в которой касательная к изотерме горизонтальна. Ее можно определить также как точку, в которую в пределе переходят горизонтальные участки изотерм при повышении температуры до критической (см. этот же рисунок).

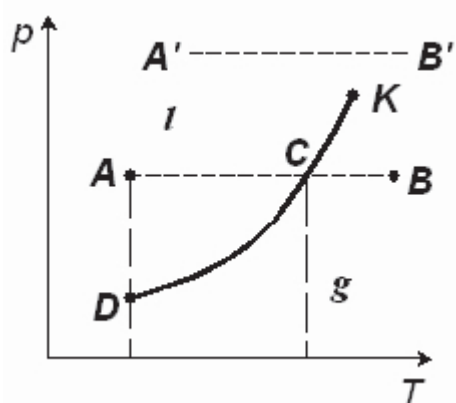


Рис. 10.1. Диаграмма « $P - T$ » в окрестности линии равновесия жидкости и пара

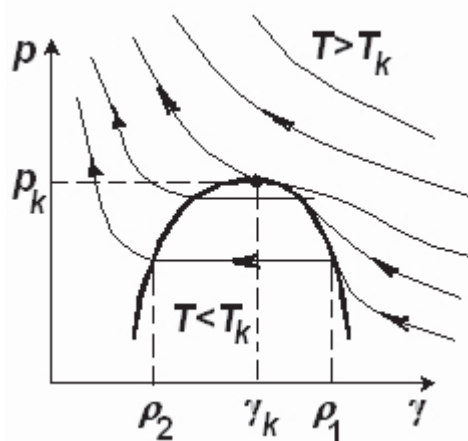


Рис. 10.2. Диаграмма « $P - \gamma$ » в окрестности линии равновесия жидкости и пара

Пересечем кривую испарения горизонтальной прямой, т.е. изобарой (линия AB на рис. 10.1). В точке A вещество находится в жидком состоянии, здесь давление p_A выше давления насыщенного пара при данной температуре. При нагревании жидкости в условиях постоянного давления точка, изображающая состояние вещества, переместится вправо, и в точке C начнется испарение жидкости. Во все время испарения температуры жидкости и ее насыщенного пара будут неизменны. После

испарения всей жидкости изображающая точка вновь переместится вправо, так что участок CB соответствует нагреванию пара.

Допустим, что давление на изобаре выше критического (линия $A'B'$ на этом же рисунке). Тогда при изобарическом нагревании или охлаждении никаких превращений жидкости в пар и обратно не происходит. Следствием обрыва кривой испарения является непрерывность жидкого и газообразного состояний.

Понятие критической точки на кривой равновесия «жидкость-газ» было введено Менделеевым в 1860 году и сводится к следующему.

Если сжимать газ при температуре $T < T_k$ (рис. 10.2), то, достигнув определенной плотности ρ_1 газ начнет конденсироваться при постоянном давлении до тех пор, пока плотность системы не станет равной плотности жидкости ρ_2 . С ростом температуры различие между плотностями жидкости и газа становится все меньше и исчезает при $T = T_k$. Вместо плотности можно говорить об удельных объемах.

Сжимая газ при температуре $T > T_k$, можно осуществить непрерывный переход из газообразного состояния в жидкое. Кривая равновесия между жидкостью и паром оканчивается в критической точке. Выше температуры T_k наблюдаются аномалии всех физических свойств вещества. Но положения максимумов и минимумов различных свойств в критической области не совпадают.

Критическая точка на диаграмме состояния характеризуется критическими значениями T_k, p_k, γ_k и представляет собой частный случай точки фазового перехода. В этой точке система характеризуется потерей термодинамической устойчивости по плотности или составу вещества.

По одну сторону от критической точки ($T > T_k$) вещество однородно, по другую ($T < T_k$) – расслаивается на фазы. У смесей или растворов в результате увеличения числа параметров, характеризующих систему, имеется не изолированная критическая точка, а критическая кривая, точки которой различаются значениями T_k, p_k, γ_k и концентрации.

В окрестности критической точки наблюдается целый ряд критических явлений. При приближении к критической точке исчезают теплота фазового перехода и поверхностное натяжение; существенно возрастают флуктуации плотности и состава (для смесей и растворов); становится неограниченной взаимная растворимость компонентов; наблюдается аномальный рост сжимаемости; возрастает магнитная восприимчивость и диэлектрическая проницаемость и т.д.

Допустим теперь, что число фаз химически однородного вещества, находящихся в равновесии друг с другом, равно трем. Простым и всем

понятным примером может служить система, состоящая из твердой фазы, жидкости и ее пара. Для равновесия необходимо выполнение трех условий

$$\begin{aligned} g_f(p, T) &= g_g(p, T); \\ g_s(p, T) &= g_f(p, T); \\ g_s(p, T) &= g_g(p, T). \end{aligned} \quad (10.18)$$

Первое есть условие равновесия между жидкостью и ее паром; второе – между жидкостью и твердой фазой; третье – между твердой фазой и паром. Эти три условия не являются независимыми. Каждое из них есть следствие остальных.

Первое уравнение изображает *кривую испарения* $f \leftrightarrow g$ (рис. 10.3); второе – *кривую плавления* $s \leftrightarrow f$; третье – *кривую сублимации или возгонки* $s \leftrightarrow g$. Кривая плавления 2 пересекается с кривой испарения 1 в точке *A*, чрез которую должна проходить и кривая возгонки 3.

Три фазы могут находиться в равновесии между собой, вообще говоря, лишь в одной точке, которую называют *тройной точкой*, т.е. при вполне определенных значениях давления и температуры.

В тройной точке кривая возгонки всегда круче кривой испарения. Это можно показать с помощью уравнения Клапейрона–Клаузиуса.

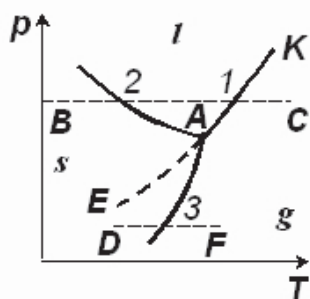


Рис. 10.3. Упрощенная диаграмма состояния воды

Кривые испарения, плавления и возгонки делят плоскость $T - p$ на три области, соответствующие твердому (s), жидкому (f) и газообразному состояниям (g). Плоскость $T - p$ с указанными кривыми называется *диаграммой состояния*. Диаграмма состояния позволяет судить о том, какие будут происходить превращения в том или ином процессе.

Допустим, что производится нагревание при постоянном давлении (горизонтальная прямая *BC* на рис. 10.3). Если эта кривая проходит выше тройной точки, но ниже критической точки, то при нагревании будут возможны два фазовых перехода – плавление, а затем испарение. Если же эта прямая пересечет только кривую возгонки, например, кривая *DF*, то в этой точке при нагревании произойдет непосредственное превращение твердого тела в газообразное.

Диаграмма, изображенная на рис. 10.3, качественно соответствует упрощенной диаграмме состояния воды. Пунктирная кривая AE соответствует равновесию между переохлажденной водой и паром.

10.4. Задача Стефана

Простейшей задачей о фазовом переходе, имеющей математическую интерпретацию, является задача Стефана – задача о кристаллизации полубесконечного слоя (рис. 10.4). Эту задачу впервые сформулировал Стефан при изучении изменения толщины полярных льдов, поэтому подобные задачи носят его имя.



Рис. 10.4. Иллюстрация к формулировке простейшей задачи Стефана

Предположим, что в начальный момент времени жидкость, имеющая температуру T_e , приведена в соприкосновение с холодной стенкой, температура которой T_0 меньше температуры кристаллизации $T_0 < \theta$. При $t > 0$ от холодной поверхности с некоторой скоростью начинает двигаться фронт кристаллизации – поверхность раздела между жидкостью и закристаллизовавшимся веществом. Нужно найти положение этой границы в произвольный момент времени $x = \xi(t)$.

Математическая постановка этой задачи включает уравнение теплопроводности для области, занятой твердым телом,

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq \xi(t); \quad (10.19)$$

уравнение теплопроводности для области, занятой жидкостью,

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \quad x \geq \xi(t) \quad (10.20)$$

и граничные условия

$$x = 0: \quad T_1 = T_0; \quad (10.21)$$

$$x \rightarrow \infty: \quad T_2 = T_e; \quad (10.22)$$

$$x = \xi(t): \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = L \rho_1 \frac{d\xi}{dt}; \quad T_1 = T_2 = \theta. \quad (10.23)$$

В начальный момент времени имеется только жидкость, т.е.

$$t = 0: \quad \xi = 0. \quad (10.24)$$

Индекс 1 относится к твердой фазе, 2 – к жидкой.

В простейшем варианте задачи Стефана различием плотностей фаз пренебрегают, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

Первое из условий на границе раздела фаз (10.23) можно записать в иной форме. Для этого рассмотрим в плоскости (x, t) две кривые постоянной температуры: $T_1(x, t) = \theta$ и $T_2(x, t) = \theta$. Так как $\theta = const$, имеем

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} dx + \frac{\partial T_1}{\partial t} dt = \frac{\partial T_2}{\partial x} dx + \frac{\partial T_2}{\partial t} dt.$$

Слева и справа в этом равенстве записаны полные дифференциалы температур фаз. Следовательно, на подвижной границе $x = \xi(t)$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = -L\rho \frac{\partial T_1 / \partial t}{\partial T_1 / \partial x} = -L\rho \frac{\partial T_2 / \partial t}{\partial T_2 / \partial x}. \quad (10.25)$$

Из такой формы записи видно, что задача с подвижной границей раздела фаз является нелинейной.

В трехмерном случае граничное условие (10.25) принимает вид

$$\lambda_1 |\nabla T_1| - \lambda_2 |\nabla T_2| = \pm \rho L \frac{\partial T_1 / \partial t}{|\nabla T_1|} = \pm \rho L \frac{\partial T_2 / \partial t}{|\nabla T_2|}. \quad (10.26)$$

Ищем решение одномерной задачи (10.19)–(10.24) в виде

$$T_i = A_i + B_i \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_i t}} \right), \quad (10.27)$$

где Φ – функция ошибок,

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-y^2) dy \equiv \operatorname{erf}(z) = 1 - \operatorname{erfc}(z).$$

Граничные условия, которых оказывается 5 ((10.21), (10.22) и три условия (10.23)), позволят определить постоянные A_i, B_i , $i = 1, 2$ и скорость движения границы раздела фаз.

Из условий при $x = 0$ (10.21) и $x \rightarrow \infty$ (10.22) находим

$$A_1 = T_0; \quad A_2 + B_2 = T_e. \quad (10.28)$$

Следовательно,

$$A_2 = (T_e - B_2).$$

Из условия равенства температур на границе раздела фаз следует

$$T_0 + B_1 \Phi\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\kappa_1 t}}\right) = T_e - B_2 \left[1 - \Phi\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\kappa_2 t}}\right)\right] = \theta. \quad (10.29)$$

Соотношение (10.27) должно выполняться при любых t , в том числе, когда $t \rightarrow 0$, поэтому мы должны принять

$$\xi = 2\mu\sqrt{\kappa_1 t}, \quad (10.30)$$

где $\kappa_1 = \lambda_1 / (c_1 \rho_1)$, а μ – множитель, который следует определить из оставшегося граничного условия. Это означает, что граница раздела фаз движется как \sqrt{t}

$$T_0 + B_1 \Phi(\mu) = (T_e - B_2) + B_2 \Phi\left(\mu \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right) = \theta,$$

следовательно

$$B_1 = \frac{\theta - T_0}{\Phi(\mu)}, \quad B_2 = \frac{T_e - \theta}{1 - \Phi\left(\mu \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)}. \quad (10.31)$$

Подставляя решение (10.27) в условие равенства потоков (10.23) с учетом найденных постоянных (10.31), найдем

$$\lambda_1 B_1 \exp(-\mu^2) - \lambda_2 B_2 \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \mu^2\right) = L \mu \kappa_1 \rho \sqrt{\pi}$$

или

$$\frac{\exp(-\mu^2)}{\Phi(\mu)} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\theta - T_e}{\theta - T_0} \frac{\sqrt{\kappa_1}}{\sqrt{\kappa_2}} \frac{\exp\left(-\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \mu^2\right)}{\Phi\left(\mu \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right) - 1} = \frac{\mu L \sqrt{\pi}}{c_1 (\theta - T_0)}. \quad (10.32)$$

В частном случае, когда температура жидкости равна температуре плавления, уравнение для μ принимает простой вид

$$\mu \Phi(\mu) \exp(\mu^2) = \frac{c_1 (\theta - T_0)}{L \sqrt{\pi}}. \quad (10.33)$$

Корни этого уравнения можно найти графически (рис. 10.5) или приближенно

$$\mu^2 \approx \frac{c_1(\theta - T_0)}{2L}.$$

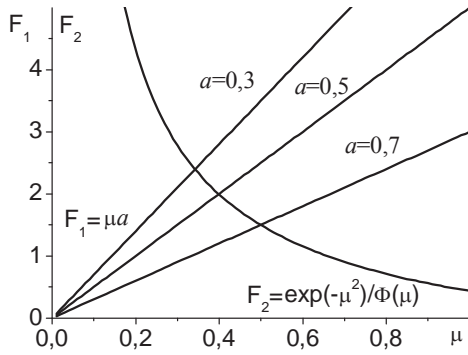


Рис. 10.5. Графическое решение уравнения (10.33)

$$a\mu = \exp(-\mu^2) / \Phi(\mu)$$

соответствующее качественному рис. 10.4.

После того, как найдено μ , легко найти и распределение температуры

$$T_1 = T_0 + \frac{\theta - T_0}{\Phi(\mu)} \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_1 t}}\right), \quad (10.34)$$

$$T_2 = T_e - \frac{T_e - \theta}{\left[1 - \Phi\left(\mu \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\right)\right]} \times \quad (10.35)$$

$$\times \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_2 t}}\right)\right],$$

10.5. Простейшая классификация фазовых переходов

Классификация фазовых переходов по поведению термодинамических функций была предложена П. Эренфестом в 1933 году и стала классической. В большинстве случаев в качестве термодинамической функции выбирают термодинамический потенциал Гиббса.

Согласно определению, при *фазовом переходе первого рода* (ФП1) претерпевают скачок первые производные энергии Гиббса

$$g = g_1 C_1 + g_2 C_2, \quad (10.36)$$

где C_i – концентрации фаз, а g_i – их химические потенциалы, по температуре и давлению, т.е. энтропия и объем

$$s = -\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_{p, C_1, C_2}, \quad v = \left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_{T, C_1, C_2}. \quad (10.37)$$

В точке фазового перехода первого рода имеем:

$$\Delta s = s_2 - s_1 \neq 0, \quad \Delta v = v_2 - v_1 \neq 0, \quad (10.38)$$

причем совершенно не обязательно, чтобы высокотемпературная модификация имела больший удельный объем, чем низкотемпературная.

К фазовым переходам первого рода (ФП1) принадлежат испарение и конденсация, плавление и затвердевание, сублимация и конденсация в твердую фазу; некоторые структурные переходы в твердых телах, в том числе, мартенситные превращения. Обычные фазовые переходы первого рода легко регистрируют экспериментально. Скачкообразное изменение объема в точке фазового перехода отвечает изменению кристаллической структуры, так как плотность и объем элементарной ячейки в различных полиморфных модификациях различны. Изменение объема регистрируют dilatометрически, а иногда и путем визуальных наблюдений. Так, например, изменение объема при превращении тетрагональной модификации диоксида циркония ZrO_2 в моноклинную вызывает растрескивание материала. Фазовый переход белое олово – серое олово также сопровождается распространением сети трещин, что связано с существенным отличием мольных объемов фаз.

В точке фазовых переходов первого рода скачком меняется внутренняя энергия, что видно из равенства

$$\Delta u = T\Delta s - p\Delta v = T(s_2 - s_1) + p(v_2 - v_1) \neq 0 \quad (10.39)$$

Обычно изменение объема сопровождается изменением энтальпии

$$\Delta h = \Delta u + p\Delta v. \quad (10.40)$$

Изменение энтальпии можно обнаружить методом ДТА: при температуре фазового перехода на кривых ДТА возникают эндотермические или экзотермические пики.

Прямое измерение изменения энтропии проводить менее удобно. Тем не менее, о существовании скачка энтропии можно заключить по наличию тех же пиков на кривых ДТА. Так как в точке фазового перехода

$$\Delta g = -T\Delta s + \Delta h = 0,$$

то

$$\Delta s = \frac{\Delta h}{T} = \frac{Q_{ph}}{T_{ph}}. \quad (10.41)$$

Это иллюстрирует рис. 10.6.

В случае же фазовых переходов первого рода типа «порядок-беспорядок» зафиксировать превращение можно рентгенографическими, акустическими, оптическими и другими (например, рассеянием медленных нейтронов, аннигиляцией позитронов) методами.

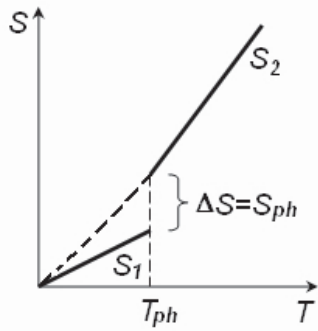


Рис. 10.6. Поведение энтропии в окрестности точки ФП1

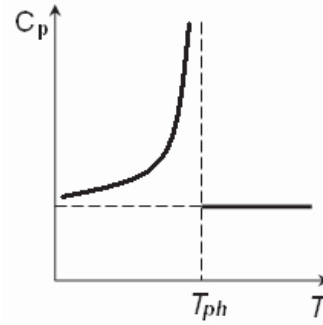


Рис. 10.7. Поведение теплоемкости в окрестности точки ФП1

Аналогично u и h (см. формулы (10.39), (10.40)), можно охарактеризовать и поведение различных физических свойств в точке ФП1. Так, для удельной теплоемкости при постоянном давлении имеем, по определению,

$$c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p,$$

следовательно, в точке ФП1 $c_p \rightarrow \infty$. Качественное поведение теплоемкости показано графически (рис. 10.7).

Аналогично, в точке фазового перехода первого рода к бесконечности стремятся коэффициент изотермической сжимаемости β_T и коэффициент термического расширения α_T , определяемые как

$$\beta_T = \frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T, \quad \alpha_T = \frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p. \quad (10.42)$$

Подчеркнем, что при ФП1 выделяется (или поглощается) определенное количество теплоты. Если фазовый переход происходит при повышении температуры (прямой переход), то в простой термодинамической системе тепло всегда поглощается.

Это правило является принципом Ле-Шателье, которое можно сформулировать так:

«Нагревание стимулирует процессы, сопровождающиеся поглощением тепла и тем самым как бы противодействующие внешнему воздействию».

Наличие теплоты перехода является самой характерной чертой ФП1, отличающей их от ФП2.

С особым поведением теплоемкости в окрестности температуры фазового перехода (температуры плавления) связан еще один вариант задачи Стефана. Так, в условиях нагрева плоского образца достаточно

больших размеров внешним источником постоянной интенсивности с поверхности задача об определении температурного поля в образце может быть сформулирована следующим образом:

$$\begin{aligned} (c\rho)_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x}, & (10.43) \\ x=0: -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} &= q_0; \quad x \rightarrow \infty: \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \\ t=0: T &= T_0, \end{aligned}$$

где

$$(c\rho)_{eff} = Q_{ph} \rho_s \delta(T - T_{ph}) + \begin{cases} (c\rho)_s, T < T_{ph}; \\ (c\rho)_L, T \geq T_{ph}, \end{cases} \quad (10.44)$$

индекс «s» относится к твердой фазе, «f» к жидкой; δ – дельта-функция Дирака. При численном решении задачи дельта-функция заменяется дельта – образной функцией, например,

$$\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} \exp\left(-\left(\frac{T - T_{ph}}{\sigma}\right)^2\right),$$

удовлетворяющей условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(y) dy = 1.$$

Параметр сглаживания σ подбирается так, чтобы описать качественное поведение температуры в окрестности температуры плавления (рис. 10.8).

Фазовые переходы первого рода могут идти как при смене температуры, так и при смене давления.

Фазовые переходы второго (ФП2) рода характеризуются наличием в точке превращения конечного скачка вторых производных свободной энергии Гиббса – теплоемкости при постоянном давлении, коэффициентов термического расширения и изотермической сжимаемости

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}\right)_T &= \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = \beta_T v_0, \\ \left(\frac{\partial^2 g}{\partial p \partial T}\right)_T &= \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \alpha_T v_0 = -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T, \end{aligned} \quad (10.45)$$

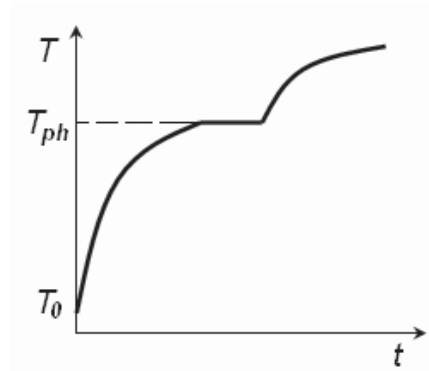


Рис. 10.8. Качественное поведение температуры в окрестности точки плавления

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial T^2}\right)_p = -\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = -\frac{c_p}{T}.$$

Объем и энтропия в этом случае меняются непрерывно. Отсутствие скачка энтропии приводит к тому, что при ФП2 в простых системах не выделяется и не поглощается тепло.

Температуру, соответствующую ФП2, часто называют λ – *точкой* или *точкой Кюри*. Название « λ – точка» связано с тем, что вблизи точки ФП2 в реальных системах вследствие ряда обстоятельств кривые многих физических величин часто напоминают греческую букву λ .

Температура фазовых переходов второго рода зависит от условий, при которых они происходят. Сама температура ФП2 при изменении условий также меняется. Иногда условие (внешнее давление, электрические и магнитные поля и т.д.) могут так существенно влиять на процесс фазового превращения, что меняется характер самого фазового переход: ФП2 становится ФП1 и наоборот. Температура, при которой происходит такое изменение, называется *критической точкой Кюри* или *критической λ – точкой*. Вблизи этой температуры ФП1 и ФП2 мало отличаются.

Принципиально можно определить и фазовые переходы более высоких порядков по скачкам производных энергии Гиббса более высоких порядков.

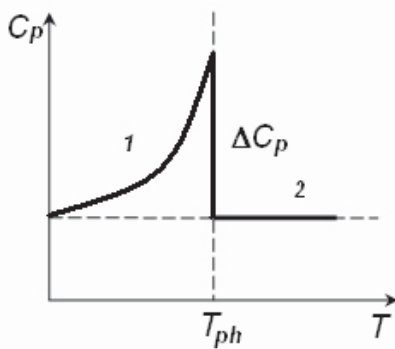


Рис. 10.9. Поведение теплоемкости в окрестности точки ФП2

Экспериментально обнаружить ФП2 несколько сложнее, чем ФП1, потому что в этом случае изменения, происходящие в системе, выражены гораздо слабее. Одним из удобных методов является калориметрический метод измерения теплоемкости. При приближении к точке ФП2 теплоемкость обычно возрастает, а в точке ФП2 претерпевает скачок, как это показано на рис. 10.9.

Типичные ФП2 это переход «парамагнетик – ферромагнетик», сопровождающийся появлением макроскопического магнитного момента; переход «парамагнетик – антиферромагнетик», сопровождающийся появлением антиферромагнитного упорядочения; переход «параэлектрик – сегнетоэлектрик» с появлением самопроизвольной поляризации вещества; «нормальный проводник – сверхпроводник» с изменением типа распределения в электронной подсистеме.

Заметим, что если в случае фазовых переходов первого рода кривые зависимости энергии Гиббса фаз от температур пересекаются, то в случае фазовых переходов второго рода такого пересечения может и не быть.

10.6. Размытые и точечные фазовые переходы

Различие между фазовыми переходами первого и второго рода очевидно, но на практике многие переходы трудно однозначно отнести к тому или иному типу, поскольку они носят гибридный характер.

Графически это можно представить в виде, изображенном на рис. 10.10. При некоторой температуре, немного ниже T_{ph} существует заметная разница между энтальпиями модификаций 1 и 2. (для второй фазы – это пунктир в низкотемпературной области). При нагревании энтальпия фазы 1 начинает аномально быстро повышаться, пока в точке T_{ph} не достигнет энтальпии фазы 2, где $h_1 = h_2$. Какого рода превращение имеет место в данном случае?

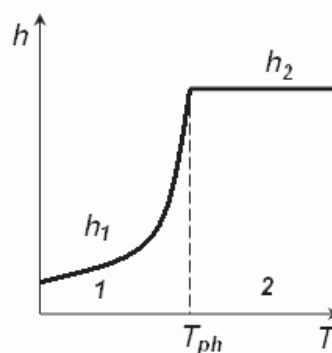


Рис. 10.10. Возможное поведение энтальпии в окрестности точки фазового перехода в реальной системе

Ясно, что оно не может быть отнесено к переходу 1-го рода, для которого характерно наличие разрыва в h в точке перехода: $h_1 - h_2 \neq 0$.

Такое превращение можно было бы отнести к переходу 2-го рода, если обратить внимание на изменение теплоемкостей (рис. 10.9). Но аномально большой рост h_1 при $T < T_{ph}$ для таких переходов вовсе не характерен.

