



Technische Universität
Berlin



Polytechnische Universität
Tomsk

V.L. Popov

KONTAKTMECHANIK UND REIBUNGSPHYSIK

*Ist von dem Redaktions- und Verlagsrat
der Polytechnischen Universität Tomsk
als Unterrichtshilfe empfohlen*

Verlag der
Polytechnischen Universität Tomsk
2009

UDC 531+531.4(075.8)

BBC 22.2я73

P84

Popov V.L.

P84 Kontaktmechanik und Reibungsphysik: Unterrichtshilfe / V.L. Popov. – Tomsk: Verlag der Polytechnischen Universität Tomsk, 2009. – 253 S.

ISBN 5-98298-449-3

Diese Unterrichtshilfe wurde im Rahmen des Innovationsprogramms der PUT für die Ausbildung von hoch qualifizierten Spezialisten der Fachrichtung „Werkstoffkunde, Nanomaterialien und Nanotechnologien“ entwickelt.

UDC 531+531.4(075.8)

BBC 22.2я73

Rezensent

Doktor der Physik und Mathematik, Professor, Direktor des Instituts für Festigkeitsphysik und Werkstoffkunde der Sibirischen Zweigstelle der Russischen Akademie der Wissenschaften

S.G. Psachje

ISBN 5-98298-449-3

© Popov V.L., 2009

© Polytechnische Universität Tomsk, 2009

© Design. Verlag der Polytechnischen
Universität Tomsk, 2009

INHALTSVERZEICHNIS

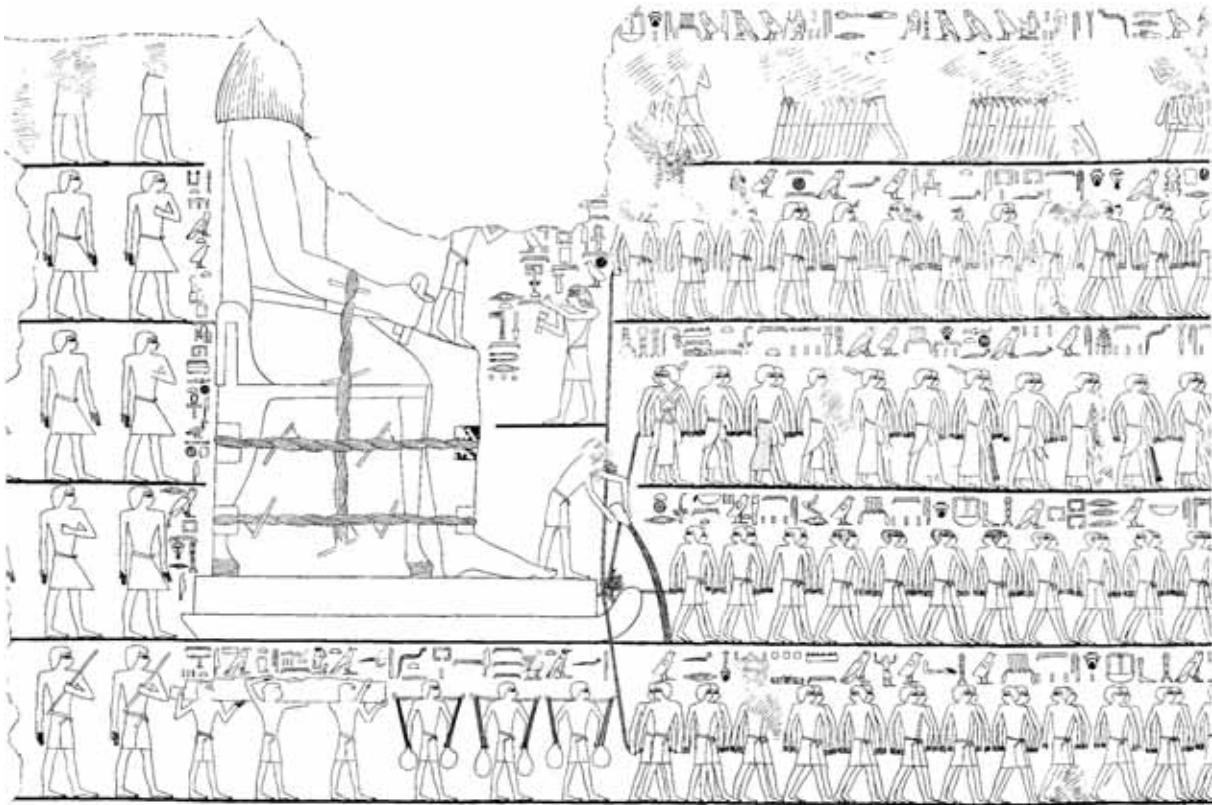
I Einführung	7
I.1 Kontakt- und Reibungsphänomene und ihre Anwendung	7
I.2 Zur Geschichte der Kontaktmechanik und Reibungsphysik	8
I.3 Aufbau des Buches	12
II Qualitative Behandlung des Kontaktproblems – Normalkontakt ohne Adhäsion	13
II.1 Materialeigenschaften	14
II.2 Einfache Kontaktaufgaben	16
II.3 Qualitative Abschätzungsmethode für Kontakte mit einem dreidimensionalen elastischen Kontinuum	19
<i>Aufgaben</i>	22
III Qualitative Behandlung eines adhäsiven Kontaktes	25
III.1 Physikalischer Hintergrund	26
III.2 Berechnung der Adhäsionskraft zwischen gekrümmten Oberflächen	29
III.3 Qualitative Abschätzung der Adhäsionskraft zwischen elastischen Körpern	30
III.4 Einfluss der Rauigkeit auf Adhäsion	31
III.5 Klebeband	32
III.6 Weiterführende Informationen über van-der-Waals-Kräfte und Oberflächenenergien	33
<i>Aufgaben</i>	34
IV Kapillarkräfte	38
IV.1 Oberflächenspannung und Kontaktwinkel	38
IV.2 Hysterese des Kontaktwinkels	41
IV.3 Druck und Krümmungsradius der Oberfläche	41
IV.4 Kapillarbrücken	42
IV.5 Kapillarkraft zwischen einer starren Ebene und einer starren Kugel	43
IV.6 Flüssigkeiten auf rauen Oberflächen	44
IV.7 Kapillarkräfte und Tribologie	45
<i>Aufgaben</i>	45
V Rigorose Behandlung des Kontaktproblems. Hertzscher Kontakt	50
V.1 Deformation eines elastischen Halbraumes unter der Einwirkung von Oberflächenkräften	50
V.2 Hertzsche Kontakttheorie	53
V.3 Kontakt zwischen zwei elastischen Körpern mit gekrümmten Oberfläche	54
V.4 Innere Spannungen beim Hertzschen Kontakt	56
<i>Aufgaben</i>	58
VI Rigorose Behandlung des Kontaktproblems. Adhäsiver Kontakt	62
VI.1 JKR-Theorie	62
<i>Aufgaben</i>	67
VII Kontakt zwischen rauen Oberflächen	70
VII.1 Modell von Greenwood and Williamson	70
VII.2 Plastische Deformation von Kontaktspitzen	75
VII.3 Elektrische Kontakte	76
VII.4 Thermische Kontakte	78
VII.4 Mechanische Steifigkeit von Kontakten	79
VII.6 Dichtungen	79
VII.7 Rauheit und Adhäsion	80
<i>Aufgaben</i>	81

VIII	Tangentiales Kontaktproblem	85
	VIII.1 Deformation eines elastischen Halbraumes unter Einwirkung von Tangentialkräften	86
	VIII.2 Deformation eines elastischen Halbraumes unter Einwirkung von Tangentialspannungsverteilungen	87
	VIII.3 Tangentiales Kontaktproblem ohne Gleiten	88
	VIII.4 Tangentiales Kontaktproblem unter Berücksichtigung des Schlupfes	89
	VIII.5 Abwesenheit des Schlupfes bei einem starren zylindrischen Stempel	92
	<i>Aufgaben</i>	92
IX	Rollkontakt.....	96
	IX.1 Qualitative Diskussion der Vorgänge in einem Rollkontakt.....	97
	IX.2 Spannungsverteilung im stationären Rollkontakt	98
	A. Vorbereitende Schritte	98
	B. Theorie von Carter (1926).....	99
	C. Dreidimensionales Rollkontaktproblem	102
	<i>Aufgaben</i>	103
X	Das Coulombsche Reibungsgesetz	107
	X.1 Einführung	107
	X.2 Haftreibung und Gleitreibung	108
	X.3 Reibungswinkel	109
	X.4 Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Kontaktzeit	109
	X.5 Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Normalkraft	111
	X.6 Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Gleitgeschwindigkeit	112
	X.7 Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Oberflächenrauheit	112
	X.8 Vorstellung von Coulomb über die Herkunft des Reibungsgesetzes.....	113
	X.9 Theorie von Bowden und Tabor	114
	X.10 Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Temperatur	116
	<i>Aufgaben</i>	117
XI	Das Prandtl-Tomlinson-Modell für trockene Reibung	124
	XI.1 Einführung	124
	XI.2 Grundeigenschaften des Prandtl-Tomlinson-Modells	126
	XI.3 Elastische Instabilität.....	129
	XI.4 Supergleiten	132
	XI.5 Nanomaschinen: Konzepte für Mikro- und Nanoantriebe	133
	<i>Aufgaben</i>	136
XII	Reiberregte Schwingungen.....	140
	XII.1 Einführung	140
	XII.2 Reibungsinstabilität bei abfallender Abhängigkeit der Reibungskraft von der Geschwindigkeit.....	141
	XII.3 Instabilität in einem System mit verteilter Elastizität	143
	XII.4 Kritische Dämpfung und optimale Unterdrückung des Quietschens.....	145
	XII.5 Aktive Unterdrückung des Quietschens	147
	XII.6 Festigkeitsaspekte beim Quietschen.....	148
	XII.7 Abhängigkeit der Stabilitätsbedingungen von der Steifigkeit des Systems	149
	XII.8 Sprag-Slip	153
	<i>Aufgaben</i>	154
XIII	Thermische Effekte in Kontakten	158
	XIII.1 Einführung	158
	XIII.2 Blitztemperaturen in Mikrokontakten.....	159
	XIII.3 Thermomechanische Instabilität	160
	<i>Aufgaben</i>	161

XIV Geschmierte Systeme	163
XIV.1 Einführung	163
XIV.2 Strömung zwischen zwei parallelen Platten	164
XIV.3 Hydrodynamische Schmierung	165
XIV.4 „Viskose Adhäsion“	168
XIV.5 Rheologie von Schmiermitteln	170
XIV.6 Grenzschichtschmierung	172
<i>Aufgaben</i>	172
XV. Viskoelastische Eigenschaften von Gummi	176
XV.1 Einführung	176
XV.2 Spannungsrelaxation in Elastomeren	177
XV.3 Komplexer, frequenzabhängiger Schubmodul.....	179
XV.4 Eigenschaften des komplexen Moduls	180
XV.5 Energiedissipation in einem viskoelastischen Material.....	181
XV.6 Messung komplexer Module	182
XV.7 Rheologische Modelle	182
XV.8 Ein einfaches rheologisches Modell für Gummi („Standard Model“)	185
XV.9 Einfluss der Temperatur auf rheologische Eigenschaften	186
XV.10 Masterkurven	187
XV.11 Prony-Reihen	188
<i>Aufgaben</i>	190
XVI Gummireibung und Kontaktmechanik von Gummi.....	192
XVI.1 Einführung	192
XVI.2 Idee zur Berechnung der Reibungskraft	192
XVI.3 Rollwiderstand.....	196
XVI.4 Adhäsiver Kontakt mit Elastomeren.....	198
<i>Aufgaben</i>	200
XVII Verschleiß	205
XVII.1 Einleitung	205
XVII.2 Abrasiver Verschleiß	206
XVII.3 Adhäsiver Verschleiß	208
XVII.4 Bedingungen für verschleißarme Reibung.....	210
XVII.5 Verschleiß als Materialtransport aus der Reibzone	211
XVII.6 Verschleiß von Elastomeren	212
<i>Aufgaben</i>	214
XVIII Reibung unter Einwirkung von Ultraschall.....	216
XVIII.1 Einführung	216
XVIII.2 Einfluss von Ultraschall auf die Reibungskraft aus makroskopischer Sicht ...	217
XVIII.3 Einfluss von Ultraschall auf die Reibungskraft aus mikroskopischer Sicht.....	221
XVIII.4 Experimentelle Untersuchungen der statischen Reibungskraft als Funktion der Schwingungsamplitude	223
<i>Aufgaben</i>	225
XIX Numerische Simulationsmethoden in der Reibungsphysik	227
XIX.1 Einführung	227
XIX.2 Kontakt- und Reibungsproblematik in verschiedenen Simulationsmethoden: Eine Übersicht.....	228
XIX.2.1 Mehrkörpersysteme	228
XIX.2.2 Finite Elemente Methode	229
XIX.2.3 Teilchenmethoden	229

XIX.3 Reduktion von dreidimensionalen Kontaktaufgaben auf eindimensionale	230
XIX.4 Kontakt in einem makroskopischen tribologischen System.....	231
XIX.5 Reduktionsmethode für ein Mehrkontaktproblem	235
XIX.6 Dimensionsreduktion und viskoelastische Eigenschaften	238
XIX.7 Abbildung von Spannungen im Reduktionsmodell	239
XIX.8 Das Berechnungsverfahren in der Reduktionsmethode	240
<i>Aufgaben</i>	241
A. Anhang	245
Weiterführende Literatur	249
Bildernachweis.....	252

I EINFÜHRUNG



I.1 Kontakt- und Reibungsphänomene und ihre Anwendung

Kontaktmechanik und Reibungsphysik sind grundlegende ingenieurwissenschaftliche Disziplinen, die für einen sicheren und energiesparenden Entwurf technischer Anlagen unabdingbar sind. Sie sind von Interesse für unzählige Anwendungen, wie zum Beispiel Kupplungen, Bremsen, Reifen, Gleit- und Kugellager, Verbrennungsmotoren, Gelenke, Dichtungen, Umformung, Materialbearbeitung, Ultraschallschweißen, elektrische Kontakte und viele andere. Ihre Aufgaben reichen vom Festigkeitsnachweis von Kontakt- und Verbindungselementen über die Beeinflussung von Reibung und Verschleiß durch Schmierung oder Materialdesign bis hin zu Anwendungen in der Mikro- und Nanosystemtechnik. Reibung ist ein Phänomen, das die Menschen über Jahrhunderte und Jahrtausende interessiert hat und auch jetzt noch im Zentrum der Entwicklung neuer Produkte und Technologien steht.

Ein klassisches Beispiel für einen Kontakt ist ein Rad-Schiene-Kontakt, bei dem vor allem die Materialfestigkeitsaspekte und die Kraftübertragungseigenschaften von Interesse sind. Kontakte können zur Übertragung von mechanischen Kräften (Schrauben), elektrischem Strom oder Wärme dienen bzw. einen Materialstrom verhindern (Dichtungen). Aber auch der Kontakt zwischen einer Spitze eines Atomkraftmikroskops und der Unterlage oder ein Kontakt zwischen zwei tektonischen Platten sind Beispiele für Reibkontakte. Kontakt- und Reibungsphänomene auf verschiedenen Skalen – von der Nano- bis zur Megaskala haben viel Gemeinsames und können mit ähnlichen Methoden behandelt werden. Kontaktmechanik und Reibungsphysik erweisen sich daher als ein riesiges Gebiet moderner Forschung und Technologie, das von der Bewegung von Motorproteinen und der Muskelkontraktion über die fast unüberschaubare klassische Tribologie bis hin zur Erdbebendynamik und -beeinflussung reicht.

Reibung führt zur Energiedissipation, und die in den Kontaktbereichen immer existierenden extremen Spannungen führen zum Mikrobruch und Verschleiß von Oberflächen. Oft wird angestrebt, die Reibung zu minimieren, um technische Anlagen auf diese Weise energiesparender zu gestalten. Es gibt aber auch viele Situationen, in denen Reibung erforderlich ist. Ohne Reibung könnten wir weder Geigenmusik genießen, noch gehen oder Auto fahren. In unzähligen Fällen soll die Reibung maximiert statt minimiert werden, wie zum Beispiel zwischen Reifen und Straße beim Bremsen. Auch der Verschleiß muss bei weitem nicht immer minimiert werden. Bei der Materialbearbeitung und in der Fertigung kann ein schneller und vor allen Dingen steuerbarer Verschleiß die Grundlage eines technologischen Prozesses sein (z.B. Schleifen, Polieren, Sandstrahlbearbeitung).

Eng mit Reibung und Verschleiß ist auch das Phänomen der Adhäsion verbunden. Dabei kommt es darauf an, inwieweit es uns gelingt, einen intimen, engen Kontakt zwischen zwei Oberflächen zu erreichen. Während in einem makroskopischen Kontakt von „harten Körpern“ (wie Metalle oder Holz) Adhäsion keine nennenswerte Rolle spielt, ist sie im Kontakt, in dem einer der Körper sehr weich ist, sehr wohl spürbar und wird in verschiedenen Haftenrichtungen benutzt. Auch für die Anwendung von Klebern (engl. adhesives) kann man von der Kontaktmechanik viel lernen. In der Mikrotechnik gewinnt Adhäsion noch einmal an Bedeutung: Reibungs- und Adhäsionskräfte stellen in der Mikrowelt ein echtes Problem dar und werden sogar zu einem Begriff zusammengefasst – Sticktion ("sticking" und "friction").

Ein weiteres Phänomen, das mit Adhäsion verwandt ist und in dem vorliegenden Buch diskutiert wird, sind die Kapillarkräfte, die in Kontakten mit geringen Flüssigkeitsmengen auftreten. Bei hochpräzisen Mechanismen wie Uhrwerken reicht bereits die in der Luft enthaltene Feuchtigkeit um Kapillarkräfte zu verursachen, die die Genauigkeit der Uhr massiv stören. Kapillarkräfte können aber auch zur Steuerung des Zuflusses von Schmierung zu den Reibstellen benutzt werden.

In einem Buch über Kontakt und Reibung kann man die oft mit der Reibung zusammenhängenden Geräuschphänomene nicht stillschweigend übergehen. Bremsen, Rad-Schiene-Kontakte und Lager dissipieren nicht nur Energie und Material. Oft quietschen und kreischen sie auch unangenehm oder sogar Gehör schädigend. Der von technischen Systemen verursachte Lärm ist eines der zentralen Probleme heutiger Ingenieurösungen. Die reiberregten Schwingungen hängen sehr eng mit den Eigenschaften der Reibungskräfte zusammen und sind ebenfalls Gegenstand des vorliegenden Buches.

Wenn wir die Wichtigkeit eines tribologischen Gebietes am Geld messen würden, welches in die entsprechenden Ingenieurösungen investiert wird, so würde die Schmierungstechnik bestimmt den ersten Platz einnehmen. Es ist leider nicht möglich, der Schmierung ein entsprechend großen Platz in diesem Buch einzuräumen. Die Grundlagen der hydrodynamischen Schmierung sind aber selbstverständlich ein Gegenstand des Buches.

In der Kontaktmechanik und in der Reibungsphysik geht es letztendlich um unsere Fähigkeit, die Reibungs-, Adhäsions- und Verschleißvorgänge zu beherrschen und nach unseren Wünschen zu gestalten. Dafür ist ein eingehendes Verständnis der Abhängigkeit der Kontakt-, Reibungs- und Verschleißphänomene von Material- und Systemeigenschaften erforderlich.

1.2 Zur Geschichte der Kontaktmechanik und Reibungsphysik

Einen ersten Eindruck über tribologische Anwendungen und ihre Bedeutung kann die Geschichte der Tribologie vermitteln. Den Begriff „*Tribologie*“ hat Peter Jost im Mai 1966 als Bezeichnung des Forschungs- und Ingenieursgebietes vorgeschlagen, welches sich mit Kontakt, Reibung, Schmierung und Verschleiß beschäftigt. Anders als diese Bezeichnung ist die Tribologie selbst uralte. Ihre Anfänge verlieren sich in der geschichtlichen Ferne.

Gewinnung von Feuer durch Reibwärme, Entdeckung des Rades und des Gleitlagers, Benutzung von Flüssigkeiten zur Verminderung der Reibungskräfte und des Verschleißes – all diese „tribologischen Erfindungen“ wurden bereits Jahrtausende vor Christus bekannt¹. In unserer kleinen Übersicht der Geschichte der Tribologie überspringen wir die bis zur Renaissance stattgefundenen Entwicklungen und beginnen mit dem Beitrag von *Leonardo da Vinci*.

In seinem Codex-Madrid I (1495) beschreibt da Vinci das von ihm erfundene Kugellager, die Zusammensetzung einer reibungsarmen Legierung sowie seine experimentellen Untersuchungen der Reibungs- und Verschleißphänomene. Er war der erste Ingenieur, der belastbare quantitative Reibungsgesetze formuliert hat. Da Vinci gelangte zu den Erkenntnissen, die man in der heutigen Sprache über zwei grundlegende Reibungsgesetze ausdrücken kann:

1. Die Reibungskraft ist proportional zur Belastung.
2. Die Reibungskraft ist unabhängig von der scheinbaren Kontaktfläche.

De Facto hat da Vinci als erster den Begriff des Reibungskoeffizienten eingeführt und für ihn den typischen Wert 1/4 experimentell ermittelt.

Wie so oft in der Geschichte der Wissenschaft wurden diese Ergebnisse vergessen und rund 200 Jahre später durch den französischen Physiker *Guillaume Amontons* "wieder entdeckt" (1699). Die Proportionalität der Reibungskraft zur Normalkraft ist daher als "Amontons' Gesetz" bekannt.

Leonard Euler hat sich mit der Reibung sowohl aus mathematischer Sicht als auch experimentell beschäftigt. Er führte die Unterscheidung zwischen der statischen und der kinetischen Reibungskraft ein und löste das Problem der Seil-Reibung – wahrscheinlich das erste in der Geschichte gelöste Kontaktproblem mit Reibung (1750). Er hat als erster die Grundlagen des mathematischen Umganges mit dem Reibungsgesetz für trockene Reibung gelegt und auf diese Weise die weiteren Entwicklungen gefördert. Ihm verdanken wir auch die weit verbreitete Bezeichnung μ für den Reibungskoeffizienten. Euler benutzte die Ideen über die Herkunft der Reibung als Verzahnung von kleinen dreieckigen Unebenheiten, wobei der Reibungskoeffizient gleich der Steigung der Unebenheiten ist. Diese Vorstellung hat in verschiedenen Variationen Jahrhunderte überlebt und wird auch heute – jetzt im Zusammenhang mit Reibung auf atomarer Skala – intensiv als „Tomlinson-Modell“² benutzt. So wird eine von Euler vielleicht nicht erwartete Verknüpfung mit der modernen Nanotribologie hergestellt.

Einen hervorragenden und bis heute aktuellen Beitrag zur Untersuchung trockener Reibung hat der französische Ingenieur *Charles Augustin Coulomb* geleistet. Das Gesetz der trockenen Reibung trägt verdient seinen Namen. Coulomb bestätigte Amontons Ergebnisse und stellte fest, dass die Gleitreibung von der Gleitgeschwindigkeit in erster Näherung unabhängig ist. Er unternahm eine sehr genaue quantitative Untersuchung der trockenen Reibung zwischen festen Körpern in Abhängigkeit von Materialpaarung, Oberflächenbeschaffenheit, Schmierung, Gleitgeschwindigkeit bzw. Standzeit (bei Haftreibung), Feuchtigkeit der Atmosphäre und Temperatur. Erst seit Erscheinen seines Buches „*Theorie des Machines Simples*“ (1781) wurde die Unterscheidung zwischen der Haft- und Gleitkraft quantitativ begründet und hat sich etabliert. Coulomb benutzte die gleichen Modellvorstellungen über die Herkunft der trockenen Reibung wie Euler, führte aber auch einen weiteren Beitrag zur Reibung ein, den wir jetzt als „Adhäsionsbeitrag“ bezeichnen würden. Es war ebenfalls Coulomb, der Abweichungen vom bis dahin bekannten einfachen Reibungsgesetz feststellte. So hat er z.B. herausgefunden, dass die Haftreibungskraft mit

¹ Ausführlichere Informationen zur Geschichte der Tribologie können gefunden werden in: D. Dowson. History of Tribology, Longman Group Limited, London, 1979.

² Das Modell wurde 1928 von Prandtl vorgeschlagen und trägt irrtümlicherweise den Namen von Tomlinson. Dieses Modell ist aber praktisch die mathematische Übersetzung der Vorstellungen von Leonard Euler.

der Zeit nach dem Stillstand wächst. Mit seinen Untersuchungen war Coulomb seiner Zeit weit vorausgegangen. Sein Buch enthält praktisch alle später entstandenen Zweige der Tribologie. Selbst die Bezeichnung des Gerätes zur Messung der Reibungskraft – Tribometer – stammt von Coulomb.

Untersuchungen des Rollwiderstandes haben in der Geschichte keine so prominente Rolle wie die der Gleitreibung gespielt – wahrscheinlich, weil der Rollwiderstand viel kleiner ist als die Gleitreibung und daher nicht so auffällig störend war. Die ersten – und im Wesentlichen auch aus heutiger Sicht korrekten - Vorstellungen über die Natur des Rollwiderstandes beim Befahren von plastisch deformierbaren Körpern stammen von *Robert Hooke* (1685). Dass die Natur des Rollwiderstandes sehr von den Material- und Belastungsparametern abhängt, hat eine erbitterte Diskussion gezeigt, die in den Jahren 1841-42 zwischen *Morin* und *Dupuit* über die Form des Gesetzes für den Rollwiderstand stattfand. Nach *Morin* sollte der Rollwiderstand umgekehrt proportional zum Radradius, nach *Dupuit* umgekehrt proportional zur Quadratwurzel des Radius sein. Aus heutiger Sicht sind beide Ansätze beschränkt korrekt – unter verschiedenen Bedingungen. *Osborne Reynolds* hat als erster die Details des Geschehens direkt im Kontaktgebiet bei einem Rollkontakt experimentell untersucht und festgestellt, dass es bei einem angetriebenen Rad im Kontakt immer Bereiche gibt, in denen die Kontaktpartner haften, und Schlupfgebiete, in denen relatives Gleiten stattfindet. Das war der erste Versuch, den tribologischen Kontakt unter die Lupe zu nehmen und gleichzeitig das Ende einer strengen Unterscheidung zwischen Haft- und Gleitreibung. *Reynolds* hat die Energieverluste beim Rollen mit dem partiellen Gleiten in Zusammenhang gebracht. Eine quantitative Theorie des Rollkontaktes konnte aber erst später durch *Carter* (1926) geschaffen werden, nachdem die Grundlagen der Kontaktmechanik durch *Hertz* bereits geschaffen worden waren.

Seit Jahrhunderten haben die Menschen Reibkontakte geschmiert, um die Reibung zu vermindern“. Aber erst steigende industrielle Anforderungen haben Forscher gezwungen, sich mit der Schmierung experimentell und theoretisch auseinanderzusetzen. 1883 führte *N. Petrov* seine experimentellen Untersuchungen von Gleitlagern durch und formulierte die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten der hydrodynamischen Schmierung. 1886 publizierte *Reynolds* seine Theorie der hydrodynamischen Schmierung. Die von ihm hergeleitete „*Reynoldssche Gleichung*“ bildet auch heute noch die Berechnungsgrundlage für hydrodynamisch geschmierte Systeme. Nach der hydrodynamischen Schmierungstheorie hat der Reibungskoeffizient die Größenordnung des Verhältnisses der Schmierfilmdicke h zur Länge L des tribologischen Kontaktes $\mu \approx h/L$. Dies gilt allerdings nur, bis die Oberflächen so nahe aneinander kommen, dass die Dicke des Schmierfilms vergleichbar mit der Rauigkeit der Oberflächen wird. Das System ist nun im Bereich der Mischreibung, die ausführlich durch *Striebeck* (1902) untersucht wurde. Die Abhängigkeit der Reibungskraft von der Gleitgeschwindigkeit mit einem typischen Minimum wird *Striebeck-Kurve* genannt.