Заметим, что на практике фазовым превращениям предшествуют отдельные изменения в системе, например, увеличения разупорядочения при приближении температуры к T_{ph} . Часто такими явлениями можно пренебречь, особенно если скачок энтальпии при $T = T_{ph}$ достаточно велик, т.е. при ФП1. В случае же ФП2 (особенно при переходах типа «порядок-беспорядок» изменения структуры и термодинамических свойств при T_{ph} связаны с предварительными изменениями в системе ниже этой температуры. Поэтому пренебречь такими изменениями не-

возможно. В этих случаях T_{ph} представляет собой просто температуру, при которой (или выше которой) структурные изменения в системе просто заканчиваются.

Наличие предкритических явлений (подобных увеличению разупорядочения или концентрации дефектов) при приближении к T_{ph} объединяет ФП1 и ФП2.

С помощью только что описанной точки зрения весьма полезна классификация Убеллоде. Согласно его подходу, фазовые переходы можно разделить на *размытые и точечные*. Размытый фазовый переход соответствует случаю изображенному на рис. 10.10: при $T = T_{ph}$ величина энтальпии не меняется скачкообразно, а изменения кристаллической структуры происходят плавно и непрерывно от структуры, характерной для фазы 1, к структуре, характерной для фазы 2. Предкритические явления являются как бы началом размытого фазового перехода.

Точечные превращения характерны для веществ, кристаллические решетки различных фаз которых существенно отличаются друг от друга.

Размытые превращения имеют место при образовании «гибридных» структур, когда домены (области) возникающей новой фазы растут внутри кристалла исходного вещества и возникает так называемый гибридный кристалл. На границе раздела между исходной и новой фазами вещество будет находиться в сжатом (напряженном) состоянии, так как мало вероятно, чтобы молярные объемы фаз были одинаковы. Следовательно, энергетические характеристики таких переходов существенно зависят от энергии напряжений.

Таким образом, *реальные фазовые переходы далеко не всегда укладываются в рамки классических представлений*. Во-первых, те величины, которые, согласно классической теории, в точке перехода должны стремиться к бесконечности, в реальной ситуации в лучшем случае достигают только достаточно больших значений, оставаясь конечными. Температурные зависимости целого ряда физических величин (теплоемкости, диэлектрическая и магнитная проницаемости, коэффициент теплового расширения, теплопроводность и др.) проходят в окрестности T_{ph} через максимум или минимум. Во-вторых, весьма часто фазовый переход протекает не при одной строго фиксированной температуре, а в некотором интервале температур, что типично, например, для фазовых переходов мартенситного типа.

10.7. Элементы теории двухфазной зоны

В качестве примера систем, характеризующихся наличием интервала температур фазового перехода можно привести двухкомпонентные системы, образующие твердые растворы. Среди систем, характеризующихся образованием твердых растворов, самый простой вид имеют такие фазовые диаграммы, в которых как в жидкой, так и в твердой фазах наблюдается неограниченная взаимная растворимость компонентов (рис. 10.11).

Температура плавления компонента A уменьшается при добавлении B , температура плавления компонента B увеличивается при добавлении A .

Плавные кривые ликвидуса (верхняя граница существования твердой фазы) и солидуса (нижняя граница существования жидкой фазы) соединяются друг с другом только в точках, соответствующих чистым веществам A и B .

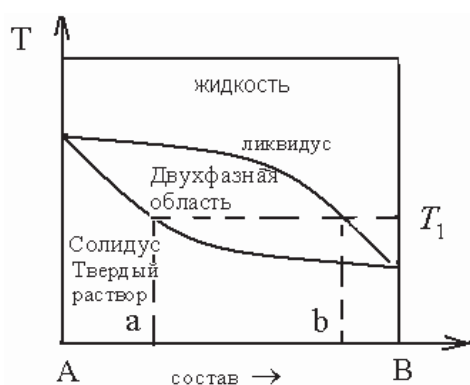


Рис. 10.11. Диаграмма состояния для двухкомпонентных систем с неограниченной растворимостью компонентов: a – состав твердого раствора; b – жидкого

Ниже кривой солидуса существует однофазный двухкомпонентный твердый (с двумя степенями свободы) раствор, а выше кривой ликвидуса – однофазный жидкий раствор с таким же числом степеней свободы. Между кривыми ликвидуса и солидуса находится двухфазная область, в которой сосуществуют твердые и жидкие растворы.

Пересечение изотермы с кривой солидуса даст состав твердого раствора a , а с кривой ликвидуса – состав жидкого раствора b .

В системах с подобными фазовыми диаграммами наблюдается явление, называемое *ликвацией*: возникают метастабильные продукты в результате дробной (фракционной) кристаллизации. Такие явления происходят всякий раз, когда применяют недостаточно низкие скорости охлаждения, что не позволяет достичь равновесия при каждой температуре. Кристаллы, образующиеся первыми при охлаждении жидкости состава b , имеют состав a . Если нет времени для установления нового равновесия этих кристаллов с жидкостью, то они фактически для системы являются потерянными. Из-за этого новые порции кристаллов обогащены компонентом B . Образование таких структур, развивающихся вокруг центрального зародыша,

весьма часто встречается при кристаллизации расплавов. В результате твердая фаза содержит неоднородные по составу кристаллы.

Для систем подобного типа была разработана *теория двухфазной зоны*. Ее основная идея заключается в следующем.

В двухфазной зоне между кривыми ликвидуса и солидуса находится как жидкость, так и кристаллы твердой фазы. Очевидно, что их объемные доли η_f и η_s связаны соотношением

$$\eta_f + \eta_s = 1.$$

Соотношение между долями фаз зависит от температур ликвидуса T_{liq} и солидуса T_{sol} , которые, в свою очередь, зависят от состава двухкомпонентного раствора:

$$T_{sol} = \alpha_s + \beta_s \xi + \gamma_s \xi^2,$$

$$T_{liq} = \alpha_f + \beta_f \xi + \gamma_f \xi^2,$$

где ξ – доля одного из компонентов; константы $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $i = f, s$, могут быть найдены аппроксимацией соответствующих кривых диаграммы состояния (рис. 10.11).

В этом случае эффективная теплоемкость в уравнении теплопроводности (10.43) должна вычисляться не по формуле (10.44), а по формуле

$$(c\rho)_{eff} = \begin{cases} (c\rho)_s, & T \leq T_s, \\ c\rho + Q_{ph}\rho_s \frac{\partial \eta_L}{\partial T}, & T_s < T < T_L, \\ (c\rho)_L, & T \geq T_L, \end{cases} \quad (10.46)$$

где

$$c\rho = (c\rho)_s (1 - \eta_f) + (c\rho)_f \eta_f.$$

В свою очередь, объемные теплоемкости твердой и жидкой фаз также должны зависеть от состава. В простейшем приближении можно воспользоваться формулами (правилом смеси)

$$(c\rho)_s = (c\rho)_{A,s} \xi + (1 - \xi) (c\rho)_{B,s},$$

$$(c\rho)_f = (c\rho)_{A,f} \xi + (1 - \xi) (c\rho)_{B,f}.$$

Теплоемкости индивидуальных веществ, очевидно, также могут зависеть от температуры.

Объемная доля жидкой фазы вычисляется на основе соотношения

$$\eta_f = 1 - \left(\frac{T_{liq} - T}{T_{liq} - T_{sol}} \right)^n, \quad (10.47)$$

где параметр n варьируется для разных сплавов.

Доля твердой фазы, очевидно, есть $\eta_s = 1 - \eta_f$.

Теория двухфазной зоны обобщается и на многокомпонентные сплавы.

10.8. Элементы кинетической теории фазовых превращений

В некоторых случаях долю кристаллов твердой фазы в двухфазной зоне можно вычислить на основе кинетической теории, учитывающей явления, предшествующие непосредственно кристаллизации в больших объемах.

Большая часть фазовых превращений начинается с образования физически различимых центров (этот процесс известен как зарождение), после чего области, претерпевшие превращение, растут в окружающую среду.

Так, процессы затвердевания или конденсации можно разделить на две ступени: первоначальное образование зародышей кристаллов и последующий рост этих зародышей путем присоединения молекул из расплава. В большинстве известных теорий принято считать, что процесс зародышеобразования заключается в возникновении и росте агрегатов молекул в результате протекания последовательных бимолекулярных реакций (см. часть 11).

Возникновение небольшой капли радиусом r при давлении пара p , характеризующегося равновесным давлением p_0 (при температуре T), сопровождается изменением энергии Гиббса

$$\Delta g = \Delta g_{vol} + \Delta g_s,$$

где Δg_{vol} – есть изменение свободной энергии при конденсации; для идеального газа эта величина, отнесенная к одиночному атому, составляет

$$-kT \ln(p/p_0).$$

Эта величина выводится из изменения свободной энергии идеального газа при изотермическом сжатии.

Для сферической капли радиуса r получаем

$$-\frac{4}{3} \pi r^3 v_f^{-1} kT \ln(p/p_0),$$

где v_f – атомный объем жидкости.

Вклад Δg_s в изменение энергии Гиббса есть

$$4\pi r^2 \gamma_{fg},$$

где γ_{fg} – свободная энергия поверхности раздела «пар – жидкость».

Следовательно,

$$\Delta g = 4\pi r^2 \gamma_{fg} - \frac{4}{3} \pi r^3 v_f^{-1} kT \ln(p/p_0). \quad (10.48)$$

При малых радиусах капли преобладает первое слагаемое, что делает Δg положительной величиной. При больших радиусах в (10.48) начинает преобладать второе слагаемое, и тогда Δg становится отрицательной величиной. Максимальное значение Δg , которое обозначим как Δg_* , представляет собой активационный барьер для зарождений. Дифференцируя Δg по радиусу и приравнивая результат нулю, найдем критический радиус капли

$$r_* = \frac{2v_f \gamma_{fg}}{kT \ln(p/p_0)},$$

следовательно

$$\Delta g_* = \frac{16v_f^2 \gamma_{fg}^3}{3[kT \ln(p/p_0)]^2}.$$

Капелька или зародыш размером $r < r_*$ будет склонна к испарению, а размером $r > r_*$ – к росту. Любой из этих процессов будет сопровождаться уменьшением энергии. Если $p/p_0 \leq 1$, свободная энергия Гиббса Δg будет возрастать при любом r , и все капли будут неустойчивы относительно испарения.

Чтобы рассчитать распределение зародышей по размерам, предположим, что зародыши из n атомов, число которых N_n , образуют «разбавленный раствор» в мономолекулярном паре. Тогда энтропия смешения Δs_m представляет собой энтропию N_v парообразных молекул из общего числа N_0 частиц и зародышей

$$N_0 = N_v + \sum_n N_n.$$

Следовательно,

$$\Delta s_m = -k \left[N_v \ln \left(\frac{N_v}{N_0} \right) + \sum_n \left(N_n \ln \left(\frac{N_n}{N_0} \right) \right) \right].$$

Изменение свободной энергии этой системы в результате того, что зародыш из $n - 1$ молекул превращается в зародыш из n молекул в результате присоединения к нему молекулы пара, складывается из энергий, пропорциональных изменениям N_v, N_n и N_0 , а также из изменений поверхностной и объемной энергий.

Если распределение зародышей соответствует равновесному состоянию, то

$$N_n = N_0 \left(\frac{N_v}{N_0} \right)^n \exp\left(-\frac{\Delta g_n}{kT}\right),$$

где Δg_n определяется по уравнению (10.48) в соответствующей форме

$$\Delta g = n^{2/3} \gamma_{Lv} \eta - nkT \ln(p/p_0), \quad (10.49)$$

причем $n = \frac{4}{3} \pi r^3 v_L^{-1}$, и множитель $\eta = (36\pi)^{1/3} (v_L)^{2/3}$ относится к сфере.

Поскольку, по предположению, общее число зародышей мало (только при таком условии мы можем говорить о разбавленном растворе), то можем записать

$$N_n \approx N \exp\left(-\frac{\Delta g_n}{kT}\right),$$

где N - общее число молекул.

Скорость зарождения I определяется частотой, с которой одиночные молекулы соударяются и соединяются с критическими зародышами площадью F_* . Эта скорость пропорциональна плотности потока молекул J_0 , площади F_* и числу N_n . Тогда

$$I \approx J_0 F_* N \exp\left(-\frac{\Delta g_n}{kT}\right).$$

Полагая, что справедливо соотношение из кинетической теории газов

$$J_0 = \frac{p}{\sqrt{2\pi m kT}},$$

и используя вместо Δg_n критическое значение Δg_* , для единичного объема найдем

$$\frac{I}{N v_L} \approx \frac{J_0 F_*}{v_L} \exp\left(-\frac{16\pi v_L^2 \gamma_{Lv}^3}{3(kT)^3 [\ln(p/p_0)]^2}\right). \quad (10.50)$$

Выражение для скорости образования кристаллических зародышей из пересыщенного пара лишь слегка отличается от выражения (10.50).

При кристаллизации предполагается, что агрегаты имеют структуру кристаллизующегося твердого вещества. Агрегат, содержащий n_* молекул, рассматривается как зародыш критического размера, который в общем случае будет расти, а не деградировать. В простейших теориях принимается, что для зародыша, содержащего n молекул, в предположении, что термодинамические константы такого малого агрегата идентичны термодинамическим параметрам монокристалла, а энергия деформации пренебрежимо мала, стандартную свободную энергию образования можно представить в виде, аналогичном предыдущему. Фактор формы η включается в выражение для критической свободной энергии Δg_* . Кристаллический зародыш с минимальной поверхностной энергией в общем случае не будет иметь сферическую форму. Вместо частоты соударений газовых молекул J_0 берут в соответствии с теорией абсолютных скоростей реакций частоту, с которой атом преодолевает энергетический барьер на границе между жидкостью и кристаллическим зародышем, содержащим n атомов. В целом, имеется всего лишь два надежных примера гомогенного зародышеобразования: затвердевание воды и затвердевание капелек ртути. Все остальные случаи следует рассматривать как гетерогенное зародышеобразование. Подобные теории рассматриваются специальным образом.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое «фаза»?
2. Приведите примеры фазовых переходов.
3. Сформулируйте условие фазового равновесия.
4. Как связаны давления в фазах на искривленной поверхности раздела?^{*28}
5. Что описывает уравнение Клапейрона–Клаузиуса?
6. Изобразите простейшую диаграмму состояния для системы «пар-жидкость»
7. Что такое «критическая точка»?
8. Что такое «тройная точка»?
9. Что описывает задача Стефана?
10. Дайте термодинамическую классификацию фазовых переходов.
11. В чем различие между размытыми и точечными фазовыми переходами?

²⁸ Знаком «*» отмечены вопросы и задания повышенной трудности

12. В чем состоит отличие в поведении теплоемкостей в окрестности температур фазовых переходов первого и второго рода?*
13. В чем заключается основная идея теории двухфазной зоны?*
14. Что описывает теория зарождения?*

Задания

1*. Построить обобщение уравнения Клапейрона–Клаузиуса для случая фазового перехода при постоянной температуре, но при различном изменении давления в фазах (Вы должны получить уравнение Пойнтинга).

2*. Пользуясь понятием дельтаобразной функции, построить численное решение задачи (10.43), (10.44) о фазовом переходе.

3*. Подобрать удобные безразмерные переменные, изобразить качественную зависимость $\Delta g(n)$ (10.49) при варьировании отношения p/p_0 . Какой вывод следует из анализа полученных зависимостей?

ЧАСТЬ 11

Сопутствующие явления: диффузия и химические реакции

11.1. Простейшие понятия о кинетике химических реакций

В природе и в промышленных условиях протекает множество химических превращений, начиная от элементарных, подробно изученных, и заканчивая биохимическими процессами. Любое сложное химическое превращение представляет собой совокупность ряда простейших реакций, происходящих в результате одного элементарного акта. Закономерности протекания химических процессов изучает химическая кинетика – наука о скоростях химических превращений. Без нее невозможно изучение механизмов реакций и построение грамотной модели технологического процесса, включающего химические стадии. Мы ограничимся знакомством с простейшими понятиями и анализом простейших примеров.

Химически реагирующую систему будем характеризовать набором *концентраций компонентов*, которые можно определить по-разному.

Если n_k – число молей компонента k в системе, а $n = \sum_k^N n_k$ – сумма

молей всех компонентов этой системы (N – число различных компонентов – элементов и их соединений), то под относительной мольной концентрацией будем понимать величину

$$y_k = \frac{n_k}{n}.$$

Очевидно, что $\sum_{(k)} y_k = 1$.

Если рассматриваемый объем – единичный, то размерность n_k – моль/м³.

При математическом моделировании химически реагирующих систем часто оказываются удобными массовые концентрации компонентов или их массовые доли.

Так, плотность вещества, находящегося в объеме V , очевидно, определяется по формуле

$$\rho = \frac{M}{V},$$

где M – масса вещества в рассматриваемом объеме.

Если M есть совокупность масс разных компонентов, $M = \sum_{k=1}^N M_k$,

то мы можем определить парциальные плотности компонентов по формуле

$$\rho_k = \frac{M_k}{V}, \text{ кг/м}^3.$$

Очевидно, что $\sum_{k=1}^N \rho_k = \rho$.

Тогда массовую концентрацию компонента с номером k определим по формуле

$$C_k = \frac{\rho_k}{\rho}, \quad \sum_{k=1}^N C_k = 1.$$

Массовые и мольные концентрации однозначно связаны между собой. Так как, $n_k = \frac{\rho_k}{m_k}$, где m_k – масса одного моля компонента k (а плотность это масса единицы объема), то находим

$$y_k = \frac{\rho_k/m_k}{\sum_{i=1}^N \rho_i/m_i}.$$

Интенсивность химической реакции обычно выражают *скоростью реакции* W , т.е. количеством вещества, реагирующим в единицу времени в данной системе. Под количеством вещества мы можем понимать число молей компонента или любую другую связанную с ним величину. Тогда

$$W = -\frac{dn}{dt}.$$

Под *удельной скоростью реакции* понимают количество вещества, реагирующего в единицу времени в единице реакционного пространства:

$$w_V = -\frac{1}{V} \frac{dn}{dt} -$$

для реакций, протекающих в объеме V (*гомогенных реакций*),

$$w_S = -\frac{1}{S} \frac{dn}{dt} -$$

для реакций, протекающих на поверхности S (*гетерогенных реакций*).

Если одна и та же реакция протекает и на поверхности, и в объеме, то ее скорость выразится следующим образом

$$-\frac{dn}{dt} = w_S S + w_V V .$$

Первичные данные кинетических экспериментов представляют собой набор концентраций химических компонентов или некоторых пропорциональных им величин при различных значениях времени реакции. По этим данным можно построить кинетические кривые «концентрация – время».

Тогда *скорость реакции* в данный момент времени дается тангенсом угла наклона концентрационных кривых, получаемых экспериментально, в этот момент времени.

Часто уравнение скорости реакции можно выразить в виде

$$\varphi = k [C_1]^{v_1} [C_2]^{v_2} \dots = k \prod_{(i)} [C_i]^{v_i} , \quad (11.1)$$

где $v_1, v_2 \dots$ – парциальные порядки реакции по компонентам A, B, \dots , а $[C_1], [C_2]$ – концентрации этих компонентов (мольные, массовые...), k – константа скорости реакции. Уравнение (11.1) есть простейшее кинетическое уравнение.

Элементарные реакции бывают реакциями нулевого, первого и второго порядка. Большинство химических реакций можно представить как те или иные комбинации элементарных стадий.

Обычно выделяют следующие простые комбинации: параллельные (конкурирующие, одновременные); последовательные; обратимые реакции. Реакцию, в которой реагент подвергается превращению по двум или нескольким путям одновременно, называют параллельной. В последовательной реакции продукт, образующийся в одной стадии, является реагентом в другой. Если две стадии реакции противоположного на-

правления происходят с соизмеримой вероятностью, то такую реакцию называют обратимой. Существуют сложные реакции, сочетающие в себе два или все три названных типа. Уравнения (11.1), полученные на основе анализа экспериментальных данных или на основе формальной кинетики, имеют физический смысл, если порядки реакции – простые положительные числа. Дробные порядки оказываются «кажущимися» и есть следствие сложного механизма реакции, не описываемого простой реакционной схемой и включающего в качестве отдельных стадий разнообразными физическими процессами.

11.2. Примеры описания кинетики гомогенных реакций

Рассмотрим простые примеры кинетических схем, характерных для описания гомогенных реакций, т.е. для гомогенных реакций, протекающих в объеме однородного материала.

В случае *простой реакции первого порядка*



ее скорость пропорциональна концентрации A :

$$d[A]/dt = -k[A]. \quad (11.3)$$

Для вещества B – продукта реакции справедливо аналогичное уравнение

$$d[B]/dt = k[A].$$

Единицей измерения скорости реакции первого порядка является $1/с$.

Но вследствие сохранения вещества в системе

$$[A] + [B] = [A]_0 + [B]_0 = \text{const}$$

нам достаточно одного уравнения (11.3).

Интегрирование этого уравнения при постоянстве давления $p = \text{const}$ и температуры $T = \text{const}$ дает

$$\frac{d[A]}{A} = d \ln[A] = -k(T, p) dt,$$

$$\ln[A] = -kt + C, \quad C = \ln[A]_0,$$

где $[A]_0$ – начальная концентрация A .

$$[A] = [A]_0 \exp(-kt). \quad (11.4)$$

Уравнение (11.4) показывает, что в реакции первого порядка расхождение реагента во времени происходит экспоненциально.

Результат можно представить графически (рис. 11.1).

Угол наклона прямой $\ln[A]$ и определяет константу скорости реакции.

Введем *период полупревращения*

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} -$$

время достижения концентрацией реагента половины первоначальной величины.

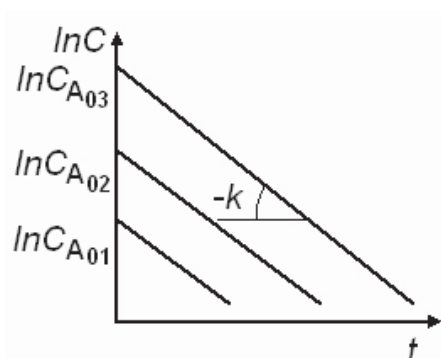


Рис. 11.1. Иллюстрация к модели реакции 1-го порядка

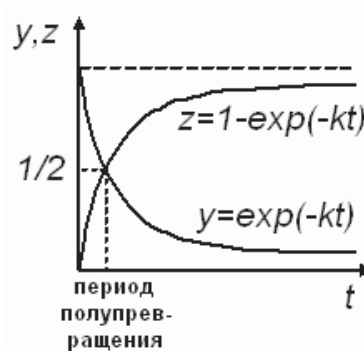


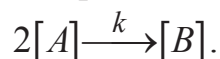
Рис. 11.2. Изменение во времени концентрации реагента и продукта для реакции первого порядка

Вводя относительные концентрации по формулам

$$y = \frac{[A]}{[A]_0 + [B]_0}, \quad z = \frac{[B]}{[A]_0 + [B]_0},$$

так что $y + z = 1$, представим зависимость концентраций от времени на рис. 11.2. Пересечение кривых соответствует половине начальной концентрации реагента.

Простую реакцию второго порядка можно представить в виде



Единицей измерения константы скорости реакции второго порядка служит величина

$$1/(\text{размерность концентрации} \cdot \text{с})$$

В случае *простой реакции второго порядка* уравнение скорости имеет вид

$$d[A]/dt = -2k[A]^2. \quad (11.5)$$

Множитель 2 появляется потому, что в каждом элементарном акте расходуются две молекулы. Интегрирование дает

$$\frac{1}{[A]} - \frac{1}{[A]_0} = 2kt. \quad (11.6)$$

или

$$[A] = \frac{[A]_0}{1 + 2kt[A]_0}. \quad (11.7)$$

Если мы построим зависимость обратной концентрации от времени, то мы получим прямую линию с наклоном $2k$ (рис. 11.3). Для разных начальных концентраций получим набор параллельных прямых.

Если установлено, что реакция имеет второй порядок, то на основе данных эксперимента константу скорости можно определить по формуле

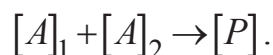
$$k = \frac{[A]_0 - [A]}{2[A]_0[A]t}.$$

Подставляя $[A]_0/2$ вместо $[A]$, в уравнение (11.6), найдем период полупревращения

$$t_{1/2} = \frac{1}{2k[A]_0}.$$

В отличие от реакции первого порядка, *период полупревращения зависит от начальной концентрации реагента.*

Другой реакцией, в которой в образовании продукта участвуют две молекулы, будет реакция вида



Это – *бимолекулярная реакция с суммарным вторым порядком.*

Эту реакцию можно проанализировать в разных ситуациях:

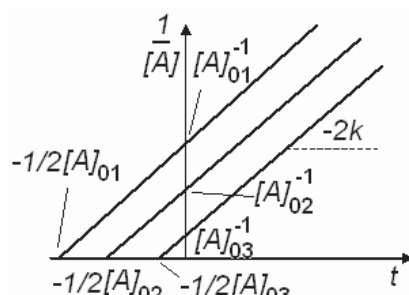


Рис. 11.3. Иллюстрация к модели элементарной реакции второго порядка

- 1) стехиометрические начальные концентрации;
- 2) один из реагентов берется в избытке так, что его концентрацию в ходе реакции можно считать практически неизменной.

В первом случае имеем

$$\frac{d[P]}{dt} = k[A]_1[A]_2 = -k[A]_1([A]_0 - [A]_1) \quad \text{или} \quad \frac{d[A]_1}{dt} = -k[A]_1^2. \quad (11.8)$$

Этот случай сводится к предыдущему, но вместо $2k$ в уравнении стоит k

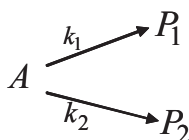
$$\frac{1}{[A]} - \frac{1}{[A]_0} = kt. \quad (11.9)$$

Во втором случае допустим, что $[A]_{20} \gg [A]_{10}$. Тогда уравнение для скорости реакции можно представить в виде

$$\frac{d[A]_1}{dt} = -k_{eff}[A]_1, \quad (11.10)$$

где $k_{eff} = k[A]_{20}$. Т.е. этот случай сводится к первому. Говорят, что в этом случае реакция проходит в условиях псевдопервого порядка (по отношению к A_1).

При протекании *двух параллельных реакций первого порядка* со скоростями k_1 и k_2 реакционную схему можем представить в виде



Дифференциальные уравнения для реагентов и продуктов имеют вид

$$\begin{aligned}
 d[A]/dt &= -(k_1 + k_2)[A], \\
 d[P_1]/dt &= k_1[A], \\
 d[P_2]/dt &= k_2[A].
 \end{aligned} \quad (11.11)$$

Независимыми из них являются только два. Первое уравнение интегрируется сразу

$$[A] = [A]_0 \exp(-(k_1 + k_2)t). \quad (11.12)$$

Из двух других следует

$$[P_1]/[P_2] = k_1/k_2,$$

т.е. отношение концентраций продуктов зависит только от отношения констант скоростей.

Используя (11.12) и уравнение материального баланса $[A]_0 = [A] + [P_1] + [P_2]$, получаем

$$[P_1] = \frac{k_1}{k_1 + k_2} [A]_0 [1 - \exp(-(k_1 + k_2)t)], \quad (11.13)$$

$$[P_2] = \frac{k_2}{k_1 + k_2} [A]_0 [1 - \exp(-(k_1 + k_2)t)]. \quad (11.14)$$

К тем же самым уравнениям можно прийти, подставляя (11.12) во второе и третье уравнения (11.11) и интегрируя непосредственно.

Суть рассмотренного случая сводится к тому, что как расходование реагента, так и образование продуктов, подчиняются закону скорости первого порядка. Так, графики зависимостей $\ln[A]$, $\ln([P]_{1\infty} - [P]_1)$, $\ln([P]_{2\infty} - [P]_2)$ от времени дают прямую линию, тангенс угла наклона которой равен $-(k_1 + k_2)$, что аналогично рис. 11.1.

Для определения каждой из констант по данным эксперимента нужно из (11.13), (11.14) исключить выражение в квадратных скобках с помощью (11.12). Найдем

$$\frac{[P]_1}{([A]_0 - [A])} = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \quad (11.15)$$

и

$$\frac{[P]_2}{([A]_0 - [A])} = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \quad (11.16)$$

Следовательно, графики зависимости концентраций продуктов от концентрации реагента $([A]_0 - [A])$ представляют собой прямые линии с разными наклонами.

Для удобства введем относительные концентрации

$$y = \frac{[A]}{[A]_0}, \quad z_1 = \frac{[P]_1}{[A]_0}, \quad z_2 = \frac{[P]_2}{[A]_0}.$$

Тогда вместо (11.13), (11.14) найдем

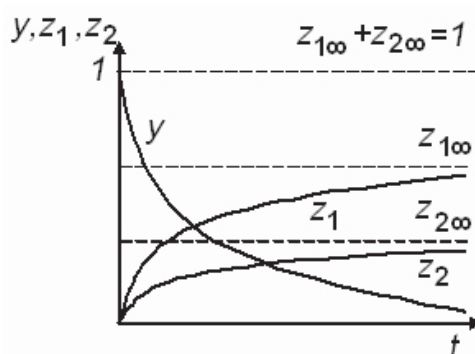


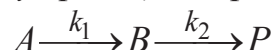
Рис. 11.4. Зависимость концентраций от времени для двух параллельных реакций первого порядка

$$z_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} [1 - \exp(-(k_1 + k_2)t)],$$

$$z_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} [1 - \exp(-(k_1 + k_2)t)].$$

Изменение концентраций во времени для этого случая показано на рис. 11.4. для произвольных констант скорости.

Последовательность двух реакций первого порядка отвечает схеме



и представляет простейший пример многостадийной реакции.

Здесь нужно различать три варианта.

1. При $k_1 \gg k_2$ промежуточный продукт гораздо менее реакционноспособен, чем исходный реагент. Первая стадия практически завершается до того, как начинается вторая стадия. В результате каждую стадию можно рассматривать как независимую реакцию первого порядка.

2. В случае $k_1 \ll k_2$ вторая стадия быстро следует за первой, поэтому в любой момент времени справедливо

$$[B] \ll [A] \text{ и } [P].$$

3. В случае незначительного различия реакционной способности исходного реагента и промежуточного продукта набор общих дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} d[A]/dt &= -k_1[A], \\ d[B]/dt &= k_1[A] - k_2[B], \\ d[P]/dt &= k_2[B]. \end{aligned} \tag{11.17}$$

В начальный момент времени $t = 0$ имеем:

$$[A] = [A]_0, [B] = 0, [P] = 0.$$

Из первого уравнения системы (11.17) имеем

$$[A] = [A]_0 \exp(-k_1 t). \tag{11.18}$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (11.17), найдем

$$\frac{d[B]}{dt} + k_2[B] = k_1[A]_0 e^{-k_1 t}. \tag{11.19}$$

Частное решение этого уравнения ищем в виде

$$[B] = \alpha e^{-k_1 t}.$$

Тогда из (11.19) имеем

$$-k_1 \alpha e^{-k_1 t} + k_2 \alpha e^{-k_1 t} = k_1 [A]_0 e^{-k_1 t},$$

откуда находим

$$\alpha = \frac{k_1 [A]_0}{k_2 - k_1}.$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (11.19), имеет вид

$$\ln[B] = -k_2 t + \ln C$$

или

$$[B] = C \exp(-k_2 t).$$

Следовательно, общее решение уравнения (11.19) представим в виде

$$[B] = C \exp(-k_2 t) + \frac{k_1 [A]_0}{k_2 - k_1} \exp(-k_1 t)$$

или, используя начальное условие к задаче (11.17), – в виде

$$[B] = \frac{k_1 [A]_0}{k_2 - k_1} [\exp(-k_1 t) - \exp(-k_2 t)]. \quad (11.20)$$

Из уравнения материального баланса находим концентрацию продукта реакции

$$[P] = [A]_0 \left[1 - \frac{1}{k_2 - k_1} (k_2 \exp(-k_1 t) - k_1 \exp(-k_2 t)) \right]. \quad (11.21)$$

Как видно, кинетическое описание заметно усложнилось, и далее сложность описания заметно увеличивается по мере увеличения числа стадий. Более того, аналогичные аналитические решения могут быть получены лишь для системы последовательных реакций первого порядка. Для последовательных реакций произвольного порядка получаются системы нелинейных дифференциальных уравнений, которые можно решить аналитически лишь в ограниченном числе случаев.

Большую группу реакций составляют гомогенные *каталитические реакции*, в которых катализатор участвует в образовании высокореакционноспособного промежуточного продукта, не меняя стехиометрии ре-

акции. Если катализатором реакции является конечный или промежуточный продукт, то такие реакции называют *автокаталитическими*. Строгое аналитическое описание подобных реакций может быть весьма проблематичным.

11.3. Квазистационарное приближение

Существенное упрощение кинетического описания может быть достигнуто при введении стационарного (квазистационарного) приближения.

В этом случае вместо системы дифференциальных уравнений закономерности процесса могут быть описаны системой алгебраических уравнений, что позволяет получить более или менее простые решения для большого числа задач.

Рассмотрим особенности стационарного приближения на примере системы последовательных реакций.

Систему последовательных реакций мы будем считать стационарной, если скорости всех стадий этой последовательности не изменяются во времени. Неизменности скоростей стадий соответствует постоянство концентраций всех промежуточных веществ. В нашем простом случае это означает

$$\frac{d[B]}{dt} = k_1[A] - k_2[B] = 0 \quad (11.22)$$

Тогда

$$[B]_{st} = \frac{k_1}{k_2}[A]. \quad (11.23)$$

Т.е., при стационарном протекании процесса скорости обеих стадий равны. В противном случае концентрация промежуточного продукта менялась бы со временем.

В закрытой системе эта последовательность реакций не может протекать стационарно. Это обусловлено тем, что концентрация реагента (и соответственно, скорость первой стадии) в закрытой системе будет уменьшаться по мере его расходования. Для достижения стационарности требуется ввести источник компонента A , мощность которого равна скорости расходования вещества A . Такая ситуация легко может быть реализована в действительности.

Зафиксируем это дополнительное условие равенством $[A] = [A]_0$.

Тогда стационарность реакции становится очевидной. Но вот вопрос об эволюции системы к стационарному режиму остается открытым, если в начале наблюдения имеется лишь компонент A .

Уравнение баланса компонента B в достационарный период имеет вид

$$\frac{d[B]}{dt} = k_1[A]_0 - k_2[B] = 0 \quad (11.24)$$

с начальным условием

$$[B] = [P] = 0 \text{ при } t = 0.$$

Интегрирование (11.24) дает

$$\ln\left(\frac{k_1[A]_0}{k_1[A]_0 - k_2[B]}\right) = k_2 t. \quad (11.25)$$

Используя (11.23), из (11.25) найдем

$$\frac{[B]}{[B]_{st}} = 1 - e^{-k_2 t}. \quad (11.26)$$

Равенство (11.26) показывает, что стационарная концентрация промежуточного вещества установится в рассматриваемой системе через бесконечно большой промежуток времени. Однако, если мы зададим достаточно малые, но конечные отклонения $[B]$ от $[B]_{st}$, то они окажутся достижимыми за вполне конечные времена.

Так, если считать близкой к стационарной концентрацию $[B] = 0,95[B]_{st}$, то из формулы (11.26) следует, что для рассматриваемой реакции эта концентрация будет достигнута за время $t = 3/k_2$.

Процесс установления стационарной концентрации промежуточных веществ можно рассматривать как релаксационный и характеризовать его временем половинной релаксации, т.е. временем, за которое различие между наблюдаемой и стационарной величинами сокращается вдвое. Это характерное время релаксации, являющееся в данном случае естественным временным масштабом системы, как следует из (11.26), будет равно: $t = \ln 2/k_2$.

Аналогичный анализ может быть проведен для других систем реакций, включающих стадии реакций первого порядка. Примеры сложных схем последовательно-параллельных реакций представлены на рис. 11.5



Рис. 11.5. Условные схемы последовательно-параллельных реакций

Для различных элементарных совокупностей имеют место близкие закономерности установления стационарных режимов: времена установления стационарных концентраций промежуточных веществ с заданной точностью обратно пропорциональны сумме констант стадий, в которых осуществляется их превращение.

Изложенный метод описания кинетики химических реакций был предложен Боденштейном и имеет большое значение для описания разветвленных реакций и гетерогенных химических процессов.

11.4. От чего зависит скорость химической реакции?

Физическая модель реакции позволяет установить схему реакции, т.е. набор отдельных элементарных стадий. Подчеркнем, что существует фундаментальное различие между понятиями «схема реакции» и «механизм реакции», которые в литературе часто употребляются как тождественные. Схема остается формальным описанием реакции (ее макроскопического проявления) и не требует никаких предположений о свойствах компонентов. Установление механизма реакции должно дать ответ на ряд вопросов: где расположены активные центры в реагентах; какие свойства проявляют реагенты; какие связи рвутся или образуются в каждой из стадий реакции; что представляют собой промежуточные продукты реакции; каковы состав и структура промежуточных комплексов? Эти вопросы определяются современными представлениями о строении вещества и теории химической связи, т.е. при изучении микропроцессов. Т.о., установленный механизм реакции может быть хорош лишь настолько, насколько хороши эти представления. Это означает, что предполагаемый механизм никогда не бывает окончательным, а может быть только предварительным.

Очевидно, что скорость реакции зависит от условий ее осуществления, в частности, от температуры и давления.

Существует несколько уравнений, пригодных для количественного описания температурной зависимости констант скорости элементарных реакций. Самое известное из них – уравнение Аррениуса – имеет вид

$$k = k_0 e^{-E_a/RT}, \quad (11.27)$$

где k_0 константа, называемая частотным фактором, предэкспоненциальным множителем и аррениусовским множителем; величина E_a называется энергией активации реакции.

Если построить зависимость $k(T)$ в аррениусовских координатах, т.е. $\ln k = f(1/T)$, то получится прямая с отрицательным наклоном, равным E_a/R , и отсекающая на оси отрезок, равный $\ln k_0$.

Для объяснения температурной зависимости скорости реакции существует несколько различных теорий. Так, физический смысл энергии активации E_a объясняется в теории *активированного комплекса* и в *теории столкновений*. Прежде всего, предполагается ее корреляция с энергией связи. Но без ответа остается вопрос, почему тот или иной процент энергии рвущихся связей необходим для активации. Величина энергии активации меняется в широких пределах для разных реакций. Если гомогенная реакция протекает в нормальных условиях, то отклонение зависимости ее скорости от температуры от аррениусовской зависимости связывают с тем, что измеряемая константа скорости является сложной и относится к более чем одной стадии реакции.

В соответствии с теорией активированного комплекса,

$$k = \frac{k_B T}{h} K_c^\ddagger, \quad (11.28)$$

где k_B - постоянная Больцмана, h - постоянная Планка, K_c^\ddagger – константа равновесия, которая связана с изменением свободной энергии Гиббса

$$-RT \ln K_c^\ddagger = \Delta G^\ddagger,$$

где $\Delta G^\ddagger = \Delta H^\ddagger - T\Delta S^\ddagger$, ΔH^\ddagger – энтальпия активации (разность молярных энтальпий начального и конечного состояний), ΔS^\ddagger – энтропия активации.

Следовательно, вместо (11.28) можем записать

$$k = \frac{k_B T}{h} \exp(\Delta S^\ddagger/R) \exp(-\Delta H^\ddagger/RT). \quad (11.29)$$

Это есть уравнение Эйринга. В логарифмической форме имеем

$$\ln\left(\frac{k}{T}\right) = \ln\left(\frac{k_B}{h}\right) + \frac{\Delta S^\ddagger}{R} - \frac{\Delta H^\ddagger}{RT}.$$

Если построить зависимость $\ln(k/T)$ от $1/T$, то наклон прямой будет равен $-\Delta H^\ddagger/RT$. Зная эту величину, можно рассчитать энтропию реакции.

Согласно простой теории столкновений, реагирующие молекулы рассматриваются как жесткие шарики, не обладающие силами притяжения друг к другу. Считается, что реакция двух молекул происходит только при их столкновении и что скорость реакции зависит от частоты столкновений Z . Для того, чтобы после столкновения двух молекул могла произойти химическая реакция, необходимо, чтобы энергия двух молекул была равна энергии активации E_a . В соответствии с распределением Больцмана, доля молекул n^* , обладающих необходимой энергией, определится как

$$n^*/n = \exp(-E_a/RT).$$

А для того, чтобы столкновение могло привести к химическим изменениям, молекулы в момент столкновения должны быть благоприятным образом ориентированы в пространстве. За это отвечает фактор вероятности P , который также называют стерическим фактором.

Число столкновений Z на 1 см^3 за секунду между разными молекулами A_1 и A_2 можно вывести из законов статистической механики

$$Z = \frac{N_a}{1000} (r_{A_1} + r_{A_2})^2 \left(\frac{8k_B T}{\mu}\right)^{1/2}, \quad (11.30)$$

где N_a – число Авогадро, $\mu = \frac{m_{A_1} m_{A_2}}{m_{A_1} + m_{A_2}}$, r_{A_1}, r_{A_2} – радиусы реагентов, m_{A_1}, m_{A_2} – их молярные массы. Число столкновений в (11.30) измеряется в $1/(\text{м}\cdot\text{с})$.

Теория столкновений была развита для газофазных реакций. Но для многих реакций в растворах ее предсказания также оказываются справедливыми.

Для мономолекулярных реакций частотный фактор не является частотой столкновений, а принимает вид средней колебательной частоты, которую в некоторых условиях можно принять равной $(k_B T)/h$.

Энтропия активации связана со стерическим²⁹ фактором

$$e^{\Delta S^\ddagger/R} = P,$$

так что стерический фактор, равный единице, должен соответствовать нулевой энтропии активации. Положительные величины ΔS^\ddagger , найденные экспериментально, нельзя объяснить таким способом.

Большое значение для скорости реакции имеет и такая величина, характеризующая *переходное состояние*, как активационный объем. В соответствии с теорией переходного состояния зависимость константы скорости одностадийной жидкофазной реакции (элементарной реакции) от давления можно выразить уравнением

$$d(\ln k)/dp = -\Delta V^\ddagger/RT - \beta_T(v-1), \quad (11.31)$$

где v – порядок реакции, β_T – коэффициент изотермической сжимаемости растворителя. Это уравнение справедливо при постоянной температуре, и ему соответствуют линейные графики зависимости $\ln k$ от p . Однако экспериментальные кривые свидетельствуют о зависимости активационного объема от давления.

В литературе обсуждаются и более сложные случаи зависимости скорости реакций от давления, в том числе для реакций, контролируемых диффузией.

Кинетика гетерогенных реакций, т.е. реакций, протекающих на границе раздела фаз, более сложна, так как их «элементарными» стадиями являются диффузионные перемещения реагентов и продуктов, что требует отдельного рассмотрения.

11.5. Реакции с участием твердых веществ³⁰

11.5.1. Классификация твердофазных превращений

Долгое время считалось, что *химические и фазовые превращения в твердой фазе* вообще не идут или идут чрезвычайно медленно, что затрудняет или делает бесполезным их практическое использование. Систематическое исследование превращений в твердых веществах было начато лишь в 1930-е гг., что непосредственно связано с появлением но-

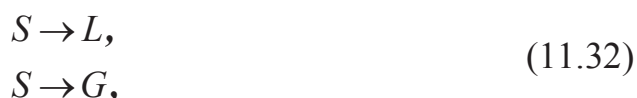
²⁹ Стерический фактор – множитель, отражающий долю соударений частиц с достаточной энергией, ведущих к реакции.

³⁰ Третьяков Ю.Д., Путляев В.И. Введение в химию твердофазных материалов. М.: Наука, Изд-во Московского университета, 2006. 400 с.

вых химических технологий, в том числе нетрадиционных методов синтеза твердофазных соединений.

К числу твердофазных процессов относят те, в которых одна из фаз, участвующих в превращении, является твердой. Это может быть один из реагентов, промежуточный продукт, катализатор или конечные соединения. Собственно твердофазные превращения – это те, в которых реагенты – твердые вещества.

Простейшими примерами физических процессов, где присутствует твердая фаза, являются плавление и сублимация, которые схематично можно представить так:



где S, L, G – твердая, жидкая и газообразная фазы соответственно. Другой пример – это фазовые переходы без изменения агрегатного состояния – переходы между различными структурными модификациями одного и того же соединения (алмаз \leftrightarrow графит, белое олово \leftrightarrow серое олово, α – железо \leftrightarrow β – железо и др.):



В качестве примера наиболее простой химической реакции можно привести реакцию окисления металла:

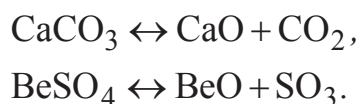


(окисление алюминия, никеля, железа и т.д.). Скорость многих таких реакций лимитируется процессом диффузии, происходящим в плотном слое окисла, покрывающего металл.

Реакции разложения карбоната кальция, сульфатов металлов, которые можно записать как



представляют собой примеры реакций, в которых лимитирующая стадия локализована вблизи поверхности раздела двух тел (фаз, сред). Это реакции типа



Схемой (11.35) в принципе можно описать процессы сушки и дегидратации кристаллогидратов ($\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$, $\text{NiSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$, $\text{CaCO}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, $\text{MnC}_2\text{O}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ и др.), которые с успехом могут быть отнесены и к физическим процессам.

Явления, происходящие на поверхности, ограничивают скорость большинства реакций, относящихся к следующим двум типам:

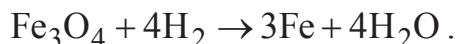




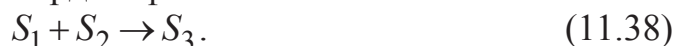
Образование карбоната никеля или его разложение – пример реакции первого типа



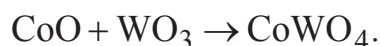
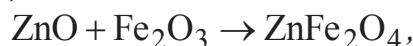
обжиг пирита или восстановление твердых веществ газом – примеры реакций второго типа



Среди реакций простых типов можно еще упомянуть о реакциях, протекающих с участием трех твердых фаз



К этому типу относятся реакции образования силикатов, титанатов, молибдатов различных металлов из окислов металлов и окисла кремния. Эти реакции лимитируются различными диффузионными процессами. Наиболее изучена в этой группе кинетика реакций образования шпинелей (ферритов, хромитов и т.п.), молибдатов и вольфраматов комплексных иодидов, например,



Вообще говоря, образование силиката кальция и подобные реакции идут через образование большого числа промежуточных продуктов.

К реакциям более сложных типов можно отнести реакции двойного разложения в твердой фазе

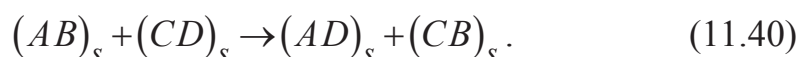


Например,



или реакции, в которых появляется несколько промежуточных продуктов между фазой реагента и фазой конечного продукта. Это – реакция восстановления окисла железа Fe_2O_3 окисью углерода при 1000°C , в ходе которой можно наблюдать между фазой исходного окисла и металлической фазой две различные чередующиеся фазы Fe_3O_4 и FeO .

Реакции двойного твердофазного разложения могут быть схематически представлены немного иначе:



Примерами более сложных реакций могут быть реакции образования двойных соединений с выделением газообразного продукта или реакции разложения, катализируемые твердыми добавками.

Таким образом, число превращений с участием твердых веществ велико, и характер их разнообразен. Их изучают и моделируют во многих научных дисциплинах.

При построении моделей физико-химических превращений с участием твердых веществ во внимание принимают как их макрокинетические проявления, так и процессы, протекающие на микроуровне. Закономерности превращений на микроуровне отражает тот или иной тип кинетических функций или эволюционных уравнений.

В зависимости от целей и характера исследования применяют ту или иную *классификацию твердофазных превращений*. Как и реакции в газах и жидкостях, твердофазные превращения бывают быстрыми и медленными; экзотермическими (идущими с выделением тепла) и эндотермическими (идущими с поглощением тепла); гомогенными (идущие в объеме) и гетерогенными (протекающими на границе раздела веществ); протекающими без изменения химического состава фаз и с изменением химического состава. Первые – это полиморфные превращения, явления упорядочения и разупорядочения твердых растворов; вторые – это собственно химические превращения. Полиморфные превращения в твердых телах часто тоже относят к классу химических реакций, так как они зачастую связаны с деформацией и изменением типов химических связей. Химические реакции с участием твердых веществ могут протекать с образованием твердого раствора и без его образования, с изменением агрегатного состояния и без такого изменения; скорость реакции может лимитироваться чисто кинетическими факторами (т.е. собственно химической стадией) или разного рода процессами переноса. Выше приведены примеры твердофазных процессов в соответствии с классификацией по типу веществ, участвующих в реакции.

Существует целый ряд быстрых реакций с участием твердых веществ с большим экзотермическим эффектом, способных поддерживать самих себя (реакции разложения взрывчатых соединений). Высокой скоростью и способностью самораспространяться обладают и некоторые реакции полимеризации в твердой фазе, связанные со структурными переходами.

Особое место в литературе занимают низкотемпературные радикальные реакции в стеклообразных и поликристаллических матрицах, мартенситные превращения, твердофазная детонация, металлотермические реакции, реакции в ударных волнах, которые представляют значительный интерес для технологий получения и обработки материалов.

Существуют и чисто химические способы классификации твердофазных превращений.

11.5.2. Особенности твердофазных превращений

Что же является общим для всех этих процессов и что отличает их от реакций, протекающих в газах и жидкостях?

Во-первых, это – *локализация реакции на границе раздела фаз*. По этой причине все реакции, протекающие с участием твердых веществ, некоторые авторы называют гетерогенными. При наличии хотя бы одной твердой фазы химическое превращение не может происходить в любой точке пространства, как, например, в случае реакций, протекающих в газовой фазе, где химическое превращение может совершаться в результате случайных столкновений между частицами. Если одна из фаз – твердое вещество, то речь может идти лишь о более или менее протяженной области непосредственно вблизи поверхности твердого тела, в которой атомы или молекулы твердого соединения доступны другим реакционным частицам. Эта ограниченная область твердого тела обладает повышенной реакционной способностью, способствующей *локализации и автолокализации* процесса. Повышенной реакционной способностью могут обладать и участки в объеме твердого тела, находящиеся в окрестности структурных неоднородностей. Процесс формирования *реакционной границы раздела* состоит из целого ряда событий. Кратко это – образование локальных *зародышей продукта*, их рост и слияние. Стадии образования и роста зародышей для различных простейших реакций, их классификация аналогичны подобным стадиям фазовых превращений. Во многих случаях под зоной реакции понимают фронт реакции – «границу раздела» между реагентами и продуктами. Образование фронта реакции в результате слияния зародышей связано с большой реакционной способностью атомов и молекул, находящихся вблизи границы раздела фаз, и с относительной медленностью процесса массопереноса, обеспечивающего подвод реагента (реагентов) к этой границе. Т.е. для многих твердофазных реакций образование фронта не всегда обеспечивается сильной зависимостью скорости химической реакции от температуры (это имеет место в процессах горения, в том числе твердофазного).