Bei noch größeren Lasten bzw. einer nicht ausreichenden Schmierung kann es zu den Bedingungen kommen, bei denen zwischen den Körpern die letzten wenigen Molekularschichten des Schmiermittels bleiben. Die Gesetzmäßigkeiten dieser Grenzschichtschmierung wurden von *Hardy* (1919-22) erforscht. Er zeigte, dass bereits eine Molekularschicht eines Fettes die Reibungskraft und den Verschleiß drastisch beeinflusst. *Hardy* hat die Abhängigkeit der Reibungskraft vom Molekulargewicht des Schmiermittels gemessen und auch richtig erkannt, dass die Moleküle der letzten Molekularschicht an der Metalloberfläche haften. Die verminderte Reibung ist der Wechselwirkung der Polymermoleküle des Schmiermittels zu verdanken, die man heute manchmal auch als „haftende Flüssigkeit“ bezeichnet.

Ein weiterer Fortschritt unserer Kenntnisse sowohl über Kontaktmechanik als auch über trockene Reibung in der Mitte des 20. Jahrhunderts ist mit den Namen von *Bowden* und *Tabor* verbunden. Sie haben als Erste auf die Wichtigkeit der Rauheit der kontaktierenden

Körper hingewiesen. Dank der Rauheit ist die wahre Kontaktfläche zwischen Reibpartnern typischerweise um Größenordnungen kleiner als die scheinbare Fläche. Diese Einsicht veränderte schlagartig die Richtung vieler tribologischer Untersuchungen und hat wieder die alten Ideen von Coulomb über Adhäsion als möglichen Reibungsmechanismus ins Spiel gebracht. 1949 haben Bowden und Tabor ein Konzept vorgeschlagen, welches die Herkunft der Gleitreibung zwischen reinen metallischen Oberflächen durch Bildung und Scherung von Schweißbrücken erklärt. Der Reibungskoeffizient ist nach diesen Vorstellungen in etwa gleich dem Verhältnis der Schubfestigkeit zur Härte und müsste für alle isotropen, plastischen Materialien etwa $1/6$ betragen. Für viele nicht geschmierten metallischen Paarungen (z.B. Stahl gegen Stahl, Stahl gegen Bronze, Stahl gegen Grauguss u.a.) hat der Reibungskoeffizient tatsächlich die Größenordnung $\mu \sim 0.16$.

Die Arbeiten von Bowden und Tabor haben eine Reihe von Theorien zur Kontaktmechanik von rauen Oberflächen ausgelöst. Als Pionierarbeiten auf diesem Gebiet sollen vor allem die Arbeiten von Archard erwähnt werden, der zum Schluss gekommen ist, dass auch im Kontakt von elastischen, rauen Oberflächen die Kontaktfläche ungefähr proportional zur Normalkraft ist. Weitere wichtige Beiträge sind mit den Namen Greenwood und Williamson (1966), Bush (1975) und Persson (2002) verbunden. Das Hauptergebnis dieser Arbeiten ist, dass die wahre Kontaktfläche bei rauen Oberflächen im groben proportional zur Normalkraft ist, während die Bedingungen in einzelnen Mikrokontakten (Druck, Größe des Mikrokontaktes) nur schwach von der Belastung abhängen.

Mit der Entwicklung der Automobilindustrie und gestiegenen Geschwindigkeiten und Leistungen hat die Gummireibung an technischer Bedeutung gewonnen. Das Verständnis der Mechanismen der Reibung von Elastomeren, und vor allen Dingen die heute allgemein anerkannte Tatsache, dass Elastomerreibung mit Volumenenergieverlusten im Material und somit mit seiner Rheologie verbunden sind, verdanken wir den klassischen Arbeiten von Grosch (1962).

Kontaktmechanik bildet heute sicherlich die Grundlage für das Verständnis von Reibungsphänomenen. In der Geschichte wurden aber die Reibungsphänomene früher und gründlicher untersucht als die rein kontaktmechanischen Aspekte. Die Entwicklung der Eisenbahn war sicherlich einer der Auslöser des Interesses für genaue Berechnungen der Beanspruchungsbedingungen in Kontakten, da im Rad-Schiene-Kontakt die Spannungen an die Grenzen der Belastbarkeit des Stahls gelangen.

Die klassische Kontaktmechanik ist vor allem mit dem Namen von *Heinrich Hertz* verbunden. 1882 löste Hertz das Problem des Kontaktes zwischen zwei elastischen Körpern mit gekrümmten Oberflächen. Dieses klassische Ergebnis bildet auch heute eine Grundlage der Kontaktmechanik. An dieser Stelle sei bemerkt, dass es fast ein Jahrhundert gedauert hat bis *Johnson, Kendall und Roberts* eine ähnliche Lösung für einen adhäsiven Kontakt gefunden haben (JKR-Theorie). Dies mag an der allgemeinen Erfahrung liegen, dass Festkörper nicht adhieren. Erst mit der Entwicklung der Mikrotechnik stießen Ingenieure auf das Problem der Adhäsion. Fast gleichzeitig haben *Derjagin, Müller und Toporov* eine andere Theorie eines adhäsiven Kontaktes entwickelt. Nach einer anfänglichen heftigen Diskussion ist Tabor zur Erkenntnis gekommen, dass beide Theorien korrekte Grenzfälle des allgemeinen Problems sind.

Erstaunlich ist, dass die Verschleißphänomene trotz ihrer offensichtlichen Wichtigkeit erst ziemlich spät untersucht wurden. Die Ursache dieser Verzögerung mag in der Tatsache liegen, dass Verschleiß maßgeblich durch Wechselwirkungen von Mikrokontakten bestimmt wird, die erst nach den Arbeiten von Bowden und Tabor zum Objekt tribologischer Forschung geworden sind. Das Gesetz des abrasiven Verschleißes – der Verschleiß ist proportional zur Belastung, dem zurückgelegten Weg und umgekehrt proportional zur Härte des weicheren Kontaktpartners – wurde durch ausführliche experimentelle Untersuchungen von *M. Kruschov* (1956) festgestellt und später auch von *Archard* bestätigt (1966). Die

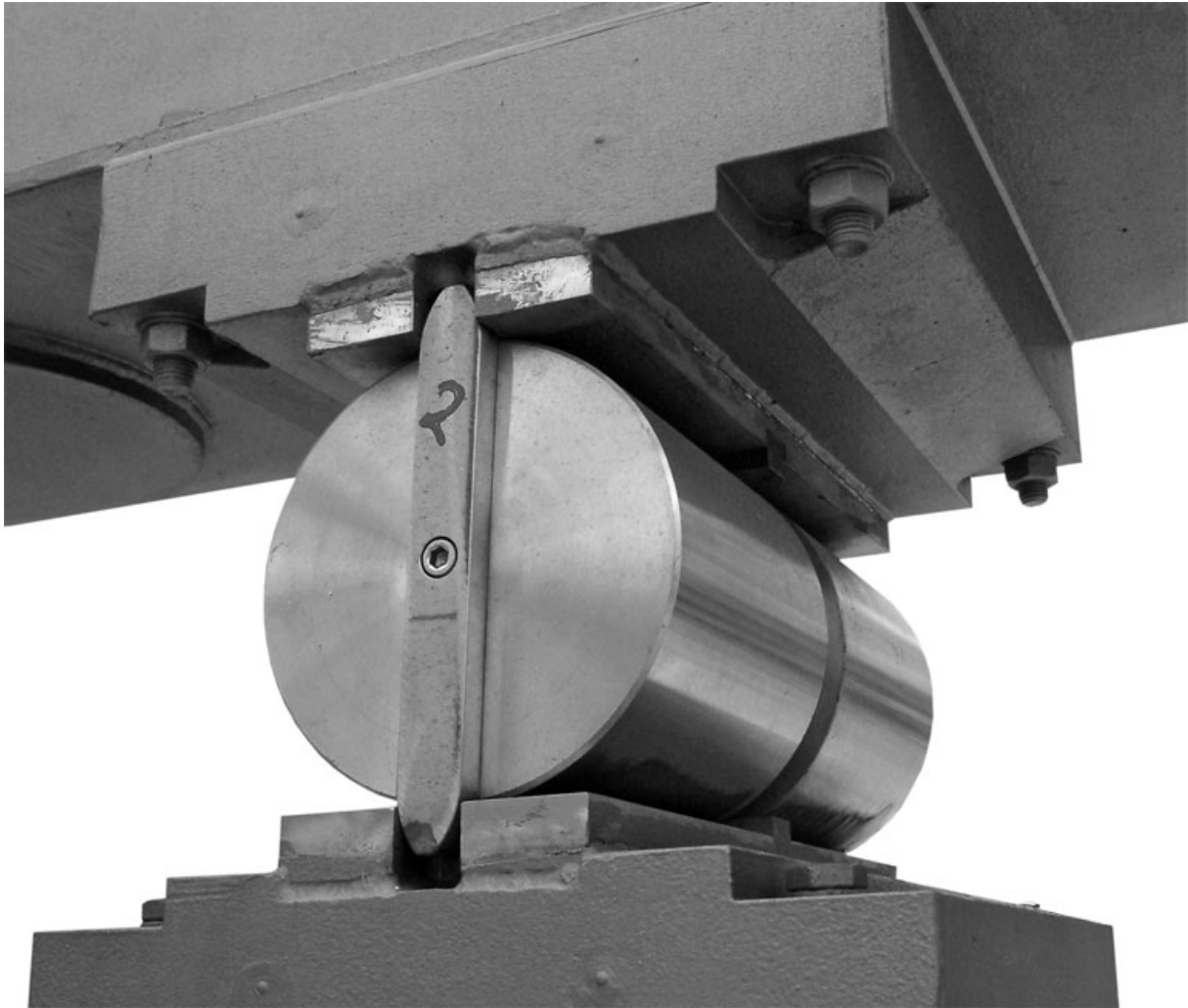
Untersuchung der Gesetzmäßigkeiten des adhäsiven Verschleißes – für den die gleichen Gesetzmäßigkeiten gelten, wie für den abrasiven Verschleiß – sind mit den Namen von *Tabor* und *Rabinovicz* verbunden. Trotz dieser Untersuchungen gehören Verschleißmechanismen – besonders unter den „verschleißarmen“ Bedingungen – auch heute noch zu den am wenigsten verstandenen tribologischen Phänomenen.

Seit den 90er Jahren des 20. Jahrhunderts haben Kontaktmechanik und Reibungsphysik eine Wiedergeburt erlebt. Die Entwicklung experimenteller Methoden zur Untersuchung von Reibungsprozessen auf atomarer Ebene (Atomkraftmikroskop, Friction-Force-Mikroskop, Quartz-Kristall-Mikrowaage, surface force apparatus) und numerischer Simulationsmethoden haben in dieser Zeit ein schnelles Anwachsen der Anzahl von Forschungsarbeiten im Bereich der Reibung von Festkörpern hervorgerufen. Auch die Entwicklung der Mikrotechnik hat wesentlich zum großen Interesse an der Kontaktmechanik und Reibungsphysik beigetragen. Experimentatoren bekamen die Möglichkeit, gut definierte Systeme unter streng kontrollierten Bedingungen zu untersuchen (z.B. die Möglichkeit, die Dicke einer Schicht und die relative Verschiebung von festen Oberflächen mit Genauigkeiten von Bruchteilen eines interatomaren Abstandes zu kontrollieren). Zwischen der klassischen Tribologie und der Nanotribologie gibt es aber eine Lücke, die bisher nicht gefüllt wurde.

I.3 Aufbau des Buches

Kontakt und Reibung gehen immer Hand in Hand und sind in realen Systemen auf vielerlei Weise verflochten. In unserer theoretischen Abhandlung müssen wir sie zunächst trennen. Wir beginnen unsere Behandlung der Kontakt- und Reibungsphänomene mit der Kontaktmechanik. Diese beginnt wiederum mit einer qualitativen Analyse, die uns ein vereinfachtes, aber umfassendes Verständnis der einschlägigen Phänomene liefert. Erst danach gehen wir zur rigorosen Behandlung von Kontaktproblemen und anschließend zu Reibungsphänomenen, Schmierung und Verschleiß über.

II QUALITATIVE BEHANDLUNG DES KONTAKTPROBLEMS – NORMALKONTAKT OHNE ADHÄSION



Wir beginnen unsere Betrachtung von Kontaktphänomenen mit dem *Normalkontaktproblem*. Bei einem Normalkontaktproblem handelt es sich um zwei Körper, die durch Anpresskräfte *senkrecht zu ihrer Oberfläche* in Berührung gebracht werden. Ein prominentes Beispiel ist das Rad auf einer Schiene. Die zwei wichtigsten Zusammenhänge, welche die Theorie eines Normalkontakts liefern soll, sind:

(1) Der Zusammenhang zwischen der Anpresskraft und der Normalverschiebung der Körper, welcher die Steifigkeit des Kontaktes und somit die dynamischen Eigenschaften des Gesamtsystems mitbestimmt und

(2) die im Kontaktgebiet auftretenden Spannungen, die für den Festigkeitsnachweis erforderlich sind.

Ohne Berührung gibt es keine anderen Kontaktphänomene, keine Reibung und keinen Verschleiß. In diesem Sinne kann man den Normalkontakt als eine Grundvoraussetzung für alle anderen tribologischen Phänomene betrachten. Dabei ist zu bemerken, dass es im Allgemeinen selbst bei einem Normalkontakt eine relative Bewegung von Oberflächen in *tangentialer* Richtung geben kann – aufgrund der unterschiedlichen Querkontraktion kontaktierender Körper. Dadurch kommen auch beim Normalkontaktproblem Reibungskräfte in den Grenzflächen ins Spiel. Wenn wir berücksichtigen, dass die Reibungskräfte selbst wesentlich durch den Kontakt zwischen Mikrorauigkeiten der Oberflächen bestimmt sind, sehen wir, dass Normal-, Tangentialbeanspruchungen und Reibung bereits im einfachsten

Kontaktproblem auf verschiedenen Betrachtungsskalen auf komplizierte Weise verflochten sind. In einer ersten Näherung wollen wir uns von diesen Komplikationen abstrahieren und untersuchen das *reine Normalkontaktproblem* indem wir annehmen, dass in der Kontaktfläche keine Reibungskräfte wirken. Auch die immer vorhandenen Anziehungskräfte zwischen Oberflächen – Adhäsion – werden zunächst vernachlässigt.

Eine analytische oder numerische Analyse von Kontaktproblemen ist auch in den einfachsten Fällen sehr kompliziert. Ein qualitatives Verständnis von Kontaktproblemen dagegen lässt sich mit sehr einfachen Mitteln erreichen. Wir beginnen daher unsere Diskussion mit Methoden zur qualitativen Analyse von Kontaktphänomenen, die in vielen Fällen auch für zuverlässige quantitative Abschätzungen benutzt werden können. Eine rigorose Behandlung der wichtigsten klassischen Kontaktprobleme folgt in weiteren Kapiteln. Wir werden eine Reihe von Kontaktproblemen zwischen Körpern verschiedener Form untersuchen, die oft als Bausteine für kompliziertere Kontaktprobleme gebraucht werden können.

II.1 Materialeigenschaften

Dieses Buch setzt die Bekanntschaft des Lesers mit den Grundlagen der Elastizitätstheorie voraus. In diesem Abschnitt fassen wir nur Definitionen von wichtigsten Materialparametern zusammen, die für eine qualitative Untersuchung von kontaktmechanischen Fragestellungen von Bedeutung sind. Diese Zusammenfassung ersetzt nicht die allgemeinen Definitionen und Gleichungen der Elastizitäts- und der Plastizitätstheorie.

(a) *Elastische Eigenschaften.* In einem einachsigen Zugversuch wird ein schlanker Stab mit konstantem Querschnitt A und der Anfangslänge l_0 um Δl gedehnt. Das Verhältnis der Zugkraft zur Querschnittsfläche ist die Zugspannung

$$\sigma = \frac{F}{A}. \quad (\text{II.1})$$

Das Verhältnis der Längenänderung zur Anfangslänge ist die Zugdehnung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (\text{II.2})$$

Ein typisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm für viele Metalle und Nichtmetalle ist in *Abbildung II.1* dargestellt. Bei kleinen Spannungen ist diese proportional zur Deformation

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (\text{II.3})$$

Der Proportionalitätskoeffizient E ist der *Elastizitätsmodul* des Stoffes. Mit der Längsdehnung hängt eine Querkontraktion des Materials zusammen, die durch die Poissonzahl (oder Querkontraktionskoeffizient) ν charakterisiert wird. Einem *inkompressiblen Medium* entspricht $\nu = 1/2$.

Auf ähnliche Weise wird der Schubmodul als Proportionalitätskoeffizient zwischen der Schubspannung und der von ihr verursachten Scherdeformation definiert. Der Schubmodul hängt mit dem Elastizitätskoeffizienten und der Poissonzahl gemäß

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{II.4})$$

zusammen. Das Verhältnis der Spannung zur Volumenänderung bei allseitigem Druck wird Kompressionsmodul K genannt:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (\text{II.5})$$

Im elastisch deformierten Körper ist potentielle Energie gespeichert, deren *Energiedichte* E (Energie pro Volumeneinheit) sich wie folgt berechnet:

$$E = \frac{1}{2} \varepsilon \sigma = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E} . \quad (\text{II.6})$$

Bei Scherdeformation gilt

$$E = \frac{1}{2} G \varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2G} . \quad (\text{II.7})$$

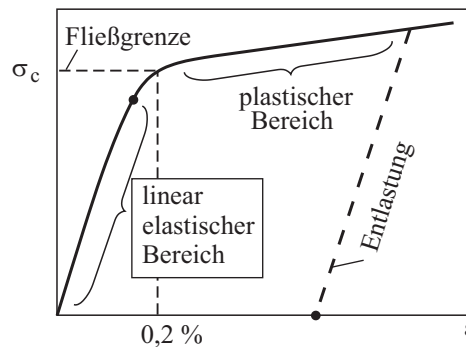


Abbildung II.1. Schematische Darstellung eines Spannungs-Dehnungs-Diagramms für viele Metalle und Nichtmetalle

(b) *Plastische Eigenschaften.* Nach dem Erreichen der *Fließgrenze* weicht das Spannungs-Dehnungs-Diagramm abrupt von dem ursprünglichen linearen Verlauf ab und geht im weiteren Verlauf fast horizontal: Der Stoff wird plastisch deformiert. Die plastische Deformation wird dadurch gekennzeichnet, dass nach der Entlastung eine Restdeformation bleibt.

Der Übergang vom elastischen zum plastischen Verhalten ist in der Regel schnell aber kontinuierlich, so dass sich keine eindeutige „Fließgrenze“ definieren lässt. Vereinbarungsgemäß wird als *Fließgrenze* σ_c die Spannung angenommen, bei der die bleibende Deformation 0,2% beträgt.

Die Fließgrenze hängt vom Deformationszustand des Materials ab. Für Reibungsphänomene ist der *stark deformationsverfestigte* Zustand maßgebend, den man in der Oberflächenschicht nach einer tribologischen Beanspruchung in der Regel findet. Das bedeutet, dass wir in tribologischen Anwendungen unter der Fließgrenze in der Regel den Grenzwert dieses Parameters im stark verfestigten Zustand verstehen. Dementsprechend findet bei Deformation keine weitere wesentliche Verfestigung statt und das Material kann in erster Näherung als elastisch-ideal plastisch betrachtet werden.

Eine einfache Methode zur Bestimmung der Fließgrenze eines elastisch-ideal plastischen Mediums ist die *Härtemessung*. Sie besteht im Eindringen eines harten Indenters in die zu untersuchende Oberfläche (*Abbildung II.2*). Das Verhältnis der Normalkraft zur Fläche des Eindrucks ist die Eindruckhärte oder einfach die *Härte* des Materials¹:

$$\sigma_0 = \frac{F_N}{A} \quad (\text{II.8})$$

¹ Die Härtewerte nach Vickers und nach Brinell stimmen mit der so definierten Eindruckhärte bis zu einem konstanten Koeffizienten überein: Die Härte nach Vickers ist gleich etwa 0,1 der oben definierten Eindruckhärte. Wir werden in diesem Buch nur die Definition (II.8) benutzen.

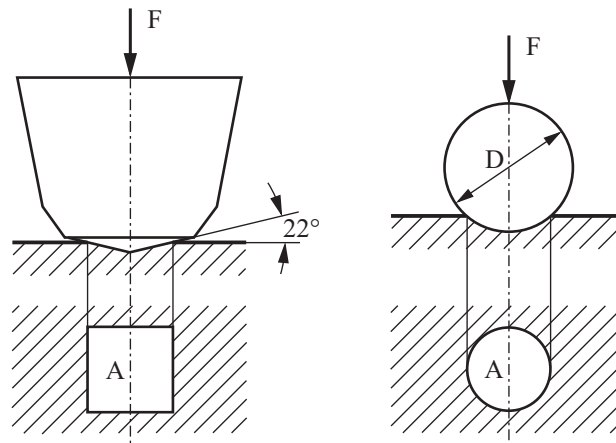


Abbildung II.2. Härtemessung nach Vickers und nach Brinell

Tabor hat sowohl theoretisch als auch experimentell gezeigt², dass in den meisten Fällen die Härte etwa das Dreifache der Fließgrenze beträgt:

$$\sigma_0 \approx 3\sigma_c. \quad (\text{II.9})$$

Die Härtemessung spielt eine zentrale Rolle in der tribologischen Charakterisierung von Werkstoffen, da tribologische Prozesse im Wesentlichen durch Wechselwirkung von Mikrorauigkeiten bestimmt werden und diese nach ihrer Geometrie sehr ähnlich einem Härtetest sind. Die Eindringhärte hängt von der Form des Indenters nur schwach ab. In erster Näherung kann man diese Abhängigkeit vernachlässigen.

Verschiedene Materialeigenschaften, die für die Kontaktmechanik und Reibung von Interesse sind, wie Elastizitätsmodul, Härte, thermischer Dehnungskoeffizient und Oberflächenenergie weisen starke Korrelationen auf. Umfangreiche experimentelle Daten hierfür können im exzellenten Buch von Ernest Rabinowicz „Friction and wear of materials“ gefunden werden³.

II.2 Einfache Kontaktaufgaben

Am einfachsten können solche Kontaktaufgaben gelöst werden, bei denen die Deformation eindeutig aus den geometrischen Vorgaben folgt. Das ist der Fall in den ersten vier nachfolgenden Beispielen.

(1) Parallelepiped

Das einfachste Kontaktproblem ist der Kontakt zwischen einem rechtwinkligen Parallelepiped und einer glatten, reibungsfreien, starren Ebene (*Abbildung II.3*). Beim Anpressen an die Ebene wird sich der Körper elastisch deformieren. Definieren wir die „Eindrucktiefe“ d als die Strecke, die das Parallelepiped unter die Ebene „eindringen“ würde, falls die Ebene keinen Widerstand leisten würde.

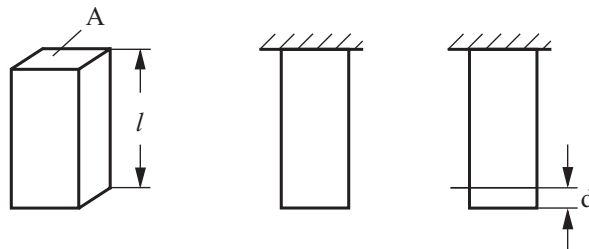


Abbildung II.3. Kontakt zwischen einem elastischen Parallelepiped und einer starren Ebene

² Tabor, D. The Hardness of Metals, Oxford University Press, Oxford, 1951.

³ E. Rabinowicz, Friction and wear of materials. Second Edition. John Wiley & Sons, inc., 1995.

In Wirklichkeit kann der Körper unter das Niveau der starren Ebene nicht eindringen und wird um den Betrag d deformiert. Ist die Länge des Parallelepipeds viel größer als seine Breite, so liegt ein einachsiger Spannungszustand vor und die dabei entstehende elastische Kraft ist gleich

$$F = EA \frac{d}{l} \quad (\text{II.10})$$

E ist hier der Elastizitätsmodul, A der Flächeninhalt des Querschnitts, l die Länge des Parallelepipeds. Die Kraft ist in diesem Fall proportional zu der Eindringtiefe d .

(2) Dünne Schicht

Ist die Länge des Parallelepipeds viel kleiner als seine Breite (Abbildung II.4), so kann sich das Medium nicht in der Querrichtung deformieren und es liegt eine *einachsige Deformation* vor. In diesem Fall folgt aus der Elastizitätstheorie

$$F = \tilde{E}A \frac{d}{l} \quad (\text{II.11})$$

mit

$$\tilde{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (\text{II.12})$$

Für Metalle gilt $\nu \approx 1/3$, so dass $\tilde{E} \approx 1,5E$ ist. Für Elastomere, die als fast nicht kompressible Medien angesehen werden können, ist $\nu \approx 1/2$ und der Modul für einseitige Kompression $\tilde{E} \approx K$ ist viel größer E (um ca. 3 Größenordnungen):

$$\tilde{E} \approx K \gg E, \quad \text{für Elastomere.} \quad (\text{II.13})$$

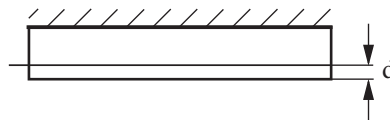


Abbildung II.4 Kontakt zwischen einer dünnen elastischen Schicht und einer starren Ebene.

(3) Sphärischer Aufkleber

Als nächstes untersuchen wir den Kontakt zwischen einem dünnen, sphärischen, elastischen Aufkleber auf einer starren Unterlage und einer starren Ebene (Abbildung II.5).

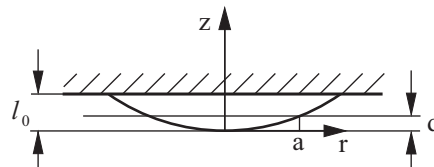


Abbildung II.5. Kontakt zwischen einem elastischen sphärischen Aufkleber und einer starren Ebene

Die maximale Dicke des Aufklebers sei l_0 und der Krümmungsradius R . Den Radius des Kontaktgebietes bezeichnen wir mit a . Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass in dem uns interessierenden Bereich der Anpresskräfte folgende geometrische Beziehungen erfüllt sind: $d \ll l_0$, $l_0 \ll a$. In diesem Fall wird sich jedes einzelne Element des Aufklebers einachsig deformieren. Für die einachsige elastische Deformation ist der Koeffizient der einseitigen Kompression \tilde{E} (II.12) maßgebend.

Die Form eines sphärischen Aufklebers mit dem Krümmungsradius R kann in der Nähe des Minimums als

$$z = -\sqrt{R^2 - r^2} + R \approx \frac{r^2}{2R} \quad (\text{II.14})$$

dargestellt werden. Der *Abbildung II.5* kann man leicht entnehmen, dass der Zusammenhang zwischen dem Radius a des Kontaktgebietes und der Eindringtiefe d durch die Bedingung $d = a^2 / 2R$ gegeben wird. Daraus folgt für den Kontaktradius

$$a = \sqrt{2Rd} . \quad (\text{II.15})$$

Die vertikale Verschiebung der Oberfläche bei der Koordinate r ist gleich $\Delta l = d - r^2 / 2R$. Die entsprechende elastische Deformation berechnet sich somit zu

$$\varepsilon(r) = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{d - r^2 / 2R}{l_0} . \quad (\text{II.16})$$

Die Berechnungen der Spannung und der im Kontaktgebiet wirkenden Gesamtkraft ergeben schließlich:

$$\sigma(r) = \tilde{E}\varepsilon(r), \quad F = \tilde{E} \int_0^a 2\pi r \left(\frac{d - r^2 / 2R}{l_0} \right) dr = \tilde{E} \frac{\pi}{l_0} R d^2 . \quad (\text{II.17})$$

In diesem Fall ist die Kontaktkraft proportional zum Quadrat der Eindringtiefe. Die größte Spannung (im Zentrum des Kontaktgebietes) ist gleich

$$\sigma(0) = \tilde{E} \frac{d}{l_0} = \left(\frac{\tilde{E} F}{\pi l_0 R} \right)^{1/2} . \quad (\text{II.18})$$

(4) Kontakt zwischen einer dünnen elastischen Schicht auf einer starren zylindrischen Unterlage und einer starren Ebene

Ein weiteres System, das in vielerlei Hinsicht interessant ist, ist ein starrer Zylinder der Länge L , der mit einer dünnen elastischen Schicht (Dicke l_0) bedeckt ist (*Abbildung II.6*). Unter der Annahme, dass die Eindringtiefe viel kleiner und der Kontaktradius viel größer als die Schichtdicke ist, haben wir es auch in diesem Fall mit einer einachsigen Deformation zu tun. Die Verschiebung von Oberflächenpunkten berechnet sich zu $u_z = d - x^2 / 2R$. Für die Deformation gilt

$$\varepsilon(x) = \frac{u_z}{l_0} = \frac{d - x^2 / 2R}{l_0} . \quad (\text{II.19})$$

Die gesamte Kontaktkraft berechnet sich dann zu

$$F = 2 \int_0^{\sqrt{2Rd}} \tilde{E} L \left(\frac{d - x^2 / 2R}{l_0} \right) dx = \frac{4}{3} 2^{1/2} \frac{\tilde{E} L R^{1/2}}{l_0} d^{3/2} \quad (\text{II.20})$$

Die maximale Spannung (in der Mitte des Kontaktgebietes) beträgt

$$\sigma(0) = \left(\frac{9F^2 \tilde{E}}{32L^2 R l_0} \right)^{1/3} . \quad (\text{II.21})$$

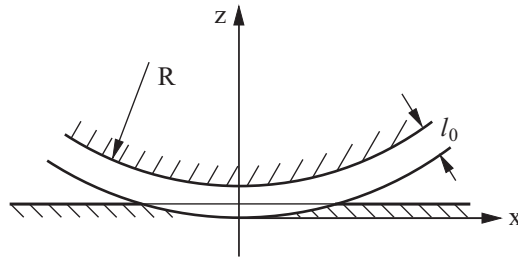


Abbildung II.6. Zylinder mit einer elastischen Schicht im Kontakt mit einer starren Ebene

II.3 Qualitative Abschätzungsmethode für Kontakte mit einem dreidimensionalen elastischen Kontinuum

Kontakt zwischen einem starren zylindrischen Indenter und einem elastischen Körper

Betrachten wir nun einen starren zylindrischen Indenter in Kontakt mit einem *elastischen Halbraum* (Abbildung II.7 a). Am Beispiel dieser Aufgabe erklären wir die wichtigste Idee, die in der Kontaktmechanik für qualitative Abschätzungen benutzt wird.