Граница раздела «исходное вещество – продукт реакции» имеет как объект исследования самостоятельное значение и является в известном смысле *идеализированным понятием*, допускающим упрощенное математическое описание. Это замечание относится как к собственно химическим превращениям, так и ко многим фазовым переходам. В окрестности этой «границы» могут меняться одновременно несколько параметров, сказывающихся на реакционной способности веществ противоположным образом.

Вторая особенность реакций с участием твердых веществ – это *малая подвижность и пространственная разделенность реагентов или реагента и продукта*. Это обуславливает *важную роль процессов переноса* того или иного типа. Естественно, в зависимости от типа реакции и условий ее осуществления, характер массопереноса различен. Если реагенты и продукт реакции – твердые вещества, то скорость химической реакции зависит от самой медленной ее стадии (диффузии реагентов через слой продукта) и замедляется с увеличением последнего. В то же самое время в условиях высоких давлений и деформации сдвига «медленная диффузия» через слой продукта не является препятствием к осуществлению реакции; здесь за малые времена происходит перемешивание на молекулярном уровне реагентов именно в твердой фазе. Если один из реагентов – газ или жидкость, то скорость реакции, осуществляющейся в этом случае на границе раздела фаз, определяется скоростью наиболее подвижного реагента или скоростью отвода продукта реакции. Скоростью массопереноса в порах и трещинах твердого вещества определяются, например, многие обратимые реакции разложения. Исключительно важная роль процессов переноса проявляется и при протекании реакций в полимерных системах, для которых кинетические особенности диффузии существенно зависят от того, в каком состоянии находится полимер – высокоэластическом, вязком, стеклообразном или кристаллическом. Процессы переноса играют определяющую роль при окислении металлов; при твердофазном синтезе сложных соединений из более простых; при зародышеобразовании в начальной стадии твердофазной реакции. «Массоперенос» – это перенос не только реагентов или продуктов реакции, но и перемещение примесей, движение дислокаций, вакансий и пор. Вообще говоря, исключение процессов переноса из явного рассмотрения приводит или может привести к неверной трактовке смысла формально-кинетических параметров реакций и искажению физических закономерностей.

Третьей важной особенностью твердофазных превращений является *наличие сложных обратных связей* между физико-химическим превращением и различными физическими явлениями, их сопровождающими.

Какие физические процессы сопровождают химические превращения с участием твердых веществ или являются полноправными «элементарными» стадиями химических процессов? Это – возникновение дефектов, разрыхление кристаллических решеток; их перестройка вследствие полиморфных превращений; образование и распад твердых растворов; спекание, «отдых» рекристаллизация; плавление; растворе-

ние компонентов в расплаве; кристаллизация из жидкой фазы; возгонка; диссоциация и др..

На реакционную способность твердых тел оказывают влияние, кроме температуры, механические напряжения в образце (внешние, внутренние), диффузия (внешняя, внутренняя, поверхностная), условия в окружающей среде, напряженность электрического поля, структурные особенности. В твердом веществе все эти факторы взаимосвязаны и способны влиять на химическую реакцию как прямо, так и косвенно.

Так, с изменением температуры тела изменяется его структура (в результате фазовых превращений); меняется концентрация и подвижность дефектов кристаллической решетки (происходит их генерация или отжиг); появляются или релаксируют температурные напряжения.

Механические напряжения (любой природы), в свою очередь, способны влиять на химическую реакцию по различным каналам: через изменение структуры вещества; электронного строения; подвижности дефектов или других частиц; температуры; концентрации дислокаций, вакансий; размеров реагирующих частиц; наличие активных поверхностей.

Сложный характер твердофазного взаимодействия отражается на кинетических кривых. Для твердофазных превращений кинетические кривые удобно представлять в виде

$$\alpha = f(t), \quad (11.41)$$

где α – степень превращения, $\alpha = n/n_0$, n – число молей реагента в текущий момент времени, n_0 – в начальный.

Если концентрация вещества при фиксированных давлении и температуре однозначно характеризует систему, то степень превращения не является однозначной характеристикой гетерофазной системы даже при фиксированных параметрах состояния. Одна и та же степень превращения может быть реализована в разнообразных системах одинакового состава, отличающихся структурой реакционной зоны.

Для твердофазных реакций типичен сигмоидный характер кривых (11.41) (рис. 11.6). В начале процесса скорость реакции мала, наблюдается так называемый индукционный период. Затем скорость реакции резко возрастает, проходит через максимум (которому соответствует перегиб на кривой $\alpha = f(t)$) и далее снижается до нуля. Разумеется, форма кинетической кривой связана с последовательностью и характером процессов, составляющих твердофазную реакцию.

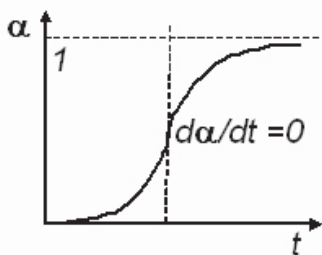


Рис. 11.6. Кинетическая кривая, типичная для твердофазных реакций

Наблюдаемая кинетическая кривая содержит информацию о совокупности процессов различного типа, для описания которых требуются различные модели. Ряд таких моделей обсуждался и обсуждается в многочисленной литературе по кинетике твердофазных реакций. Особое место занимают модели образования и роста ядер фазы твердого продукта. В этом случае часто говорят о топохимических реакциях – реакциях, скорость которых в существенной степени зависит от структурных и геометрических характеристик реагента.

11.6. Кинетическое описание твердофазных превращений³¹

Раздел теории кинетики топохимических реакций дает основу для интерпретации и расчета особенностей изменения во времени наблюдаемой скорости реакции. Остановимся лишь на описании кинетики образования ядер для реакций на границе раздела «газ – твердое тело». Принципы построения моделей для других систем остаются теми же.

Пусть на исходной поверхности кристалла S имеется Z_0 потенциальных центров ядрообразования, концентрация которых меняется только за счет процесса образования ядер. Тогда скорость образования ядер определится так

$$\frac{dN}{dt} = W'S \left(Z_0 - \frac{N}{S} \right),$$

где W' – удельная скорость образования ядер (в расчете на один центр), зависящая от концентрации газообразного реагента при концентрации потенциальных центров Z_0 .

В начальный момент времени имеем

$$t = 0: N = 0.$$

После интегрирования найдем

$$N = Z_0 S [1 - \exp(-W't)]$$

³¹ Розовский А.Я. Гетерогенные химические реакции. Кинетика и макрокинетика. М.: Наука, 1980. 324 с.

и

$$\frac{dN}{dt} = W'Z_0S[1 - \exp(-W't)]. \quad (11.42)$$

Удельную скорость образования ядер обычно называют константой скорости образования зародышей (ядер) и приписывают ей соответствующий физический смысл. Уравнение (11.42) называют экспоненциальным законом образования ядер. При выводе этого уравнения предполагалось, что $W' = \text{const}$. Кроме того, уравнение имеет смысл при постоянстве температуры и концентрации реагентов. Т.е., условием применимости (11.42) является проведение реакции в системе, открытой для газообразного реагента, и изотермической. Кроме того, требуется предполагать квазистационарность системы.

При выводе предполагалось, что нет воспроизводства потенциальных центров ядрообразования в ходе реакции. В действительности это – не всегда так. Например, в радиационно-химических процессах потенциальные центры могут появляться в ходе реакции. Чтобы учесть этот процесс, можно предположить, что 1) скорость процесса воспроизводства центров постоянна

$$W_z = W''S, \quad (11.43)$$

2) скорость процесса, воспроизводящего потенциальные центры ядрообразования, пропорциональна разности между равновесной Z_e и текущей Z концентрациями потенциальных центров

$$W_z = W''(Z_e - Z)S. \quad (11.44)$$

Для модели 1) к произвольному моменту времени t количество потенциальных центров на единице поверхности будет равно сумме исходного их количества Z_0 и количества вновь возникших центров $W''t$ за вычетом центров, израсходованных на образование уже возникших к этому моменту ядер фазы твердого продукта

$$Z = Z_0 - \frac{N}{S} + W''t.$$

Тогда в рамках этой модели скорость образования ядер будут подчиняться уравнению

$$\frac{dN}{dt} = W'S \left(Z_0 - \frac{N}{S} + W''t \right). \quad (11.45)$$

Начальное условие останется тем же.

Решение этого уравнения с учетом начальных условий имеет вид (решение может быть получено, например, с использованием операционного метода)

$$N = Z_0 S - \frac{W''}{W'} S + W'' S t - S \left(Z_0 - \frac{W''}{W'} \right) \exp(-W' t).$$

Дифференцируя это уравнение по времени, найдем уравнение для скорости образования ядер твердого продукта

$$\frac{dN}{dt} = W'' S + S (W' Z_0 - W'') \exp(-W' t). \quad (11.46)$$

Это уравнение по своему внешнему виду отличается от (11.42) только наличием свободного члена, который будет слабо влиять на закономерности при малых временах. Следовательно, в экспериментах зависимость (11.46) может восприниматься как (11.42), где воспроизводство центров не учитывается. Физический смысл коэффициентов в этих моделях – различен. Например, величина W'' , в отличие от W' , может зависеть от дозы облучения, но может не зависеть от концентрации компонентов реакционной смеси.

Во втором случае центры расходятся на образование ядер в соответствии с законом

$$\frac{dN}{dt} = W' S Z, \quad (11.47)$$

а воспроизводятся по закону (11.44). Следовательно, число центров ядрообразования в произвольный момент времени будет подчиняться уравнению

$$-\frac{dZ}{dt} = W'' (Z_e - Z) - W' Z$$

с начальным условием $t = 0: Z = Z_e$.

Интегрируя последнее уравнение и подставляя полученное значение Z в (11.47), получим уравнение для скорости образования ядер в рамках модели 2) в виде

$$\frac{dN}{dt} = \frac{W'}{W' + W''} Z_e S \{ W' \exp[-(W' + W'') t] + W'' \}. \quad (11.48)$$

Несложно показать, что уравнение (11.48) ведет себя аналогично уравнению (11.46): при малых t обращается в уравнение (11.42), а при больших t дает существенно большие значения скорости образования ядер, чем уравнение (11.42).

Таким образом, рассмотренные усложнения модели приводят к отклонению наблюдаемой скорости образования ядер фазы твердого продукта от экспоненциального закона при больших временах, хотя на ранних стадиях реакции простейшее уравнение остается хорошим приближением. Существенное влияние на наблюдаемую скорость реакции может оказать поглощение растущими ядрами как потенциальных центров зародышеобразования, так и слияние зародышей. Учет перекрывания ядер приводит к резкому усложнению математической стороны задачи, хотя этот механизм понятен с физической точки зрения.

Вторым основным уравнением кинетики образования ядер фазы твердого продукта является «степенной закон», имеющий вид

$$\frac{dN}{dt} = at^b. \quad (11.49)$$

Различные обоснования этого уравнения включают допущения об образовании ядра фазы твердого продукта в результате нескольких параллельных или последовательных актов реакции. Соображения, аналогичные тем, которые высказаны при обсуждении экспоненциального закона, чаще всего приводят к тому, что уравнение (11.49) чаще рассматривается как удачная аппроксимация экспериментально наблюдаемых закономерностей.

В целом, наблюдаемая кинетика твердофазных реакций определяется возникновением и ростом ядер фазы твердого продукта. Для того чтобы вывести суммарное уравнение кинетики для топохимических реакций, учтем, что за время от τ до $\tau + \Delta\tau$ образуется

$$\Delta N = \frac{dN}{d\tau} \Delta\tau$$

ядер фазы твердого продукта.

Если W' – скорость реакции для отдельного ядра, то к моменту времени t время жизни этого ядра составит $t - \tau$. Тогда для всей рассматриваемой фракции ядер к моменту t наблюдаемая скорость реакции будет

$$\Delta W = W'(t, \tau) \frac{dN(\tau)}{d\tau} \Delta\tau. \quad (11.50)$$

Так как скорость реакции пропорциональна поверхности раздела фаз, а последняя увеличивается по мере роста ядер, наблюдаемая скорость реакции для каждого ядра определится его размерами или, в конечном счете, его временем жизни, что и фиксирует уравнение (11.50).

Просуммировав уравнения (11.50) для всех ядер и переходя к пределу, найдем

$$W = \int_0^t W'(t, \tau) \frac{dN(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (11.51)$$

Это уравнение и является основным уравнением кинетики топохимических реакций.

Для того чтобы выразить наблюдаемую скорость реакции как функцию времени, нужно знать или постулировать вид зависимости от времени W' и dN/dt . Скорость роста отдельного ядра определяется особенностями системы, а связь скорости роста с наблюдаемой скоростью реакции зависит еще и от формы ядра (так как скорость реакции пропорциональна площади поверхности). Имеющиеся экспериментальные данные свидетельствуют, что, за исключением краткого начального периода, скорость линейного роста ядер постоянна. Следовательно, в зависимости от формы ядер легко выразить W' как ту или иную функцию времени. Различные варианты моделей можно найти в литературе, в том числе, представленной в конце пособия.

Уравнение, аналогичное (11.51), можно записать и для объема прореагировавшего вещества

$$V(t) = \int_0^t V'(t, \tau) \frac{dN(\tau)}{d\tau} d\tau.$$

11.7. Диффузионная кинетика

11.7.1. Общие представления о диффузии

В гетерогенной системе химическая реакция может быть локализована в одной или нескольких фазах и на поверхностях раздела фаз. В соответствии с этим возникают разные задачи диффузионной кинетики, особенности которых определяются местом локализации реакции и механизмами диффузии в различных фазах.

Наиболее быстро диффузия протекает в газах. Если бы диффузия в газах определялась только тепловым движением молекул, то она протекала бы практически мгновенно. Вследствие столкновения друг с другом молекулы совершают значительно больший путь, чем расстояние между двумя точками.

В жидкостях диффузия идет существенно медленнее. Сущность диффузионного механизма переноса в жидкостях сводится к тому, что молекула вырывается из окружения одними частицами и скачком переходит в окружение других.

Особенно медленно диффузия протекает в твердых телах.

Как правило, выделяют два основных механизма диффузии: вакансионный, когда атомы перемещаются только по вакантным узлам кристаллической решетки, и механизм внедрения, когда атомы перемещаются по междоузлиям. Первый механизм свойственен диффузии металлов друг в друге, размеры атомов которых сравнимы. Второй механизм более свойственен диффузии газов в металлах.

В целом, физика процессов диффузии является самостоятельным разделом физики твердого тела. Теория диффузии в твердых средах основана на фундаментальных представлениях физической кинетики и неравновесной термодинамики и тесно связана с теориями дефектов структуры.

В случае поликристаллических и многофазных материалов, кроме объемной диффузии, выделяют диффузию по границам зерен и фаз. Вследствие особого характера границ, их энергетических характеристик и особой структуры вещества в их окрестности, диффузия вдоль границ раздела представляет самостоятельный интерес.

Наиболее общим законом диффузии тел различной природы является экспериментальный закон Фика

$$\mathbf{J} = -\rho D \text{grad } C, \quad (11.52)$$

в соответствии с которым поток массы компонента пропорционален градиенту его концентрации. Мы можем определить и диффузионный поток компонента

$$\mathbf{j} = -D \text{grad } C.$$

Первая величина измеряется в $\text{кг}/(\text{м}^2\text{с})$ или в $\text{г}/(\text{см}^2\text{с})$. Вторая – в $\text{см}/\text{с}$.

В обоих равенствах C – массовая концентрация компонента (см. раздел 11.1), а D – коэффициент диффузии, $\text{м}^2/\text{с}$ или $\text{см}^2/\text{с}$.

Коэффициент диффузии зависит от температуры в соответствии с законом Аррениуса

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{E_D}{RT}\right),$$

подобным закону Аррениуса для скорости химической реакции (E_D – энергия активации диффузии, D_0 – предэкспонент).

Аналогичные соотношения мы можем записать, выражая количество вещества в системе с помощью иных единиц измерения.

Закон Фика (11.52) внешне очень напоминает закон Фурье: процессы диффузии и теплопроводности описываются подобными законами. Подобными же оказываются дифференциальные уравнения, требующиеся для описания этих процессов.

Так, уравнение диффузии в неподвижной среде имеет вид

$$\rho \frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div} (D\rho \operatorname{grad} T) + \sigma',$$

где σ' - сумма источников и стоков компонента в объеме, например, вследствие химических реакций.

Если плотность вещества не изменяется, запишем

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div} (D \operatorname{grad} T) + \sigma, \quad \sigma = \frac{\sigma'}{\rho},$$

или в декартовой системе координат

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial C}{\partial z} \right) + \sigma.$$

Это уравнение внешне нам тоже уже известно.

Одномерное уравнение диффузии при условии постоянства коэффициента диффузии (например, в изотермических условиях) имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \sigma. \quad (11.53)$$

Аналогом коэффициента диффузии в теории теплопроводности является коэффициент температуропроводности (раздел 2.7.)

$$a = \frac{\lambda}{c\rho}.$$

Для газов в обычных условиях типично

$$Le = \frac{D}{a} \sim 1.$$

А вот для твердых тел отношение коэффициентов диффузии и температуропроводности $Le \ll 1$. Эта величина носит название *числа Льюиса*.

При описании диффузионных процессов, кроме числа Льюиса, большое значение имеют такие числа подобия как *число Шервуда* или диффузионное число Нуссельта

$$Sh \equiv Nu_D = \frac{\beta d}{D},$$

где d - характерный линейный размер, β - коэффициент массоотдачи в соотношении

$$\mathbf{j} = \beta \Delta C,$$

аналогичном закону теплообмена Ньютона–Рихмана (см. Часть 3) ΔC – разность концентраций; *критерий Шмидта* (аналог числа Прандтля для процессов теплообмена)

$$Sc = \frac{\nu}{D},$$

где ν – коэффициент кинематической вязкости. Вид зависимости

$$St = St(Re, Sc)$$

устанавливается на основе анализа данных эксперимента или решения частных задач массообмена.

Кроме закона (11.52), в теории многокомпонентной диффузии большое значение имеет так называемый обобщенный закон Фика, который можно представить следующим образом

$$\mathbf{j}_i = - \sum_{j=1}^{n-1} D_{ij} \text{grad } T_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11.54)$$

где n – число компонентов многокомпонентной системы (независимы из которых только $n - 1$, см. раздел 11.1), D_{ij} – парциальные коэффициенты диффузии. В теории диффузии показывается, что из n диффузионных потоков независимы также только $n - 1$ поток.

Уравнение (11.54) говорит, что поток каждого компонента пропорционален градиентам концентраций всех независимых компонентов.

Известны и более сложные механизмы переноса массы (термодиффузия, бародиффузия, диффузия под действием градиента напряжений, конвективный массоперенос).

11.7.2. Роль диффузии в некоторых физико-химических процессах

Большинство процессов в конденсированных системах являются гетерогенными, т.е. происходят в различных соприкасающихся фазах, отделенных друг от друга поверхностью раздела. Химические и фазовые превращения в таких системах неизбежно связаны с диффузией или иными механизмами массопереноса. Примерами таких процессов могут быть восстановление твердых окислов углеродом, перераспределение элементов между металлом и шлаком, растворение и выделение газов из металла и шлака, растворение твердых тел в жидкостях, превращения в металлах и сплавах, сопровождающиеся диффузионным переносом вещества, процессы химико-термической обработки, рекристаллизации и т.д. Всюду диффузия является одной из стадий гетерогенного процесса.

Так, металлический лом в настоящее время составляет большую часть металлической шихты, используемой в сталеплавильном производстве. Процесс плавления скрапа составляет значительную часть общего времени плавки. Механизм процесса достаточно сложен, так как течение его определяется совокупностью тепловых и диффузионных явлений и зависит от большого числа параметров. Можно принять, что плавление стали в расплавленном чугуна, температура которого ниже температуры плавления стали, включает три стадии: диффузионный перенос углерода через пограничный слой из расплава к поверхности раздела фаз чугуна – сталь; насыщение углеродом поверхностного слоя стали и теплообмен между расплавом и твердой фазой. Диффузия углерода является необходимым звеном процесса, так как увеличение концентрации углерода в стали понижает температуру ее плавления, и скорость диффузионного переноса в основном определяет скорость процесса.

Свойства металлов при повышенных температурах ($T \geq T_s$, T_s – температура плавления) существенно определяются стабильностью их структуры. Последняя, в свою очередь, зависит от скорости диффузионного перемещения атомов: с повышением температуры роль диффузионных процессов возрастает по сравнению со всеми другими механизмами структурообразования и пластической деформации.

Процессы диффузионного роста частиц определяют кинетику распада пересыщенных твердых растворов на первой стадии, когда пересыщение велико, и, наряду с ростом ранее возникших зародышей, продолжается флуктуационное образование зародышей частиц новой фазы в различных точках раствора. На стадии, когда частицы возникшей фазы достаточно велики, пересыщение мало, новые частицы уже не образуются, скорость процесса распада раствора определяется коагуляцией частиц новой фазы, также лимитируемой диффузией.

Диффузия определяет скорость процесса ползучести на ее установившейся стадии, когда энергия активации ползучести близка к энергии активации диффузии.

Процесс спекания (уплотнения пористого тела в области высоких температур) является сложным технологическим процессом, включающим в себя различные физико-химические стадии, немалую роль в которых играет диффузия и процессы на границах раздела.

Процессом диффузии и сопутствующими явлениями (адсорбцией, объемными реакциями и др.) в значительной степени определяется реальное распределение элементов, химических соединений и фаз, обес-

печивающих то или иное распределение физических свойств сложных материалов, при обработке поверхностей и нанесении покрытий.

Роль диффузии и ее механизмы в условиях обработки и получения материалов весьма разнообразны.

Несмотря на сложность и взаимообусловленность различных физико-химических процессов, наблюдающихся при химико-термической обработке поверхностей и нанесении покрытий, качественное представление о роли диффузионных процессов в поверхностном слое можно получить на основе достаточно простых моделей, в которых анализируются различные физические ситуации.

11.7.3. Макрокинетические области протекания гетерогенного процесса

Характерной особенностью гетерогенных процессов является их многостадийность. Наиболее типична ситуация, когда гетерогенный процесс в двух соприкасающихся фазах включает три стадии: диффузионный подвод вещества к границе раздела фаз, химическую реакцию (или адсорбцию) на границе раздела и отвод продуктов превращения (тоже, как правило, диффузионный).

Если процесс протекает в несколько последовательных стадий, то суммарная скорость процесса определяется его медленной стадией, которая является *контролирующей*.

Пусть в области $x < 0$ (внешней области) осуществляется диффузионный подвод вещества к поверхности $x = 0$, на которой происходит химическая реакция первого порядка. Тогда при $x < 0$ справедливо уравнение

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (11.55)$$

где D_1 – коэффициент диффузии во внешней области.

Примем, что в слое толщиной Δ , прилегающем к поверхности $x = 0$, установилось стационарное состояние, причем

$$\begin{aligned} C(-\Delta, t) &= C_0, \\ C(0, t) &= C'. \end{aligned}$$

На поверхности $x = 0$ происходит химическая реакция первого порядка со скоростью $\varphi = kC'$.

В стационарном состоянии все количество вещества, приходящее в единицу объема к поверхности $x = 0$ в единицу времени полностью тратится в реакции, что отражает равенство

$$kC' = \beta(C_0 - C'), \quad (11.56)$$

где β $C(0,t) = C'$ коэффициент массоотдачи, величина которого определяется величиной коэффициента диффузии D_1 . Из уравнения (11.56) следует значение концентрации на поверхности

$$C' = \frac{\beta C_0}{k + \beta}. \quad (11.57)$$

Тогда скорость гетерогенного процесса есть

$$\varphi = \frac{\beta k C_0}{k + \beta}. \quad (11.58)$$

Процесс может протекать по-разному в зависимости от того, какая стадия является медленной.

Если медленным является подвод вещества к поверхности $x = 0$, то

$$\beta \ll k, \quad C' \ll C_0 \quad \text{и} \quad \varphi = \beta C_0,$$

т.е. скорость суммарного процесса определяется коэффициентом массоотдачи или коэффициентом внешней диффузии. Говорят, что *процесс контролируется внешней диффузией* или находится во внешне-диффузионной области.

Если медленной является химическая реакция на поверхности, то

$$\beta \gg k, \quad C' \approx C_0 \quad \text{и} \quad \varphi = k C_0,$$

т.е. скорость суммарного процесса определяется скоростью химической реакции. Говорят, что *процесс находится в кинетической области*.

Изменим задачу, добавив диффузию во внутренней области ($x > 0$) с коэффициентом диффузии D , причем примем, что реакция может происходить во всей внутренней области, а не только на поверхности раздела. Следовательно, реакция и диффузия во внутренней области происходят параллельно, а в *случае параллельных процессов суммарная скорость определяется быстрой стадией*. По отношению к внешней диффузии оба процесса являются последовательными.