Wirkt eine Spannungsverteilung auf ein endliches Gebiet der Oberfläche mit einer charakteristischen Länge r (Abbildung II.7 b), so haben die Deformation und die Spannung im gesamten Volumen mit den Abmessungen r in allen drei räumlichen Dimensionen die gleiche Größenordnung. Außerhalb dieses "stark deformierten Volumens" fallen die Deformation und die Spannung nach dem Gesetz $\propto r^{-2}$ ab. Das führt dazu, dass in dreidimensionalen Systemen das genannte Volumen $\sim r^3$ den größten Beitrag in alle energetischen oder Kraftbeziehungen liefert⁴.

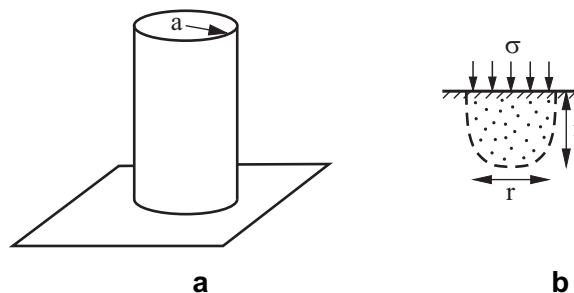


Abbildung II.7. (a) Kontakt zwischen einem starren zylindrischen Indenter und einem elastischen Halbraum; (b) Stark deformierter Bereich des elastischen Halbraumes

Für eine erste grobe qualitative Abschätzung reicht es daher anzunehmen, dass die Deformation im genannten Volumen konstant ist und dass nur dieses Volumen deformiert wird. Selbstverständlich ist das nur eine sehr grobe Darstellung der in Wirklichkeit kontinuierlichen Verteilung von Deformationen und Spannungen im Kontinuum. Sie liefert aber in den meisten Fällen bis auf einen konstanten numerischen Faktor der Größenordnung 1, der entweder durch analytische oder durch numerische Simulationen bestimmt werden kann, den korrekten qualitativen Zusammenhang zwischen der Kontaktkraft und der Eindringtiefe sowie für den Kontaktradius.

⁴ Dass die charakteristische "Eindringtiefe" der Spannungen und Deformationen dieselbe Größenordnung haben muss wie die Abmessungen r des Druckgebietes folgt bereits aus Dimensionsgründen. In der Tat enthält die Gleichgewichtsgleichung der Elastizitätstheorie keine Faktoren mit der Dimension Länge. Die Lösung einer beliebigen Gleichgewichtsaufgabe darf daher keine Längenparameter enthalten außer der Länge, die durch die Randbedingungen vorgegeben wurde.

Wenden wir diese einfache Abschätzungsregel auf unser Beispiel mit dem starren Indenter an. Ist der Durchmesser des Zylinders gleich $2a$, so ist ein Volumen mit den Abmessungen $2a$ in allen drei Richtungen stark deformiert. Da dieses Volumen um d eingedrückt wird, schätzen wir die Deformation als $\varepsilon \approx d/2a$ ab. Für die Spannung ergibt sich $\sigma \approx E\varepsilon \approx Ed/2a$. Für die Kraft $F \approx \sigma(2a)^2 \approx 2Eda$: Die Kontaktkraft ist proportional zur Eindringtiefe und zum Kontaktradius a . Es ist interessant, diese Abschätzung mit der exakten Lösung der Aufgabe (s. Kapitel V) zu vergleichen. Das exakte Ergebnis lautet

$$F = 2E^* da \quad (II.22)$$

mit $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$. Für metallische Werkstoffe ($\nu \approx 1/3$) beträgt der Unterschied zwischen der Abschätzung und dem exakten Ergebnis nur 10%. Dieses Beispiel zeigt eindrucksvoll, dass die beschriebene Abschätzungsmethode nicht nur für qualitative sondern auch für relativ gute quantitative Abschätzungen benutzt werden kann.

Gleichung (II.22) besagt, dass die Eindringtiefe proportional zur Normalkraft ist. Der Koeffizient zwischen der Kraft F und der Verschiebung d wird *Steifigkeit des Kontaktes* genannt:

$$c = 2E^* a \quad (II.23)$$

Wir unterstreichen, dass diese Steifigkeit proportional zum *Radius* des Kontaktes ist (nicht der Kontaktfläche!).

Kontakt zwischen einer elastischen Kugel und einer starren Ebene

Betrachten wir den Kontakt zwischen einer elastischen Kugel mit dem Radius R und einer starren Ebene. Auch in diesem Fall beschränken wir uns an dieser Stelle auf eine qualitative Abschätzung. Eine rigorose Abhandlung befindet sich im Kapitel V.

Gäbe es keine elastische Wechselwirkung zwischen der Kugel und der Fläche, so hätten wir bei der Eindringtiefe d den Kontaktradius $a \approx \sqrt{2Rd}$ und die Kontaktfläche

$$A = \pi a^2 \approx 2\pi R d. \quad (II.24)$$

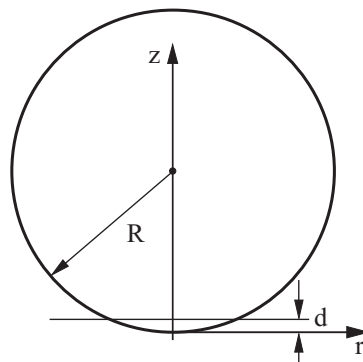


Abbildung II.8. Zum Hertz'schen Kontaktproblem

Nach der oben formulierten Abschätzungsregel sind die Abmessungen des stark deformierten Bereichs von der gleichen Größenordnung wie der Kontaktdurchmesser $2a$. Die Größenordnung der elastischen Deformation in diesem Gebiet ist $\varepsilon \approx d/2a$, die Größenordnung der Spannung ist somit gleich $\sigma \approx E \frac{d}{2a}$. Für die Kraft ergibt sich

$F = \sigma A \approx \frac{Ed}{2a} \pi a^2 \approx \frac{Ed}{2} \pi \sqrt{2Rd} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} Ed^{3/2} R^{1/2}$. Die Kraft ist somit proportional zu $d^{3/2}$. Dies ist zu vergleichen mit dem exakten Ergebnis

$$F = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2} \quad (\text{II.25})$$

Sie unterscheiden sich um einen Faktor $\approx 1,5$.

Wird die Kugel plastisch deformiert, so gilt der Zusammenhang (II.8) zwischen der Normalkraft und der Kontaktfläche⁵

$$\sigma_0 = \frac{F_N}{A}. \quad (\text{II.26})$$

Unter Berücksichtigung von (II.24) ergibt sich

$$F_N = 2\pi\sigma_0 R d. \quad (\text{II.27})$$

Im plastischen Bereich ist die Kraft proportional zur Eindringtiefe. Die mittlere Spannung bleibt dabei konstant und ist gleich der Härte des Materials.

Kontakt zwischen einem elastischen Zylinder und einer starren Ebene

Als nächstes untersuchen wir den Kontakt zwischen einem elastischen Zylinder und einer starren Ebene (*Abbildung II.9*). Der Kontaktradius wird wie im Fall einer Kugel mit $a \approx \sqrt{2Rd}$ abgeschätzt. Die Größenordnung der Spannung ist $Ed/2a$ und der Kontaktfläche $2La$, wobei L die Länge des Zylinders ist. Für die Kraft ergibt sich $F \approx \frac{Ed}{2a} 2La = ELd$. Das exakte Ergebnis lautet

$$F = \frac{\pi}{4} E^* L d. \quad (\text{II.28})$$

Auch in diesem Fall unterscheidet sich das exakte Ergebnis nur geringfügig von der einfachen Abschätzung. Die Kraft ist in diesem Fall linear proportional zur Eindringtiefe und hängt nicht vom Radius des Zylinders ab. Auch in diesem Fall lässt sich die Kontaktsteifigkeit als Koeffizient zwischen der Kraft und der vertikalen Verschiebung definieren:

$$c = \frac{\pi}{4} E^* L \quad (\text{II.29})$$

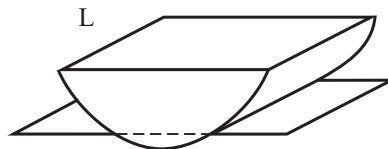


Abbildung II.9. Kontakt zwischen einem zylindrischen Körper und einer starren Ebene

Im plastischen Bereich gilt

$$F_N \approx \sigma_0 2aL \approx 2^{3/2} \sigma_0 L R^{1/2} d^{1/2}. \quad (\text{II.30})$$

Kontakt zwischen einem elastischen Kegel und einer starren Ebene

Der Kontaktradius bestimmt sich in diesem Fall aus der Bedingung $a \tan \theta = d$ (*Abbildung II.10*). Die Deformation wird zu $\varepsilon \approx d/2a = \frac{1}{2} \tan \theta$ abgeschätzt. Die mittlere Spannung hat die Größenordnung

$$\sigma \approx E\varepsilon \approx \frac{1}{2} E \tan \theta \quad (\text{II.31})$$

⁵ Für den Normalkontakt ist es offenbar ohne Bedeutung, ob es sich um einen Kontakt einer elastischen Kugel mit einer starren Ebene oder einer starren Kugel mit einer elastischen Ebene handelt.

und hängt nicht von der Eindringtiefe ab. Für die Normalkraft erhalten wir die Abschätzung

$$F_N \approx \frac{\pi}{2} E \frac{d^2}{\tan \theta}. \quad (\text{II.32})$$

Die Kraft ist proportional zum Quadrat der Eindringtiefe.

Ist die Spannung (II.31) kleiner als die Härte des Materials so wird es sich elastisch deformieren. Andernfalls können wir vom im Wesentlichen plastischen Zustand ausgehen. In diesem Fall gilt für die Normalkraft die Abschätzung

$$F_N = \pi \sigma_0 \frac{d^2}{\tan^2 \theta}. \quad (\text{II.33})$$

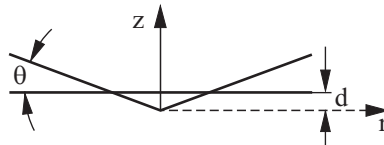


Abbildung II.10. Kontakt zwischen einem Kegel und einer Ebene

Aufgaben

Aufgabe: Zu bestimmen ist die Kraft-Verschiebungs-Abhängigkeit, der effektive Elastizitätsmodul und die Haftspannungsverteilung für eine dünne, runde Elastomerschicht mit dem Radius R und der Schichtdicke h unter Annahme der Inkompressibilität des Materials.

Lösung. Betrachten wir zwei Fälle:

(a) Die Schicht haftet an beiden Körpern (Abbildung II.11).

Wir lösen die Aufgabe in zwei Schritten: Zunächst berechnen wir die in der Schicht gespeicherte elastische Energie als Funktion der Eindringtiefe d . Die Ableitung dieser Energie nach d wird dann die Normalkraft liefern. Zur Berechnung der gespeicherten Energie benutzen wir den folgenden Ansatz für das Verschiebungsfeld in der Schicht

$$u_r(r, z) = C \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right) \frac{r}{R},$$

der die Haftbedingungen für $z = \pm h/2$ erfüllt. Die Bedingung für die Inkompressibilität lautet

$$d \cdot \pi R^2 = 2\pi R \int_{-h/2}^{h/2} u_r(R, z) dz = \frac{1}{3} \pi R C h^3.$$

Daraus folgt $C = \frac{3Rd}{h^3}$ und

$$u_r(r, z) = \frac{3 \cdot d \cdot r}{h^3} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right).$$

Der größte Teil der gespeicherten Energie hängt in diesem Fall mit der Scherung der Schicht zusammen. Die Scherdeformation ist gleich

$$\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{6 \cdot d}{h^3} rz,$$

die Energiedichte

$$E = \frac{1}{2} G \varepsilon_{rz}^2 = \frac{18 G d^2 r^2 z^2}{h^6}$$

und die gesamte Energie

$$U = \frac{18 G d^2}{h^6} \int_0^R \int_{-h/2}^{h/2} r^2 z^2 2\pi r dr dz = \frac{3\pi G R^4}{4h^3} d^2.$$

Die auf die Unterlage wirkende Kraft ist gleich

$$F_N = \frac{\partial U}{\partial d} = \frac{3\pi G R^4}{2h^3} d.$$

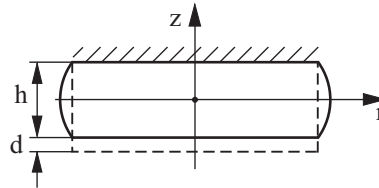


Abbildung II.11

Ein Vergleich mit (II.10) gestattet es, einen *effektiven Elastizitätsmodul* einzuführen:
 $\frac{3\pi G R^4}{2h^3} d = E_{\text{eff}} \pi R^2 \frac{d}{h}$. Daraus folgt

$$E_{\text{eff}} = \frac{3}{2} G \left(\frac{R}{h} \right)^2 = \frac{1}{2} E \left(\frac{R}{h} \right)^2.$$

Er hängt quadratisch vom Verhältnis des Radius der Schicht zu ihrer Dicke ab und kann um ein mehrfaches größer sein als der Elastizitätsmodul E .

Für die Haftspannung ergibt sich

$$\sigma_{rz}(r, z = -h/2) = G \varepsilon_{rz} \Big|_{(r, z = -h/2)} = G \frac{3d}{h^2} r = E \frac{d}{h^2} r.$$

Sie steigt linear vom Zentrum und erreicht ein Maximum am Rande der Schicht:

$$\sigma_{rz, \text{max}} = \frac{ERd}{h^2}.$$

In Anwesenheit der Haftreibung mit dem Reibungskoeffizienten μ_s wird es in keinem Punkt der Kontaktfläche Gleiten geben, wenn

$$\frac{\sigma_{rz, \text{max}}}{\sigma_{zz}} = \frac{\sigma_{rz, \text{max}} \pi R^2}{F_N} = \frac{2h}{R} \leq \mu_s.$$

(b) Die Schicht haftet am oberen Körper und gleitet reibungsfrei am unteren Körper (Abbildung II.12).

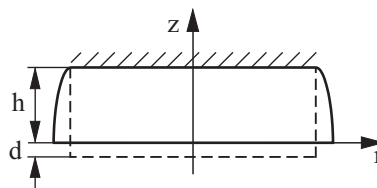


Abbildung II.12

In diesem Fall benutzen wir den Ansatz

$$u_r(r, z) = C_1 (h^2 - z^2) \frac{r}{R},$$

der die Haftbedingung $u_r(r, h) = 0$ am oberen Rand und die freie Gleitbedingung $\left. \frac{\partial u_r(r, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$ am unteren Rand erfüllt. Die Inkompressibilitätsbedingung lautet

$$d \cdot \pi R^2 = 2\pi R \int_0^h u_r(R, z) dz = \frac{4}{3} \pi R h^3 C_1.$$

Daraus folgt $C_1 = \frac{3Rd}{4h^3}$ und

$$u_r(r, z) = \frac{3d}{4h^3} (h^2 - z^2) r.$$

Für die Scherdeformation ergibt sich

$$\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{3d}{2h^3} zr.$$

Die Energiedichte ist gleich

$$E = \frac{1}{2} G \varepsilon_{rz}^2 = G \frac{9d^2}{8h^6} z^2 r^2$$

und die Gesamtenergie

$$U = G \frac{9d^2}{8h^6} \int_0^R \int_0^h r^2 z^2 2\pi r dr dz = \frac{3\pi G d^2 R^4}{16h^3}.$$

Die auf die Unterlage wirkende Kraft ist gleich

$$F_N = \frac{\partial U}{\partial d} = \frac{3\pi G R^4}{8h^3} d.$$

Diese Kraft ist 4-mal kleiner als im Fall mit Haftbedingung an der unteren Grenzfläche.

III QUALITATIVE BEHANDLUNG EINES ADHÄSIVEN KONTAKTES



Im vorigen Kapitel haben wir Kontaktprobleme unter der Annahme betrachtet, dass die kontaktierenden Oberflächen nicht „kleben“. In Wirklichkeit gibt es zwischen beliebigen Körpern relativ schwache und schnell mit dem Abstand abfallende Wechselwirkungskräfte, die in den meisten Fällen zur gegenseitigen Anziehung der Körper führen und als *Adhäsionskräfte* bekannt sind. Adhäsionskräfte spielen eine wesentliche Rolle in vielen technischen Anwendungen. Es sind die Adhäsionskräfte, die für die Wirkung von Klebern verantwortlich sind. Klebebänder, selbstklebende Umschläge und ähnliches sind weitere Beispiele für Adhäsionskräfte.

Adhäsionskräfte spielen eine wichtige Rolle in den Anwendungen, wo eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist: (i) sehr glatte Oberflächen (wie z.B. die der magnetischen Scheibe von Festplatten), (ii) einer der Kontaktpartner besteht aus einem sehr weichen Material (Gummi oder biologische Strukturen) oder (iii) es handelt sich um mikroskopische Systeme, in denen die Adhäsionskräfte grundsätzlich von größeren Bedeutung sind verglichen mit Volumenkräften wegen verschiedener Skalierung der Volumen- und Oberflächenkräfte (mikromechanische Geräte, Atomkraftmikroskope, biologische Strukturen u.ä.). Adhäsion spielt eine wesentliche Rolle bei Gummireibung und ist somit ein wichtiges Phänomen, welches bei der Entwicklung von Autoreifen berücksichtigt werden muss.

In diesem Kapitel erläutern wir die physikalische Herkunft der Adhäsionskräfte. Wir diskutieren qualitativ die grundlegenden Ideen zur Berechnung von adhäsiven Kontakten.

III.1 Physikalischer Hintergrund

Elektrisch neutrale Atome oder Körper in einem Abstand gleich oder größer eines interatomaren Abstandes ziehen sich mit den so genannten Dispersions- oder van-der-Waals-Kräften an. Die Wechselwirkung zwischen zwei neutralen Atomen im Abstand r (Abbildung III.1 a) kann in guter Näherung mit dem *Lennard-Jones-Potential* beschrieben werden:

$U = \frac{C_1}{r^{12}} - \frac{C}{r^6}$. Der Gleichgewichtsabstand r_0 berechnet sich daraus zu $r_0 = (2C_1 / C)^{1/6}$.

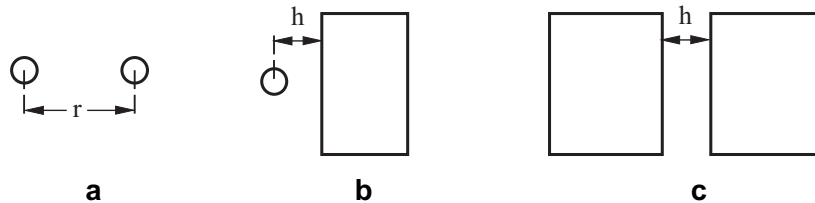


Abbildung III.1. Wechselwirkung zwischen zwei Atomen (a), einem Atom und einem Halbraum (b) und zwischen zwei Halbräumen (c)

Der Einfachheit halber werden wir dieses Potential in den nachfolgenden Abschätzungen durch

$$U_{at-at} = \begin{cases} -\frac{C}{r^6}, & r \geq r_0 \\ \infty, & r < r_0 \end{cases} \quad (III.1)$$

ersetzen (Abbildung III.2). Die Vereinfachung hat nur einen geringen Einfluss auf die wichtigsten Parameter der Wechselwirkung - den Gleichgewichtsabstand und die Bindungsenergie, erleichtert aber wesentlich die Berechnungen.

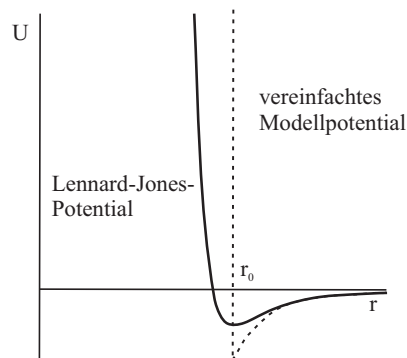


Abbildung III.2. Graphische Darstellung des Lennard-Jones-Potentials und des vereinfachten Modellpotentials (III.1)

Die Wechselwirkung zwischen zwei Körpern mit atomar glatten Oberflächen im Abstand h berechnen wir in zwei Schritten. Zunächst berechnen wir die Kraft zwischen einem Atom im Abstand h von einem dreidimensionalen Körper, der mit der Konzentration n von gleichartigen Atomen gefüllt ist (Abbildung III.1 b und Abbildung III.3 a)¹.

$$U_{at-sol} = - \int \frac{Cn dV}{R^6} = -Cn \int_0^\infty dz \int_0^\infty 2\pi r dr \frac{1}{((h+z)^2 + r^2)^3} = -\frac{\pi Cn}{6h^3}. \quad (III.2)$$

¹ Bei dieser Berechnung vernachlässigen wir die Wechselwirkung zwischen Atomen, die den Körper ausfüllen. Die Berechnung bleibt dennoch bis auf einen konstanten Faktor korrekt. Weiterführende Informationen über die van-der-Waals-Kräfte siehe Abschnitt III.6.

Im zweiten Schritt berechnen wir die Wechselwirkung zwischen zwei Festkörpern mit parallelen Oberflächen, wobei wir annehmen, dass beide Körper mit gleichen Atomen „gefüllt“ sind (Abbildung III.1 c und Abbildung III.3 b). Sie berechnet sich durch Integration im ersten Körper über die z -Koordinate und Multiplikation mit der Oberfläche A des Körpers und der Atomkonzentration n . Die Wechselwirkungsenergie pro Flächeneinheit ist gleich

$$\frac{U_{sol-sol}}{A} = - \int_h^{\infty} \frac{\pi C n^2}{6z^3} dz = - \frac{\pi C n^2}{12h^2} = - \frac{Q}{h^2} \quad (III.3)$$

wobei $Q = \pi C n^2 / 12$. Wenn zwei Körper aus einem großen Abstand bis zum „direkten Kontakt“ (d.h. bis zum Abstand $\approx r_0$) zusammen geschoben werden, leisten die Wechselwirkungskräfte eine Arbeit (pro Flächeneinheit)

$$\frac{W}{A} = \frac{Q}{r_0^2}. \quad (III.4)$$

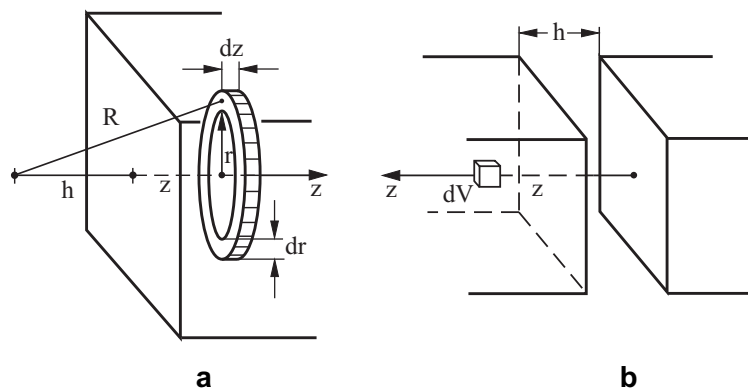


Abbildung III.3. Zur Berechnung des Wechselwirkungspotentials zwischen einem Atom und einem dreidimensionalen Körper (a) und zwei dreidimensionalen Körpern im Abstand h (b)

Zum Auseinandernehmen zweier Körper im Kontakt muss dieselbe Arbeit von äußeren Kräften geleistet werden. Man kann sagen, dass zur Erzeugung von zwei Oberflächen die Arbeit (III.4) pro Flächeneinheit erforderlich ist. Die Hälfte dieser Größe (d.h. die Energie, die zur Erzeugung *einer* Fläche erforderlich ist) nennt man die *Oberflächenenergie* (auch die *Oberflächenenergie*) γ des Körpers²:

$$\gamma = \frac{Q}{2r_0^2} \quad (III.5)$$

Diese Größe bestimmt im Wesentlichen die Kontakteigenschaften, die mit der Adhäsion zusammenhängen. Typische Größen von Oberflächenenergie für verschiedene Materialien und Flüssigkeiten sind in der Tabelle III.1 angegeben.

Schätzen wir die Größe der van-der-Waals-Kräfte ab: Die Wechselwirkungskraft pro Flächeneinheit von zwei atomar glatten Körpern im Abstand h erhalten wir durch Ableitung der potentiellen Energie pro Flächeneinheit (III.3) nach h :

$$\sigma = - \frac{1}{A} \frac{\partial U_{sol-sol}}{\partial h} = \frac{2Q}{h^3}. \quad (III.6)$$

Im „direkten Kontakt“ (d.h. bei $h \approx r_0$) ist die van-der-Waals-Spannung gleich

² Bei der Benutzung des Begriffes Oberflächenenergie in der Kontaktmechanik muss man beachten, dass bei manchen Autoren die Größe 2γ , die zur Trennung der Körper erforderlich ist, als "Oberflächenenergie" bezeichnet wird (z.B. im Buch von K. Johnson "Contact Mechanics").

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{2Q}{r_0^3} = \frac{2}{r_0} \frac{Q}{r_0^2} = \frac{4\gamma}{r_0} \quad (\text{III.7})$$

Für einen für viele Metalle typischen Wert $\gamma \approx 1 \div 2 \text{ J/m}^2$ und $r_0 \approx 4 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ erhalten wir $\sigma = 10^{10} \text{ N/m}^2$: Eine Kontaktfläche von nur 1 cm^2 könnte bei dieser Kraftdichte 100 Tonnen Gewicht aushalten (viel mehr als in der Abbildung III.4 a)!

Tabelle III.1. Oberflächenenergien von festen und flüssigen Stoffen

Oberflächenenergien von molekularen Kristallen und Metallen

Material	Oberflächenenergie γ_s (10^{-2} J/m^2)
Nylon	4.64
Polyvinylchlorid	3.9
Polystyrene	3.30
Polyethylen	3.0
Paraffin	2.50
PTFE (Teflon)	1.83
NaCl	16
Al_2O_3	64
Si	128
Al	112
Ag	144
Fe	240
W	450

Oberflächenenergien von Flüssigkeiten

Flüssigkeit	Oberflächenenergie γ_l 10^{-2} J/m^2
Wasser	7.31
Benzin	2.88
n-Pentan	1.60
n-Octan	2.16
n-Dodecan ($\text{C}_{12}\text{H}_{26}$)	2.54
n-Hexadecan ($\text{C}_{16}\text{H}_{34}$)	2.76
n-Octadecan $\text{C}_{18}\text{H}_{38}$	2.80

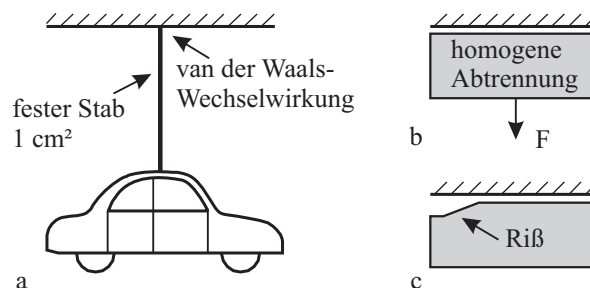


Abbildung III.4. Van-der-Waals-Kräfte zwischen atomar glatten Oberflächen sind sehr viel stärker, als es sich aus der alltäglichen Praxis vermuten lässt (a); In realen Systemen werden sie zum einen durch die Rauigkeit von Flächen, zum anderen durch die Ausbreitung von Oberflächenrissen stark vermindert

Solch starke Adhäsionskräfte werden in Wirklichkeit nie beobachtet. Diese Abschätzung erklärt die Frage von Kendall in seinem Buch *Molecular Adhesion and its Applications* (Kluwer Academic, 2001): “solids are expected to adhere; the question is to explain why they do not, rather than why they do!” Die Lösung dieses Adhäsionsparadoxons besteht darin, dass ein Bindungsbruch auf der makroskopischen Skala nie homogen verläuft (Abbildung III.4 b), sondern durch Ausbreitung von Rissen (Abbildung III.4 c) und das vermindert drastisch die Adhäsionskraft. Auch die Rauigkeit der Oberfläche kann zu einer drastischen Abnahme der Adhäsionskräfte führen (s. unten die Diskussion des Einflusses der Rauigkeit auf die Adhäsion).

III.2 Berechnung der Adhäsionskraft zwischen gekrümmten Oberflächen

Die erste Berechnung der Adhäsionskraft zwischen Festkörpern mit nicht glatten Oberflächen stammt von Bradley (1932)³. Betrachten wir eine starre Kugel mit dem Radius R im Abstand h von einer starren Ebene aus dem gleichen Material. Wir berechnen die Wechselwirkungsenergie zwischen diesen Körpern mit einer Näherung, die wir auch später in den meisten Kontaktaufgaben benutzen werden: *Wir nehmen an, dass das wesentliche Kontaktgebiet sehr viel kleiner als der Krümmungsradius der Kugel ist, so dass man die Wände des Spaltes zwischen den beiden Körpern annähernd als parallel zueinander annehmen kann, allerdings mit einem Abstand, der von der Koordinate abhängt („Halbraum-Näherung“).*

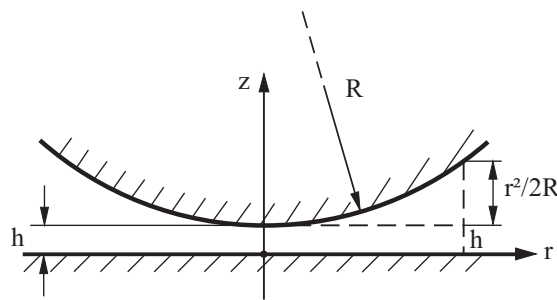


Abbildung III.5 Zur Berechnung der Adhäsionskraft zwischen einer starren Kugel mit dem Radius R und einer starren Ebene

Das Wechselwirkungspotential pro Flächeneinheit im Abstand $z = h + r^2 / 2R$ (siehe Abbildung III.5) wird durch (III.3) gegeben. Durch Integration über die gesamte Fläche erhalten wir:

$$U_{\text{Plate-Ball}} = - \int_0^{\infty} \frac{Q}{\left(h + r^2 / 2R\right)^2} 2\pi r dr = - \frac{2\pi RQ}{h}. \quad (\text{III.8})$$

Die Wechselwirkungskraft ergibt sich als Ableitung der potentiellen Energie nach dem Abstand h :

$$F = - \frac{2\pi RQ}{h^2}. \quad (\text{III.9})$$

Insbesondere im direkten Kontakt ($h \approx r_0$):

$$F_{\text{adh}} = - \frac{2\pi RQ}{r_0^2} = -4\pi\gamma R. \quad (\text{III.10})$$

³ Bradley, R.S. Phil. Mag 1932., v. 13, 853.

Dieses Ergebnis unterscheidet sich von der Adhäsionskraft zwischen elastisch deformierbaren Körpern (s. Kapitel VI) nur um einen Faktor 4/3.

III.3 Qualitative Abschätzung der Adhäsionskraft zwischen elastischen Körpern

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall eines Kontaktes zwischen einer glatten starren Platte und einem glatten elastischen Block (**Abbildung III.6 a**). Dank den Adhäsionskräften werden der Block und die Wand aneinander „kleben“, und es muss eine bestimmte Kraft angelegt werden, um den Block von der Wand abzureißen. Angenommen, wir versuchen, den Block abzureißen, indem an seinem freien Ende eine Zugspannung σ angebracht wird. Dadurch dehnt sich der Block um die Länge d aus. Die Dichte der in einem elastisch gedehnten Medium gespeicherten elastischen Energie ist gleich $E\varepsilon^2/2 = \sigma^2/2E$. Die volle potentielle Energie bekommen wir durch Multiplikation der Energiedichte mit dem Volumen des Blockes: $U_{el} = \frac{\sigma^2}{2E} l_0 A$, wobei A die Querschnittsfläche des Blockes ist.

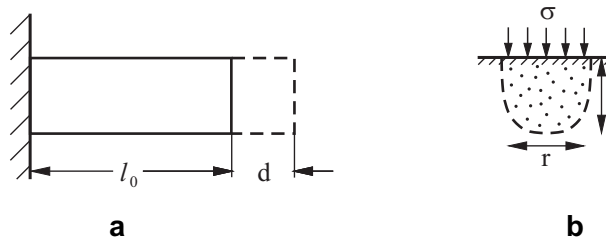


Abbildung III.6. (a) Adhäsion eines rechteckigen Blocks an einer glatten Wand. (b) Zur Berechnung der Adhäsionskraft zwischen einer Kugel und einer starren Ebene

Wir wollen nun untersuchen, *unter welchen Bedingungen der Block spontan von der starren Fläche abspringen kann?* Würde er abspringen, so würden zwei neue Oberflächen entstehen, wofür die Energie $U_{adh} = 2\gamma A$ erforderlich ist. Ein Prozess in einem abgeschlossenen physikalischen System kann aber nur dann spontan geschehen, wenn die gesamte potentielle Energie im Prozess kleiner wird: $U_{adh} - U_{el} = 2\gamma A - \frac{\sigma^2}{2E} l_0 A < 0$. Die kritische Spannung, bei der dieser Prozess spontan ablaufen kann, ergibt sich daraus zu

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\frac{4E\gamma}{l_0}}. \quad (III.11)$$

Diese „Bruchspannung“ steigt mit dem elastischen Modul E , der Oberflächenenergie γ und mit der Verminderung der Dicke des elastischen Blocks. Daraus ergibt sich die bekannte Regel für die Anwendung der meisten Kleber und Adhäsive: Je dünner die Schicht, desto fester die Verbindung⁴. Die Anwendbarkeit dieser Regel ist allerdings durch die Rauigkeit der Oberflächen beschränkt.

Als zweites Beispiel betrachten wir einen Kontakt zwischen einer *elastischen* Kugel und einem starren ebenen Körper. Die Oberflächen beider Körper werden als absolut glatt angenommen. Bei der Eindrucktiefe d wird die Größenordnung des Kontaktgebietes

⁴ Es sei bemerkt, dass die meisten Kleber (nach dem Erstarren) elastische Medien mit (relativ) kleinem Elastizitätsmodul sind, so dass bei der Berechnung der elastischen Energie nur die Energie der Klebeschicht berücksichtigt werden muss.

$r \approx \sqrt{2Rd}$ sein (siehe analoge Aufgabe ohne Adhäsion, Kapitel II). Wenn die Spannung auf einem begrenzten Gebiet der Oberfläche eines elastischen Halbraumes mit linearen Ausmaßen r wirkt, so ist der größte Teil der potentiellen Energie in dem Volumen r^3 gespeichert (Abbildung III.6 b). Für Abschätzungen kann man deshalb meistens annehmen, dass nur das im nebenstehenden Bild hervorgehobene Volumen wesentlich deformiert ist.

Die Größenordnung der elastischen Deformation ist demnach $\varepsilon \approx d/r$, die Energiedichte $E\varepsilon^2/2$ und die Energie $U_{el} \sim \frac{E}{2}\varepsilon^2 r^3 = \frac{E}{\sqrt{2}}\sqrt{Rd}^{5/2}$. Die Oberflächenenergie ist gleich $U_{adh} = -2\gamma\pi r^2 = -4\pi\gamma Rd$. Somit ergibt sich für die Gesamtenergie des Systems

$$U_{tot} \approx \frac{E}{\sqrt{2}}\sqrt{Rd}^{5/2} - 4\pi\gamma Rd \quad (\text{III.12})$$

Die auf das System wirkende Kraft ist gleich $F \approx \frac{\partial U_{tot}}{\partial d} \approx \frac{5}{2}\frac{E}{\sqrt{2}}\sqrt{Rd}^{3/2} - 4\pi\gamma R$.

Die Adhäsionskraft ist die maximale negative Kraft, die auf den Körper wirkt. Sie wird erreicht bei $d=0$:

$$F_{adh} \approx -4\pi\gamma R. \quad (\text{III.13})$$

(Eine exakte Berechnung ergibt $F_{adh} = -3\pi\gamma R$, siehe Kapitel VI. Interessanterweise hat die Adhäsionskraft zwischen elastischen Körpern dieselbe Größenordnung, wie bei einem Kontakt zwischen starren Körpern (Gleichung (III.10)).

III.4 Einfluss der Rauigkeit auf Adhäsion

Dass Adhäsionskräfte in der makroskopischen Welt meistens sehr klein sind und ohne Berücksichtigung bleiben können, liegt daran, dass praktisch alle Oberflächen Rauigkeiten auf verschiedenen räumlichen Skalen aufweisen. Um den Einfluss der Rauigkeit qualitativ zu diskutieren, betrachten wir einen glatten elastischen Körper im Kontakt mit einer starren rauhen Ebene.

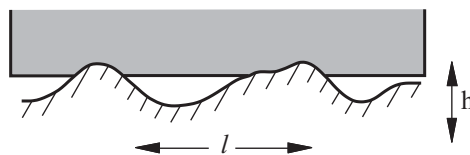


Abbildung III.7. Ein elastisches Medium in Kontakt mit einer starren, rauhen Oberfläche

Die charakteristische Wellenlänge der Rauigkeit sei l und die charakteristische Höhe h . Wenn sich der elastische Körper so deformiert, dass er die „Täler“ vollständig ausfüllt, wird eine elastische Energie $U_{el} \approx G\varepsilon^2 \approx G\left(\frac{h}{l}\right)^2 l^3 = Glh^2$ gespeichert⁵. Dabei vermindert sich die Oberflächenenergie um $U_{adh} \approx 2\gamma l^2$. Ist die Adhäsionsenergie ausreichend groß, um die genannte Deformation zu erzeugen, so wird sich der Körper spontan deformieren und an der gesamten Oberfläche „kleben“. Das geschieht, wenn $U_{el} < U_{adh}$, oder

⁵ Da es sich hier um eine grobe Schätzung handelt, behalten wir in der Gleichung für die Energiedichte den Faktor 2 nicht und nehmen an, dass die charakteristische Abklingtiefe der Deformationen die Größenordnung l hat. Eine genauere Berechnung findet sich in der Aufgabe 1 zu diesem Kapitel.

$$h^2 < \frac{2\gamma l}{G}. \quad (\text{III.14})$$

Ist die Rauigkeit viel kleiner als die kritische, so kann die Oberfläche als absolut glatt angesehen werden. Bei größerer Rauigkeit dagegen wird es einen Kontakt nur in wenigen Kontaktpunkten geben und die Adhäsionskraft vermindert sich wesentlich. Neben der Oberflächenenergie γ hängt die kritische Rauigkeit auch vom elastischen Schubmodul G ab. Materialien mit sehr kleinen elastischen Modulen können daher auch an sehr rauen Oberflächen adhieren. Ein Beispiel dafür ist Gummi, bei dem der Schubmodul typischerweise bei ca. 1 MPa liegt⁶ und somit um 5 Größenordnungen kleiner ist, als bei „harten“ Festkörpern, wie z.B. Metallen. Für harte Körper ist die Bedingung (III.14) nur für sehr glatte, polierte Flächen erfüllt. Für typische Rauigkeitsparameter $h \approx 1 \mu\text{m}$, $l \approx 100 \mu\text{m}$ und $G = 80 \text{ GPa}$ ist das Verhältnis $\frac{Gh^2}{2\gamma l} \approx 2 \cdot 10^2 \gg 1$. Die Adhäsionskraft ist unter diesen Bedingungen verschwindend klein.

III.5 Klebeband

Als ein weiteres Beispiel für die Anwendung der Ideen über die physikalische Natur der Adhäsion diskutieren wir die Bedingungen für das Gleichgewicht eines Klebebandes. Wir betrachten eine biegeschlaife Membran der Breite L , die teilweise auf einem ebenen starren Körper liegt (Abbildung III.8 a). Das Band wird mit der Kraft F gezogen. Die zum Trennen einer Einheitsfläche des Bandes von der starren Unterlage erforderliche Energie nennen wir „effektive Oberflächenenergie“ und bezeichnen sie als γ . Berechnen wir den Winkel, unter dem gezogen werden muss (bei gegebenem Betrag der Kraft), so dass die Abrisslinie im Gleichgewicht ist. Zu diesem Zweck betrachten wir einen Abschnitt des Bandes der Länge l_0 zwischen den Punkten O und A (Abbildung III.8 b).

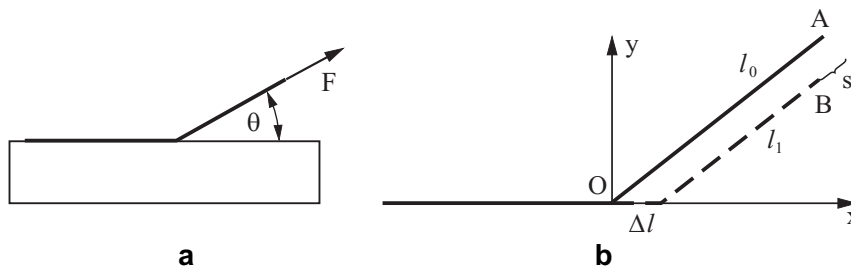


Abbildung III.8. Zur Berechnung der Abziehkraft eines Klebebandes

Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit muss die Arbeit aller Kräfte im Gleichgewicht bei einer beliebigen infinitesimalen Verschiebung des Systems gleich Null sein. Wir betrachten eine Bewegung des Bandes, die dem Abreißen eines Elementes der Länge Δl entspricht. Bei dieser Bewegung erhöht sich die Oberflächenenergie um $\gamma L \Delta l$, die Adhäsionskräfte leisten dabei die Arbeit $-\gamma L \Delta l$. Gleichzeitig verschiebt sich das Ende des Bandes, an dem die Kraft F angreift (Punkt B) in der Richtung der Kraft um s . Die von der Kraft F geleistete Arbeit ist gleich Fs . Die Gleichgewichtsbedingung ist $Fs = \gamma L \Delta l$. Es ist leicht zu sehen, dass $s = \Delta l (1 - \cos \theta)$ und somit $F_0 (1 - \cos \theta) = \gamma L$. Mit F_0 haben wir die kritische „Abreißkraft“ bezeichnet. Daraus folgt

⁶ Reiner, nicht gefüllter Gummi.

$$F_0 = \frac{\gamma L}{1 - \cos \theta}. \quad (\text{III.15})$$

Die kritische Abreißkraft (pro Längeneinheit) in der Richtung senkrecht zur Ebene ist gleich der Oberflächenenergie. Bei Abziehen in Richtung π (entgegengesetzt zu der Richtung des Bandes) ist die kritische Kraft halb so groß.

III.6 Weiterführende Informationen über van-der-Waals-Kräfte und Oberflächenenergien

Eine ausführliche Theorie der van-der-Waals-Kräfte wurde von I.E. Dzyaloshinskii, E.M. Lifschitz und L.P. Pitaevskii (1961) entwickelt⁷. Sie zeigt, dass die van-der-Waals-Kräfte im Wesentlichen von den dielektrischen Konstanten der Körper *und des Zwischenmediums* abhängen. Ist die dielektrische Konstante des Zwischenmediums ε_m kleiner als die dielektrischen Konstanten beider Körper: $\varepsilon_m < \varepsilon_1, \varepsilon_2$, so ziehen sie sich an. Liegt sie dazwischen ($\varepsilon_1 < \varepsilon_m < \varepsilon_2$), so stoßen sie sich ab! Dieser Effekt wird in der Atomkraftmikroskopie zur Vermeidung von Adhäsionskräften und den damit zusammenhängenden Instabilitäten benutzt.

Nach der genannten Theorie ist die van-der-Waals-Kraft zwischen zwei Körpern in erster grober Näherung proportional zum Produkt $\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)(\varepsilon_2 - \varepsilon_m)}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$. Ist das

Zwischenmedium Vakuum ($\varepsilon_m = 1$), so ist die Kraft immer positiv (Körper ziehen sich an) und proportional zu $\frac{(\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_2 - 1)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$. In der Näherung, dass der Gleichgewichtsabstand für

verschiedene Körper etwa der gleiche ist und der größte Unterschied in den Oberflächenenergien sich durch verschiedene Polarisierbarkeiten und somit verschiedene dielektrische Konstanten ergibt, kann eine grobe empirische Regel zur Berechnung von *relativen Oberflächenenergien* angegeben werden.

Definieren wir die relative Oberflächenenergie als Energie (pro Flächeneinheit), die zur Trennung dieser Körper aus dem atomar dichten Kontakt erforderlich ist. Die relative Oberflächenenergie für zwei gleiche Körper aus dem Stoff 1 ist demnach proportional zu

$$\gamma_{11} = 2\gamma_1 \propto \frac{(\varepsilon_1 - 1)^2}{2\varepsilon_1}, \text{ die relative Oberflächenenergie für zwei gleiche Körper aus dem Stoff 2}$$

$$\text{ist proportional zu } \gamma_{22} = 2\gamma_2 \propto \frac{(\varepsilon_2 - 1)^2}{2\varepsilon_2}.$$

Die relative Oberflächenenergie von Körpern 1 und 2 ist $\gamma_{12} \propto \frac{(\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_2 - 1)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$. Somit gilt⁸:

$$\gamma_{12} \approx \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}} = 2\sqrt{\gamma_1\gamma_2} \quad (\text{III.16})$$

Die relative Oberflächenenergie berechnet sich in grober Näherung als geometrisches Mittel der Oberflächenenergien der einzelnen Körper. In den Gleichungen (III.11), (III.13) ist γ durch $\gamma_{12}/2$ zu ersetzen.

⁷ | E Dzyaloshinskii, E.M. Lifshitz und L.P. Pitaevskii.: General Theory of van der Waals' Forces,- *Sov. Phys. Usp.* 1961, v. 4 153-176.

⁸ Wir haben dabei das geometrische Mittel $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ durch das arithmetische Mittel $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$ ersetzt. Im Rahmen der Genauigkeit dieser Abschätzung ist das zulässig.

Aufgaben

Aufgabe 1: Gegeben sei ein glatter elastischer Körper (Gummi) in Kontakt mit einer starren, rauhen Oberfläche, welche durch eine charakteristische Wellenlänge l und eine charakteristische Höhe \hat{h} gekennzeichnet ist. Die „Breite“ des Mediums L soll viel größer als l sein. Unter der Annahme, dass die Rauigkeit als $z = \hat{h} \cos(2\pi x / l)$ modelliert werden kann, ist das kritische Verhältnis \hat{h} / l zu berechnen, bei welchem die „Täler“ vollständig ausgefüllt werden. Wie groß darf die charakteristische Rauigkeit bei $l = 100 \mu\text{m}$ höchstens sein, wenn der Gummi gerade noch vollständig an der starren Oberfläche kleben soll? Reiner (nicht-gefüllter) Gummi hat einen Schubmodul G von ca. 1 MPa; die relative Oberflächenenergie bei starren Kontaktpartnern zu Gummi beträgt ca. $\gamma_{12} \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ J/m}^2$.

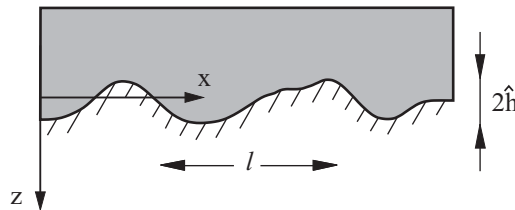


Abbildung III.9. Vollständiger Kontakt zwischen einer gewellten starren Oberfläche und einem elastischen Medium (Gummi)

Lösung: Im Gleichgewicht gilt für ein isotropes, linear elastisches Medium

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + (1 - 2\nu) \Delta \mathbf{u} = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung mit den Randbedingungen $u_z(x, z=0) = \hat{h} \cos kx$ und $\sigma_{zx}(x, z=0) = 0$ (keine Haftung in horizontaler Richtung) lautet

$$u_z = \hat{h} \left(1 - \frac{kz}{2(1-\nu)} \right) \cos kx \cdot e^{kz}$$

$$u_x = \hat{h} \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} + \frac{kz}{2(1-\nu)} \right) \sin kx \cdot e^{kz}$$

wobei $k = 2\pi / l$. Aus der allgemeinen Gleichung für den Spannungstensor

$$\sigma_{ik} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} u_{ll} \delta_{ik} + \frac{E}{1+\nu} u_{ik}$$

folgt für die Normalspannung

$$\sigma_{zz} = \frac{E \hat{h} k \cos kx}{2(1-\nu^2)}.$$

Die in einem Abschnitt des Mediums mit der Länge l in der x -Richtung gespeicherte elastische Energie kann berechnet werden als

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int_0^l u_z(x) \sigma_{zz}(x) L dx = \frac{\pi E \hat{h}^2 L}{4(1-\nu^2)}.$$

Der Gummi wird an der gesamten Oberfläche „kleben“, wenn diese Energie kleiner als die Oberflächenenergie $\gamma_{12} L$ ist:

$$\frac{\pi E \hat{h}^2 L}{4(1-\nu^2)} < \gamma_{12} L l.$$

Für die kritische Amplitude der Welligkeit folgt daraus

$$\hat{h}_c^2 = \frac{4\gamma_{12} l (1-\nu^2)}{\pi E} = \frac{2\gamma_{12} l (1-\nu)}{\pi G}.$$

(Man vergleiche dieses Ergebnis mit der Abschätzung (III.14)!). Bei den angegebenen numerischen Werten und $\nu \approx 0.5$ ergibt sich für die kritische Rauigkeit $h_c \approx 1\mu\text{m}$.

Aufgabe 2: Gegeben sei ein starrer Körper mit welliger Oberfläche ($h = \hat{h} \cos kx$). Schätzen Sie die maximale Dicke t_c einer Goldfolie ab, bei der diese allein aufgrund der Adhäsion haftet. Nutzen Sie für Ihre Abschätzungen die folgenden Werte: $E = 80\text{GPa}$, $\gamma = 1\text{Jm}^{-2}$ und $l = 2\pi/k = 100\mu\text{m}$, $\hat{h} = 1\mu\text{m}$. Zu untersuchen sind zwei Fälle: (a) Die elastische Energie ist ausschließlich durch die Längsdehnung bzw. (b) ausschließlich durch die Biegung bedingt.

Lösung:

(a) Aufgrund einer Auslenkung $w(x)$ in der Querrichtung verändert sich die Länge eines Abschnitts der Folie mit der Länge l um den Betrag

$$\Delta l \approx \frac{1}{2} \int_0^l w'^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^l \hat{h}^2 k^2 \sin^2(kx) dx = \frac{\pi^2 \hat{h}^2}{l}.$$

Dabei wird elastische Energie

$$U_{el} = \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{L t \pi^4 \hat{h}^4}{l^3}$$

gespeichert. L ist hier die Breite der Folie und ν die Querkontraktionszahl. Die Folie klebt vollständig, wenn diese Energie kleiner ist, als die Adhäsionsenergie $2\gamma L l$:

$$t < \frac{4\gamma l^4}{\pi^4 \hat{h}^4} \frac{1-\nu^2}{E}.$$

Für die angegebenen Werte ergibt sich $t < 46\mu\text{m}$.

(b) Die elastische Energie eines Abschnitts einer gebogenen Platte mit der Länge l ist gleich

$$U_{el} = \frac{E t^3}{24(1-\nu^2)} L \int_0^l w''^2 dx = \frac{E t^3}{48(1-\nu^2)} L k^4 \hat{h}^2 l.$$

Die Platte klebt vollständig am Untergrund, wenn diese Energie kleiner ist als die Adhäsionsenergie $2\gamma L l$:

$$t^3 < \frac{96\gamma}{k^4 \hat{h}^2} \frac{(1-\nu^2)}{E} = \frac{6\gamma l^4}{\pi^4 \hat{h}^2} \frac{(1-\nu^2)}{E}.$$

Für die angegebenen Werte ergibt sich $t_c \approx 4,1\mu\text{m}$.

Ein Vergleich der Fälle (a) und (b) zeigt, dass das Kriterium für die vollständige Adhäsion bei den gegebenen Rauheitswerten überwiegend durch die Biegesteifigkeit der Platte bedingt ist; der korrekte kritische Wert der Plattendicke ist somit $t_c \approx 4,1\mu\text{m}$.

Aufgabe 3: Viele Insekten verfügen über Vorrichtungen, die ein Haften an glatten Oberflächen erlauben. Im Weiteren soll das in der Abbildung III.10 a skizzierte einfache Ersatzmodell herangezogen werden, um wesentliche Abhängigkeiten der Adhäsion eines solchen Insektenfußes zu beschreiben. Zu bestimmen sind: der Zusammenhang zwischen der Eindringtiefe und der Normalkraft; maximale Kontaktradius im Falle verschwindender externer Normalkraft; die Abhängigkeit der Abziehkraft von der ursprünglich aufgebrachtten Andruckkraft. Gegeben: γ_{12} , A_0 , $k = EA_0 / l_0$, l_0

Lösung: Die Federlänge aller Federn, die im Kontakt mit der starren Ebene sind, berechnet sich als $l(r) = l_0 - d + r^2 / 2R$. Beim Andruckvorgang haben die Federn am Rande des Kontaktgebietes die Länge l_0 : $l_0 - d + a^2 / 2R = l_0$. Für den Radius des Kontaktgebietes ergibt sich $a = \sqrt{2dR}$, und für die gesamte Druckkraft

$$F_N = -\frac{k}{A_0} \int_0^a \left(\frac{r^2}{2R} - d \right) 2\pi r dr = \frac{\pi k R d^2}{A_0} = \frac{\pi E R d^2}{l_0}.$$

Wird der Fuß zunächst stark gedrückt und dann mit einer Kraft F gezogen, so bestimmt sich das Kontaktgebiet durch die Bedingung, dass die Federn am Rande gerade im kritischen Zustand sind. Die kritische Verlängerung berechnet sich aus (III.11) zu $\Delta l = \sqrt{\frac{2\gamma_{12}l_0}{E}}$ und der

Kontaktradius aus der Bedingung $l(a_{\max}) = l_0 - d + \frac{a_{\max}^2}{2R} = l_0 + \sqrt{\frac{2\gamma_{12}l_0}{E}}$ zu:

$$a_{\max}^2 = 2R \left(d + \sqrt{\frac{2\gamma_{12}l_0}{E}} \right).$$

Die dabei auf den Fuß wirkende Kraft ist gleich

$$F_A = -\frac{k}{A_0} \int_0^{a_{\max}} \left(\frac{r^2}{2R} - d \right) 2\pi r dr = -\frac{\pi k}{2A_0} a_{\max}^2 \left(\sqrt{\frac{2\gamma_{12}l_0}{E}} - d \right) = -\frac{\pi E}{l_0} R \left(\frac{2\gamma_{12}l_0}{E} - d^2 \right).$$

Den betragsmäßig maximalen negativen Wert dieser Kraft nennen wir *Adhäsionskraft*

$$|F_{A,\max}| = 2\pi\gamma_{12}R.$$

Eine ausführlichere Rechnung ergibt für eine beliebige Anpresskraft F_N die folgende Adhäsionskraft⁹

$$F_A(F_N) = \begin{cases} F_{A,\max} & , F_N \geq F_{A,\max} \\ 2\sqrt{F_{A,\max}F_N} - F_N & , F_N < F_{A,\max} \end{cases}.$$

⁹ M. Schargott, V.L. Popov, S. Gorb. Spring model of biological attachment pads.- J. Theor. Biology., 2006, v. 243, pp. 48-53.