С учетом химической реакции уравнение, описывающее изменение концентрации во внутренней области, имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + kC.$$

Решение этого уравнения для стационарного состояния $\left(\frac{\partial C}{\partial t} = 0\right)$ с учетом условий $C(\infty, t) = 0$ и $C(0, t) = C'$ есть

$$C = C' \exp\left(-\sqrt{\frac{k}{D}}x\right). \quad (11.59)$$

Обычно за глубину диффузии δ принимают расстояние, на котором концентрация уменьшается в e раз. Поэтому при одновременном протекании диффузии и химической реакции имеем

$$\delta = \sqrt{D/k}.$$

Суммарная скорость процесса определяется потоком через единицу поверхности

$$\mathbf{j}_{x=0} = -D \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=0} = C' \sqrt{Dk} = C' \frac{D}{\delta}. \quad (11.60)$$

Следовательно, эффективный коэффициент k_{eff} , характеризующий скорость процесса по уравнению $\varphi = kC'$, есть

$$k_{eff} = \sqrt{Dk} = D/\delta, \quad (11.61)$$

а эффективная энергия активации равна полусумме энергий активации диффузии во внутренней области E_D и энергии активации химической реакции E_a .

Приравнивая поток (11.60) потоку из внешней области (т.е. полагая, что сколько вещества подводится к поверхности $x = 0$, столько же перерабатывается во внутренней области), найдем

$$\beta \Delta (C_0 - C') = C' \sqrt{Dk}.$$

Тогда, концентрация на поверхности раздела следует из соотношения

$$C' = \frac{\beta \Delta C_0}{\beta \Delta + \sqrt{Dk}}, \quad (11.62)$$

а поток через поверхность раздела, характеризующий суммарную скорость процесса следует из (11.60)

$$\mathbf{j}_{x=0} = C' \sqrt{Dk} = \frac{\beta \Delta C_0 \sqrt{Dk}}{\beta \Delta + \sqrt{Dk}}. \quad (11.63)$$

Отсюда находим эффективный коэффициент диффузии

$$D_{eff} = \frac{\sqrt{Dk}\beta\Delta}{\sqrt{Dk} + \beta\Delta} \equiv \frac{D\beta\Delta\delta}{D + \beta\Delta\delta}. \quad (11.64)$$

Качественное распределение концентрации, характерное для стационарного гетерогенного процесса, показано на рис. 11.7.

Процесс опять протекает по-разному в зависимости от того, какая стадия является медленной.

Если медленным является подвод вещества к границе раздела, то процесс контролирует внешняя диффузия. В этом случае имеем

$$\beta\Delta \ll \sqrt{Dk}, \quad C' \ll C_0,$$

$$j_{x=0} = \beta\Delta C_0.$$

Если медленным является процесс во внутренней области, то справедлива оценка

$$\beta\Delta \gg \sqrt{Dk} \quad \text{или} \quad \beta\Delta\delta \gg D,$$

тогда

$$C' \approx C_0, \quad j_{x=0} = C_0\sqrt{Dk} = C_0D/\delta.$$

Здесь важно соотношение между константами внутренней диффузии и реакции. Введем характерный геометрический размер для внутренней области. Это может быть, например, размер зерна d . Если $k \ll D/d^2$, т.е. медленной является химическая реакция, то $\delta \sim d$ и в зерне практически отсутствует градиент концентрации. Напротив, если $k \gg D/d^2$, то $\delta \ll d$ и химическая реакция «поедает» все вещество практически на поверхности.

Таким образом, при протекании гетерогенного процесса в несколько последовательных стадий диффузия является контролирующей стадией, если ее скорость мала, а в несколько параллельных стадий, – если ее скорость велика.

При сопоставимых скоростях отдельных стадий суммарная скорость процесса зависит от всех составляющих.

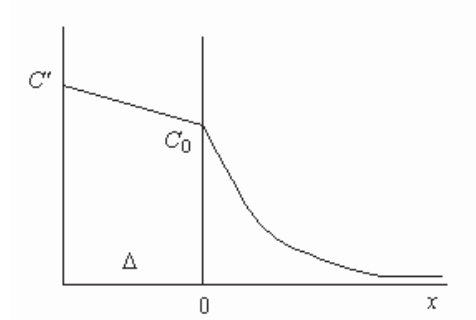


Рис. 11.7. Распределение концентрации в стационарном гетерогенном процессе

11.8. Химические источники энергии в уравнении теплопроводности³²

Уравнение теплопроводности с химическими источниками тепла выводится аналогично разделам 2.6. и 3.2 и для невязкого несжимаемого газа или несжимаемой невязкой жидкости имеет вид

$$\rho c_\gamma \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T - \rho \sum_{k=1}^n h_k \frac{dC_k}{dt}, \quad (11.65)$$

где

$$\frac{d\dots}{dt} = \frac{\partial \dots}{\partial t} + u \frac{\partial \dots}{\partial x} + v \frac{\partial \dots}{\partial y} + w \frac{\partial \dots}{\partial z},$$

а h_k – парциальные энтальпии компонентов, участвующих в реакциях

$$h = \sum_{k=1}^n h_k C_k -$$

энтальпия смеси.

Для каждого компонента смеси имеет место уравнение

$$\rho \frac{dC_k}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_k + \sigma_k, \quad (11.66)$$

где \mathbf{J}_k – диффузионные потоки компонентов, определенные в соответствии с экспериментальными законами (11.51) или (11.54) или с помощью теоретических представлений, основанных, например, на неравновесной термодинамике, а σ_k – сумма источников и стоков компонента k в химических реакциях.

Подставляя (11.66) в (11.65), найдем

$$\rho c_\gamma \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \left[\mathbf{J}_T - \sum_{k=1}^n h_k \mathbf{J}_k \right] - \sum_{k=1}^n h_k \sigma_k$$

Во многих практически важных случаях выражение, стоящее в квадратных скобках, определяют как эффективный поток тепла, включающий в себя перенос тепла диффузией, и удовлетворяющий закону Фурье:

³² Более основательно вопросы, затрагиваемые в этом параграфе, излагаются в специальной литературе. Ссылки на некоторые учебники приведены в списке рекомендованной литературы.

$$\mathbf{J}_T - \sum_{k=1}^n h_k \mathbf{J}_k = \mathbf{J}_T' = -\lambda_T \nabla T.$$

В результате мы приходим к системе уравнения теплопроводности

$$\rho c_\gamma \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T' - \sum_{k=1}^n h_k \sigma_k \quad (11.67)$$

и диффузии (11.67).

При условии, что диффузией и теплопроводностью по сравнению с конвективным переносом можно пренебречь, от (11.66) остается уравнение переноса

$$\rho \left(\frac{\partial C_k}{\partial t} + u \frac{\partial C_k}{\partial x} + v \frac{\partial C_k}{\partial y} + w \frac{\partial C_k}{\partial z} \right) = \sigma_k,$$

а вместо уравнения теплопроводности – уравнение теплового баланса

$$\rho c_\gamma \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \sum_{k=1}^n h_k \sigma_k.$$

Для твердого тела уравнение теплопроводности тоже упрощается. В случае твердого тела можно пренебречь конвективными слагаемыми в уравнениях (11.66) и (11.67):

$$\rho \frac{\partial C_k}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_k + \sigma_k,$$

$$\rho c_\gamma \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T' - \sum_{k=1}^n h_k \sigma_k.$$

В соответствии с теоретическими представлениями, выражение для суммарного источника компонента k в реакциях, число которых r , можно представить в виде

$$\sigma_k = \sum_{l=1}^r \nu_{kl} m_k \varphi_l \quad (11.68)$$

где ν_{ki} – стехиометрический коэффициент компонента k в реакции i , m_k – молярная масса k -го компонента, φ_i – скорость i -й реакции. Для каждой реакции справедливо стехиометрическое соотношение

$$\sum_{k=1}^n (v_{ki} m_k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (11.69)$$

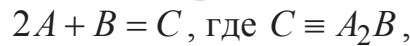
являющееся следствием уравнения реакции.

По определению, стехиометрические коэффициенты считаются положительными (для каждой данной реакции), если они относятся к продуктам, и отрицательными, если они относятся к реагентам.

Если компонент участвует только в одной реакции, то вместо (11.68), (11.69) найдем

$$\sigma_k = v_k m_k \varphi, \quad \sum_{k=1}^n v_k m_k = 0. \quad (11.70)$$

Например, для единственной реакции



имеем

$$v_A = -2; \quad v_B = -1; \quad v_C = 1.$$

В этом случае имеем

$$\sigma_A = -2m_A \varphi, \quad \sigma_B = -m_B \varphi, \quad \sigma_C = m_C \varphi.$$

Теперь можем определить источник тепла в уравнении теплопроводности

$$-\sum_{k=1}^3 h_k \sigma_k = (2m_A h_A + m_B h_B - h_C m_C) \varphi = Q \varphi,$$

где Q – и есть тепловой эффект этой реакции.

Если реакция протекает в газовой или жидкой фазе, то для описания ее скорости можно воспользоваться представлениями формально-кинетической теории, описанной в разделах 11.1–11.3.

Для рассмотренного примера имеем

$$\varphi = k[A]^2[B].$$

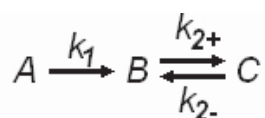
Закономерности реакций с участием твердых веществ много сложнее, и способы их макрокинетического описания требуют отдельного изучения. Например, при описании реакций в твердой фазе часто пренебрегают явлением диффузии в уравнении для компонента и полагают, что диффузия и различные другие сопутствующие явления приводят к изменению закона для скорости реакции: появляются дробные порядки реакции, зависимость скорости реакции от толщины слоя продукта и т.д.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие типы концентрации Вы знаете? Как они между собой связаны?
2. Какие реакции называют гомогенными, а какие гетерогенными?
3. приведите примеры простейших реакционных схем для гомогенных реакций.
4. Как можно определить константу скорости реакции первого порядка?
5. Какие реакции называют каталитическими, а какие - автокаталитическими?
6. В чем заключается квазистационарное приближение?
7. От чего зависит скорость химической реакции?
8. Запишите закон Аррениуса и поясните его физический смысл.
9. В чем заключается различие между теорией столкновений и теорией активированного комплекса?
10. Какие реакции называют твердофазными? В чем заключаются их особенности?
11. Охарактеризуйте особенности кинетического описания топохимических реакций.
12. Что такое «зародыш»?
13. Запишите 2 основных закона кинетики образования ядер фазы твердого продукта.
14. В чем состоит отличие в механизмах диффузии в газах, жидкостях и твердых телах?
15. Сформулируйте закон Фика.
16. Какие числа подобия характерны для массопереноса?
17. Для каких технологических процессов важна диффузия?
18. Что такое «контролирующая стадия процесса»?
19. В чем состоит отличие задач внешней и внутренней диффузии?
20. Как Вы понимаете термины «кинетическая и диффузионная области протекания гетерогенной реакции?»

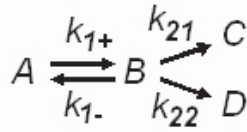
Задания

1. Запишите систему кинетических уравнений для схемы реакций первого порядка



Попытайтесь найти решение полученной системы уравнений аналитически. Перейдя к безразмерным переменным, проиллюстрируйте решение.

2. Выполните аналогичное задание для системы реакций первого порядка



3. Основываясь на аналогии между процессами переноса тепла и массы, сформулируйте задачу о насыщении плоского образца примесью их окружающей среды. Считая, что концентрация примеси в среде неизменна, а образец имеет большие размеры по сравнению с возможной шириной диффузионной зоны, найдите аналитическое решение задачи.

4. Сформулируйте аналогичную задачу о перераспределении примеси между частицей радиуса R_0 и окружающей ее фазой.

Полагая, что в начальный момент времени заданы условия

$$t = 0: C = C_0, r \leq R_0 \text{ и } C = 0, r > R_0,$$

найдите аналитическое решение задачи, пользуясь одним из известных Вам методов.

ЧАСТЬ 12

Разные задачи

12.1. Охлаждение пористой пластины³³

Рассмотрим плоскую не выделяющую тепло пластину с пористостью m и коэффициентом теплопроводности λ_w . Пусть одна из лицевых поверхностей пластины нагрета до температуры T_2 , а охлаждающая жидкость, нагнетаемая сквозь пластину в положительном направлении оси Ox , имеет при $x \rightarrow -\infty$ температуру T_0 (рис. 12.1). Расход жидкости (произведение ее плотности на линейную скорость) есть $G = \rho_L w_L$, кг/(м²с) и считается постоянным. Жидкость имеет теплоемкость c_L и коэффициент теплопроводности λ_L . Если размеры пластины в направлениях осей Oy, Oz велики, температурное поле внутри нее можно считать одномерным. В установившемся режиме имеем

$$T = T(x).$$

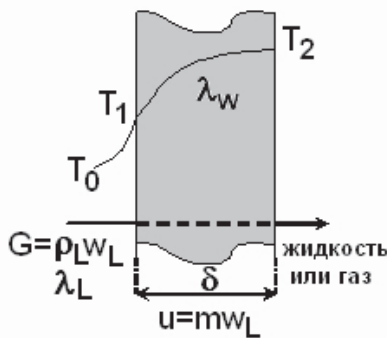


Рис. 12.1. К постановке задачи об охлаждении пористой пластины

Пористость пластины определяют как отношение объема, занятого пора́ми, ко всему объему материала, $m = V_p/V$. Жидкость, протекающую через сечение такого материала, можно характеризовать двумя скоростями – истинной скоростью w и скоростью фильтрации u , которые определяют поток жидкости через пространство, занятое пора́ми, и фиктивный поток,

как бы размазанный по сечению, так что $u = \frac{S_p}{S} w = s w$, где S_p – площадь, занятая в сечении S пора́ми. В изотропном материале (т.е. в материале с одинаковыми свойствами по всем направлениям) $s = m$, что мы далее и будем предполагать.

Перенос тепла в таком теле можно определить как сумму двух составляющих – перенос тепла внутри твердого тела теплопроводностью и теплообмен «твердое тело – охлаждающая жидкость». Жидкостью тепло переносится за счет двух механизмов – за счет течения жидкости со

³³ Несколько иной подход к этой проблеме используется в книге Шнейдера П. Инженерные проблемы теплопроводности. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. 480 с.

скоростью W и за счет теплопроводности жидкости. Тогда уравнение теплопроводности для пористого тела в установившемся режиме можно записать следующим образом

$$\lambda_{eff} \frac{d^2 T}{dx^2} - mc_L G \frac{dT}{dx} = 0,$$

где $\lambda_{eff} = \lambda_L m + \lambda_w (1 - m)$, или

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \xi_w \frac{dT}{dx} = 0, \quad (12.1)$$

где $\xi_w = \frac{mc_L G}{\lambda_{eff}} = \frac{C}{\lambda_{eff}}$.

Граничными условиями к уравнению (12.1) будут

$$x = \delta: T = T_2, \quad x = 0: T = T_1.$$

Если температура на поверхности $x = \delta$ задана, то величина температуры T_1 зависит от условий теплообмена на поверхности $x = 0$. В простейшем случае

$$T_1 = T_0.$$

Более корректным с физической точки зрения будет условие, учитывающее нагрев жидкости на входе за счет установившегося в пористой пластине градиента температуры, т.е.

$$w_L c_L \rho_L (T_0 - T) = \lambda_{eff} \frac{dT}{dx}. \quad (12.2)$$

Общее решение уравнения (12.1) имеет вид

$$T = C_1 e^{\xi_w x} + C_2$$

или после определения постоянных интегрирования с использованием граничных условий первого рода –

$$T = T_0 + (T_2 - T_0) \frac{e^{\xi_w x} - 1}{e^{\xi_w \delta} - 1}. \quad (12.3)$$

В случае охлаждения пластины с внутренним источником тепла, распределенным равномерно, уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \xi_w \frac{dT}{dx} + \frac{q_w}{\lambda_{eff}} = 0, \quad (12.4)$$

где q_w – удельная мощность внутренних источников тепла, Дж/(м³с).

Общее решение уравнения (12.4) есть сумма общего решения однородного уравнения (12.1) и частного решения неоднородного уравнения (12.4). Последнее можно представить в виде

$$T_p = \frac{q_w}{\lambda_{eff} \xi_w} x.$$

В том, что оно удовлетворяет уравнению (12.4), можно убедиться непосредственной подстановкой. Следовательно,

$$T = C_1 e^{\xi_w x} + C_2 + Ax, \quad (12.5)$$

где $A = \frac{q_w}{\lambda_{eff} \xi_w} = \frac{q_w}{C}$.

Определяя постоянные интегрирования с помощью граничных условий, найдем

$$T = T_0 + Ax + (T_2 - T_0 - A\delta) \frac{e^{\xi_w x} - 1}{e^{\xi_w \delta} - 1}. \quad (12.6)$$

На рис. 12.2 представлено распределение температуры в пористой пластине для $q_w = 0$ (сплошные линии) и $q_w = 3 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^3$ (пунктирные линии). В расчетах принято $\lambda_{eff} = 10 \text{ Вт/(м К)}$, $T_2 = 1800$, $T_0 = 300 \text{ К}$, $\delta = 0,3 \text{ м}$.

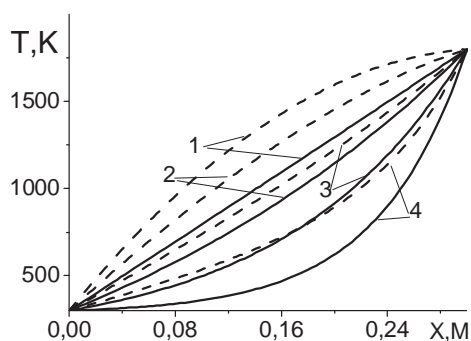


Рис. 12.2. Распределение температуры в пористой пластине. 1 — $C = 1$, 2. — $C = 30$; 3 — $C = 75$; 4 — $C = 150 \text{ Вт/(см}^2 \text{К)}$

12.2. Движущиеся источники тепла³⁴

Задачи нестационарной теплопроводности, когда потоки тепла порождаются движущимися источниками, имеют большое значение при изучении трения-скольжения, во внутренней баллистике, при механической обработке деталей, в ряде процессов обработки металлов высокоэнергетическими источниками, например, в процессах кислородной и лазерной резки, сварки, поверхностной закалки и др.

Еще в первой половине прошлого века при изучении подобных процессов было замечено, что всегда наступает такое состояние, когда

³⁴ Шнейдер П. Инженерные проблемы теплопроводности, пер. с англ. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. 480 с.

наблюдатель, находящийся в лабораторной системе координат, замечает изменение температуры, вызванное движущимся источником, но в то же самое время наблюдатель, находящийся в системе координат, связанной с движущимся источником, не видит никаких изменений температуры. Такое состояние называется квазистационарным.

Его удобно изучать, переходя в систему координат, связанную с источником. Условием квазистационарности в этой новой системе координат будет

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

Действительно, если постоянный поверхностный источник тепла движется с неизменной скоростью в направлении, совпадающим с направлением оси Ox (рис. 12.3), то температура в лабораторной системе координат должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (12.7)$$

Введем новые переменные

$$\xi = x - Vt, \quad t' = t,$$

так что

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -V, \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = 1$$

и

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -V \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial t'}.$$

Следовательно, вместо уравнения (12.7) найдем

$$\frac{\partial T}{\partial t'} - V \frac{\partial T}{\partial \xi} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

или для квазистационарного режима

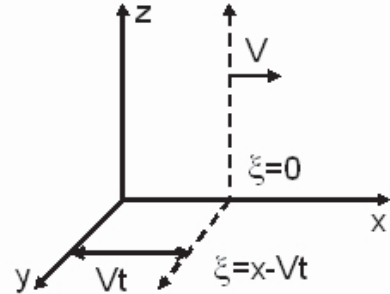


Рис. 12.3. Неподвижная и подвижная системы координат

$$-V \frac{\partial T}{\partial \xi} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (12.8)$$

В качестве примера применения уравнения (12.8) рассмотрим простую задачу.

Пусть через неограниченное твердое тело с начальной температурой T_0 перемещается плоский источник заданной постоянной плотности q_0 . При таких условиях уравнение (12.8) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение.

$$-V \frac{dT}{d\xi} = \kappa \frac{d^2 T}{d\xi^2}, \quad (12.9)$$

общее решение которого хорошо известно

$$T = C_1 \exp\left[-\frac{V}{\kappa} \xi\right] + C_2. \quad (12.10)$$

В качестве граничных условий запишем

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\xi} &= 0 \text{ при } \xi \rightarrow \pm\infty, \\ -\lambda \frac{dT}{d\xi} &= q_0, \quad \xi = 0. \end{aligned}$$

Первое условие говорит о том, что на больших расстояниях от источника температура не изменяется, а второе условие просто устанавливает равенство количества тепла, выделенного источником, и тепла, воспринятого твердым телом от источника при $\xi = 0$ (или $x = Vt$). Слева и справа от источника мы должны записать

$$\begin{aligned} \frac{dT_L}{d\xi} &= -C_{1L} \frac{V}{\kappa} \exp\left[-\frac{V}{\kappa} \xi\right], \\ \frac{dT_R}{d\xi} &= -C_{1R} \frac{V}{\kappa} \exp\left[-\frac{V}{\kappa} \xi\right], \end{aligned}$$

где для удобства введены индексы, соответствующие решению слева (L) и справа R. Отсюда видно, что

$$T_L = C_{2L}, \quad T = C_{1R} \exp\left[-\frac{V}{\kappa} \xi\right] + C_{2R}.$$

Так как справа при $\xi \rightarrow \infty$ температура равна начальной, то $C_{2R} = T_0$. Условие непрерывности температуры при $\xi = 0$ дает

$$C_{2L} = C_{1R} + T_0.$$

Согласно второму граничному условию, имеем

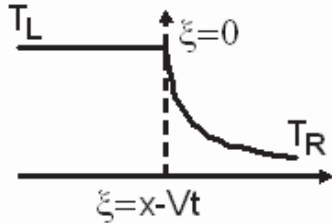


Рис. 12.4. Качественное распределение температуры в окрестности плоского движущегося источника тепла

$$-\lambda \left[-C_{1R} \frac{V}{\kappa} \right] = q_0,$$

откуда $C_{1R} = \frac{\kappa q_0}{\lambda V}$.

Окончательно решение принимает вид

$$T_L = T_0 + \frac{\kappa q_0}{\lambda V}, \quad \xi \leq 0; \quad (12.11)$$

$$T_R = T_0 + \frac{\kappa q_0}{\lambda V} \exp\left(-\frac{V}{\kappa} \xi\right), \quad \xi > 0.$$

Качественное распределение температуры, соответствующее полученному решению, показано на рис. 12.4.

12.3. Электрическое нагревание проволоки

Рассмотрим задачу из раздела 6.2 о нагревании проволоки радиуса R электрическим током. Источник объемного тепловыделения можно представить в виде

$$q_V = \frac{I^2 R_e}{V} = \frac{I^2}{\lambda_e},$$

где λ_e — электропроводность материала проволоки, 1/(Ом см). Плотность тока связана с напряжением U (разностью потенциалов) на концах провода длины L соотношением

$$I = \lambda_e \frac{U}{L},$$

следовательно

$$q_V = \lambda_e \frac{U^2}{L^2}.$$

Поверхность проволоки поддерживается при температуре T_0 , что соответствует идеальному теплообмену между проволокой и окружающей средой.

Известно, что для большинства металлов от температуры зависит не только коэффициент теплопроводности, но и электропроводность. Для небольших перепадов температуры эти зависимости можно представить в виде

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 - \alpha_1 \theta - \alpha_2 \theta^2 - \dots; \quad (12.12)$$

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_{e0}} = 1 - \beta_1 \theta - \beta_2 \theta^2 - \dots,$$

где $\theta = \frac{T - T_0}{T_0}$, а величины с индексом «0» соответствуют начальной температуре T_0 . Так как температурное поле неоднородно, то в установившемся (в стационарном) состоянии коэффициенты теплопроводности и электропроводности меняются от точки к точке. Поэтому зависимости от температуры (12.12) заменим зависимостями от координаты

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 - \alpha_1 \xi - \alpha_2 \xi^2 - \dots;$$

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_{e0}} = 1 - \beta_1 \xi - \beta_2 \xi^2 - \dots,$$

где $\xi = r/R$.

Задача теплопроводности в этом случае принимает вид

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda(r) \frac{dT}{dr} \right) = \lambda_e(r) \frac{U^2}{L^2},$$

$$r = 0: \frac{dT}{dr} = 0,$$

$$r = R: T = T_0$$

или в безразмерных переменных θ, ξ - вид

$$-\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{dT}{d\xi} \right) = B \frac{\lambda_e}{\lambda_{e0}},$$

$$\xi = 0: \frac{d\theta}{d\xi} = 0, \quad (12.13)$$

$$\xi = 1: \theta = 0,$$

где
$$B = \frac{\lambda_{e0} R^2 U^2}{\lambda_0 L^2 T_0}.$$

Если $\alpha_i = 0, \beta_i = 0$, решение этой задачи следует из решения, полученного в разделе 6.2, и в новых переменных имеет вид

$$\theta = \frac{B}{4}(1 - \xi^2). \quad (12.14)$$

Предположим, что в общем случае решение задачи (12.13) можно представить в виде

$$\theta = \frac{B}{4}(1 - \xi^2) \left(1 + B\theta_1 + B^2\theta_2 + \dots \right), \quad (12.15)$$

где θ_n не зависят от B и являются функциями только координаты ξ .