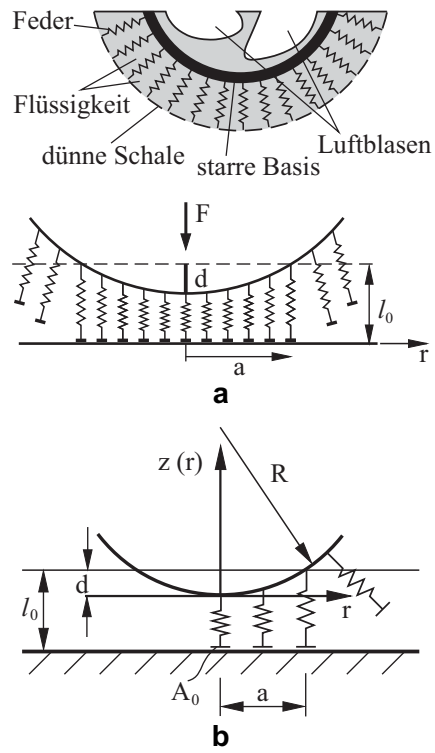


Abbildung III.10. (a) Struktur eines „Adhäsionskissens“ einer Heuschrecke;
 (b) Zur Berechnung der Adhäsionskraft

IV KAPILLARKRÄFTE



Bei Wechselwirkungen zwischen festen Oberflächen und Flüssigkeiten oder zwischen festen Körpern in Anwesenheit von geringen Flüssigkeitsmengen kommen die so genannten Kapillarkräfte zum Vorschein. Kapillarkräfte sind für die Benetzung fester Körper durch Flüssigkeiten bzw. "Abweisung" von Flüssigkeiten zuständig. Sie sorgen für den Transport von Wasser in alle Organe von Pflanzen. Kapillarkräfte sind verantwortlich für das "Breitlaufen" von Schmierölen und den Transport von Schmierölen zu den Reibstellen in Systemen mit lebenslanger Schmierung. Kapillarkräfte gehören zu den wichtigsten Ursachen von "sticktion" von kleinen Bauteilen in der Mikrotechnik. Sie können auch die Reibkraft, insbesondere die statische Reibkraft, wesentlich beeinflussen.

IV.1 Oberflächenspannung und Kontaktwinkel

Die wichtigsten physikalischen Größen, welche die durch eine Flüssigkeit verursachten Kapillarkräfte in verschiedenen Situationen beeinflussen, sind die Oberflächenenergie der Flüssigkeit und der Kontaktwinkel. Zur Verdeutlichung des Begriffes der Oberflächenenergie einer Flüssigkeit stellen wir uns eine Seifenhaut aufgespannt auf einer rechtwinkligen Drahtkonstruktion vor (Abbildung IV.1). Ziehen wir an der beweglichen Seite der

Konstruktion, so wird die Fläche der Schicht größer. Somit erhöht sich die Oberflächenenergie. Bei einer Verschiebung um Δx erhöht sich die Energie um den Betrag $\Delta E = 2\gamma\Delta x$ (der Faktor 2 berücksichtigt die Tatsache, dass die Schicht zwei Seiten hat). Diese Energieänderung muss nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit gleich der von der äußeren Kraft geleisteten Arbeit $W = F\Delta x = 2\gamma\Delta x$ sein. Daraus folgt $F = 2\gamma l$. Das bedeutet, dass auf die Begrenzung der Schicht eine Linienkraftdichte (Streckenlast) $f = F/l = 2\gamma$ wirkt. Da die Schicht zwei gleiche Oberflächen hat, wirkt jede mit der Streckenlast γ , die einfach gleich der Oberflächenenergie ist. Somit ist jede freie Oberfläche „gespannt“, woher die Bezeichnung „Oberflächenspannung“ für die Oberflächenenergie stammt.

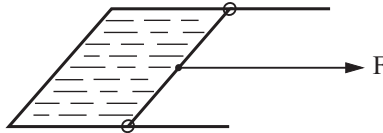


Abbildung IV.1. Zum Begriff der Oberflächenspannung: Experiment mit einer Seifenschicht

Befindet sich ein Tropfen Flüssigkeit auf einer festen Oberfläche, so bildet die Oberfläche der Flüssigkeit mit der festen Oberfläche einen bestimmten Winkel θ (Abbildung IV.2), der im Gleichgewicht nur von den thermodynamischen Eigenschaften des Systems abhängt. Dieser Winkel wird als *Kontaktwinkel* bezeichnet und bestimmt die meisten wesentlichen Eigenschaften von Kontakten zwischen Festkörpern und Flüssigkeiten.

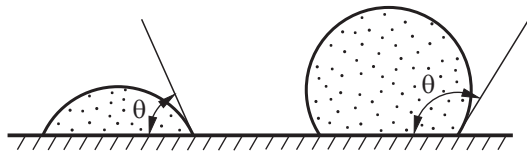


Abbildung IV.2. Flüssigkeitstropfen auf einer festen Oberfläche

In der Grenzlinie des Tropfens treffen drei Oberflächen aufeinander (Abbildung IV.3). In jeder Fläche wirkt eine entsprechende Oberflächenspannung. Im Gleichgewicht soll gelten:

$$\gamma_{sv} = \gamma_{sl} + \gamma_{lv} \cos \theta, \quad (\text{IV.1})$$

wobei γ_{sv} die relative Oberflächenenergie der Grenzfläche zwischen dem Festkörper und Dampf (solid-vapor), γ_{sl} zwischen dem Festkörper und Flüssigkeit (solid-liquid) und γ_{lv} zwischen Flüssigkeit und Dampf (liquid-vapor) sind. Abhängig vom Verhältnis der drei relevanten Oberflächenenergien kann der Winkel θ im Allgemeinen einen beliebigen Wert zwischen 0 und π annehmen. Ist der Kontaktwinkel kleiner als $\pi/2$, so sagt man, dass die Flüssigkeit die gegebene feste Oberfläche *benetzt*. Bei Kontaktwinkeln größer als $\pi/2$ spricht man von „*unbenetzbaren*“ Flächen. Geht es um das Verhalten von Wasser auf einer Oberfläche, so nennt man alle Oberflächen, bei denen der Kontaktwinkel kleiner als $\pi/2$ ist, *hydrophil*, während man die Flächen mit einem Kontaktwinkel größer als $\pi/2$ *hydrophob* nennt. Der Sinn der Unterscheidung der Kontaktwinkel größer und kleiner $\pi/2$ wird erst bei Betrachtung von Kapillarbrücken klar. Beim Kontaktwinkel Null spricht man von vollständiger Benetzbarkeit. In diesem Fall wird der Tropfen vollständig auseinander laufen und eine (makroskopisch gesehen) unendlich dünne Schicht bilden. Vollständige Benetzbarkeit wird erreicht, wenn die Bedingung

$$\gamma_{lv} - \gamma_{sl} = \gamma_{sv} \quad (\text{IV.2})$$

erfüllt ist. Für $\gamma_{lv} < \gamma_{sv} - \gamma_{sl}$ breitet sich die Flüssigkeit aus, bis sie eine Schicht mit der Dicke von wenigen molekularen Durchmessern bildet. Die Ausbreitung von dünnen flüssigen

Schichten ist als "Kriechen" bekannt. Die treibende Kraft für diesen Prozess wird gegeben durch die Differenz

$$\gamma_K = \gamma_{sv} - \gamma_{sl} - \gamma_{lv} \quad (IV.3)$$

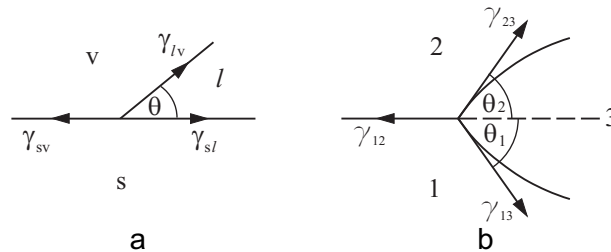


Abbildung IV.3. Zum Gleichgewicht der Kontaktlinie: (a) zwischen einer Flüssigkeit und einem Festkörper, (b) zwischen zwei Flüssigkeiten

In der Gleichgewichtsgleichung (IV.1) haben wir nur das Kräftegleichgewicht in der horizontalen Richtung berücksichtigt. Die Oberflächenspannungskomponente in der vertikalen Richtung wird durch die Reaktionskraft seitens der starren Fläche im Gleichgewicht gehalten. Geht es um einen Kontakt zwischen zwei Flüssigkeiten (oder auch zwischen zwei Festkörpern im thermodynamischen Gleichgewicht, also nach langer „Temperierungszeit“), so müssen beide Kraftkomponenten berücksichtigt werden. Daraus ergeben sich zwei charakteristische Kontaktwinkel, die aus den Gleichungen

$$\gamma_{12} = \gamma_{13} \cos \theta_1 + \gamma_{23} \cos \theta_2, \quad \gamma_{13} \sin \theta_1 = \gamma_{23} \sin \theta_2, \quad (IV.4)$$

bestimmt werden können.

Ob eine Flüssigkeit den festen Körper vollständig benetzt oder nicht, hängt von den drei Oberflächenenergien der Grenzflächen ab. Empirisch wurde aber festgestellt, dass die Benetzbarkeit im Wesentlichen bereits durch das Verhältnis der Oberflächenenergien des Festkörpers und der Flüssigkeit bestimmt wird. Können die Oberflächen nur mittels van-der-Waals-Kräften wechselwirken (molekulare Kristalle und Flüssigkeiten), so kann die Oberflächenspannung der Grenzfläche zwischen beiden Medien als

$$\gamma_{sl} \approx \gamma_s + \gamma_l - 2\sqrt{\gamma_s \gamma_l} \quad (IV.5)$$

abgeschätzt werden¹. Zu bemerken ist, dass diese Abschätzung sich von der Abschätzung der Grenzflächenenergie zwischen Festkörpern (III.16) unterscheidet, da die physikalische Herkunft dieser Oberflächenenergien unterschiedlich ist (bei Festkörpern die zum Trennen der Körper erforderliche Energie, bei Flüssigkeiten die zur Rekonstruktion der Oberfläche erforderliche Energie). Die Energie (IV.5) verschwindet im Kontakt zwischen gleichen Flüssigkeiten.

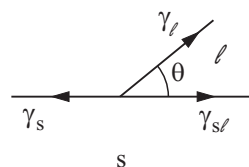


Abbildung IV.4. Zur Abschätzung des Kontaktwinkels bei bekannten Oberflächenenergien der Flüssigkeit und des Festkörpers

¹ F.M. Fowkes. Dispersion Force Contributions to Surface and Interfacial Tensions, Contact Angles and Heats of Immersion. In: Contact Angle, Wettability and Adhesion, American Chemical Society, 1964, pp.99-111.

Aus dem Kräftegleichgewicht für die Grenzlinie folgt unter Berücksichtigung von (IV.5)

$$\gamma_s = \gamma_l + \gamma_s - 2\sqrt{\gamma_l\gamma_s} + \gamma_l \cos \theta. \quad (\text{IV.6})$$

Daraus folgt für den Kontaktwinkel

$$\cos \theta = 2\sqrt{\frac{\gamma_s}{\gamma_l}} - 1. \quad (\text{IV.7})$$

Die rechte Seite dieser Gleichung nimmt den Wert 1 (Kontaktwinkel $\theta = 0$, vollständige Benetzbarkeit) bei $\gamma_s \approx \gamma_l$ an. Der Wert -1 ($\theta = \pi$, vollständige Unbenetzbarkeit) wird nie erreicht. Der Kontaktwinkel ist gleich $\pi/2$ für $\gamma_l \approx 4\gamma_s$. Die treibende Kriechkraft (IV.3) wird gegeben durch $\gamma_K = \gamma_s - \gamma_{ls} - \gamma_l = -2\gamma_l + 2\sqrt{\gamma_l\gamma_s} = 2(\sqrt{\gamma_l\gamma_s} - \gamma_l)$. Sie erreicht ein Maximum bei $\gamma_l \approx \gamma_s/4$. Silikonöle mit sehr kleiner Oberflächenenergie (ca. $2.1 \cdot 10^{-2} \text{ J/m}^2$) sind so kriechfreudig, dass man damit ganze Fertigungsstätten unbemerkt kontaminieren kann. Das Breitlaufen des Schmierstoffs kann zu Störungen von Bauteilen und Funktionen führen, weil der Schmierstoff unter Umständen die Reibstelle verlässt. Außerdem können unerwünschte physikalisch-chemische Reaktionen auftreten. Es kann zum Beispiel zu Spannungsrisen kommen. In diesem Fall führt der kriechende Schmierstoff bereits in extrem kleinen Mengen zum Beginn des Spannungsris-bildenden Prozesses. Das Breitlaufen kann durch den Epilamisierungsprozess verhindert werden. Bei der Epilamisierung wird die Oberflächenspannung der Bauteile durch Aufbringung einer Schicht vermindert, wodurch die feste Oberfläche unbenetzbar wird.

IV.2 Hysterese des Kontaktwinkels

Wir haben bisher angenommen, dass in der Kontaktlinie keine weiteren Kräfte außer der Oberflächenspannung wirken. Handelt es sich um einen Kontakt zwischen einer Flüssigkeit und einem Festkörper, können in der Kontaktlinie auch *Reibungskräfte* auftreten. Die Gleichgewichtsbedingung (IV.1) ändert sich dann zu

$$\gamma_{sv} = \gamma_{sl} + \gamma_{lv} \cos \theta \pm f_R \quad (\text{IV.8})$$

wobei f_R die Reibungskraft pro Längeneinheit der Kontaktlinie ist. Das Vorzeichen der Reibungskraft hängt von der Richtung der Bewegung des Tropfens ab. Somit wird auch der tatsächliche Kontaktwinkel von der Bewegungsrichtung abhängen. Dieses Phänomen nennt man *Hysterese des Kontaktwinkels*. Aus der Hysterese kann die Reibkraft bestimmt werden. Diese Kraft sorgt dafür, dass Tropfen auf makroskopisch glatten geneigten Flächen "haften". Sie ist auch für viele technische Anwendungen von Interesse. Die Reibungskraft in der Kontaktlinie kann auf die Rauigkeit der festen Oberfläche, ihre chemische Heterogenität oder auch auf die atomare Struktur des Festkörpers zurückgehen. Diese Faktoren führen dazu, dass die Energie eines Tropfens von der Koordinate auf der festen Oberfläche abhängt. Dadurch wird das Haften ermöglicht.

IV.3 Druck und Krümmungsradius der Oberfläche

Ist die Oberfläche eines Flüssigkeitstropfens gekrümmt, so gibt es einen Druckunterschied zwischen „außen“ und „innen“. Bei einem kugelförmigen Tropfen (Abbildung IV.5) ist dieser Druckunterschied leicht zu berechnen. Wird in den Tropfen eine bestimmte Flüssigkeitsmenge „eingepumpt“, so wird der Radius des Tropfens um dR

größer. Die Oberfläche ändert sich dabei um $dA = 8\pi R dR$. Die Arbeit $dW = (p_1 - p_2) dV = (p_1 - p_2) 4\pi R^2 dR$, die durch den Druckunterschied geleistet wird, muss gleich der Änderung der Oberflächenenergie $\gamma_1 dA = \gamma_1 8\pi R dR$ sein². Daraus folgt:

$$\Delta p = (p_1 - p_2) = \frac{2\gamma_1}{R} \quad (\text{IV.9})$$

Kann die Schwerkraft vernachlässigt werden, so ist der Druck innerhalb des Tropfens überall konstant. Somit muss auch der Krümmungsradius konstant sein: *Ein Tropfen nimmt die Form einer Kugel an.* Auf einer festen Oberfläche (Abbildung IV.2) ist das immer ein Segment einer Kugel.

Bei nicht sphärischen Oberflächen gilt im Allgemeinen

$$\Delta p = \gamma_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (\text{IV.10})$$

wobei R_1 und R_2 die *Hauptkrümmungsradien* der Oberfläche sind. Bei der Verwendung von Gleichung (IV.10) ist zu beachten, dass die Krümmungsradien auch negativ sein können. Das Vorzeichen des Krümmungsradius' richtet sich danach, ob das Zentrum der Krümmung auf der positiven oder negativen Seite der Oberfläche liegt. Auf sattelförmigen Oberflächen haben die Krümmungsradien verschiedene Vorzeichen (Abbildung IV.5 c).

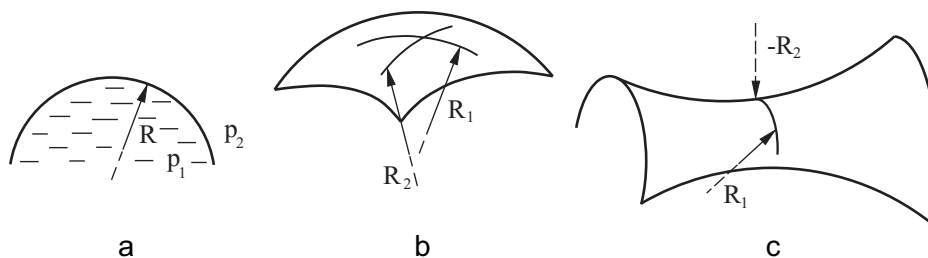


Abbildung IV.5. Zur Berechnung des Überdruckes unter einer gekrümmten Oberfläche

IV.4 Kapillarbrücken

Betrachten wir einen starren Zylinder in der Nähe einer festen Oberfläche mit einer geringen Flüssigkeitsmenge dazwischen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, die beiden „Kontaktpartner“ seien aus dem gleichen Material.

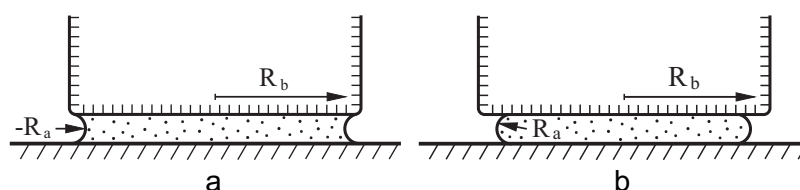


Abbildung IV.6. Kapillarbrücken bei einem Kontaktwinkel (a) kleiner $\pi / 2$, (b) größer $\pi / 2$

Die Flüssigkeit bildet im Gleichgewicht einen charakteristischen Kontaktwinkel und hat somit zwei Krümmungsradien. Der große Krümmungsradius R_b ist immer positiv. Das Vorzeichen des kleinen Krümmungsradius R_a hängt davon ab, ob der Kontaktwinkel größer oder kleiner als $\pi / 2$ ist. Bei kleinen Kontaktwinkeln, d.h. bei Benetzung der Oberfläche, ist

² Mit $\gamma_1 = \gamma_{lv}$ haben wir die Oberflächenspannung der Grenzfläche Flüssigkeit-Dampf bezeichnet, die man meistens einfach Oberflächenspannung der Flüssigkeit nennt.

R_a negativ. In der Flüssigkeit herrscht dann ein *Unterdruck*, der dazu führt, dass eine Kraft wirkt, die wir *Kapillarkraft* nennen. Um das System im Gleichgewicht zu halten, muss eine entgegen gesetzte Reaktionskraft angelegt werden. Die Kapillarkraft berechnet sich als Druckdifferenz multipliziert mit der Fläche der Kapillarbrücke:

$$F_K = A\gamma_l \left(\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_a} \right) \approx -A\gamma_l \frac{1}{R_a}, \quad (\text{IV.11})$$

wobei $|R_a| \ll |R_b|$ angenommen wurde. Ist die Oberfläche hingegen mit der gegebenen Flüssigkeit nicht benetzbar (Kontaktwinkel größer als $\pi/2$), so stoßen die Kontaktpartner sich ab. Diese Eigenschaft erklärt die Herkunft der Unterscheidung von "benetzbaren" und "unbenetzbaren" bzw. hydrophilen und hydrophoben Oberflächen abhängig davon, ob der Kontaktwinkel größer oder kleiner $\pi/2$ ist.

IV.5 Kapillarkraft zwischen einer starren Ebene und einer starren Kugel

Betrachten wir eine Kapillarbrücke zwischen einer starren Kugel und einer starren Ebene aus einem Material, bei dem der Kontaktwinkel Null ist (volle Benetzung). Der Radius der Brücke sei r , der Radius der Kugel R . Die Höhe der Kapillarbrücke ist $h \approx r^2/2R$ und die Fläche $A = \pi r^2$. Der (kleine) Krümmungsradius ist offensichtlich gleich $r_0 = h/2$. Für den Druckunterschied in der Flüssigkeit ergibt sich für $|r_0| \ll |r|$

$$\Delta p = -\frac{\gamma_l}{r_0} = -\frac{2\gamma_l}{h} = -\frac{4\gamma_l R}{r^2}. \quad (\text{IV.12})$$

Die kapillare Kraft ist somit gleich

$$F_K = A\Delta p = -\pi r^2 \frac{4\gamma_l R}{r^2} = -4\pi\gamma_l R \quad (\text{IV.13})$$

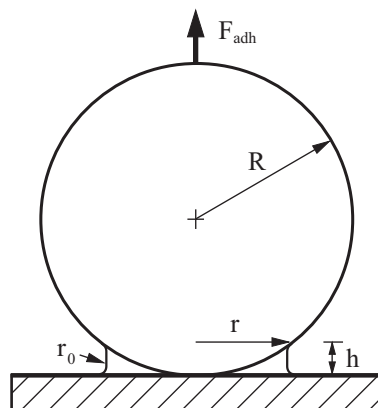


Abbildung IV.7 Eine Kapillarbrücke zwischen einer starren Ebene und einer starren Kugel

Sie ist proportional zum Krümmungsradius der Kugel und unabhängig von der Flüssigkeitsmenge. Genauso groß ist die „Adhäsionskraft“, die nötig ist, um die Kugel von der Oberfläche zu entfernen.

IV.6 Flüssigkeiten auf rauen Oberflächen

Bisher haben wir angenommen, dass die feste Oberfläche ideal glatt und eben ist. Das ist in der Realität fast nie der Fall. Die Rauigkeit führt zu einer Änderung des makroskopischen beobachtbaren Kontaktwinkels. Abhängig von der Form der Rauigkeit kann dabei eine große Vielfalt von verschiedenen Situationen auftreten. Ist die Steigung der Rauigkeit klein, so wird die Flüssigkeit in einem vollständigen Kontakt mit dem Festkörper im gesamten Gebiet (In Abbildung IV.8 rechts von der Grenze des Tropfens) sein. Gibt es keinen Druckunterschied zwischen der Atmosphäre und der Flüssigkeit, so muss die Summe der Krümmungsradien in jedem Punkt der Oberfläche verschwinden. Die Oberfläche ist damit "im Durchschnitt eben" und in einer geringen Entfernung von der Kontaktlinie unter einem Winkel θ^* zur Horizontalen geneigt (Abbildung IV.8).

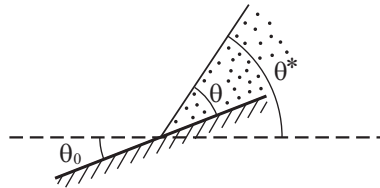


Abbildung IV.8. Oberfläche eines flüssigen Bereichs im Kontakt mit einer geneigten festen Oberfläche

Die horizontale Komponente der Streckenlast im Kontakt ist gleich

$$\gamma_{sv} \cos \theta_0 - \gamma_{sl} \cos \theta_0 - \gamma_{lv} \cos \theta^* . \quad (\text{IV.14})$$

Damit die Grenzlinie als Ganzes im Gleichgewicht bleibt, muss der Mittelwert dieser Linienkraft verschwinden:

$$(\gamma_{sv} - \gamma_{sl}) \langle \cos \theta_0 \rangle - \gamma_{lv} \cos \theta^* = 0 . \quad (\text{IV.15})$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung (IV.1) folgt daraus

$$\cos \theta^* = \langle \cos \theta_0 \rangle \cdot \cos \theta \quad (\text{IV.16})$$

(R.N. Wenzel, 1936). Da $\langle \cos \theta_0 \rangle$ immer kleiner 1 ist, wird der scheinbare Kontaktwinkel bei hydrophilen Oberflächen größer und bei hydrophoben kleiner als der "wahre" Kontaktwinkel. Diese Gleichung kann auch aus rein thermodynamischen Überlegungen hergeleitet werden.

Ist die Steigung der Rauigkeit groß, so kann es dazu kommen, dass die Flüssigkeit an den Spitzen hängen bleibt (Abbildung IV.9). Für eine Rauigkeit der in Abbildung IV.9 a gezeigten Form kann das nur bei Flüssigkeiten mit einem Kontaktwinkel größer $\pi - \theta_{\max}$ passieren, wobei θ_{\max} der maximale Steigungswinkel der Oberfläche ist. Wird die Flüssigkeit in diesem Fall einem zusätzlichen Druck ausgesetzt, so krümmt sich ihre Oberfläche, und die Flüssigkeit dringt tiefer in die Täler, bis sie einen Instabilitätspunkt erreicht und die gesamte Oberfläche benetzt. Dies kann allerdings die in den Tälern eingefangene Luft verhindern. Hat die Oberflächenrauigkeit der in Abbildung IV.9 c dargestellten Form, so können auf ihr auch Flüssigkeiten mit einem Kontaktwinkel kleiner $\pi/2$ hängen bleiben, ohne in einen vollständigen Kontakt mit der Oberfläche zu kommen.

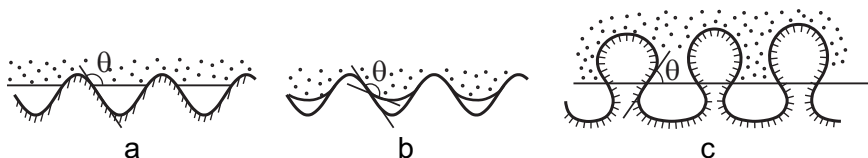


Abbildung IV.9. Flüssigkeitsschicht auf einer rauen Oberfläche

IV.7 Kapillarkräfte und Tribologie

Es gibt mehrere Situationen, bei denen die Kapillarkräfte eine gerichtete Bewegung von Flüssigkeiten begünstigen. Befindet sich ein Tropfen Flüssigkeit auf einer gekrümmten Oberfläche, so wächst seine Energie mit der Krümmung. Die Tropfen werden daher von den Bereichen mit hoher Krümmung, insbesondere von Kanten und Spitzen, abgestoßen (Abbildung IV.10, s. auch Aufgabe 2). Befindet sich eine Flüssigkeit in einer Kapillare oder in einem Spalt mit veränderlicher Spaltbreite, so wandert sie unter Wirkung von Kapillarkräften in Richtung der kleineren Spaltbreite bzw. des kleineren Kapillardurchmessers. Dieser Effekt kann zum Halten der Schmierstoffe in Lagern benutzt werden. In engen Spalten sind diese Kräfte so groß, dass sie eine Lebensdauerschmierung ohne Nachschmierung ermöglichen. Beispiele sind Uhrwerke, Messgeräte, Elektrizitätszähler usw.



Abbildung IV.10. Tropfen wird von einer scharfen Spitze abgestoßen

Will man einen Ölfluss ins Lager erzielen, so kann man die beschriebenen Effekte nutzen und den Lagerspalt so gestalten, dass das Öl in Richtung Lager einen sich verengenden Spalt findet.

Aufgaben

Aufgabe 1: Zu bestimmen ist die gesamte Grenzflächenenergie eines flüssigen Tropfens auf einer festen Oberfläche.

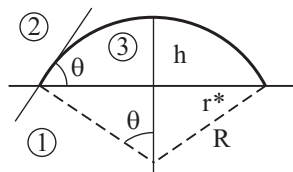


Abbildung IV.11

Lösung: Mit den in (Abbildung IV.11) eingeführten Bezeichnungen erhalten wir für die Oberfläche des Tropfens A , sein Volumen V , den Kontaktwinkel θ und den „Kontaktradius“ r^* folgende Ausdrücke:

$$A = 2\pi R h, \quad V = \frac{\pi h^2 (3R - h)}{3}, \quad \cos \theta = \frac{R - h}{R}, \quad r^{*2} = 2Rh - h^2.$$

Die Oberflächenenergien hängen mit dem Kontaktwinkel gemäß

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{sv} - \gamma_{sl}}{\gamma_{lv}}$$

zusammen. Für die beiden geometrischen Größen R und h , die die Konfiguration des Tropfens vollständig bestimmen, ergibt sich

$$R^3 = \frac{3V}{\pi(1 - \cos \theta)^2(2 + \cos \theta)}, \quad h = R(1 - \cos \theta).$$

Für die Summe aller Grenzflächenenergien erhalten wir somit

$$E = (\gamma_{sl} - \gamma_{sv})\pi r^{*2} + \gamma_{lv}A = \frac{3\gamma_{lv}V}{R} = \gamma_{lv} \left(9V^2 \pi (1 - \cos \theta)^2 (2 + \cos \theta) \right)^{1/3}.$$

Bei konstanter Oberflächenspannung γ_{lv} der Flüssigkeit ist das eine monoton steigende Funktion des Kontaktwinkels. Auf einer heterogenen Oberfläche wird daher ein Tropfen von den Bereichen mit größerem Kontaktwinkel abgestoßen.

Aufgabe 2: Zu bestimmen ist die gesamte Grenzflächenenergie eines flüssigen Tropfens auf einer schwach gekrümmten Oberfläche (Krümmungsradius R_0). Der Kontaktwinkel sei $\pi/2$ (Abbildung IV.12).

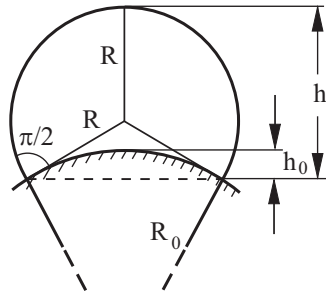


Abbildung IV.12. Flüssigkeitstropfen auf einer gekrümmten Oberfläche. Der Kontaktwinkel ist gleich $\pi/2$

Lösung: Der Kontaktwinkel ist gleich $\pi/2$ wenn $\gamma_{sv} = \gamma_{sl}$. Die Grenzflächenenergie reduziert sich in diesem Sonderfall auf $E = \gamma_{lv}A$. Aus geometrischen Betrachtungen folgt

$$h = R + \frac{R^2}{\sqrt{R_0^2 + R^2}}, \quad h_0 = \frac{R^2}{\sqrt{R_0^2 + R^2}} + R_0 - \sqrt{R_0^2 + R^2}.$$

Das Volumen $V_T = \frac{\pi}{3}(h^2(3R - h) - h_0^2(3R_0 - h_0))$ und Oberfläche $A = 2\pi Rh$ des Tropfens berechnen sich bis zu den Gliedern erster Ordnung in der Krümmung $\kappa = 1/R_0$ zu

$$V_T = \frac{2\pi R^3}{3} + \frac{3\pi R^4}{4}\kappa, \quad A = 2\pi R^2 + 2\pi R^3\kappa.$$

Bei einer kleinen Änderung des Radius R und der Krümmung κ (vom Wert $\kappa = 0$) ändern sich das Volumen und die Fläche wie folgt:

$$dV_T = 2\pi R^2 dR + \frac{3\pi R^4}{4} d\kappa, \quad dA = 4\pi R dR + 2\pi R^3 d\kappa.$$

Aus der Erhaltung des Volumens folgt $dR = -\frac{3}{8}R^2 d\kappa$. Für die Änderung der Oberfläche ergibt sich $dA = \frac{1}{2}\pi R^3 d\kappa$. Die mit der Krümmung zusammenhängende Extraenergie ist somit gleich

$$\Delta E \approx \frac{\pi\gamma_{lv}R^3}{2R_0} = \frac{3V_T\gamma_{lv}}{4R_0}.$$

Die Grenzflächenenergie steigt mit der Krümmung der Unterlage. Der Tropfen wird daher von den Bereichen mit einer größeren Krümmung abgestoßen.

Aufgabe 3: Zu bestimmen ist die Kapillarkraft zwischen einer gekrümmten Fläche mit den Gaußschen Krümmungsradien R_1 und R_2 und einer Ebene. Die Oberflächen beider fester Körper sind als vollständig benetzbar anzunehmen.

Lösung: Da der Unterdruck in der Flüssigkeit überall konstant ist, müssen auch der Krümmungsradius der Kapillarbrücke und die Höhe $h = 2r_0$ konstant bleiben. Die Form des Kontaktgebietes bestimmt sich aus der Bedingung

$$\frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} = h.$$

Die Halbachsen dieser Ellipse sind gleich $\sqrt{2R_1h}$ und $\sqrt{2R_2h}$, und ihre Fläche ist $A = 2\pi h\sqrt{R_1R_2}$. Die Kapillarkraft berechnet sich somit zu

$$|F| = \frac{\gamma}{r_0} A = 4\pi\gamma\sqrt{R_1R_2}.$$

Aufgabe 4: Zu bestimmen ist die Kapillarkraft zwischen einer Kugel und einer Ebene. Die Kontaktwinkel sind θ_1 und θ_2 .

Lösung: $F = 2\pi R\gamma(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$.

Aufgabe 5: Zu bestimmen ist der Überdruck, der erforderlich ist, um eine Flüssigkeit durch ein Gitter aus parallelen runden Stäben durchzudrücken (Abbildung IV.13). Der Abstand zwischen den Stäben sei L .

Lösung: Ist der Überdruck in der Flüssigkeit gleich Δp , bildet sie überall eine gekrümmte Oberfläche mit einem Krümmungsradius R (Abbildung IV.13):

$$\frac{1}{R} = \frac{\Delta p}{\gamma_{lv}}$$

Dabei muss der Winkel zwischen der Oberfläche der Stäbe und der Flüssigkeit gleich dem Kontaktwinkel θ sein. Wird der Überdruck erhöht, so dringt die Flüssigkeit immer weiter zwischen die Stäbe, bis ein kritischer Zustand erreicht wird. Für Kontaktwinkel $\theta \leq \pi/2$ wird der kritische Zustand erreicht, wenn die Kontaktpunkte von beiden Seiten eines Stabes zusammenkommen (Abbildung IV.14 a, b). Für Kontaktwinkel $\theta > \pi/2$ wird er schon früher erreicht. Im Fall einer vollständig unbenetzbaren Oberfläche $\theta = \pi$ ist der kritische Zustand in Abbildung IV.14 c gezeigt.



Abbildung IV.13. Flüssigkeit auf einem Gitter aus geraden Stäben

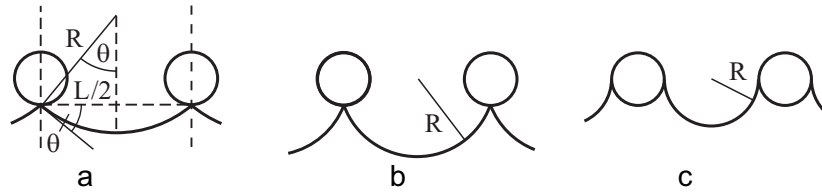


Abbildung IV.14. Kritische Konfigurationen für (a) $\theta < \pi/2$, (b) $\theta \approx \pi/2$, (c) $\theta \approx \pi$

Für benetzbare Flächen ($\theta < \pi/2$) folgt aus der Abbildung IV.14a für den kritischen Zustand $\frac{1}{R} = \frac{2}{L} \sin \theta$. Für den maximal möglichen Überdruck erhalten wir

$$\Delta p = \frac{2}{L} \gamma_{lv} \sin \theta.$$

Er erreicht ein Maximum bei Stäben mit $\theta = \pi/2$ und ist gleich

$$\Delta p_{\max} = \frac{2}{L} \gamma_{lv}.$$

Aufgabe 6: Ein zylindrischer Stift (Masse m , Länge L) liegt auf einer Wasseroberfläche (Abbildung IV.15). Zu bestimmen ist die Durchsenkung des Stiftes und die maximale Gewichtskraft, welche die Oberfläche noch tragen kann, unter der Annahme, dass die Steigung der Wasseroberfläche überall klein ist.



Abbildung IV.15. Eine auf der Wasseroberfläche schwimmende Nadel

Lösung: Bei der Lösung benutzen wir die in der Abbildung IV.16 eingeführten Bezeichnungen. Der Druckunterschied im Punkt (x, z) der Oberfläche kann zum einen nach (IV.10), zum anderen als hydrostatischer Druckunterschied in der Tiefe z berechnet werden:

$$\Delta p = \gamma_{lv} / R = \gamma_{lv} z'' = \rho g z.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung bezüglich $z(x)$ mit der Randbedingung $z \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ lautet:

$$z = A \exp \left(- \left(\frac{\rho g}{\gamma_{lv}} \right)^{1/2} x \right).$$

Das verdrängte Wasservolumen ist gleich

$$V = 2L \int_0^{\infty} z(x) dx = 2AL \left(\frac{\gamma_{IV}}{\rho g} \right)^{1/2}$$

Im Gleichgewicht ist die Gewichtskraft gleich der archimedischen Auftriebskraft; somit gilt $\rho V = m$. Für die Durchsenkung folgt

$$z(0) = A = \frac{m}{2L} \left(\frac{g}{\rho \gamma_{IV}} \right)^{1/2}.$$

Der Steigungswinkel der Oberfläche bei $x = 0$ bestimmt sich als

$$\tan \varphi = \frac{mg}{2L\gamma_{IV}}.$$

Es ist geometrisch leicht zu sehen, dass der Kontaktwinkel θ nicht kleiner sein darf als φ . Die maximale Gewichtskraft, die von der Oberfläche getragen werden kann, berechnet sich somit zu

$$mg = 2L\gamma_{IV} \tan \theta.$$

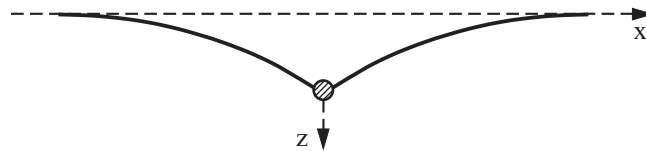
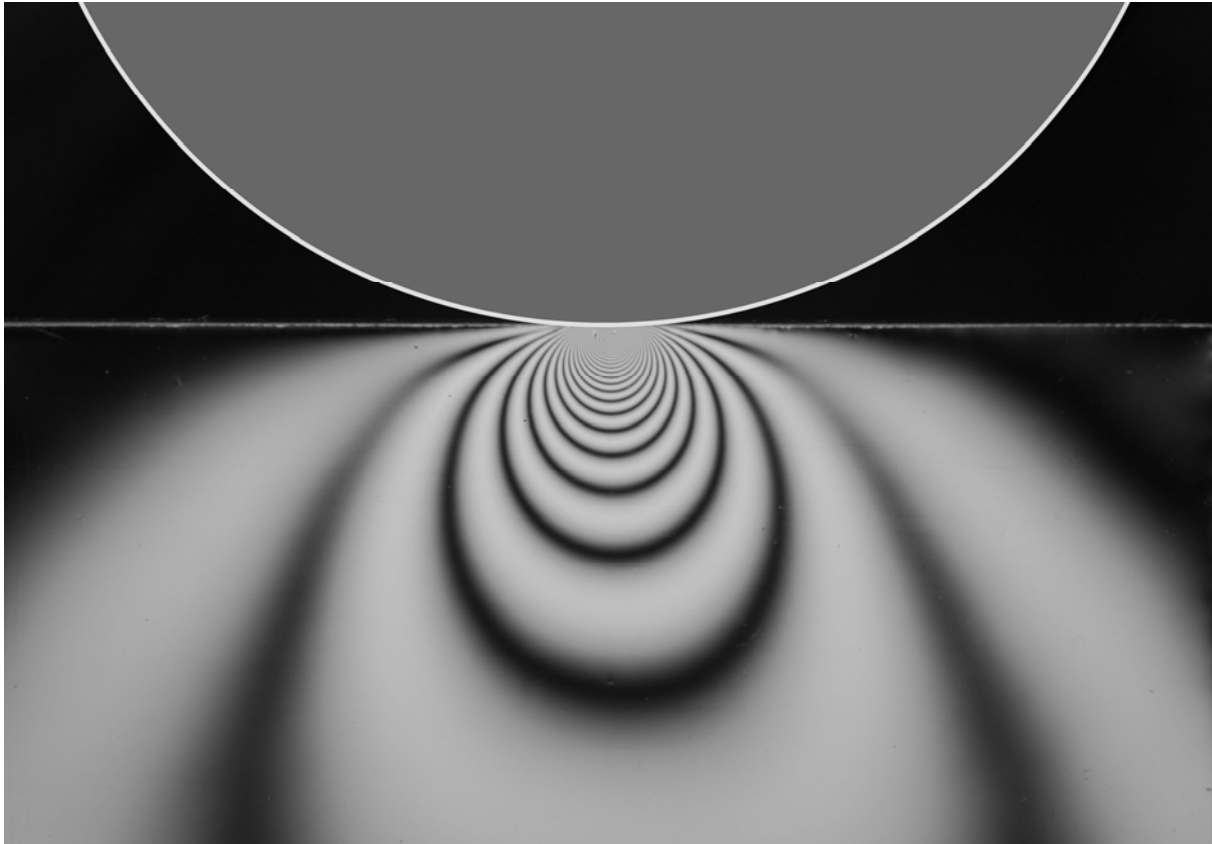


Abbildung IV.16. Ein zylindrischer Stift getragen von der Wasseroberfläche

V RIGOROSE BEHANDLUNG DES KONTAKTPROBLEMS. HERTZSCHER KONTAKT



In diesem Kapitel werden Methoden zur exakten Lösung von Kontaktproblemen im Rahmen der "Halbraumnäherung" erläutert. Wir behandeln dabei ausführlich das klassische Kontaktproblem des Normalkontakts zwischen einer starren Kugel und einem elastischen Halbraum, welches oft auch zur Analyse von komplizierteren Modellen herangezogen wird.

Als vorbereitenden Schritt fassen wir einige Ergebnisse der Elastizitätstheorie zusammen, die in der Kontaktmechanik eine unmittelbare Anwendung finden. Wir betrachten Deformationen in einem elastischen Halbraum, die durch die an der Oberfläche des Halbraumes wirkenden vorgegebenen Spannungen verursacht werden. Die Berechnung der Deformation in einem elastischen Körper unter der Einwirkung von Oberflächenkräften („direkte Aufgabe der Elastizitätstheorie“) ist viel einfacher als die Lösung von Kontaktproblemen, da in den letzteren weder die Spannungsverteilung, noch das Kontaktgebiet anfänglich bekannt sind. Die klassischen Lösungen von Hertz für einen nicht adhäsiven und von Johnson, Kendall und Roberts für einen adhäsiven Kontakt benutzen die bekannten Lösungen der „direkten Aufgaben“ als eine Voraussetzung zur Konstruktion der Lösung eines Kontaktproblems.

V.1 Deformation eines elastischen Halbraumes unter der Einwirkung von Oberflächenkräften

Wir betrachten ein elastisches Medium, welches einen unendlich großen Halbraum ausfüllt, d.h. welches von einer Seite durch eine unendlich ausgedehnte Ebene begrenzt wird. Unter dem Einfluss von Kräften, die an der freien Oberfläche wirken, wird sich das Medium deformieren. Wir legen die xy -Ebene in die freie Oberfläche des Mediums; dem ausgefüllten Gebiet entsprechen positive z . Die Deformation im gesamten Halbraum kann in

analytischer Form bestimmt und in Lehrbüchern über die Elastizitätstheorie gefunden werden [Landau & Lifschitz, 7. Band]. Wir führen hier nur die Formeln für die Verschiebungen unter der Wirkung einer entlang der z-Achse gerichteten, im Koordinatenursprung angreifenden Kraft auf:

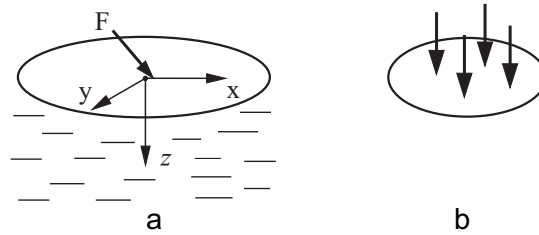


Abbildung V.1. (a) Eine an der Oberfläche eines elastischen Halbraumes angreifende Kraft; (b) Ein auf die Oberfläche wirkendes Kraftsystem

Die Verschiebungen, die diese Kraft hervorruft, berechnen sich nach den folgenden Gleichungen:

$$u_x = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left[\frac{xz}{r^3} - \frac{(1-2\nu)x}{r(r+z)} \right] F_z, \quad (\text{V.1})$$

$$u_y = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left[\frac{yz}{r^3} - \frac{(1-2\nu)y}{r(r+z)} \right] F_z, \quad (\text{V.2})$$

$$u_z = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left[\frac{2(1-\nu)}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right] F_z, \quad (\text{V.3})$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Im Besonderen erhält man hieraus die Verschiebung der freien Oberfläche des Mediums, indem man $z = 0$ setzt:

$$u_x = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \frac{x}{r^2} F_z, \quad (\text{V.4})$$

$$u_y = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \frac{y}{r^2} F_z, \quad (\text{V.5})$$

$$u_z = \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} \frac{1}{r} F_z, \quad (\text{V.6})$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Bei mehreren gleichzeitig angreifenden Kräften werden wir Verschiebungen bekommen, die sich aus der Summe der jeweiligen Lösung für jede einzelne Kraft ergeben.

Wir werden im Weiteren im Rahmen der *Halbraumnäherung* arbeiten, bei der angenommen wird, dass die Steigung der kontaktierenden Oberflächen im Kontaktgebiet und in der relevanten Umgebung viel kleiner als Eins sind, so dass die Oberflächen in erster Näherung "eben" sind. Zwar müssen dabei die Kontaktbedingungen für die beiden Oberflächen auch weiterhin exakt verfolgt werden, die Zusammenhänge zwischen den Oberflächenkräften und Verschiebungen können aber als identisch mit denen in einem elastischen Halbraum angesehen werden.

Für Kontaktprobleme *ohne Reibung* ist im Rahmen der Halbraumnäherung nur die z-Projektion der Verschiebung (V.6) von Interesse. Bei einer kontinuierlichen Verteilung $P_z(x, y)$ des Normaldruckes berechnet sich die Verschiebung der Oberfläche durch

$$u_z = \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} \iint P_z(x',y') \frac{dx'dy'}{r}, \quad r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}. \quad (\text{V.7})$$

Bevor wir zum eigentlichen Kontaktproblem übergehen, wollen wir zwei Hilfsaufgaben lösen. Wir nehmen an, dass in einem kreisförmigen Gebiet mit dem Radius a eine Druckverteilung der Form $p = p_0(1 - r^2/a^2)^n$ erzeugt wird. Gesucht wird die vertikale Verschiebung der Oberflächenpunkte innerhalb des kreisförmigen beanspruchten Gebietes.

a. *Homogene Normalverschiebung* ($n = -1/2$).

Das benutzte Koordinatensystem ist in der *Abbildung V.1a* gezeigt. Die Normalspannung sei nach dem Gesetz

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} \quad (\text{V.8})$$

verteilt. Für die vertikale Verschiebung ergibt sich (eine ausführliche Herleitung findet sich im Anhang 1):

$$u_z = \frac{\pi(1-\nu^2)p_0a}{E}, \quad r \leq a. \quad (\text{V.9})$$

Die vertikale Verschiebung ist für alle Punkte im Kontaktgebiet gleich. Aus diesem Ergebnis folgt unmittelbar, wie sich die angenommene Druckverteilung erzeugen lässt: Sie entsteht beim Eindruck durch einen starren zylindrischen Stab. Die gesamte im Druckgebiet wirkende Kraft ist gleich

$$F = \int_0^a p(r) 2\pi r dr = 2\pi p_0 a^2. \quad (\text{V.10})$$

Die Steifigkeit des Kontaktes wird definiert als Verhältnis der Kraft zur Verschiebung:

$$c = \frac{2aE}{(1-\nu^2)} = 2aE^* \quad (\text{V.11})$$

mit

$$E^* = \frac{E}{(1-\nu^2)}. \quad (\text{V.12})$$

Geschrieben in der Form

$$c = 2E^* \beta \sqrt{\frac{A}{\pi}}, \quad (\text{V.13})$$

wobei A die Kontaktfläche des starren Indenters ist, ist (V.11) auch für Indenter mit nicht runden Querschnitten gültig. Die Konstante β hat immer die Größenordnung 1:

Runder Querschnitt:	$\beta=1,000$	
Dreieckiger Querschnitt:	$\beta=1,034$	(V.14)
Quadratischer Querschnitt:	$\beta=1,012$	

b. *Hertzsche Druckverteilung* ($n = 1/2$).

Für die Druckverteilung der Form

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (\text{V.15})$$

ergibt sich die vertikale Verschiebung (Anhang 1)

$$u_z = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2). \quad (\text{V.16})$$

Für die Gesamtkraft folgt

$$F = \int_0^a p(r) 2\pi r dr = \frac{2}{3} p_0 \pi a^2. \quad (\text{V.17})$$

Die Verschiebung der Oberfläche innerhalb und außerhalb des Druckgebietes ist in Abb. gezeigt.

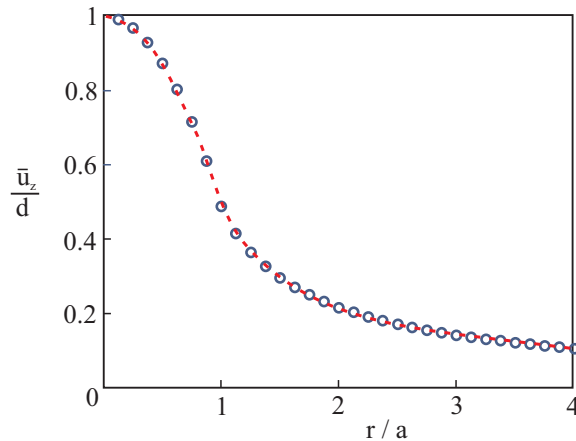


Abbildung V.2. Oberflächenverschiebung u_z , die sich für die Druckverteilung (V.15) ergibt

V.2 Hertzsche Kontakttheorie

In der *Abbildung V.3* ist schematisch ein Kontakt zwischen einer starren Kugel und einem elastischen Halbraum gezeigt. Die Verschiebung der Oberflächenpunkte im Kontaktgebiet zwischen einer ursprünglich ebenen Oberfläche und der starren Kugel mit Radius R ist gleich

$$u_z = d - \frac{r^2}{2R}. \quad (\text{V.18})$$

Wir haben gesehen (V.16), dass eine quadratische Verteilung der vertikalen Verschiebungen durch eine Druckverteilung der Form (V.15) erzeugt wird.

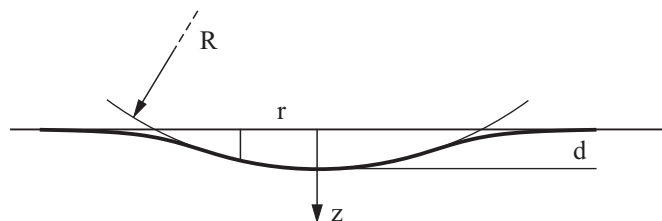


Abbildung V.3. Eine starre Kugel im Kontakt mit einem elastischen Halbraum

Versuchen wir die Parameter a und p_0 so zu wählen, dass diese Druckverteilung genau die Verschiebungen (V.18) verursacht:

$$\frac{1}{E^*} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2) = d - \frac{r^2}{2R}. \quad (\text{V.19})$$

a und d müssen demnach die folgenden Forderungen erfüllen:

$$a = \frac{\pi p_0 R}{2E^*}, \quad d = \frac{\pi a p_0}{2E^*}. \quad (\text{V.20})$$

Für den Kontaktradius folgt daraus

$$a^2 = d \cdot R \quad (\text{V.21})$$

und für den maximalen Druck

$$p_0 = \frac{2}{\pi} E^* \left(\frac{d}{R} \right)^{1/2}. \quad (\text{V.22})$$

Einsetzen von (V.21) und (V.22) in (V.17) ergibt für die Normalkraft

$$F = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2}. \quad (\text{V.23})$$

Mit (V.22) und (V.23) kann auch der Druck im Zentrum des Kontaktgebietes und der Kontaktradius als Funktion der Normalkraft berechnet werden:

$$p_0 = \left(\frac{6FE^{*2}}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3}, \quad a = \left(\frac{3FR}{4E^*} \right)^{1/3}. \quad (\text{V.24})$$

Wir bestimmen noch den Ausdruck für die potentielle Energie U der elastischen Deformation. Wegen $-F = -\partial U / \partial d$ erhalten wir für U

$$U = \frac{8}{15} E^* R^{1/2} d^{5/2} \quad (\text{V.25})$$

V.3 Kontakt zwischen zwei elastischen Körpern mit gekrümmten Oberflächen

Die Ergebnisse der Hertzschen Theorie (V.21), (V.22), (V.23) kann man mit geringen Modifikationen auch in den unten aufgelisteten Fällen benutzen.

(A). Sind beide Körper elastisch, so muss man für E^* den folgenden Ausdruck benutzen

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}. \quad (\text{V.26})$$

E_1 und E_2 sind hier die Elastizitätsmoduln und ν_1 und ν_2 die Poisson-Zahlen beider Körper.

(B) Sind zwei Kugeln mit den Radien R_1 und R_2 im Kontakt (*Abbildung V.4 a*), so gelten die Gleichungen (V.21), (V.22), (V.23) weiterhin mit dem Radius R gemäß

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (\text{V.27})$$

Dies gilt auch dann, wenn einer der Radien negativ ist (*Abbildung V.4 b*). Der Krümmungsradius ist negativ, wenn das Krümmungszentrum außerhalb des Mediums liegt.

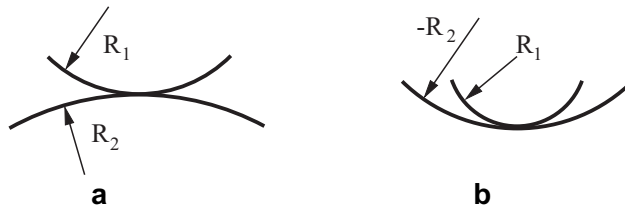


Abbildung V.4. Kontakt zwischen zwei Körpern mit gekrümmten Oberflächen

(C) In einem Kontakt zwischen einem elastischen Halbraum und einem starren Körper mit den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 (Abbildung V.5 a) ergibt sich ein elliptisches Kontaktgebiet. Für die Halbachsen gilt

$$a = \sqrt{R_1 d}, \quad b = \sqrt{R_2 d}. \quad (\text{V.28})$$

Die Kontaktfläche berechnet sich somit zu

$$A = \pi ab = \pi \tilde{R} d, \quad (\text{V.29})$$

wobei

$$\tilde{R} = \sqrt{R_1 R_2} \quad (\text{V.30})$$

der effektive, *Gauß'sche Krümmungsradius* der Oberfläche ist. Dieser Radius ist auch in den anderen Hertzschen Beziehungen an Stelle von R zu benutzen¹.

Die Druckverteilung wird durch

$$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (\text{V.31})$$

gegeben.

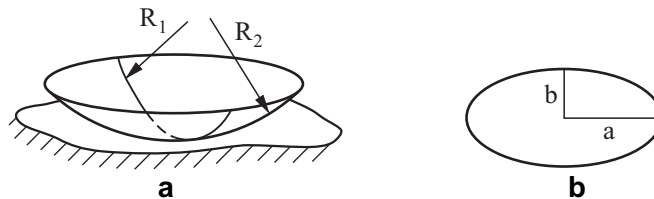


Abbildung V.5. Ein Körper mit gekrümmter Oberfläche (Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2) im Kontakt mit einem elastischen Halbraum

(D) Sind zwei elastische Zylinder mit senkrecht zu einander liegenden Achsen und den Radien R_1 und R_2 im Kontakt (Abbildung V.6 a), so wird der Abstand der Oberflächen beider Körper im ersten Moment (noch ohne Deformation) gegeben durch

$$h(x, y) = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}. \quad (\text{V.32})$$

Das entspricht genau dem Fall (C) eines Ellipsoids mit den Krümmungsradien R_1 und R_2 . Dementsprechend gelten die Hertzschen Relationen mit

¹ Die Hertzschen Beziehungen gelten umso genauer, je näher das Verhältnis R_1/R_2 zu 1 ist. Aber auch für $R_1/R_2 = 10$ gilt die Gleichung (V.23) mit einer Genauigkeit von 2,5%. Selbst für ein extrem ausgedehntes Ellipsoid mit $R_1/R_2 = 100$ gilt sie immer noch mit einer Genauigkeit von 18%. Für die meisten technischen Anwendungen kann man daher die angeführten Gleichungen ohne Bedenken benutzen.

$$\tilde{R} = \sqrt{R_1 R_2}. \quad (\text{V.33})$$

Bei gleichen Radien $R = R_1 = R_2$ ist das Kontaktproblem zwischen zwei Zylindern äquivalent zum Kontaktproblem zwischen einer Kugel mit dem Radius R und einem elastischen Halbraum mit ebener Oberfläche.