Подставив (12.15) в (12.13) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях B , найдем задачи для определения $\theta_1, \theta_2, \dots$. Решения должны удовлетворять дополнительным условиям: θ_n должны быть конечны при $\xi = 0$ и $\theta_n = 0$ при $\xi = 1$.

Результат имеет вид

$$\theta = \frac{B}{4}(1 - \xi^2) \left\{ 1 + B \left[\frac{\alpha_1}{8}(1 - \xi^2) - \frac{\beta_1}{16}(3 - \xi^2) \right] + O(B^2) + \dots \right\}. \quad (12.16)$$

Из рис. 12.5 видно, что если коэффициент теплопроводности быстрее уменьшается с температурой, чем сопротивление проволоки, то температура (кривая 2) превышает ту, которая могла бы быть в противоположной ситуации (кривая 3).

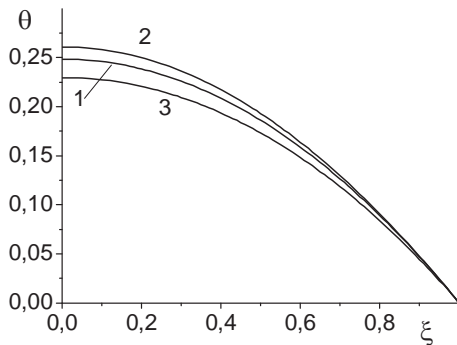


Рис. 12.5. Распределение температуры в проволоке, нагреваемой электрическим током (формула (12.16)); $B = 1$;
 1 — $\alpha_1 = \beta_1 = 0,1$; 2 — $\alpha_1 = 0,5$; $\beta_1 = 0,1$;
 3 — $\alpha_1 = 0,1$; $\beta_1 = 0,5$.

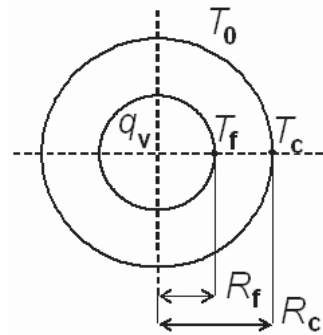


Рис. 12.6. Тепловыделяющий элемент

12.4. Ядерный тепловыделяющий элемент³⁵

Рассмотрим ядерный тепловыделяющий элемент сферической формы (рис. 12.6). Этот элемент представляет собой шарообразный сплошной кусок делящегося материала радиусом R_f , окруженный сферической оболочкой из алюминия радиуса R_c . Внутри тепловыделяющего элемента образуются осколки деления, обладающие очень большой кинетической энергией. В результате столкновения между этими осколками и атомами делящегося материала в реакторе выделяется очень большое количество тепловой энергии. Интенсивность источника тепла распределена по объему сферы неравномерно. Для простоты примем, что q_V является радиальной функцией координаты

$$q_V = q_{V0} \left[1 - b \left(\frac{r}{R_f} \right)^2 \right], \quad (12.17)$$

где q_{V0} - объемная скорость тепловыделения в центре сферы, b - безразмерный параметр, $0 \leq b < 1$.

Требуется найти стационарное распределение температуры в системе при условии идеального теплового контакта между элементом и оболочкой и при заданной на поверхности оболочки температуре T_0 .

Математическая постановка задачи в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 q_{rf}) + q_V(r) = 0, \quad 0 < r \leq R_f;$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 q_{rC}) = 0, \quad R_f \leq r \leq R_c;$$

$$q_{rf} < 0, \quad r = 0;$$

$$q_{rf} = q_{rC}, \quad T_f = T_c, \quad r = R_f; \quad (12.18)$$

$$T = T_0, \quad r = R_c.$$

где $q_{rf} = -\lambda_f \frac{dT_f}{dr}$, $q_{rC} = -\lambda_c \frac{dT_c}{dr}$.

Интегрирование дает

$$q_{rf} = q_{V0} \left[\frac{r}{3} - \frac{b}{R_f^2} \frac{r^3}{5} \right] + \frac{C_{1f}}{r^2},$$

³⁵ Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М.: Химия, 1974. 688 с.

$$q_{rC} = \frac{C_{1C}}{r^2}.$$

Используя условия для потоков, найдем

$$q_{rf} = -\lambda_f \frac{dT_f}{dr} = q_{V0} \left[\frac{r}{3} - \frac{b}{R_f^2} \frac{r^3}{5} \right],$$

$$q_{rC} = -\lambda_C \frac{dT_C}{dr} = q_{V0} R_f^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{b}{5} \right) \frac{1}{r^2}.$$

Эти выражения описывают распределение тепловых потоков внутри сферического тепловыделяющего элемента и в окружающей этот элемент оболочке. При постоянных значениях λ_f и λ_C последние уравнения легко интегрируются.

$$T_f = -\frac{q_{V0}}{\lambda_f} \left[\frac{r^2}{6} - \frac{b}{R_f^2} \frac{r^4}{20} \right] + C_{2f},$$

$$T_C = \frac{q_{V0}}{\lambda_C} R_f^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{b}{5} \right) \frac{1}{r} + C_{2C}.$$

Постоянные интегрирования находим из условий для температуры. Окончательное решение принимает вид

$$T_f - T_0 = \frac{q_{V0} R_f^2}{6\lambda_f} \left[\left(1 - \frac{r^2}{R_f^2} \right) + \frac{3b}{10} \left(1 - \frac{r^4}{R_f^4} \right) \right] + \frac{q_{V0} R_f^2}{3\lambda_C} \left(1 - \frac{3}{5} b \right) \left(1 - \frac{R_f}{R_C} \right),$$

$$T_C - T_0 = \frac{q_{V0} R_f^2}{3\lambda_C} \left(1 - \frac{3}{5} b \right) \left(\frac{R_f}{r} - \frac{R_f}{R_C} \right).$$

При $r = 0$ найдем максимальное значение температуры в центре тепловыделяющего элемента:

$$T_{max} - T_0 = \frac{q_{V0} R_f^2}{6\lambda_f} \left(1 + \frac{3b}{10} \right) + \frac{q_{V0} R_f^2}{3\lambda_C} \left(1 - \frac{3}{5} b \right) \left(1 - \frac{R_f}{R_C} \right).$$

Эту формулу можем представить в виде

$$\theta_{max} = \frac{T_{max} - T_0}{q_{V0} R_f^2 / 6\lambda_f} = \left(1 + \frac{3b}{10} \right) + 2 \frac{\lambda_f}{\lambda_C} \left(1 - \frac{3}{5} b \right) \left(1 - \frac{R_f}{R_C} \right). \quad (12.19)$$

Величина максимальной температуры зависит от трех безразмерных параметров: отношения радиусов тепловыделяющего элемента и его оболочки; отношения их коэффициентов теплопроводности и параметра b , характеризующего распределение плотности объемного тепловыделения.

12.5. Теплообмен при наличии вязкого источника тепла³⁶

Рассмотрим течение несжимаемой жидкости в пространстве между двумя коаксиальными цилиндрами (рис. 12.7). При сообщении внешнему цилиндру вращательного движения в жидкости возникают силы трения, которые действуют между каждой парой смежных цилиндрических слоев. В результате действия этих сил механическая энергия жидкости непрерывно превращается в тепловую, и жидкость нагревается. Интенсивность объемного источника тепла, возникающего в пространстве между цилиндрами вследствие «вязкой диссипации», зависит от локального градиента скоростей: чем быстрее движутся друг относительно друга смежные слои жидкости, тем интенсивнее «вязкая диссипация» и, следовательно, тем быстрее нагревается жидкость.

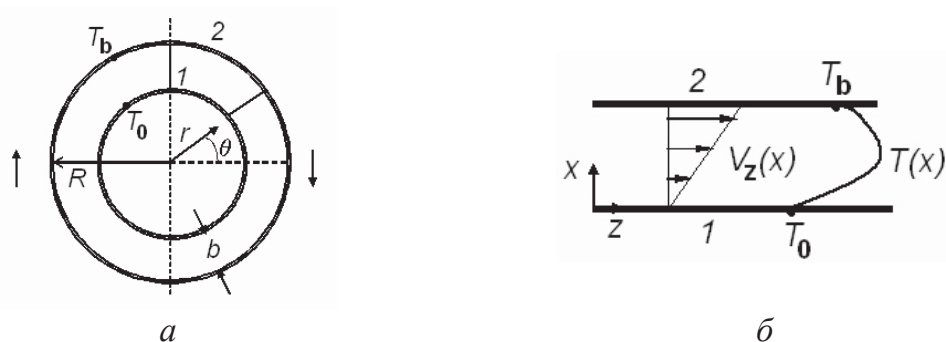


Рис. 12.7. К постановке задачи о теплообмене между двумя коаксиальными цилиндрами; 1 – неподвижная поверхность; 2 – поверхность внешнего цилиндра, движущегося со скоростью $V = R\Omega$

Предположим, что на внутренней и внешней поверхностях цилиндра поддерживаются температуры T_0 и T_b . В этом случае температура определяется только радиальной координатой.

Если ширина кольцевого зазора b мала по сравнению с радиусом R , решение задачи можно получить приближенно, анализируя упрощенную ситуацию, т.е., пренебрегая эффектом кривизны и используя

³⁶ Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М.: Химия, 1974. 688 с

декартовы координаты. На рис. 12.7 введены обозначения: 1 – это неподвижная поверхность, а 2 – поверхность внешнего цилиндра, движущегося со скоростью $V = R\Omega$, где Ω – угловая скорость.

В случае так называемой Ньютонской жидкости интенсивность вязкого источника тепла записывается следующим образом

$$q_V = -\tau_{xz} \frac{dv_z}{dx} = \mu \tau_{xz} \left(\frac{dv_z}{dx} \right)^2, \quad (12.20)$$

где τ_{xz} – касательное напряжение, v_z – компонента вектора скорости, μ – коэффициент динамической вязкости. Единицей его измерения служит 1 Пуаз = г/(см с). Соотношение (12.20) есть следствие закона вязкости Ньютона

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx}. \quad (12.21)$$

Этому закону подчиняются, например, пасты, суспензии, высокомолекулярные соединения.

Для постоянной скорости внешнего цилиндра $V = const$ и установившегося течения можно принять

$$v_z = \left(\frac{x}{b} \right) V,$$

следовательно, для скорости тепловыделения имеем

$$q_V = \mu \left(\frac{V}{b} \right)^2 x.$$

Первый интеграл одномерного уравнения теплопроводности в декартовой системе координат при условии постоянства коэффициентов теплопроводности λ и вязкости μ есть

$$-\lambda \frac{dT}{dx} = \mu \left(\frac{V}{b} \right)^2 x + C_1.$$

Последующее интегрирование (см. раздел 6.) дает

$$T = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{V}{b} \right)^2 x^2 - \frac{C_1}{\lambda} x + C_2.$$

Пользуясь условиями

$$\begin{aligned} x=0: & \quad T = T_0, \\ x=b: & \quad T = T_b, \end{aligned}$$

найдем

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_b - T_0} = \frac{x}{b} + \frac{1}{2} Br \frac{x}{b} \left[1 - \left(\frac{x}{b} \right) \right], \quad (12.22)$$

где $Br = \frac{\mu V^2}{\lambda(T_b - T_0)}$ - число Брингмана, названное так по имени ученого,

впервые решившего задачу о течении жидкости в круглой трубе с учетом эффектов тепловыделения вследствие вязкой диссипации. Это число является мерой относительного вклада двух потоков: теплового потока, обусловленного вязкой диссипацией, и теплового потока, вызванного разностью температуры на стенках канала. В случае $Br > 2$ профиль температуры имеет максимум.

Качественное поведение температуры показано на рис. 12.8.

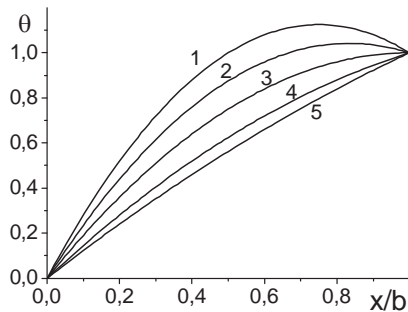


Рис. 12.8. Распределение температуры между коаксиальными цилиндрами; $Br = 1 - 4,0$; $2 - 3,0$; $3 - 2,0$; $4 - 1,0$; $5 - 0,5$.

Во многих задачах эффект вязкой диссипации не играет особой роли. Но существует ряд, главным образом, инженерных проблем, когда этот эффект необходимо учитывать. Например, с вязким тепловыделением приходится сталкиваться при течении смазочных материалов в пространстве между быстро движущимися деталями; при течении пластических масс через матрицы при высокоскоростной экструзии; при движении воздуха в пограничном слое вблизи поверхности спутника

Земли или ракеты и др. Первые два типа текучих сред относятся к Ньютонским жидкостям, подчиняющимся закону (12.18). Реологическое поведение большинства жидкостей подчиняется более сложным закономерностям.

12.6. Нагрев тел излучением ОКГ

Задачи о нагреве тел излучением ОКГ (оптического квантового генератора) встречаются довольно часто.³⁷ Связаны они с технологиче-

³⁷ Рыкалин Н.Н., Углов А.А. О нагреве разнородных материалов при сварке встык поверхностным источником тепла // ФХОМ, 1970, № 5. С. 23–28; Углов А.А., Исаева О.И. О расчете скорости нагрева металлов при воздействии излучения ОКГ // ФХОМ, 1976, № 2. С. 23–28; Углов А.А., Константинов С.Г. Численное моделирование тепловых процессов при обработке концентрированными потоками энергии покрытий и состыкованных материалов // ФХОМ, 1995, № 3. С. 34–39 и др.

скими приложениями: поверхностной закалкой локальных областей, химико-термической обработкой, исследованием термоэмиссионных способностей материалов, процессами резки и сварки. В технологических проблемах значительный интерес представляет оценка скоростей нагрева и охлаждения материалов, температурных градиентов в нестационарном и установившемся состояниях. В большинстве случаев такие задачи оказываются существенно нелинейными и требуют привлечения численных методов исследования. Но ряд интересных эффектов может быть описан с помощью достаточно простых моделей.

Рассмотрим задачу о нагреве твердого образца имеющего форму цилиндра, лазерным излучением (рис. 12.9, а). Боковые поверхности образца теплоизолированы.

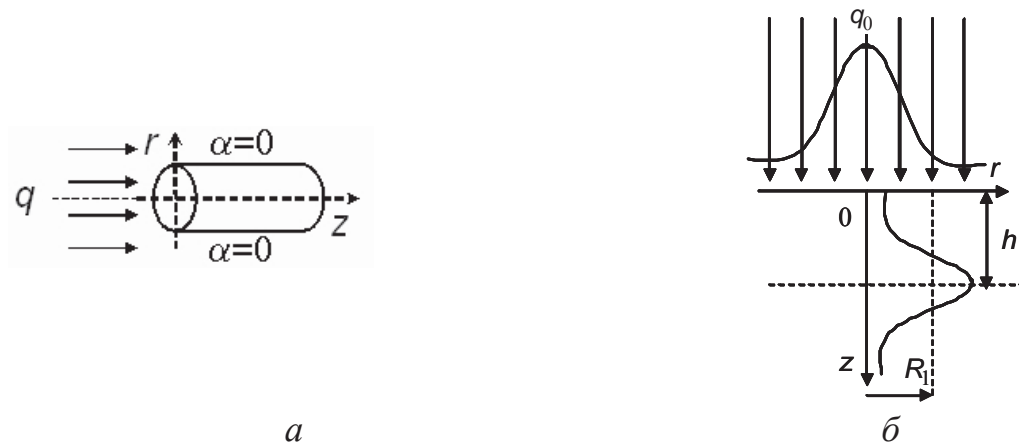


Рис. 12.9. К постановке задач о нагреве тел лазерным излучением

Предположим, что максимальная плотность потока излучения не превосходит некоторое критическое значение, необходимое для начала плавления материала. Однако оптические и теплофизические свойства могут зависеть от температуры. Будем считать, что тепловой поток, поступающий от лазерного излучения, распределен по закону Гаусса (рис. 12.9, б)

$$q(r, z) = A q_0 \sigma \exp[-r^2 k - \sigma z], \quad (12.23)$$

где A – поглощательная способность материала, σ – показатель поглощения в законе Бугера, k – коэффициент сосредоточенности лазерного излучения.

Математическая формулировка такой задачи имеет вид

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_T r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_T \frac{\partial T}{\partial z} \right) + A q_0 \sigma \exp(-r^2 k - \kappa_\lambda z), \quad (12.24)$$

$$z = 0: \lambda_T \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha(T - T_e); \quad z = \delta: -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha(T - T_e),$$

$$r = 0: \frac{\partial T}{\partial r} = 0; \quad r = R_c: \frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$

$$t = 0: T = T_0.$$

Частный вариант задачи ($R_1 = 1/\sqrt{k} \gg R_c, \delta \rightarrow \infty$) нам уже известен (раздел 9.) и соответствует нагреванию излучением толстого образца с пятном нагрева, превышающим его поперечные размеры.

Рассмотрим другие частные варианты.

Пусть образец имеет малую толщину, такую, что распределением температуры в нем можно пренебречь, $\delta \ll \sqrt{\lambda_T t^*/c_p \rho}$. Тогда интегрируя (12.24) по толщине пленки, придем к уравнению теплопроводности

$$c_p \rho \delta \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\delta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_T r \frac{\partial T}{\partial r} \right) +$$

$$A(1 - \exp(-\delta \sigma)) q_0 \exp(-r^2 k) - 2\alpha(T - T_e). \quad (12.25)$$

Если к тому же пятно нагрева много больше радиуса образца, задача о нагреве излучением ОКГ примет совсем простой вид

$$c_p \rho \delta \frac{dT}{dt} = A(1 - \exp(-\delta \sigma)) q_0 - 2\alpha(T - T_e). \quad (12.26)$$

Поток, поглощенный пленкой, есть

$$q_a = A q_0 [1 - \exp(-\sigma \delta)],$$

а поток, пропущенный пленкой –

$$\Phi = A q_0 \exp(-\sigma \delta).$$

В задаче возможны варианты.

1. В условиях теплообмена с окружающей средой возможно установление стационарного состояния, когда

$$A(1 - \exp(-\delta \sigma)) q_0 = 2\alpha(T - T_e). \quad (12.27)$$

2. Пренебрегая потерями тепла в уравнении в (12.26), получим, что температура тонкого образца (пленки) растет со временем линейно (рис. 12.10)

$$T = T_0 + B t, \quad (12.28)$$

где

$$B = A \frac{q_0}{c_p \rho \delta} \left[1 - e^{-\sigma \delta} \right].$$

3. Учет теплообмена с окружающей средой приводит к иному закону изменения температуры

$$T - T_0 = \frac{q_a}{2\alpha} \left[1 - \exp\left(-\frac{2\alpha t}{c_p \rho \delta}\right) \right]. \quad (12.29)$$

4. Пусть в (12.11) $\alpha = 0$, но поглощательная способность зависит от температуры. Для большинства металлов справедлива линейная зависимость

$$A = A_0 + A_1 T.$$

В этом случае нам нужно найти решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= B_0 (1 + \gamma T), \\ t = 0: T &= T_0, \end{aligned}$$

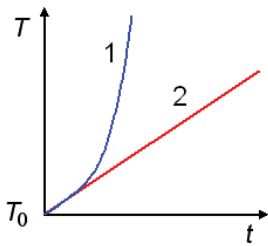


Рис. 12.10. Зависимость температуры от времени; 1 — соответствует формуле (12.30); 2 — формуле (12.28)

$$\text{где } B_0 = A_0 \frac{q_0}{c_p \rho \delta} \left[1 - e^{-\sigma \delta} \right], \quad \gamma = \frac{A_1}{A_0}.$$

Точное решение задачи о нагреве тонкой пленки в этом случае имеет вид (рис. 12.10)

$$T = T_0 \exp(\gamma B_0 t) + \frac{1}{\gamma} \left[\exp(\gamma B_0 t) - 1 \right], \quad (12.30)$$

что существенно отличается от линейного закона (12.28).

Устремляя γ к нулю, получим линейный закон роста температуры.

Отличается и величина потока, поглощенного пленкой

$$Q_a = c_p \rho \delta B_0 (1 + \gamma T_0) \exp(\gamma B_0 t).$$

5. Пусть материал поглощает излучение ОГК только на поверхности и $\alpha = 0$. Тогда уравнение (12.25) примет более простой вид

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_T r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_T \frac{\partial T}{\partial z} \right),$$

но изменится граничное условие на поверхности $z = 0$:

$$-\lambda_T \frac{\partial T}{\partial z} = A q_0 \exp\left[-r^2 k\right]$$

Остальные условия останутся прежними.

Примем линейную зависимость коэффициента теплопроводности от температуры

$$\lambda = a + bT.$$

Для полупространства (полубесконечного образца) в переменных

$$\theta = \frac{T - T_0}{q_0 x_*}, \quad \xi = \frac{r}{x_*}, \quad \zeta = \frac{z}{x_*}, \quad \tau = \frac{t}{t_*},$$

где

$$x_* = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad t_* = \frac{c\rho}{k\lambda_0}, \quad \lambda_0 = a + bT_0,$$

задача принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + h\theta) \xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(1 + h\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right], \\ \zeta = 0: & -(1 + h\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = -\exp(-\xi^2), \end{aligned} \quad (12.31)$$

$$\zeta \rightarrow \infty: \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = 0; \quad \xi = 0: \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0; \quad \xi \rightarrow \infty: \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0,$$

$$\tau = 0: \theta = 0,$$

где

$$h = \frac{Aq_0b}{\lambda_0^2 \sqrt{k}}.$$

Преобразуем задачу (12.31), используя подстановку Кирхгофа³⁸

$$u = \int_0^\theta (1 + hy) dy = \theta + \frac{h}{2} \theta^2,$$

тогда $\theta = \frac{\sqrt{1 + 2hu} - 1}{h}$. В результате приходим к более простой задаче

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(1 + 2hu)}} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}, \\ \zeta = 0: & -\frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\exp(-\xi^2), \end{aligned} \quad (12.32)$$

$$\zeta \rightarrow \infty: \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0; \quad \xi = 0: \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0; \quad \xi \rightarrow \infty: \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,$$

$$\tau = 0: u = 0,$$

³⁸ Коздоба Л.И. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М.: Наука, 1975. 227 с.

которая все же остается нелинейной. Для ее решения можно использовать метод последовательных приближений, который заключается в следующем.

Обозначим через D среднее значение функции $\frac{1}{\sqrt{(1+2hu)}}$ на интервале температур $[U_1, U_2]$, представляющем интерес для практики, например

$$D = \frac{1}{U_2 - U_1} \int_{U_1}^{U_2} \frac{du}{\sqrt{(1+2hu)}}.$$

В качестве нулевого приближения имеем
 $u_0 = 0.$

Первое приближение U_1 - есть решение линейной задачи для уравнения теплопроводности

$$D \frac{\partial U_1}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi \frac{\partial U_1}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \zeta^2}.$$

с теми же граничными условиями, что и в (12.32).

Решение линейной задачи может быть найдено, например, с помощью метода источников (метода функций Грина, раздел 8.2) и имеет вид

$$u_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\tau/D}} \exp \left[- \left(\frac{\xi^2}{1+4y^2} + \frac{\zeta^2}{4y^2} \right) \right] \frac{dy}{1+4y^2}$$

В центре пятна нагрева имеем

$$u_1(0,0,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{D}} \sqrt{\tau} \right). \quad (12.33)$$

Применяя обратное преобразование

$$\theta_1 = \frac{\sqrt{1+2hu_1} - 1}{h}, \quad (12.34)$$

найдем, как меняется исходная функция θ в первом приближении.

Для различных значений D , h зависимость температуры в центре пятна нагрева от времени показана на рис. 12.11.

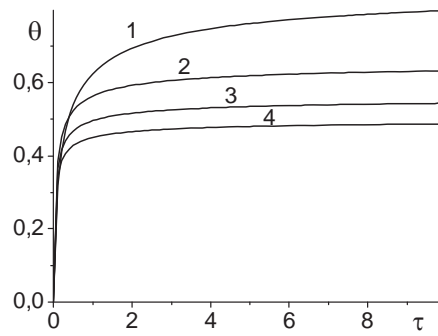


Рис. 12.11. Зависимость температуры в центре пятна нагрева от времени; 1 – $D=1$ ($h=0$);
 $h=2-1$; 3 – 2; 4 – 3.

Скорость нагрева твердого тела можно найти непосредственным дифференцированием решения для u_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} &= \frac{1}{\sqrt{1+2hu_1}} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+2hu_1}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\xi^2}{1+4\tau/D} + \frac{\zeta^2}{4\tau/D}\right)\right] \frac{1}{1+4\tau/D} \frac{1}{2\sqrt{\tau/D}}. \end{aligned}$$

В центре пятна нагрева имеем уравнение

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = \frac{1}{\sqrt{1+2hu_1(0,0,\tau)}} \sqrt{\frac{D}{\pi}} \frac{1}{D+4\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau}}.$$

Для последующих приближений имеем задачи

$$D \frac{\partial u_n}{\partial \tau} - \left[(1+hu_{n-1})^{-1/2} - D \right] \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi \frac{\partial u_n}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial^2 u_n}{\partial \zeta^2}$$

$$\zeta = 0: -\frac{\partial u_n}{\partial \zeta} = -\exp(-\xi^2),$$

$$\zeta \rightarrow \infty: \frac{\partial u_n}{\partial \zeta} = 0; \quad \xi = 0: \frac{\partial u_n}{\partial \xi} = 0; \quad \xi \rightarrow \infty: \frac{\partial u_n}{\partial \xi} = 0,$$

$$\tau = 0: u_n = 0,$$

решение которых сводим к нахождению отклонений от предыдущего приближения, полагая $u_n = u_{n-1} + w$.