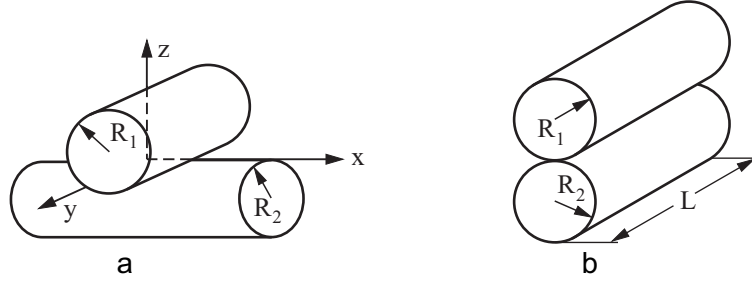


Abbildung V.6. (a) Zwei gekreuzte elastische Zylinder im Kontakt; (b) Zwei Zylinder mit parallelen Achsen im Kontakt

(E) Im Falle eines Kontaktes zwischen zwei Zylindern mit parallelen Achsen (Abbildung V.6 b) ist die Kraft linear proportional zur Eindringtiefe (was wir bereits im Kapitel II gesehen haben):

$$F = \frac{\pi}{4} E^* L d \quad (\text{V.34})$$

Interessant ist, dass der Krümmungsradius in dieser Beziehung überhaupt nicht erscheint. Die halbe Kontaktbreite wird durch dieselbe Beziehung

$$a = \sqrt{Rd}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (\text{V.35})$$

gegeben, wie im Kontakt zwischen zwei Kugeln.

V.4 Innere Spannungen beim Hertzschen Kontakt

Die Spannungen unter Einwirkung einer Einzelkraft F im Koordinatenursprung, in der senkrechten zur Oberfläche Richtung sind durch

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{2\pi} \left[-3 \frac{x^2 z}{r^5} + (1-2\nu) \left(\frac{x^2 (2r+z)}{r^3 (r+z)^2} - \frac{r^2 - rz - z^2}{r^3 (r+z)} \right) \right], \quad (\text{V.36})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{F}{2\pi} \left[-3 \frac{y^2 z}{r^5} + (1-2\nu) \left(\frac{y^2 (2r+z)}{r^3 (r+z)^2} - \frac{r^2 - rz - z^2}{r^3 (r+z)} \right) \right], \quad (\text{V.37})$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{3F}{2\pi} \frac{z^3}{r^5}, \quad (\text{V.38})$$

$$\tau_{xy} = \frac{F}{2\pi} \left[-3 \frac{xyz}{r^5} + (1-2\nu) \frac{xy^2 (2r+z)}{r^3 (r+z)^2} \right], \quad (\text{V.39})$$

$$\tau_{yz} = -\frac{3F}{2\pi} \frac{yz^2}{r^5}, \quad (\text{V.40})$$

$$\tau_{xz} = -\frac{3F}{2\pi} \frac{xz^2}{r^5} \quad (\text{V.41})$$

bestimmt². Die Berechnung der Spannungen bei beliebiger Normaldruckverteilung p an der Oberfläche gelingt durch Superposition. Für die Normalspannung σ_{zz} in z -Richtung ergibt sich exemplarisch

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = -\frac{3z^3}{2\pi} \iint_{(A)} \frac{\rho(\hat{x}, \hat{y})}{\left((x - \hat{x})^2 + (y - \hat{y})^2 + z^2\right)^{5/2}} d\hat{x}d\hat{y}, \quad (\text{V.42})$$

wobei $\iint_{(A)}$ die Integration über das druckbeaufschlagte Gebiet meint.

Für die Hertzsche Druckverteilung (V.15) werden im folgenden einige Ergebnisse gezeigt. *Abbildung V.1* zeigt die Spannungen auf der z -Achse für. Die Schubspannungen sind alle 0; für die Punkte auf der z -Achse sind die Koordinatenrichtungen gleichzeitig die Hauptrichtungen. Analytische Lösung für Komponente des Spannungstensors lautet³

$$\sigma_{zz} = -\rho_0 \left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{-1}, \quad (\text{V.43})$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -\rho_0 \left[(1 + \nu) \left(1 - \frac{z}{a} \arctan \frac{a}{z}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{-1} \right]. \quad (\text{V.44})$$

Zudem ist die maximale Schubspannung $\tau_1 = \frac{1}{2} |\sigma_{zz} - \sigma_{xx}|$ abgebildet. Man kommt zum Ergebnis, dass die maximale Schubspannung im Inneren liegt; für $\nu = 0,33$ bei $z \approx 0,49a$. *Abbildung V.8* zeigt die Vergleichsspannung

$$\sigma_V = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{yy})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right]^{1/2} \quad (\text{V.45})$$

nach der Gestaltänderungsenergiehypothese in der x - z -Ebene.

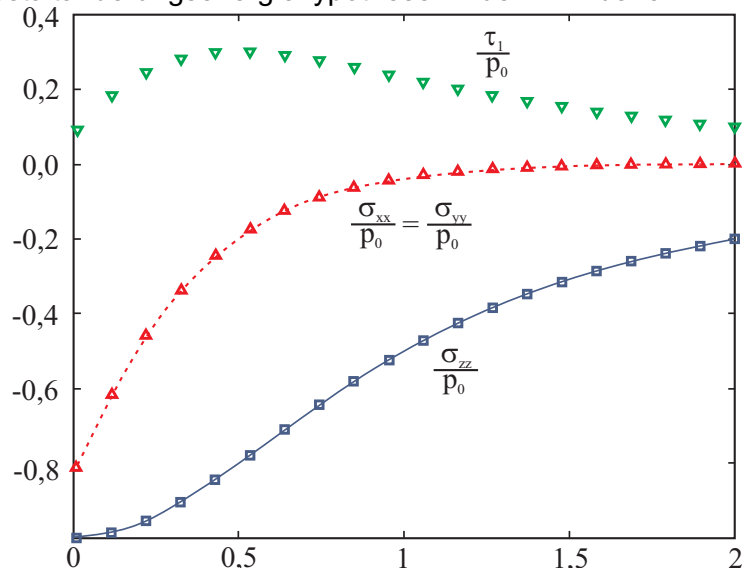


Abbildung V.7. Spannungen entlang der z -Achse ($x = y = 0$) bei Hertzscher Druckverteilung

² Hahn, H. G.: Elastizitätstheorie. Teubner, 1985

³ Johnson, K. L.: Contact mechanics. Cambridge University Press, 6. Nachdruck der 1. Auflage, 2001

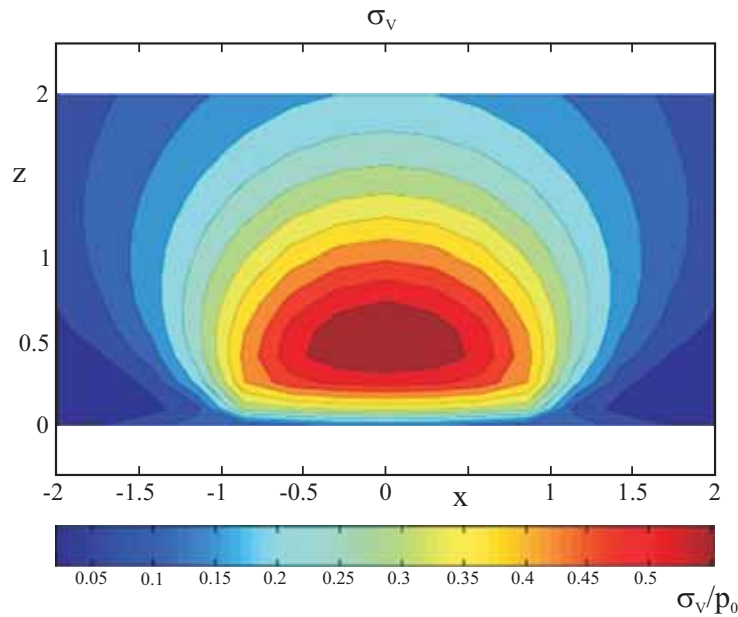


Abbildung V.8. Vergleichsspannung σ_v gemäß (V.45) bei Hertzscher Druckverteilung (x - z -Ebene)

Aufgaben

Aufgabe 1: Abzuschätzen ist der maximale Druck und die Größe des Kontaktgebietes in einem Rad-Schiene-Kontakt. Die maximalen Lasten je Rad liegen bei den Güterzügen bei $F \approx 10^5$ N, der Radradius beträgt ca. $R = 0,5$ m.

Lösung: Der Rad-Schiene-Kontakt kann in erster Näherung als Kontakt zwischen zwei Zylindern mit zu einander senkrechten Achsen und ungefähr gleichen Krümmungsradien R betrachtet werden. Er ist somit äquivalent zu einem Kontakt zwischen einer elastischen Kugel mit dem Radius R und einer elastischen Ebene. Der effektive Elastizitätsmodul beträgt $E^* \approx E / 2(1-\nu^2) \approx 1,2 \cdot 10^{11}$ Pa. Für den Druck p_0 im Zentrum des Kontaktgebietes ergibt sich nach (V.24) $p_0 \approx 1,0$ GPa. Der Kontaktradius beträgt $a \approx 6,8$ mm.

Aufgabe 2: Zwei Zylinder aus dem gleichen Material und mit gleichen Radien R werden so in Kontakt gebracht, dass ihre Achsen einen Winkel von $\pi / 4$ bilden (Abbildung V.9). Zu bestimmen ist die Kraft-Eindrucktiefe-Relation.

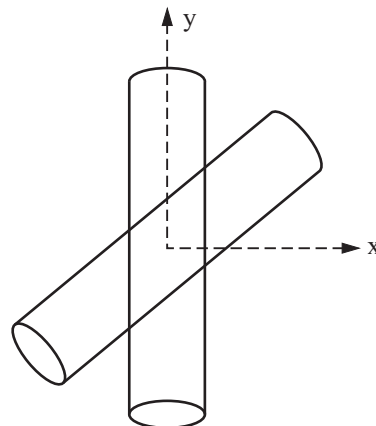


Abbildung V.9

Lösung: Die Kontaktebene nehmen wir als horizontal an. Der Abstand der Oberfläche des ersten Zylinders von dieser Fläche (im ersten Moment des Kontaktes) ist gleich $z_1 = \frac{x^2}{2R}$, die des zweiten $z_2 = -\frac{(x-y)^2}{4R}$. Der Abstand zwischen beiden Flächen ist gleich

$$h = \frac{x^2}{2R} + \frac{(x-y)^2}{4R} = \frac{1}{R} \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 \right).$$

Die Hauptkrümmungen berechnen sich als Eigenwerte dieser quadratischen Form aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4R} - \kappa & -\frac{1}{4R} \\ -\frac{1}{4R} & \frac{1}{4R} - \kappa \end{vmatrix} = \kappa^2 - \frac{\kappa}{R} + \frac{1}{8R^2} = 0.$$

zu $\kappa_{1,2} = \frac{1 \pm 1/\sqrt{2}}{2R}$. Die Hauptkrümmungsradien sind entsprechend gleich $R_{1,2} = \frac{2R}{1 \pm 1/\sqrt{2}}$. Für den Gauss'schen Krümmungsradius ergibt sich $\tilde{R} = \sqrt{R_1 R_2} = 2\sqrt{2}R$. Da die Stoffe beider Zylinder gleich sind, ergibt sich aus (V.26) $E^* = \frac{E}{2(1-\nu^2)}$. Die Kraft-Eindruck-Relation (V.23) wird in diesem Fall zu

$$F = \frac{2^{7/4}}{3} \frac{E}{(1-\nu^2)} R^{1/2} d^{3/2}.$$

Aufgab 3: Man bestimme die Kontaktzeit, einer mit einer starren Wand zusammenstoßenden elastischen Kugel (Radius R) (Hertz, 1882).

Lösung: Die Annäherung der Kugel zur Wand ab dem ersten Kontakt bezeichnen wir mit x . Die potentielle Energie des Systems wird durch (V.25) gegeben mit $d = x$ und E^* nach (V.26). Während der Stoßzeit bleibt die Energie erhalten:

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{8}{15} E^* R^{1/2} x^{5/2} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Die maximale Annäherung der Kugel und der Wand x_0 entspricht dem Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit dx/dt verschwindet, und ist gleich

$$x_0 = \left(\frac{15}{16} \frac{mv_0^2}{E^* R^{1/2}} \right)^{2/5}.$$

Die Stoßdauer τ (während der x von 0 bis x_0 anwächst und dann wieder bis 0 abnimmt) ist

$$\tau = \frac{2}{v_0} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x/x_0)^{5/2}}} = \frac{2x_0}{v_0} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{5/2}}} = \frac{2,94x_0}{v_0}.$$

Aufgabe 4: Man bestimme den maximalen Kontaktdruck bei einem Zusammenstoß zwischen einer Kugel und einer Wand.

Lösung: Die maximale Annäherung x_0 haben wir in der Aufgabe 3 berechnet. Der maximale Druck p_0 wird durch (V.22) gegeben und ist gleich

$$p_0 = \frac{2}{\pi} E^* \left(\frac{x_0}{R} \right)^{1/2} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{15 E^* m v_0^2}{16 R^3} \right)^{1/5} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{5}{4} E^* \rho v_0^2 \right)^{1/5},$$

wobei ρ die Dichte des Materials ist.

Zum Beispiel bei einem Zusammenstoß einer stählernen Kugel mit einer stählernen Wand mit $v_0 = 1$ m/s hätten wir (unter der Annahme eines rein elastischen Verhaltens)

$$p_0 \approx \frac{2}{\pi} \left(\frac{5}{4} \pi (10^{11})^4 (7,8 \cdot 10^3) \cdot 1 \right)^{1/5} = 3,2 \cdot 10^9 \text{ Pa.}$$

Aufgabe 5: Zu bestimmen ist die differentielle Kontaktsteifigkeit $\delta F_N / \delta d$ für einen Kontakt zwischen einem elastischen rotationssymmetrischen Körper und einer starren Ebene bei einer Kontaktfläche A (Abbildung V.10).

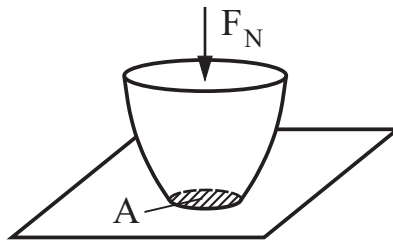


Abbildung V.10 Kontakt zwischen einem elastischen rotationssymmetrischen Körper und einer starren Ebene

Lösung: Betrachten wir einen runden Kontakt mit dem Radius a . Die Änderung der Konfiguration des Kontaktes infolge einer infinitesimal kleinen Vergrößerung der Indentierungstiefe um δd kann man in zwei Schritten herbeiführen:

Zunächst wird nur das bereits bestehende Kontaktgebiet starr um δd verschoben (Abbildung V.11 b). Dabei ändert sich die Normalkraft gemäß (V.11) um $\delta F_N = 2aE^* \delta d$. Im zweiten Schritt müssen die durch starre Indentierung ausstehenden Ränder angehoben werden (Abbildung V.11 c). Die sich dadurch ergebende Änderung der Normalkraft ist proportional zur Fläche $2\pi a \delta a$, die angehoben werden soll und zur Höhe des ausstehenden Materials. Sie ist somit eine infinitesimal kleine Größe höherer Ordnung und kann vernachlässigt werden.

Die differentielle Steifigkeit

$$c = \frac{\delta F_N}{\delta d} = 2aE^*$$

hängt somit nur vom Kontaktradius ab, nicht aber von der genauen Form des rotationssymmetrischen Körpers. Für nicht rotationssymmetrische Körper gilt für die differentielle Steifigkeit die Gleichung (V.13).

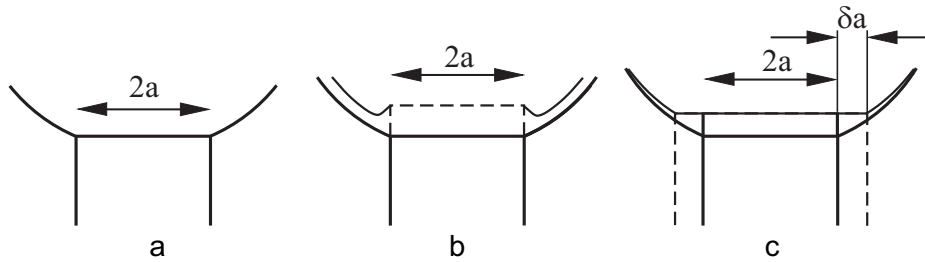


Abbildung V.11. Zur Berechnung der differentiellen Steifigkeit

Aufgabe 6: Auf einem kreisförmigen Gebiet mit dem Radius a wirkt eine konstante Normalspannung p_0 . Zu bestimmen ist Verschiebung des Gebietes im Zentrum und am Rande des Kreises.

Lösung: Mit Hilfe der Gleichung (V.7) erhalten wir für Verschiebung im Zentrum des Kreises

$$u_z(0) = \frac{1}{\pi E^*} \int_0^R p_0 \frac{2\pi r}{r} dr = \frac{2p_0 R}{E^*}.$$

Für die Verschiebung am Rande ergibt sich

$$u_z(a) = \frac{1}{\pi E^*} \int_0^{2R} p_0 \frac{2\varphi(r) \cdot r}{r} dr = \frac{p_0}{\pi E^*} \int_0^{2R} 2\varphi(r) dr.$$

(Definition der Integrationsvariable r in diesem Fall siehe *Abbildung V.12*). Der Winkel φ berechnet sich zu $2\varphi = \pi - 2\arcsin\left(\frac{r}{2R}\right)$. Somit erhalten wir

$$u_z(a) = \frac{p_0}{\pi E^*} \int_0^{2R} \left(\pi - 2\arcsin\left(\frac{r}{2R}\right) \right) dr = \frac{2Rp_0}{\pi E^*} \int_0^1 (\pi - 2\arcsin(\xi)) d\xi = \frac{4Rp_0}{\pi E^*}.$$

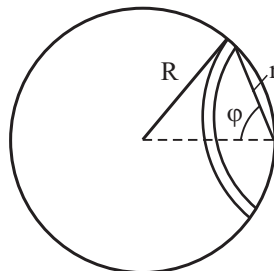
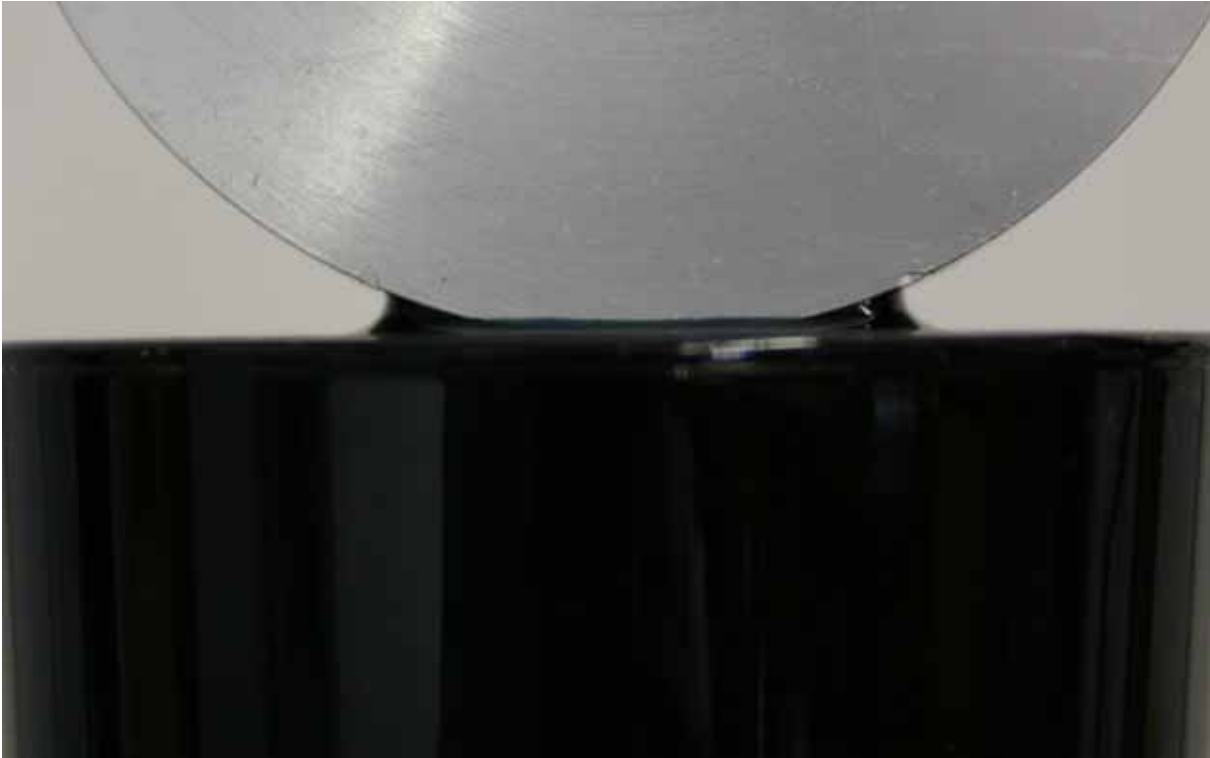


Abbildung V.12. Zur Berechnung des Integrals in der Aufgabe 5

VI RIGOROSE BEHANDLUNG DES KONTAKTPROBLEMS. ADHÄSIVER KONTAKT



Das Problem des elastischen Normalkontakts (ohne Adhäsion) zwischen elastischen Körpern mit leicht gekrümmter Oberfläche wurde 1882 von Hertz gelöst. Bradley präsentierte 50 Jahre später die Lösung für den adhäsiven Normalkontakt zwischen einer starren Kugel und einer starren Ebene. Als Ergebnis erhielt er für die Adhäsionskraft $F_A = 4\pi\gamma R$, wobei γ die Oberflächenenergie ist. Die Lösung für den adhäsiven Kontakt zwischen elastischen Körpern wurde 1971 von Johnson, Kendall und Roberts (JKR-Theorie) präsentiert. Sie erhielten für die Adhäsionskraft $F_A = 3\pi\gamma R$. Derjaguin, Muller und Toporov publizierten 1975 eine alternative Adhäsionstheorie, die als DMT-Theorie bekannt ist. Nach einer heftigen Diskussion ist Tabor 1976 zur Erkenntnis gekommen, dass JKR- und DMT-Theorien korrekte Spezialfälle des allgemeinen Problems sind. Für absolut starre Körper gilt Theorie von Bradley, für kleine starre Kugeln DMT-Theorie und für große weiche Kugeln die JKR-Theorie. Der Unterschied zwischen allen diesen Fällen ist aber gering und die JKR-Theorie beschreibt die Adhäsion selbst in dem Gültigkeitsbereich der DMT-Theorie relativ gut. Das mag der Grund sein, dass sich die JKR-Theorie bei der Beschreibung von adhäsiven Kontakten durchgesetzt hat. Aus diesem Grunde beschränken auch wir uns in diesem Kapitel auf Darstellung der Theorie von Johnson, Kendall und Roberts.

VI.1 JKR-Theorie

Die klassische Theorie der adhäsiven Kontakte wurde 1971 von Johnson, Kendall und Roberts geschaffen und trägt den Namen JKR-Theorie. Bemerkenswert ist, dass diese Theorie fast ein ganzes Jahrhundert nach der Hertzschen Kontakttheorie ohne Adhäsion erschienen ist. Wir betrachten eine elastische Kugel mit dem Radius R im Kontakt mit einer starren ebenen Oberfläche. Zwischen zwei festen Körpern gibt es immer Anziehungskräfte (van-der-Waals- Kräfte), die dazu führen, dass eine elastische Kugel im Kontakt mit einer glatten Ebene einen charakteristischen „Hals“ bildet (Abbildung VI.1).

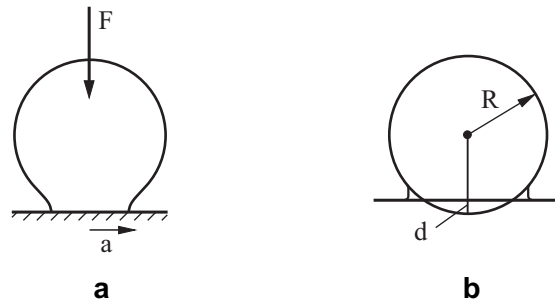


Abbildung VI.1. Bei einem adhäsiven Kontakt bildet sich zwischen kontaktierenden Körpern ein "Hals"

Wir bezeichnen den Radius des Kontaktgebietes mit a und nehmen an, dass $d, a \ll R$, wobei $R - d$ der Abstand zwischen dem Zentrum der Kugel und der starren Unterlage ist.

Damit die Kugel die in der Abbildung VI.1 b gezeigte Form annehmen kann, müssen sich die Oberflächenpunkte der Kugel so verschieben, dass sie nach der Deformation auf der starren Ebene liegen.

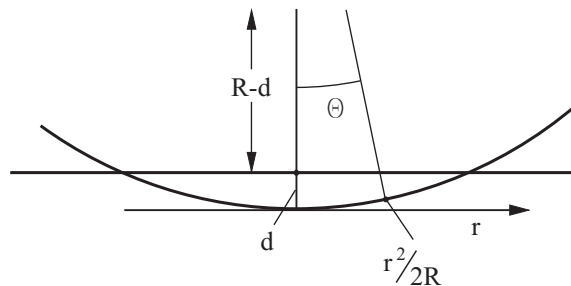


Abbildung VI.2

Für die vertikale Verschiebung gilt offenbar

$$u_z = d - \frac{r^2}{2R} \quad (\text{VI.1})$$

Aus den Ergebnissen des vorigen Kapitels wissen wir, dass die Druckverteilung der Form

$$p = p_0 \left(1 - r^2 / a^2\right)^{-1/2} \quad (\text{VI.2})$$

zu einer vertikalen Verschiebung

$$u_z = \frac{\pi(1-\nu^2)}{E} p_0 a \quad (\text{VI.3})$$

führt, während die Druckverteilung

$$p = p_0 \left(1 - r^2 / a^2\right)^{1/2} \quad (\text{VI.4})$$

die Verschiebung

$$u_z = \frac{\pi(1-\nu^2)}{4Ea} p_0 (2a^2 - r^2) \quad (\text{VI.5})$$

verursacht. Eine gleichzeitige Anwendung beider Druckverteilungen führt offenbar zu einer quadratischen Verteilung der Verschiebungen im Kontaktgebiet, was mit der geometrischen Vorgabe (VI.1) im Einklang steht.

Aus den genannten Gründen benutzen wir für die Druckverteilung im Kontaktgebiet den Ansatz

$$p = p_0 \left(1 - r^2 / a^2\right)^{-1/2} + p_1 \left(1 - r^2 / a^2\right)^{1/2}. \quad (\text{VI.6})$$

Die entsprechende Verschiebung ergibt sich nach dem Superpositionsprinzip zu

$$u_z = \frac{\pi(1-\nu^2)a}{E} \left[p_0 + \frac{1}{2} p_1 \left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right) \right] = \frac{\pi a}{E^*} \left[p_0 + \frac{1}{2} p_1 \left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right) \right] \quad (\text{VI.7})$$

Ein Vergleich von (VI.1) und (VI.7) liefert

$$\frac{\pi a}{E^*} \left(p_0 + \frac{p_1}{2} \right) = d, \quad \frac{\pi p_1}{4E^* a} = \frac{1}{2R}. \quad (\text{VI.8})$$

Daraus folgt

$$p_1 = \frac{E^* 2a}{\pi R}, \quad p_0 = \frac{E^*}{\pi} \left(\frac{d}{a} - \frac{a}{R} \right), \quad (\text{VI.9})$$

mit der üblichen Bezeichnung $\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu^2}{E}$.

Die zwei Gleichungen (VI.9) enthalten (bei gegebenem Eindrucktiefe d) drei unbekannte Größen p_1 , p_0 und a . Um den Deformations- und Spannungszustand bei der gegebenen Eindrucktiefe d eindeutig bestimmen zu können, ist eine weitere Bedingung notwendig. Hierfür benutzen wir die Forderung, dass die gesamte Energie des Systems bei konstantem d ein Minimum annimmt. Die Energie der Kugel besteht aus einem elastischen und einem adhäsiven Anteil. Die elastische Deformationsenergie der Kugel kann mit der Gleichung

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int_{\text{Kontakt-gebiet}} p(\mathbf{x}) u_z(\mathbf{x}) dx dy \quad (\text{VI.10})$$

berechnet werden, die für beliebige linear elastische Systeme gilt. Substitution von (VI.6) und (VI.1) in (VI.10) ergibt

$$U_{el} = \pi d \int_0^a r \left[p_0 \left(1 - r^2 / a^2\right)^{-1/2} + p_1 \left(1 - r^2 / a^2\right)^{1/2} \right] \left(1 - \frac{r^2}{2dR}\right) dr \quad (\text{VI.11})$$

Nach der Substitution $\xi = 1 - r^2 / a^2$, $d\xi = -2rdr / a^2$ erhalten wir

$$U_{el} = \frac{\pi d a^2}{2} \left[p_0 \left(2 - \frac{2}{3} \frac{a^2}{dR}\right) + p_1 \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{15} \frac{a^2}{dR}\right) \right] \quad (\text{VI.12})$$

und unter Berücksichtigung von (VI.9)

$$U_{el} = E^* \left[d^2 a - \frac{2}{3} \frac{d a^3}{R} + \frac{a^5}{5R^2} \right]. \quad (\text{VI.13})$$

Die volle Energie ist gleich¹

$$U_{tot} = E^* \left[d^2 a - \frac{2}{3} \frac{da^3}{R} + \frac{a^5}{5R^2} \right] - 2\gamma\pi a^2. \quad (\text{VI.14})$$

Den Gleichgewichtsradius a erhalten wir aus der Forderung, dass diese Energie ein Minimum annimmt:

$$\frac{\partial U_{tot}}{\partial a} = E^* \left[d^2 - 2 \frac{da^2}{R} + \frac{a^4}{R^2} \right] - 4\gamma\pi a = E^* \left(d - \frac{a^2}{R} \right)^2 - 4\gamma\pi a = 0. \quad (\text{VI.15})$$

Daraus folgt

$$d = \frac{a^2}{R} \pm \sqrt{\frac{4\gamma\pi a}{E^*}} \quad (\text{VI.16})$$

Einsetzen dieser Beziehung in (VI.14) ergibt die Gesamtenergie als Funktion des Kontaktradius

$$U_{tot} = E^* \left[\frac{8}{15} \frac{a^5}{R^2} + \frac{2\gamma\pi a^2}{E^*} \pm \frac{4}{3} \frac{a^3}{R} \sqrt{\frac{4\gamma\pi a}{E^*}} \right]. \quad (\text{VI.17})$$

Das Minuszeichen entspricht dem Zustand mit einer kleineren Energie.

Die auf die Kugel wirkende Gesamtkraft in diesem Zustand erhalten wir aus der Ableitung der Energie nach der Verschiebung d des Mittelpunkts der Kugel:

$$F = -\frac{dU_{tot}}{d(d)} = -\frac{\partial U_{tot}}{\partial(d)} - \frac{\partial U_{tot}}{\partial a} \frac{da}{d(d)} \quad (\text{VI.18})$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass der Wert von a im Gleichgewichtszustand bei gegebenem d genommen werden muss. In diesem Zustand ist aber $\frac{\partial U_{tot}}{\partial a} = 0$, so dass wir statt (VI.18) zu einer einfacheren Gleichung kommen:

$$F = -\frac{\partial U_{tot}}{\partial(d)} = E^* \left[2da - \frac{2}{3} \frac{a^3}{R} \right] \quad (\text{VI.19})$$

Indem wir hier (VI.16) einsetzen, erhalten wir die Kraft als Funktion des Kontaktradius'

$$F = E^* \left[2 \left(\frac{a^2}{R} - \sqrt{\frac{4\gamma\pi a}{E^*}} \right) a - \frac{2}{3} \frac{a^3}{R} \right] = E^* \left[\frac{4}{3} \frac{a^3}{R} - \left(\frac{16\gamma\pi a^3}{E^*} \right)^{1/2} \right]. \quad (\text{VI.20})$$

Der maximale negative Wert dieser Kraft wird erreicht bei

$$a = a_{crit} = \left(\frac{9}{4} \frac{\gamma\pi R^2}{E^*} \right)^{1/3} \quad (\text{VI.21})$$

und ist gleich

$$F_A = -3\gamma\pi R. \quad (\text{VI.22})$$

Der Betrag dieser Kraft wird *Adhäsionskraft* genannt.

¹ Die Adhäsionsenergie pro Flächeneinheit wird hier also als 2γ angenommen.

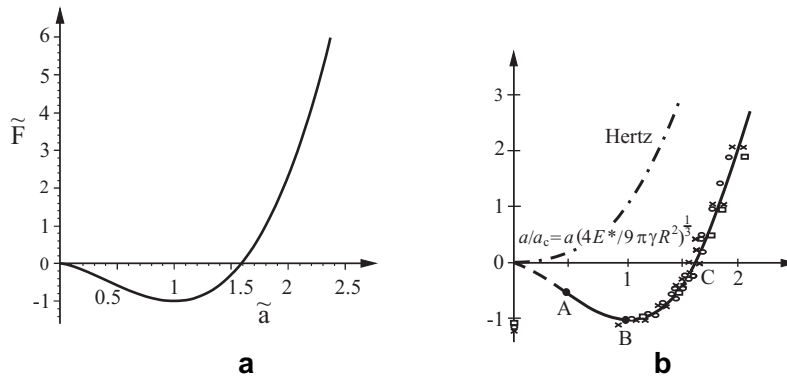


Abbildung VI.3. (a) Abhängigkeit der normierten Kraft vom normierten Kontaktradius; (b) experimentelle Daten von Johnson für Gelatinekügelchen mit verschiedenen Radien: 24.5 mm, 79 mm und 255 mm (Johnson)

In dimensionslosen Variablen $\tilde{F} = F / |F_A|$, $\tilde{a} = a / a_{crit}$ erhält (VI.20) die folgende Form

$$\tilde{F} = \tilde{a}^3 - 2\tilde{a}^{3/2} \quad (VI.23)$$

Sie ist in der Abbildung VI.3 a graphisch dargestellt.

Die Eindrucktiefe (Gleichung (VI.16) mit Minus-Vorzeichen) im kritischen Zustand (VI.21) ist gleich

$$d_{crit} = - \left(\frac{3\pi^2 \gamma^2 R}{16E^*} \right)^{1/3} \quad (VI.24)$$

Indem wir die dimensionslose Eindrucktiefe $\tilde{d} = d / |d_{crit}|$ einführen, können wir die Gleichung (VI.16) in die dimensionlose Form

$$\tilde{d} = 3\tilde{a}^2 - 4\tilde{a}^{1/2} \quad (VI.25)$$

überführen. Zusammen mit (VI.23) bestimmt sie in parametrischer Form die Abhängigkeit der dimensionslosen Normalkraft von der dimensionslosen Eindrucktiefe (Abbildung VI.4).

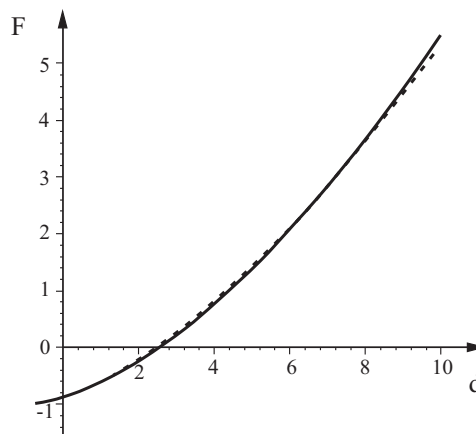


Abbildung VI.4. Abhängigkeit der dimensionslosen Normalkraft von der dimensionslosen Eindrucktiefe

Diese Abhängigkeit ist in Abbildung VI.4 dargestellt. In dem für viele Adhäsionsprobleme interessanten Bereich wenn die Eindrucktiefe von der gleichen

Größenordnung wie d_{crit} ist, kann sie sehr gut durch die folgende Beziehung approximiert werden:

$$\tilde{F} \approx -1 + 0,12 \cdot (\tilde{d} + 1)^{5/3} \quad (VI.26)$$

(gestrichelte Linie in der Abbildung VI.4).

Wir diskutieren noch die Druckverteilung im adhäsiven Kontakt. Sie wird durch die Gleichungen (VI.6) und (VI.9) gegeben. Zu bemerken ist, dass p_1 immer positiv und

$$p_0 = \frac{E^*}{\pi} \left(\frac{d}{a} - \frac{a}{R} \right) = -\sqrt{\frac{4\gamma E^*}{\pi a}}$$

immer negativ sind. Die resultierende Druckverteilung ist in

Abbildung VI.5 gezeigt. Der wesentliche Unterschied zum nichtadhäsiven Kontakt besteht darin, dass an den Rändern des Kontaktgebietes die Spannung nicht Null ist, sondern einen unendlich großen negativen Wert annimmt.

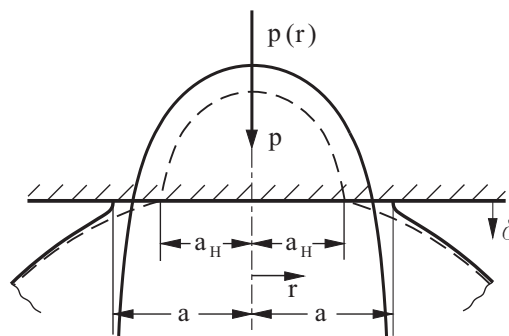


Abbildung VI.5. Form des kontaktierenden Körpers und Druckverteilung in einem adhäsiven Kontakt

Die Berücksichtigung der endlichen Reichweite der Adhäsionskräfte beseitigt diese Singularität. Dennoch erreichen die Spannungen an den Rändern eines adhäsiven Kontaktgebietes sehr große Werte (von der Größenordnung der „theoretischen Festigkeit“ der van-der-Waals-Kontakte), was zu einem erhöhten Verschleiß führen kann (vergleiche eine ähnliche Situation beim "tangentialen Kontakt" (siehe Kapitel VIII).

Aufgaben

Aufgabe 1: Wie lang darf der in der Abbildung VI.6 skizzierte schlanke Balken höchstens sein, damit ein Kontakt (wie in der Skizze) verhindert wird? Die relative Oberflächenenergie zwischen Balken und Unterlage sei γ^* . Die Breite des Balkens (senkrecht zur Zeichenebene) sei a , die Dicke t .

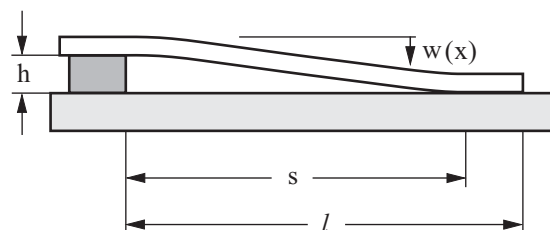


Abbildung VI.6

Lösung: Die Balkendifferentialgleichung lautet in diesem Fall: $d^4w/dx^4 = 0$. Ihre Lösung, die den Randbedingungen $w(0) = 0$, $w(s) = h$, $w'(0) = 0$, $w'(s) = 0$ genügt, lautet

$$w(x) = \frac{h}{s^3} (3x^2s - 2x^3).$$

Die elastische Energie eines gebogenen Balkens berechnet sich zu

$$U_{el} = \int_0^s \frac{1}{2} EI w''(x)^2 dx = \frac{6EIh^2}{s^3},$$

wobei

$$I = \frac{at^3}{12}$$

das geometrische Flächenträgheitsmoment des Balkenquerschnittes ist.

Die gesamte Energie ist gleich

$$U = \frac{6EIh^2}{s^3} - \gamma^* (l - s) \cdot a.$$

Sie nimmt ein Minimum bei

$$s = \left(\frac{3Eh^2t^3}{2\gamma^*} \right)^{1/4}$$

an. Ist die Länge des Balkens kleiner als s , so kann er an der Unterlage nicht „kleben bleiben“.

Aufgabe 2: Durch äußere Kräfte werde unter Überwindung der Oberflächenspannung von einem Körper eine Schicht (von der Stärke t) abgespalten (Abbildung VI.7). Man leite die Beziehung zwischen der Oberflächenspannung und der Form der sich abspaltenden Plattenschicht ab².

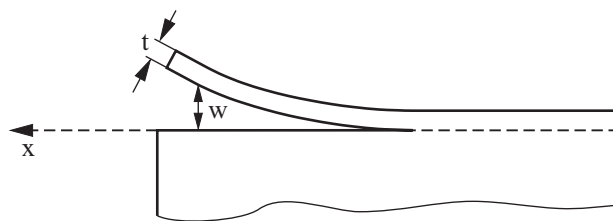


Abbildung VI.7

Lösung: Wir betrachten die sich abspaltende Schicht als eine Platte mit der Breite a (senkrecht zur Zeichenebene), die in einem Rand (Risslinie) horizontal eingebettet ist. Die

² Dieses Problem untersuchte I.W. Obreimov (1930) im Zusammenhang mit der von ihm entwickelten Methode zur Messung der Oberflächenspannung von Glimmer; die so durchgeführten Messungen waren die ersten direkten Messungen zur Bestimmung der Oberflächenspannung fester Körper.

Lösung der Plattendifferentialgleichung $d^4w / dx^4 = 0$, die den Randbedingungen $w(0) = h$, $w(s) = 0$, $w''(0) = 0$, $w'(s) = 0$ genügt, lautet

$$w(x) = \frac{h(x^3 - 3xs^2 + 2s^3)}{2s^3}.$$

Die elastische Energie ist gleich

$$U_{el} = \int_0^s \frac{1}{2} D a w''(x)^2 dx = \frac{3Dah^2}{2s^3}$$

mit $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$. Die gesamte Energie ist gleich

$$U = \frac{3Dah^2}{2s^3} + 2\gamma sa.$$

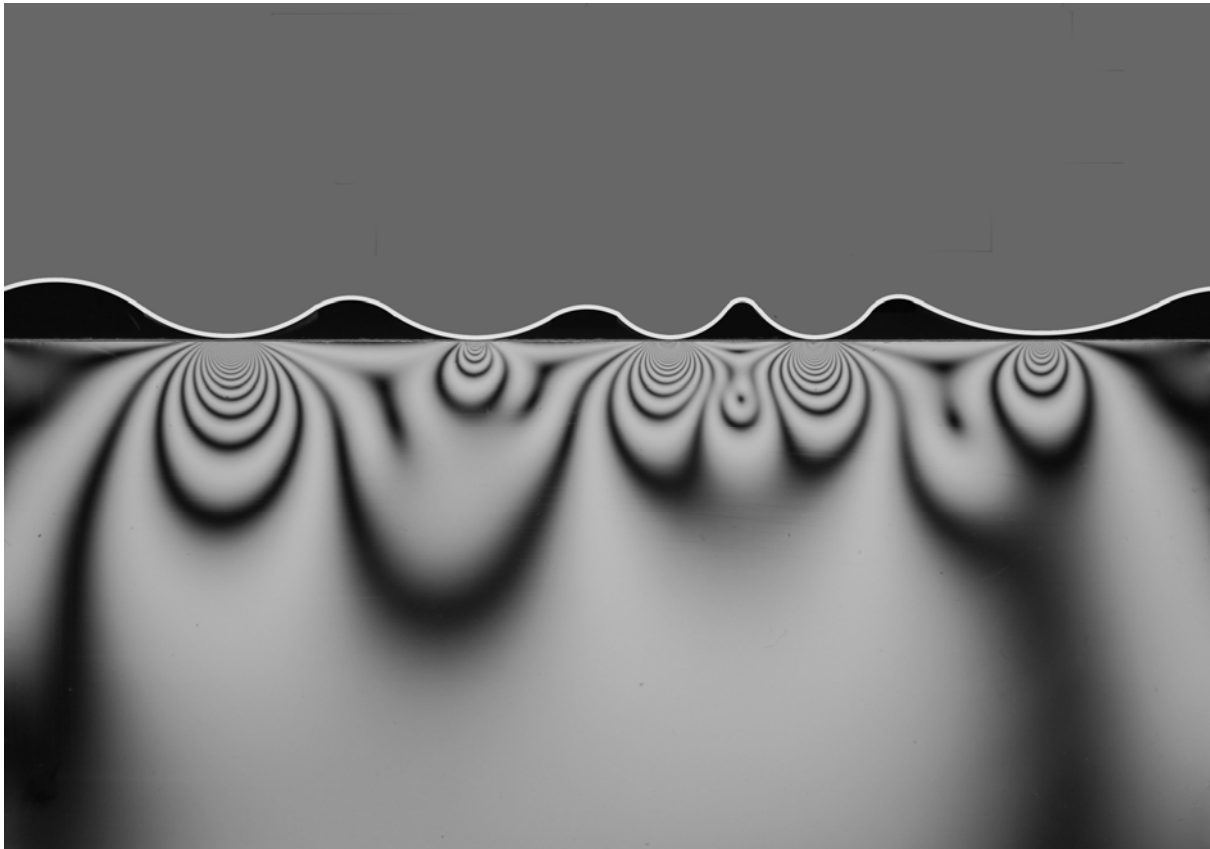
Sie nimmt ein Minimum bei

$$s = \frac{\sqrt{6}}{2} (D)^{1/4} h^{1/2} \gamma^{-1/4}$$

an. Unter Berücksichtigung der Gleichung $w''(x) = \frac{3hx}{s^3}$ folgt daraus

$$\gamma = \frac{D}{4} w''(s)^2.$$

VII KONTAKT ZWISCHEN RAUEN OBERFLÄCHEN



Die Oberflächenrauigkeit hat einen großen Einfluss auf viele physikalische Phänomene wie Reibung, Verschleiß, Abdichtungen, Adhäsion, selbstklebende Schichten, elektrische und thermische Kontakte. Wenn zwei Körper mit rauen Oberflächen aneinander gedrückt werden, so ist die „reale Kontaktfläche“ zunächst sehr viel kleiner als die „scheinbare Fläche“. Die Größe der „realen Kontaktfläche“ bestimmt z.B. den elektrischen und den thermischen Widerstand zwischen den Körpern. Die Größe der Kontaktgebiete und der maximalen Spannungen bestimmt letztendlich die Größe von Verschleißteilchen und somit die Verschleißgeschwindigkeit. Auch für die Reibungsprozesse ist die Größe des realen Kontaktgebietes von ausschlaggebender Bedeutung. Als mikroskopische Ursache für die Reibungskraft kann man sich den Bruch der mikroskopischen Bindungen zwischen den kontaktierenden Oberflächen vorstellen. Die Bruchfestigkeit und somit die Reibungskraft sollten nach diesen Vorstellungen etwa proportional zu der „realen Kontaktfläche“ sein. In diesem Kapitel untersuchen wir Abhängigkeiten der realen Kontaktfläche, der Kontaktlänge und der gesamten Kontaktkonfiguration von der Anpresskraft.

VII.1 Modell von Greenwood and Williamson

Wir beginnen mit einer Diskussion von rauen Oberflächen im *elastischen* Kontakt. Als einfachstes Modell einer rauen Oberfläche könnte man sich eine Oberfläche bestehend aus einer regulären Reihe von gleichförmigen Rauigkeiten vorstellen, die den gleichen Krümmungsradius und die gleiche Höhe haben¹ (*Abbildung VII.1*).

¹ Solche regulären Oberflächen bezeichnet man allerdings nicht als „rau“, sondern als „profilert“ oder „strukturiert“.

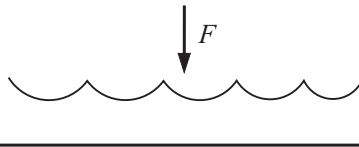


Abbildung VII.1. Einfaches Modell einer rauhen Oberfläche

Die Behandlung eines Kontaktproblems zwischen solchen Flächen ist einfach: Die Gesamtkraft ergibt sich bei nicht zu großen Normalkräften als Summe von für alle „Kappen“ gleichen Kräften, die sich mit der Hertzschen Kontakttheorie berechnen lassen. Die einzelne „Mikrokontaktfläche“, und somit die gesamte Kontaktfläche ist in diesem Fall $\Delta A \sim F^{2/3}$. Das widerspricht sowohl direkten Experimenten als auch dem Amontongesetz, nach dem die Reibungskraft ungefähr proportional zur Normalkraft ist. Wir erwarten deswegen einen ungefähr linearen Anstieg der Kontaktfläche mit der Normalkraft.

Die Situation verändert sich wesentlich, wenn wir berücksichtigen, dass die realen Oberflächen in der Regel stochastisch rau sind. Die einfachste Methode, eine nicht reguläre Fläche zu modellieren haben 1966 J.A. Greenwood and J.B.P. Williamson vorgeschlagen. Dieses Modell werden wir nach den Autoren als GW-Modell bezeichnen. Greenwood und Williamson haben angenommen, dass alle Rauigkeitsspitzen ("Asperiten") den gleichen Krümmungsradius haben, die Höhen der Spitzen aber stochastisch um ein Mittelniveau verteilt sind (Abbildung VII.2). Sind die kontaktierenden Spitzen ausreichend von einander entfernt, so können ihre Deformationen als unabhängig von einander betrachtet werden. Daraus folgt, dass die Position dieser Spitzen, und somit die genaue Konfiguration der Oberfläche, für das Kontaktproblem (unter der genannter Annahme) von keiner Bedeutung sind. Lediglich die Höhenverteilung der Spitzen ist von Bedeutung. Bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeitsdichte, einen Asperiten mit der maximalen Höhe z zu treffen, durch $\Phi(z)$. Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, einen Asperiten mit der maximalen Höhe im Intervall $[z, z + dz]$ zu treffen gleich $\Phi(z)dz$ ist. Ist die Gesamtzahl von Asperiten N_0 , so ist die Zahl der Asperiten im Intervall $[z, z + dz]$ gleich $N_0\Phi(z)dz$.

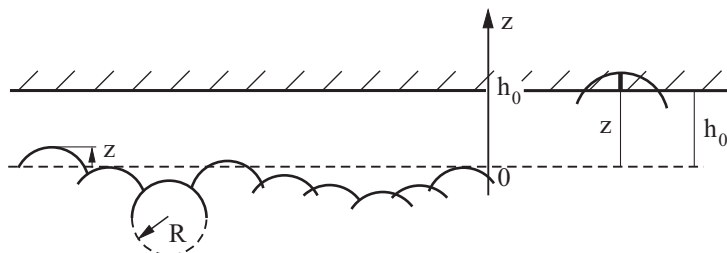


Abbildung VII.2. Modell einer stochastischen Oberfläche nach Greenwood und Williamson

Für viele technische und natürliche Oberflächen kann angenommen werden, dass die Höhen normal verteilt sind:

$$\Phi(z) = \left(\frac{1}{2\pi l^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{z^2}{2l^2}}. \quad (\text{VII.1})$$

Die Größe l ist hier der quadratische Mittelwert der Höhenverteilung:

$$l = \sqrt{\langle z^2 \rangle}, \quad (\text{VII.2})$$

den wir *Rauigkeit* nennen.

Betrachten wir einen Kontakt zwischen einem elastischen Körper mit der beschriebenen Statistik von Rauigkeiten und einer starren Ebene im Abstand h_0 vom Mittelniveau, welches als Null der z -Achse angenommen wird. Unter der Annahme, dass man die elastische Wechselwirkung zwischen den Asperiten vernachlässigen kann, sind alle Asperiten mit $z > d$ im Kontakt mit der starren Ebene. Die „Eindrucktiefe“ eines Asperiten mit der Höhe z beträgt $d = z - h_0$. Für einen einzelnen Kontakt erhalten wir aufgrund der Hertzchen Theorie $a^2 = d \cdot R$ (Gleichung (V.21)). Somit gilt für die Kontaktfläche eines einzelnen Asperiten

$$\Delta A = \pi a^2 = \pi d \cdot R = \pi (z - h_0) R \quad (\text{VII.3})$$

und für die Einzelkraft

$$\Delta F = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2} = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} (z - h_0)^{3/2}. \quad (\text{VII.4})$$

Die Gesamtzahl der Kontakte, die Gesamtkontaktfläche und die gesamte Normalkraft F_N ergeben sich durch eine Integration über alle Asperiten im Kontakt. Das bedeutet, dass die Integration über alle Höhen von $z = h_0$ bis unendlich erfolgen muss:

$$N = \int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) dz \quad (\text{VII.5})$$

$$A = \int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) \pi R (z - h_0) dz \quad (\text{VII.6})$$

$$F_N = \int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) \frac{4}{3} E^* R^{1/2} (z - h_0)^{3/2} dz. \quad (\text{VII.7})$$

Während die Gesamtfläche, die Gesamtkraft und die Zahl der Kontakte beim Zusammendrücken der Körper (Verkleinerung von h_0) exponentiell schnell anwächst, ändern sich ihre Verhältnisse relativ schwach. Für die *mittlere Kontaktfläche eines Asperiten* erhalten wir z.B.

$$\langle \Delta A \rangle = \frac{A}{N} = \frac{\int_{h_0}^{\infty} dz N_0 \Phi(z) \pi R \cdot (z - h_0)}{\int_{h_0}^{\infty} dz N_0 \Phi(z)}. \quad (\text{VII.8})$$

Indem wir eine dimensionslose Variable $\xi = z/l$ und die Bezeichnung $\xi_0 = h_0/l$ einführen, erhalten wir

$$\langle \Delta A \rangle = \pi R l \left[\frac{\int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \exp(-\xi^2/2) \cdot (\xi - \xi_0)}{\int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \exp(-\xi^2/2)} \right]. \quad (\text{VII.9})$$

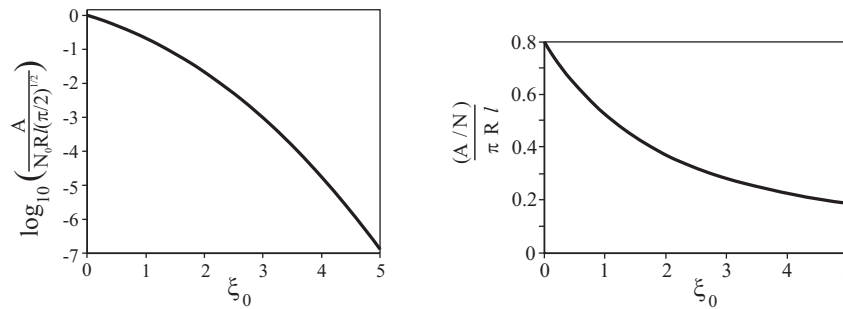


Abbildung VII.3. Abhängigkeit der Kontaktfläche und der mittleren Kontaktfläche von der Abstandsvariable ξ_0

Der Abbildung VII.3 kann man entnehmen, dass sich die Kontaktfläche (VII.6) bei der Änderung des relativen Abstandes zwischen zwei Flächen von $\xi_0 = 0$ bis 5 um 7 Dezimalgrößenordnungen ändert, während sich die mittlere Kontaktfläche $\langle \Delta A \rangle$ um weniger als das 3fache ändert. Der Wert $\xi_0 = 0$ entspricht einem sehr starken Zusammendrücken, bei dem die Kontaktfläche in etwa die Hälfte der scheinbaren Fläche beträgt. Die Werte $\xi_0 > 4$ sind nicht realistisch, da es sich dabei höchstens um einzelne Kontakte handeln kann. Der „typische“ Bereich von mittleren Normalkräften, welcher den wahren Kontaktflächen zwischen 10^{-2} und 10^{-4} der scheinbaren Fläche entspricht, wird erreicht für $\xi_0 = 2,5$ bis $3,5$. Das Verhältnis $\langle \Delta A / \pi R l \rangle$ ändert sich in diesem Bereich nur geringfügig um den Wert 0,3.

Für die mittlere Fläche eines Asperiten erhalten wir in guter Näherung

$$\langle \Delta A \rangle \approx Rl. \quad (\text{VII.10})$$

Die mittlere Größe eines mikroskopischen Kontaktgebietes bleibt praktisch konstant (oder ändert sich nur sehr langsam) bei Änderung der Kraft und der Kontaktfläche um einige Größenordnungen.

Ähnlich langsam ändert sich auch das Verhältnis der gesamten Kontaktfläche zur Kraft:

$$\frac{A}{F_N} = \frac{\int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) \pi R (z - h_0) dz}{\int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) \frac{4}{3} E^* R^{1/2} (z - h_0)^{3/2} dz} = \left(\frac{R}{l} \right)^{1/2} \frac{3\pi \int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \exp(-\xi^2 / 2) \cdot (\xi - \xi_0)}{4E^* \int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \exp(-\xi^2 / 2) \cdot (\xi - \xi_0)^{3/2}} \quad (\text{VII.11})$$

Der Abbildung VII.4 kann man entnehmen, dass in dem für makroskopische Reibungsprobleme relevanten Bereich von $\xi_0 = 2,5$ bis $3,5$ das Verhältnis $\frac{A}{F_N} / \left(\frac{R}{l} \right)^{1/2} \frac{3\pi}{4E^*}$ sich nur geringfügig um den Wert 1,4 herum ändert.