Решение задачи для постоянного коэффициента теплопроводности $\lambda = \lambda_0$ следует из выписанных формул. Для температуры θ имеем формулу (12.33), где $D = 1$:

$$\theta(0,0,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{arctg}(2\sqrt{\tau}).$$

12.7. Оболочка, охлаждаемая излучением, с резким перепадом равновесных температур

Рассмотрим задачу о нахождении установившегося распределения температуры в окрестности стыка двух материалов (рис. 12.12), которая возникает при изучении теплообмена оболочки летательного аппарата³⁹.

Если условия теплообмена на поверхности тонкостенной оболочки изменяются медленно, то передачу тепла теплопроводностью вдоль нее можно не учитывать. В этом случае установившиеся температуры каждой части такой оболочки можно рассчитывать независимо.

Допустим, что для двух частей оболочки, идеально изолированной с внутренней стороны, равновесные температуры известны (рис. 12.12): T_1 и T_2 , причем $T_1 > T_2$. В окрестности стыка имеем $T_2 < T < T_1$, причем температура меняется непрерывно. Используем для каждой части оболочки уравнение теплопроводности

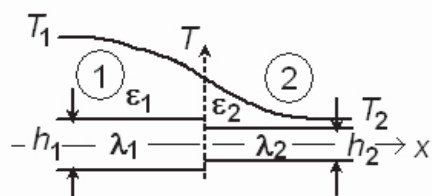


Рис. 12.12. Оболочка с резким перепадом равновесных температур

$$\lambda_i \left[\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (12.35)$$

с условиями

$$y = 0: \frac{\partial T_i}{\partial y} = 0,$$

$$y = h_i: -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} = \varepsilon_i \sigma_0 [T_i^4 - T_{ie}^4].$$

Так как оболочки – тонкие, проинтегрируем уравнения (12.35) по толщине с учетом граничных условий. В результате найдем

³⁹ Зарубин В.С. Температурные поля в конструкциях летательных аппаратов (методы расчета). М.: Машиностроение, 1978. 184 с.

$$\int_0^{h_i} \lambda_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} dy + \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} \Big|_0^{h_i} = \lambda_i h_i \frac{dT_i}{dx} - \varepsilon_i \sigma_0 [T_i^4 - T_{ie}^4] = 0. \quad (12.36)$$

Условиями к двум уравнениям (12.36) будут

$$\begin{aligned} x \rightarrow -\infty: T_1 &= T_{1e} \text{ или } dT_1/dx = 0; \\ x \rightarrow +\infty: T_2 &= T_{2e} \text{ или } dT_2/dx = 0; \\ x = 0: T_1 &= T_2, \lambda_1 h_1 \frac{dT_1}{dx} = \lambda_2 h_2 \frac{dT_2}{dx}. \end{aligned} \quad (12.37)$$

Эта задача, не смотря на нелинейный характер, легко интегрируется.

Введем обозначение

$$\frac{dT_i}{dx} = p_i.$$

Тогда вместо формулы (12.36) запишем

$$\lambda_i h_i \frac{dp_i}{dT_i} \frac{dT_i}{dx} = \varepsilon_i \sigma_0 [T_i^4 - T_{ie}^4],$$

или

$$\lambda_i h_i p_i dp_i = \varepsilon_i \sigma_0 [T_i^4 - T_{ie}^4] dT_i.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \lambda_i h_i p_i^2 = \varepsilon_i \sigma_0 \left[\frac{1}{5} T_i^5 - T_{ie}^4 T_i + D_i \right], \quad i=1,2. \quad (12.38)$$

Постоянные интегрирования D_1 и D_2 найдем из условий (12.37).

Имеем:

$$D_1 = \frac{4}{5} T_{1e}^5, \quad D_2 = \frac{4}{5} T_{2e}^5.$$

Из условия в нуле получим уравнения для определения температуры на контакте материалов $T_1 = T_2 = T_0$:

Так как $p_1 = \frac{\lambda_2 h_2}{\lambda_1 h_1} p_2$, $p_1^2 = \left(\frac{\lambda_2 h_2}{\lambda_1 h_1} \right)^2 p_2^2$, то найдем

$$2 \frac{\varepsilon_1 \sigma_0}{\lambda_1 h_1} \left[\frac{1}{5} T_0^5 - T_{1e}^4 T_0 + \frac{4}{5} T_{1e}^5 \right] = \left(\frac{\lambda_2 h_2}{\lambda_1 h_1} \right)^2 2 \frac{\varepsilon_2 \sigma_0}{\lambda_2 h_2} \left[\frac{1}{5} T_0^5 - T_{2e}^4 T_0 + \frac{4}{5} T_{2e}^5 \right]$$

или

$$\theta_0^5 [K_\varepsilon - 1] - 5\theta_0 [K_\varepsilon \theta_{21}^4 - 1] + 4 [K_\varepsilon \theta_{21}^5 - 1] = 0, \quad (12.39)$$

где

$$K_\varepsilon = \frac{\lambda_2 h_2 \varepsilon_2}{\lambda_1 h_1 \varepsilon_1}, \quad \theta_0 = \frac{T_0}{T_{1e}}, \quad \theta_{21} = \frac{T_{2e}}{T_{1e}}.$$

В частном случае $K_\varepsilon = 1$ имеем

$$\theta_0 = 0,8 \frac{1 - \theta_{21}^5}{1 - \theta_{21}^4}.$$

После того, как температура θ_0 определена, каждое из уравнений (12.38) или (12.36) решается независимо.

Можно построить приближенное решение, проводя линеаризацию уравнений (12.36) в окрестности температуры T_0 :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_i}{dx^2} &= \frac{\varepsilon_i \sigma_0}{\lambda_i h_i} [T_i^4 - T_{ie}^4] = \\ &= \frac{\varepsilon_i \sigma_0}{\lambda_i h_i} (T_i - T_{ie}) [T_i^3 + T_i^2 T_{ie} + T_i T_{ie}^2 + T_{ie}^3] \approx \frac{N_{i0}}{h_i} (T_i - T_{ie}), \end{aligned}$$

где

$$N_{i0}^2 = \frac{\varepsilon_i \sigma_0 h_i}{\lambda_i} [T_0^3 + T_0^2 T_{ie} + T_0 T_{ie}^2 + T_{ie}^3].$$

Решением полученного уравнения будет

$$\frac{T_i - T_{ie}}{T_0 - T_{ie}} = \exp \left[-\frac{N_{i0} x}{h_i} \right]. \quad (12.40)$$

Решение задачи можно получить и непосредственным дифференцированием уравнений (12.38). Но в этом случае решение не выражается через элементарные функции.

12.8. Модель процесса цементации компактного материала

Цементация – один из способов химико-термической обработки деталей, предназначенный для их упрочнения. Сущность этого процесса состоит в насыщении углеродом поверхностных слоев заготовки, помещаемой при высокой температуре в среду, содержащую соединения углерода. Последние способны адсорбироваться на поверхности и диссоциировать с выделением атомарного углерода, диффундирующего в объем. В технологиях, основанных на использовании газовых сред, концентрация углерода легко регулируется. Простая математическая

постановка задачи для этого процесса основана на следующих предположениях⁴⁰.

1. Учитывается, что глубина цементируемого слоя много меньше размеров детали, так что для описания диффузионного процесса можно ограничиться одномерной постановкой задачи в тонком приповерхностном слое. Размер детали для процесса диффузии можно считать бесконечным.

2. Так как скорость передачи тепла значительно больше скорости диффузии в аналогичной среде и глубина прогретого слоя значительно превышает глубину химико-термической обработки, то при заданном законе изменения температуры среды или поверхности обрабатываемой детали процесс диффузии можно изучать независимо.

3. Интенсивность диффузионного процесса зависит не только от температуры, но и от концентраций, причем зависимость коэффициента диффузии от концентрации – нелинейная.

При этих предположениях математическая формулировка задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[D(C, T) \frac{\partial C}{\partial x} \right], & (12.41) \\ C(0, x) &= \bar{C}_0, \\ x = 0: D \frac{\partial C}{\partial x} &= \beta(C, T) [C - C_e], \\ x \rightarrow L: D \frac{\partial C}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

где $D(C)$ – коэффициент диффузии углерода в металле, β – кинетический коэффициент массообмена газовой средой; C_e – углеродный потенциал среды (концентрация углерода в окружающей среде), \bar{C}_0 – начальное содержание углерода в обрабатываемом слое (концентрация измеряется в процентах).

Для ряда компактных материалов известны формулы, аппроксимирующие зависимости их физических свойств от температуры и концентраций. Например, для $\gamma - Fe$ такие зависимости имеют вид

⁴⁰ Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. М.: Машиностроение, 1990. 264 с.

$$D = (0,04 + 0,08C) \exp\left(-\frac{31350}{1,987T}\right), \text{ см}^2/\text{с}$$

$$\beta = 1,36 \cdot 10^{-3} \exp\left(-\frac{11100}{1,987T}\right), \text{ см}/\text{с}, \quad (12.42)$$

где T – температура в К.

В случае $D = D_0 = \text{const}$, $\beta = \beta_0 = \text{const}$ задача полностью аналогична задаче теплопроводности с граничными условиями третьего рода, рассмотренной в разделе 7.3.3.

Эта нелинейная задача может быть решена численно с использованием неявной разностной схемы и метода прогонки.

Один из возможных алгоритмов численного решения этой задачи включает в себя следующие этапы.

Сначала для решения уравнения (12.41) составляем разностную схему на четырехточечном шаблоне (рис. 12.13)

$$\frac{C_i - \check{C}_i}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\check{D}_{i+1} + \check{D}_i}{2} \cdot \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x} - \frac{\check{D}_i + \check{D}_{i-1}}{2} \cdot \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x} \right], \quad (12.43)$$

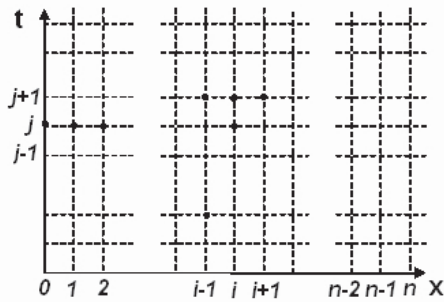


Рис 12.13. Рисунок к построению разностной схемы

где используется обозначение $C_i \equiv C_i^{j+1}$ для концентрации в точке $x_i = i \cdot \Delta x$ в момент времени $t_{j+1} = (j+1) \cdot \Delta t$ (т.е. на слое с номером j), Δx – шаг по пространственной координате, Δt – шаг по времени. Для величин со слоя j используются обозначения вида $\check{C}_i \equiv C_i^j$, \check{D}_{i+1} и т.д. В

результате на каждом слое имеем систему $n-1$ уравнения вида

$$a_i C_{i-1} - d_i C_i + b_i C_{i+1} + f_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (12.44)$$

где

$$a_i = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \cdot \frac{\check{D}_{i+1} + \check{D}_i}{2}, \quad b_i = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \cdot \frac{\check{D}_i + \check{D}_{i-1}}{2},$$

$$d_i = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \cdot \frac{\check{D}_{i+1} + 2\check{D}_i + \check{D}_{i-1}}{2}, \quad f_i = \check{C}_i.$$

Решить систему линейных уравнений (12.44) можно следующим образом. Предположим, что имеет место связь

$$C_i = \alpha_{i+1}C_{i+1} + \gamma_{i+1}, \quad (12.45)$$

где коэффициенты $\alpha_{i+1}, \gamma_{i+1}$ - пока не определены.

Аналогично (12.45) можем записать

$$C_{i-1} = \alpha_i C_i + \gamma_i. \quad (12.46)$$

Подставляя (12.46) в уравнение (12.43) и собирая подобные слагаемые, найдем

$$(\alpha_i a_i - d_i)C_i + b_i C_{i+1} = -(f_i + \gamma_i a_i).$$

Сравнивая полученное выражение с (12.44), найдем рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов $\alpha_{i+1}, \gamma_{i+1}$

$$\alpha_{i+1} = -\frac{b_i}{\alpha_i a_i - d_i}, \quad \gamma_{i+1} = -\frac{f_i + \gamma_i a_i}{\alpha_i a_i - d_i}, \quad (12.47)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Описанный метод решения системы линейных уравнений есть один из вариантов метода прогонки, а коэффициенты $\alpha_{i+1}, \gamma_{i+1}$ носят название прогоночных коэффициентов.

Уравнение (12.43) есть разностная форма дифференциального уравнения. Используемая здесь разностная схема есть схема первого порядка аппроксимации по времени и второго – по пространственной координате. Чтобы воспользоваться полученными соотношениями, нужно записать в разностном виде и граничные условия, желательно также со вторым порядком аппроксимации.

Представим концентрацию в точке с номером $i=1$ в виде разложения в ряд Тейлора по Δx относительно точки с номером $i=0$ до слагаемых второго порядка малости. Имеем

$$C_1 = C_0 + \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_0 \Delta x^2 + \dots$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_0 \approx \frac{C_1 - C_0}{\Delta x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_0 \Delta x + \dots \quad (12.48)$$

Вторую производную выразим из уравнения диффузии (12.41)

$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{\bar{D}_0(C, T)} \left[\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_0 - \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_0 \right].$$

В результате из (12.48) находим

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_0 \left[1 - \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial \check{D}}{\partial x}\right)_0 \frac{1}{\check{D}_0}\right] = \frac{C_1 - C_0}{\Delta x} - \frac{1}{D_0} \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_0. \quad (12.49)$$

Выразим первую производную по координате из (12.49) и подставим ее в граничное условие при $x = 0$. Имеем

$$\check{D}_0 \left[\frac{C_1 - C_0}{\Delta x} - \frac{1}{\check{D}_0} \frac{\Delta x}{2} \frac{C_0 - \check{C}_0}{\Delta t} \right] = \check{\beta}_0(C, T) [C_0 - C_e] \cdot \left[1 - \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial \check{D}}{\partial x}\right)_0 \frac{1}{\check{D}_0}\right]$$

или

$$\begin{aligned} C_0 \left[1 + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{1}{\check{D}_0} + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(1 - \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial \check{D}}{\partial x}\right)_0 \frac{1}{\check{D}_0}\right) \cdot \check{\beta}_0(C, T)\right] = \\ = 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{1}{\check{D}_0} C_1 + \left[\check{C}_0 + C_e \left(1 - \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial \check{D}}{\partial x}\right)_0 \frac{1}{\check{D}_0}\right) \check{\beta}_0(C, T)\right]. \end{aligned}$$

Сравнивая последнее выражение с уравнением (12.45), записанным в точке $i = 0$,

$$C_0 = \alpha_1 C_1 + \gamma_1,$$

находим

$$\alpha_1 = \frac{2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{1}{\check{D}_0}}{1 + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{1}{\check{D}_0} + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(1 - \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial \check{D}}{\partial x}\right)_0 \frac{1}{\check{D}_0}\right) \cdot \check{\beta}_0(C, T)}, \quad (12.50)$$

$$\gamma_1 = \frac{\check{C}_0 + C_e \left(1 - \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial \check{D}}{\partial x}\right)_0 \frac{1}{\check{D}_0}\right) \check{\beta}_0(C, T)}{1 + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{1}{\check{D}_0} + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(1 - \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial \check{D}}{\partial x}\right)_0 \frac{1}{\check{D}_0}\right) \cdot \check{\beta}_0(C, T)}.$$

Условие на внешней границе $x \rightarrow L$ аппроксимируем аналогично предыдущему. В точке с номером $i = n - 1$ имеем

$$C_{n-1} = C_n - \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_n \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_n \Delta x^2 + \dots$$

или

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_n \approx \frac{C_n - C_{n-1}}{\Delta x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_n \Delta x + \dots$$

С помощью уравнения диффузии находим

$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_n = \frac{1}{\check{D}_n(C, T)} \left[\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_n - \left(\frac{\partial \check{D}}{\partial x}\right)_n \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_n \right]$$

и

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_n \approx \frac{C_n - C_{n-1}}{\Delta x} + \frac{1}{\check{D}_n} \frac{\Delta x}{2} \left[\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_n - \left(\frac{\partial \check{D}}{\partial x}\right)_n \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_n \right]$$

В соответствии с граничным условием имеем равенство

$$2\Delta t \check{D}_n \frac{C_n - C_{n-1}}{\Delta x^2} + C_n - \check{C}_n = 0,$$

а из (12.45) – равенство

$$C_{n-1} = \alpha_n C_n + \gamma_n.$$

В результате находим C_n :

$$C_n = \frac{\check{C}_n + \gamma_n \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \check{D}_n}{1 + (1 - \alpha_n) \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \check{D}_n}. \quad (12.51)$$

Нам осталось найти производную $\left(\frac{\partial \check{D}}{\partial x}\right)_0$, входящую в прогоночные коэффициенты (12.50). Эта производная вычисляется на слое j , концентрация и все связанные с ней величины на котором известны. Поэтому поступим следующим образом. Аппроксимируем кривую $\check{D}(C, T) = \check{D}(x)$ полиномом второй степени $\check{D} = ax^2 + bx + d$ по трем точкам x_0, x_1, x_2 , где коэффициент диффузии равен $\check{D}_0, \check{D}_1, \check{D}_2$ соответственно. Тогда для нахождения трех коэффициентов a, b, d получим систему трех линейных уравнений

$$\check{D}_0 = d,$$

$$\check{D}_1 = a\Delta x^2 + b\Delta x + d,$$

$$\check{D}_2 = 4a\Delta x^2 + 2b\Delta x + d.$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$d = \check{D}_0, \quad b = \frac{4\check{D}_1 - 3\check{D}_0 - \check{D}_2}{2\Delta x}, \quad a = -\frac{2\check{D}_1 - \check{D}_0 - \check{D}_2}{2\Delta x^2}.$$

Нужную производную находим непосредственным дифференцированием

$$\left(\frac{\partial \check{D}}{\partial x} \right)_0 = b = \frac{4\check{D}_1 - 3\check{D}_0 - \check{D}_2}{2\Delta x}. \quad (12.52)$$

Окончательно, на каждом новом слое $j+1$ порядок вычислений следующий. Находим граничные условия для прогоночных коэффициентов по формулам (12.50) с учетом (12.52). Затем по формулам (12.47) определяем все остальные прогоночные коэффициенты. После этого находим концентрацию в точке $x=L$ по формуле (12.51). И, наконец, по формулам (12.45) находим концентрацию во всех остальных точках. Расчет повторяем до окончания времени обработки. В начальный момент времени, т.е. на слое $j=0$, концентрация задана.

Экспериментально установлено, что в пористых материалах глубина проникновения вещества при диффузии значительно выше, чем в монолитных поликристаллических материалах за то же время. Это связано с различием механизмов диффузии в компактных и пористых материалах. Тем не менее, процесс насыщения пористого материала можно описать на основе той же модели, но зависимости кинетических коэффициентов от температуры и концентраций будут иными. Величина пористости также оказывает существенное влияние на диффузионный коэффициент.

12.9. Нагрев излучением ОГК разлагающейся полимерной пленки⁴¹

Интерес к процессам воздействия сосредоточенных источников энергии на твердые материалы непосредственно связан с задачами лазерной технологии (например, с задачами резки или раскроя ткани). Воздействие лазерного излучения на химически активный материал может иметь ряд особенностей. Во-первых, с протеканием химических реакций в объеме и на поверхности связаны дополнительные источники и стоки тепла. Во-вторых, в ходе химических реакций свойства веществ

⁴¹ Дик И.Г., Князева А.Г. Зажигание лучистой энергией тонкой пленки с меняющимися в ходе реакции оптическими свойствами // ФГВ, 1990, № 3. С. 3–7; Поджигание тонкой пленки пучком лучистой энергии // ФГВ, 1991, № 6. С. 3–7

изменяются, что может привести, например, к изменению эффективной энергии, поглощаемой телом, и к различным нелинейным физическим эффектам.

Так, в простейшем приближении задача о нагреве потоком лучистой энергии тонкой пленки, в объеме которой может протекать химическая реакция, может быть представлена в виде

$$c\rho h \frac{dT}{dt} = q_a + Q_{ch}h \frac{d\eta}{dt} - 2\alpha(T - T_0), \quad (12.53)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = z(1 - \eta) \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) = \Phi_1, \quad (12.54)$$

$$\eta = T - T_0 = 0, \quad t = 0, \quad (12.55)$$

где T - температура, c, ρ - теплоемкость и плотность пленки, h - толщина пленки, η - степень превращения или массовая доля суммарного продукта реакции, Q_{ch} - теплота химической реакции, E - энергия активации, z - предэкспонент (см. раздел 11.1); q_a - поток тепла, поглощенный пленкой, который определяется аналогично задаче, рассмотренной в разделе 12.6

$$q_a = q_0 \{1 - \exp[-\sigma h]\} [1 - f]$$

где q_0 - плотность мощности падающего потока излучения, σ - показатель поглощения, f - коэффициент отражения (см. раздел 9).

Здесь предполагается, что площадь воздействия лазерного излучения перекрывает поперечный размер пленки (см. раздел 12.6), а химическая реакция является экзотермической и может быть описана простейшей реакционной схемой

«реагент – продукт».

По закону Бэра для слабых растворов, газов показатель поглощения пропорционален количеству поглощающих центров. Если в ходе разложения пленки образуется углерод, способствующий поглощению лазерного излучения, то можно предположить, что показатель поглощения есть линейная функция степени превращения η . С другой стороны, экспериментально показано, что для частично разложившихся полимерных пленок существует линейная корреляция между показателем поглощения σ и коэффициентом отражения f . Линейная связь между σ, f и η вытекает и из анализа простейшей теоретической модели поглощающей среды типа цепочки ориентированных вдоль луча скоплений погло-

щающих центров. Полагая, что закон Бэра справедлив и в нашем случае, запишем

$$\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_f - \sigma_0} = \frac{f - f_0}{f_f - f_0} = \eta, \quad (12.56)$$

где индекс « f » относится к конечному состоянию, а индекс «0» – к начальному. Тогда поток, поглощенный пленкой, будет функцией степени превращения

$$q_a = q_0 \{ 1 - \exp[-\sigma(\eta)h] \} [1 - f(\eta)].$$

Поток излучения, пропущенный пленкой, есть

$$\Phi = q_0 \exp[-\sigma(\eta)h] [1 - f(\eta)].$$

При численном исследовании этой задачи можно определить зависимость температуры от времени и время полного разложения пленки t_i , когда $\eta \rightarrow 0,95$. Динамика изменения температуры, степени превращения и потока, пропущенного пленкой, проиллюстрированы на рис. 12.14 для постоянных оптических свойств и свойств, меняющихся в ходе реакции. Время полного разложения для постоянных и переменных свойств в зависимости от плотности потока падающего излучения q_0 показано на рис. 12.15.

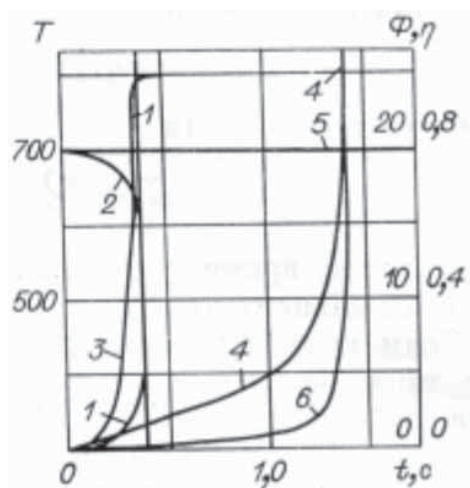


Рис. 12.14. Зависимость температуры (кривые 1,4), степени превращения (3,6) и потока, пропущенного пленкой (2,5) с постоянными (4-6) и переменными (1-3) оптическими свойствами

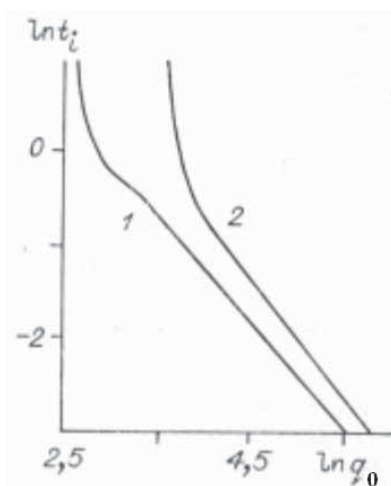


Рис. 12.15. Зависимость от величины потока времени разложения пленки с переменными (кривая 1) и постоянными оптическими свойствами (2)

Более интересные результаты получаются при учете конечности ширины падающего потока лазерного излучения и стадийности реакции разложения.

Известно, что полимеры разлагаются в несколько стадий. Первая из них – эндотермическая, протекает в объеме с образованием поглощающих центров. Следующая стадия – гетерогенная реакция, приводящая к уменьшению толщины пленки, является экзотермической. Догорание продуктов разложения происходит в газовой фазе и для нас интереса не представляет.

Математическая модель в этом случае усложняется и включает уравнение теплопроводности

$$c_p h \frac{\partial T}{\partial t} = h \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q_a + Q_1 h \Phi_1 + 2Q_2 \Phi_2 - 2\alpha(T - T_0), \quad (12.57)$$

кинетическое уравнение для реакции в объеме, аналогичное (12.53),

$$\frac{d\eta}{dt} = k_1(T)(1 - \eta) = \Phi_1$$

кинетическое уравнение для гетерогенной реакции

$$\frac{dh}{dt} = -\Phi_2 = \begin{cases} \frac{k_2(T)\eta}{1 + k_2(T)\eta/\beta}, & h \neq 0; \\ 0, & h = 0, \end{cases} \quad (12.58)$$

начальные и граничные условия

$$\eta = T - T_0 = 0, \quad h = h_0, \quad t = 0;$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} = 0,$$

где $k_1(T) = k_{10} \exp\left(-\frac{E_1}{RT}\right)$ – скорость гомогенной реакции,

$k_2(T) = k_{20} \exp\left(-\frac{E_2}{RT}\right)$ – скорость гетерогенной реакции в кинетическом режиме, β – скорость гетерогенной реакции в диффузионном режиме.

Радиационный поток, поглощенный и пропущенный пленкой в этом случае определяются по формулам

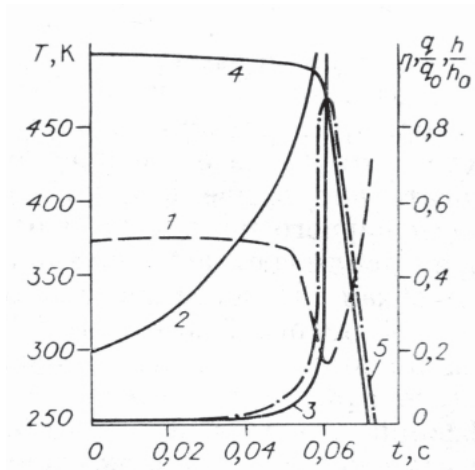


Рис. 12.16. Изменение во времени потока, пропущенного пленкой (1), температуры (2), степени превращения в объемной реакции (3), толщины пленки (4) и поглощенного потока (5) в центре пятна нагрева. $q_0 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ Вт/см}^2$, $a = 3,1 \cdot 10^{-2} \text{ см}$

$$q_a = q_0 \exp \left[- \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \times \{ 1 - \exp [- \sigma(\eta) h(t)] \} [1 - f(\eta)],$$

$$\Phi = q_0 \exp \left[- \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \times \exp [- \sigma(\eta) h(t)] [1 - f(\eta)].$$

Эта задача также решается численно.

Из рис. 12.16. видно, что изменение оптических характеристик происходит на стадии химических реакций. На стадии инертного нагрева изменений нет. Кривые, соответствующие пропущенному потоку (1) и температуре (2) качественно соответствуют осциллограммам процесса.

Хорошо отслеживает разделение химических стадий кривая 5, соответствующая потоку, поглощенному пленкой.

Численное исследование модели позволило выявить ряд интересных физических эффектов, которые удобно описывать с помощью безразмерного параметра

$$\delta = \frac{\lambda t_{f\infty}}{c r a^2},$$

где $t_{f\infty}$ – время резкого роста температуры пленки из-за «подключения» гетерогенной реакции при ее нагреве потоком «бесконечного» радиуса.

По результатам расчетов установлена зависимость

$$\frac{t_f}{t_{f\infty}} = \begin{cases} \exp(\sqrt{\delta} - C), & \sqrt{\delta} > C; \\ 1, & \sqrt{\delta} \leq C, \end{cases}$$

где $C \approx 0.22$.

При $\delta < 1$ в области $r < a$ формируются и распространяются к границам пучка температурно-концентрационный фронт (рис. 12.17, а), затухающая волна поглощения (рис. 12.17, б), соответствующие первой стадии реакции, и волна просветления (рис. 12.17, в), соответствующая

второй стадии реакции, приводящей к изменению толщины пленки и образованию «дырки».

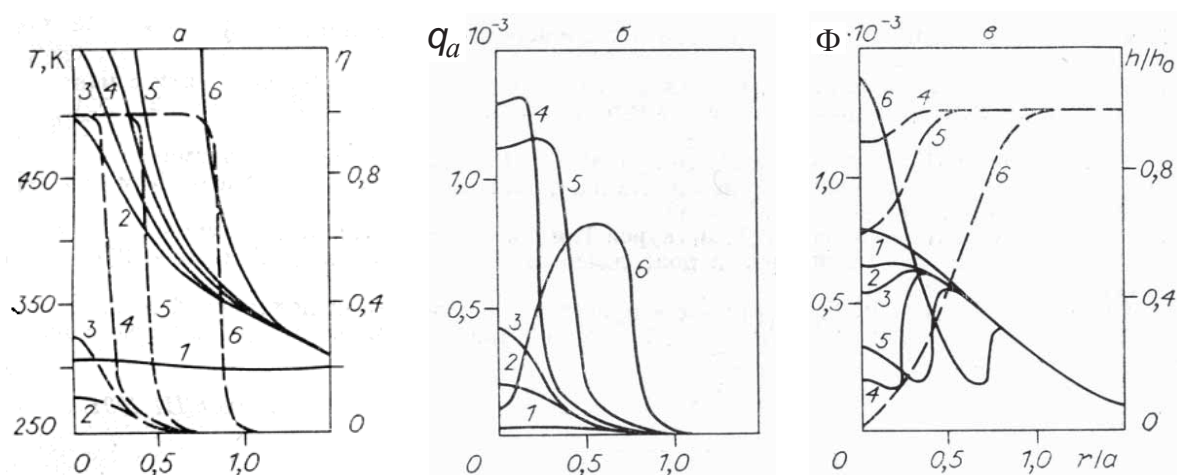


Рис. 12.17. Пространственные распределения температуры (а, сплошные линии), степени превращения (а, пунктирные линии), поглощенного потока (б), толщины пленки (в, пунктирные линии), пропущенного потока (в, пунктирные линии) в различные моменты времени; $q_0 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ Вт/см}^2$, $\delta = 0,087 \text{ см}$, $t, c = 1 - 0,05$; 2 - 0,058; 3 - 0,06; 4 - 0,062; 5 - 0,065; 6 - 0,073

Еще один интересный эффект – явление энергетической самофокусировки пятна нагрева, который заключается в следующем.

Определим эффективный радиус пучка r_{eff} так, чтобы при $r = r_{eff}$ поглощаемый поток q_a был в e раз меньше $q_a(r = 0)$. Оказывается, что вследствие неравномерности нагрева и, следовательно, неравномерности превращения, оптические свойства (в частности, поглощательная способность) в приосевой области $r = 0$ меняется сильнее, чем на краю пучка. Это приводит к тому, что область наиболее сильного поглощения локализуется в окрестности $r = 0$. Это явление слабо выражено для очень узких пучков из-за усиленной теплопроводности с границ пятна нагрева и хорошо проявляется при $\delta \leq 1$.

Таким образом, взаимодействие различных физических явлений играет важную роль в процессах обработки материалов высокоэнергетическими источниками.

Задания

1. Найдите решение задачи об охлаждении пористой пластины, полагая, что охлаждающая жидкость $x = 0$ поступает нагретой, т.е., ис-

пользуя вместо постоянства температуры на границе $T_1 = T_0$ условие (12.2).

2. Медный провод диаметром 1 мм равномерно покрыт изоляцией из пластика. Внешний диаметр изоляционного покрытия 3мм. Среда, в которой находится провод, имеет температуру $T = 37.8$ С. Коэффициент теплоотдачи от внешней поверхности пластика в окружающую среду - $\alpha = 2.26$ ккал/(м²час К). Какой максимальный ток можно пропускать через этот провод, не опасаясь перегрева изоляции, рабочая температура которой $T = 93.3$ С. Для расчета воспользоваться данными: коэффициенты теплопроводности λ для проволоки 100 и пластика 0.092 ккал/(м час К) соответственно, коэффициенты электропроводности λ_e для провода и пластика – $5.1 \cdot 10^5$ и 0.

3. Рассмотрим тепловыделяющий элемент в виде длинного стержня, заключенного в алюминиевую оболочку. Внутри стержня вследствие деления ядер вырабатывается тепло, причем интенсивность ядерного источника тепла распределена по закону (12.15). Вычислить максимальную температуру внутри тепловыделяющего элемента, если известно, что внешняя поверхность алюминиевой оболочки, имеющей радиус R_c , находится в контакте с жидким теплоносителем температуры T_e . Рассмотреть варианты а) контакт – идеальный; б) коэффициент теплоотдачи есть α_e .

4. Сформулировать и решить задачу о теплообмене между двумя коаксиальными цилиндрами для неньютоновской жидкости, описываемой моделью Оствальда–Вейля

$$\tau_{xz} = -m \left| \frac{dv_z}{dx} \right|^{n-1} \frac{dv_z}{dx}.$$

Показать, что при этом для распределения температуры будет справедлива та же формула, но в ней число Br следует заменить на число

$$Br = \frac{m V^{n+1}}{\lambda b^{n-1} (T_b - T_0)}.$$

5. Проанализировать эту же задачу для ньютоновской жидкости, полагая, что на обеих поверхностях поддерживается постоянная температура T_0 , а коэффициент теплопроводности и вязкость зависят от температуры

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + \alpha_1 \theta + \alpha_2 \theta^2 - \dots;$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \beta_1\theta + \beta_2\theta^2 - \dots$$

Указание: воспользоваться приемом, описанным в разделе 12.3.

6. Основываясь на описанном алгоритме решения задачи (12.27) с нелинейными кинетическими коэффициентами, составить и отладить программу ее численного исследования. Задать закон изменения температуры в виде

$$T = T_0 + at.$$

Проанализировать полученный результат, варьируя скорость роста температуры. Сравнить результаты решения нелинейной задачи с задачей, в которой все кинетические коэффициенты постоянны.

7. Исследовать задачу (12.27) с законом изменения температуры

$$T = T_0 + at + bt^2.$$

Что изменяется в решении по сравнению с предыдущей задачей?

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Основные теоремы и правила преобразования Лапласа

№	опера- ция	оригинал	изображение
1	Опреде- ление	$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{p\tau} dp$	$F(p) = \int_0^{\infty} f(\tau)\exp(-p\tau)d\tau$
2	Сложе- ние и умно- жение на число	$Af(\tau) + Bg(\tau)$	$AF(p) + BG(p)$
3	Диффе- ренци- рование	$f'(\tau)$	$pF(p) - f(+0)$
4	ориги- нала	$f^{(n)}(\tau)$	$p^n F(p) - p^{n-1}f(+0) - p^{n-2}f'(+0) - \dots - f^{(n-1)}(+0)$
5	Интег- ррова- ние ори- гинала	$\int_0^{\tau} f(t)dt$	$\frac{1}{p}F(p)$
6		$\int_0^{\tau} \int_0^{\theta} f(t)dt d\theta$	$\frac{1}{p^2}F(p)$
7	Измене- ние мас- штаба	$f(a\tau),$ $a = const$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$
8	Сдвиг аргу- мента у ориги- нала*	$f(\tau - b), b > 0$	$e^{-bp}F(p)$
9	Сдвиг аргу- мента у изобра- жения	$e^{a\tau}f(\tau)$	$F(p - a)$
10		$\frac{1}{a}e^{b\tau}f\left(\frac{\tau}{a}\right)$	$F(ap - b)$

Продолжение приложения 1

11	Дифференцирование	$-\tau f(\tau)$	$F'(p)$
12	ро-вание изображения	$(-1)^r \tau^r f(\tau)$	$F^{(r)}(p)$
13	Интегрирование изображения	$\frac{1}{\tau} f(\tau)$	$\int_p^\infty F(p) dp$
14	Соответствие пределов**	$\lim_{\alpha \rightarrow a} f(\tau, \alpha)$	$\lim_{\alpha \rightarrow a} F(p, \alpha)$
15	Свертка оригиналов	$f_1 * f_2 = \int_0^\tau f_1(t) f_2(\tau - t) dt = f_2 * f_1$	$F_1(p) F_2(p)$
16	Дифференцирование и интегрирование по параметру	$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(t, \alpha)$	$\frac{\partial}{\partial \alpha} F(p, \alpha)$
17		$\int_{a_1}^{a_2} f(t, \alpha) d\alpha$	$\int_{a_1}^{a_2} F(p, \alpha) d\alpha$
18		$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(y) \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) dy$	$\frac{1}{\sqrt{p}} F(\sqrt{p})$

19		$\int_0^{\infty} e^{-sy} f^*(y) dy,$ <p style="text-align: center;">где</p> $f^*(y) = \int_0^{\infty} f(\tau) \psi(\tau, y) d\tau$	$F[\varphi(p)] \Phi(s)$ $e^{-\tau\varphi(p)} \Phi(p) =$ $= \int_0^{\infty} e^{-py} \psi(\tau, y) dy$
20		$\sum_{k=1}^n \frac{\Phi(p_k)}{\psi'(p_k)} e^{p_k \tau}$	$\frac{\Phi(p)}{\psi(p)},$ <p style="text-align: center;">где</p> $\psi(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots$ $\dots (p - p_n)$
21	Случай кратных корней	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \times \right.$ $\left. \times \left[\frac{\Phi(p)(p - p_m)^k}{\psi(p)} e^{p\tau} \right] \right\}$	$\frac{\Phi(p)}{\psi(p)},$ <p style="text-align: center;">где</p> $\psi(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots$ $\dots (p - p_m)^k (p - p_{m+1})$ $\dots (p - p_n)$

Приложение 2

Изображения некоторых функций

	Изображение	Оригинал
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{1}{p^2}$	τ
3	$\frac{1}{p^n}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}$
5	$p^{-3/2}$	$2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}$
6	$\frac{1}{p-a}$	$e^{a\tau}$
7	$\frac{1}{p+a}$	$e^{-a\tau}$
8	$\frac{1}{(p-a)^2}$	$\tau e^{a\tau}$
9	$\frac{1}{(p-a)^n}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{1}{(n-1)!} \tau^{n-1} e^{a\tau}$
10	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{1}{a-b} (e^{a\tau} - e^{b\tau})$
11	$\frac{k}{p^2+k^2}$	$\sin(k\tau)$
12	$\frac{p}{p^2+k^2}$	$\cos(k\tau)$
13	$\frac{k}{p^2-k^2}$	$\text{sh}(k\tau)$
14	$\frac{p}{p^2-k^2}$	$\text{ch}(k\tau)$

Продолжение приложения 2

15	$(\sqrt{p-a} - \sqrt{p-b})$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau^3}}(e^{b\tau} - e^{a\tau})$
16	$\frac{1}{\sqrt{p+k}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} - ke^{k^2\tau}\text{erfc}(k\sqrt{\tau})$
17	$\frac{1}{\sqrt{p}(\sqrt{p+k})}$	$k^2\tau\text{erfc}(k\sqrt{\tau})$
18	$e^{-k\sqrt{p}}, k \geq 0$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi\tau^3}}e^{-k^2/(4\tau)}$
19	$\frac{1}{p}e^{-k\sqrt{p}}, k \geq 0$	$\text{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right)$
20	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-k\sqrt{p}}, k \geq 0$	$\frac{k}{\sqrt{\pi\tau}}e^{-k^2/(4\tau)}$
21	$\frac{1}{p\sqrt{p}}e^{-k\sqrt{p}}, k \geq 0$	$2\tau\text{ierfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right) =$ $= 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}e^{-k^2/(4\tau)} - k\text{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right)$
22	$\frac{b}{p(b+\sqrt{p})}e^{-k\sqrt{p}}, k \geq 0$	$\text{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right) - e^{bk}e^{b^2\tau} \times$ $\times \text{erfc}\left(b\sqrt{\tau} + \frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right)$
23	$\frac{1}{\sqrt{p}(b+\sqrt{p})}e^{-k\sqrt{p}}, k \geq 0$	$e^{bk}e^{b^2\tau} \times \text{erfc}\left(b\sqrt{\tau} + \frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right)$
24	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-k/p}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\cos(2\sqrt{k\tau})$
25	$\frac{1}{p\sqrt{p}}e^{-k/p}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi k}}\sin(2\sqrt{k\tau})$

Приложение 3

Таблица 3.1

*Теплоемкости и плотности некоторых веществ
при комнатной температуре и атмосферном давлении*

Вещество	Теплоемкость, c_p, Дж/(кг К)	Плотность, ρ, кг/м³
Алюминий	896	2702
Вольфрам	134	19300
Железо	452	7870
Медь	383	8933
Никель	446	8900
Платина	133	21450
Тантал	138	16600
Хром	440	7160
Цирконий	272	6570
Дюралюминий	833	2787
Алюминиевая бронза	410	8666
Асбест	816	383
Бетон (сухой)	837	500
Гранит	820	2640
Дуб	2390	609-801
Пихта	2720	600
Кирпич строительный	837	1700
Корунд	779	3900
Тефлон (политетрафторэтилен)	1050	2200
Полиамид (нейлон)	1060-1120	1470–1680
Пробка	1880	150
Стекло оконное	800	2800
Уголь, антрацит	1260	1370
Алмаз	510	3250
Графит	710	1730
Воздух	1012	1,164
Азот	910,9	1,301
Кислород	1041	1,138
Метан	2636	0,717
Вода	4182	998,2
Глицерин	1261	2350

Таблица 3.2

*Коэффициенты теплопроводности некоторых веществ,
 λ Вт/(м·К), $T=273$ К⁴²*

Алюминий	236	Асбест	0,09–0,19
Вольфрам	179	Бетон	0,9–1,4
Железо	81,1	Глина (48,7 % вл)	1,26
Магний	156	Дерево	0,11–0,17
Марганец	7,78	Картон	0,14–0,35
Медь	399	Кирпич сили- катный	1,07
Молибден	138	Кирпич шамот- ный	1–1,4
Никель	91	Кирпич красный	0,55–0,8
Титан	22	Опилки	0,071
Хром	91,4	Линолеум	0,081
Цинк	121	Стекло оконное	0,81
Воздух	0,024–0,075	Штукатурка	0,814
Лед	2,5	Вода	0,55–0,7

⁴² Все данные взяты из книг: Лариков Н.И. Теплотехника. М.: Стройиздат. 1985. 432 с.; Крейт Ф, Блэк У Основы теплопередачи. М.: Мир, 1983. – 512 с.

Таблица 3.3

Размерности некоторых физических величин

Физическая величина	Размерности
Длина	1 м=100 см=1000 мм
Масса	1 кг=1000 г
Время	1 час= 60 мин= 3600 с
Объем	1 м ³ = 10 ⁶ см ³
Плотность	1 кг/м ³ = г/см ³
Скорость	1 м/с=100 см/с= 3,6 км/час
Давление	1 Па=1 Н/м ² = 10 ⁻⁵ бар = 7,5·10 ⁻³ мм.рт.ст.
Энергия	1 Дж= 10 ⁷ эрг =0,102 кг·м = 2,78·10 ⁻⁴ Вт·час = 0,239 кал
Мощность	1 Дж/с =1 Вт
Удельная энергия	Дж/кг
Объемная теплоемкость	Дж/(м ³ ·К)
Плотность мощности = поток	Дж/(м ² ·с)
Коэффициент теплопроводности	Вт/(м·К)

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- a – коэффициент температуропроводности
 A, w – работа, совершаемая системой
 \mathbf{A} – архимедова сила
 c – удельная массовая теплоемкость, Дж/(кг·К);
 c' – удельная объемная теплоемкость, Дж/(м³·К);
 c_p – теплоемкость при постоянном давлении, Дж/(кг·с) или Дж/(м³·с)
 c_γ – теплоемкость при постоянном объеме
 d – диаметр
 f – энергия Гельмгольца
 F – площадь поверхности, см² или м²
 F_i – соотношение сил инерции
 F_p – сила давления
 \mathbf{F} – внешняя сила
 g – энергия Гиббса
 \mathbf{g} – ускорение свободного падения
 \mathbf{G} – сила тяжести,
 H, h – энтальпия, Дж или Дж/кг; постоянная Планка
 K_ε – коэффициент активности одного материала (среды) по отношению к другому (к обрабатываемому материалу)
 L – толщина, м, см
 M – масса вещества, кг, г
 m – молярная масса
 \mathbf{n}_0 – единичный вектор нормали
 p – давление
 \mathbf{q} – вектор плотности теплового потока, Вт/см² или Дж/(см²·с) или Дж/(м²·с)
 q_V – плотность объемных источников тепла
 Q – мощность теплового потока (или тепловой поток), Дж/с или Вт
 Q_τ – количество теплоты, Дж
 r_T – термическое сопротивление единицы площади
 $R = 8,314472$ – универсальная газовая постоянная,
 R_e – электрическое сопротивление,
 $R_T, R_{T,k}$ – термическое сопротивление, контактное термическое сопротивление, (м²·К)/Вт
 s – энтропия

t, τ – время, с
 T – температура
 U, u – внутренняя энергия системы
 \mathbf{u} – вектор скорости с компонентами u, v, w или u_1, u_2, u_3
 V – объем, см³
 γ – удельный объем,
 v – мольный объем
 x, y, z – декартовы координаты

α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К)
 β – коэффициент массоотдачи
 γ – удельный объем
 γ_T – изохорный коэффициент термического увеличения давления;
 ρ – плотность, кг/м³
 λ, λ_{eq} – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К)
 μ – коэффициент динамической вязкости
 μ_s – удельная мольная теплоемкость, Дж/(кмоль·К)
 δ – толщина гидродинамического пограничного слоя
 δ_T – толщина теплового пограничного слоя
 ν – коэффициент кинематической вязкости
 ξ_T – изотермический модуль упругости;
 ξ_T^{-1} – коэффициент изотермической сжимаемости
 $\boldsymbol{\tau}$ – тензор вязких напряжений
 τ_x – коэффициент трения
 ψ – функция тока
 K – коэффициент теплопередачи, Вт/(м²·К)
 Σ_f – площадь поверхности раздела фаз
 η – объемная доля вещества

Индексы

f – жидкость
 e – окружающая среда
 s – поверхность

p – плоскость
 c – цилиндр
 in – внутренний размер
 ext – внешний размер
 eq – эквивалентное значение

Безразмерные критерии

Bi – число Био
 Eu – критерий Эйлера
 F_m – соотношение массовых сил
 Fr – критерий Фруда
 Gr – число Грасгофа
 Ho – критерий гидродинамической гомохронности
 Nu – число Нусельда
 Pe – число Пекле
 Pr – число Прандтля
 Re – число Рейнольдса
 Re_x – локальное число Рейнольдса

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kalyan Annamalai, Iswar K.Puri Advanced thermodynamics engineering / 2001.
2. Lienhard J.H., Lienhard J.H. A heat transfer textbook / 2003.
3. Барре П. Кинетика гетерогенных процессов. – М.: Мир, 1976. – 400 с.
4. Берд Р., Стьюарт В, Лайтфут Е. Явления переноса. – М.: Химия, 1974. – 688 с.
5. Бокштейн Б.С., Диффузия в металлах. – М.: Metallurgy, 1978. – 248 с.
6. Гухман А.А. Применение теории подобия к исследованию процессов теплообмена. – М: Высшая школа, 1974. – 328 с.
7. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 328 с.
8. Зигель Р., Авдеевский В.С. Теплообмен излучением. – М.: Мир, 1975. – 840 с.
9. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. – М.: Энергия, 1975. – 488 с.
10. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
11. Князева А.Г. Различные варианты метода прогонки. Методическое пособие для выполнения лабораторных работ. – Томск.: Изд-во ТПУ, 2006.
12. Князева А.Г. Элементарные понятия о разностных схемах. Методическое пособие для выполнения лабораторных работ. – Томск.: Изд-во ТПУ, 2007.
13. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. – Киев: Наукова думка, 1975.
14. Крейт Ф., Блэк У. Основы теплопередачи. – М.: Мир, 1983. – 512 с.
15. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. – Новосибирск: Наука, 1970. – 670 с.
16. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
17. Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Анищенко Л.М. Высокотемпературные технологические процессы. Теплофизические основы. – М.: Наука, 1986. – 174 с.
18. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. – М.: Машиностроение, 1975. – 624 с.

19. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
20. Розовский А.Я. Гетерогенные химические реакции. Кинетика и макрокинетика. – М.: Наука, 1980. – 324 с.
21. Исаев С.И., Кожин И.А., Кофанов В.И. и др. Теория теплообмена / под ред. А.И. Леонтьева. – М.: Высшая школа, 1979. – 495 с.
22. Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1990. – 264 с.
23. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1985. – 384 с.
24. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. – М.: Наука, 1987. – 502 с.
25. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена. – М.: Мир, 1988. – 544 с.
26. Шмидт Р., Сапунов В.Н. Неформальная кинетика. – М.: Мир, 1985. – 264 с.

Учебное издание

КНЯЗЕВА Анна Георгиевна

ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СОВРЕМЕННЫХ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Компьютерная верстка *А.Г. Князева*
Дизайн обложки *О.Ю. Аршинова*

**Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета**

Подписано к печати 25.12.2009. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 20,76. Уч.-изд.л. 18,77.
Заказ 187-11. Тираж 35 экз.



Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru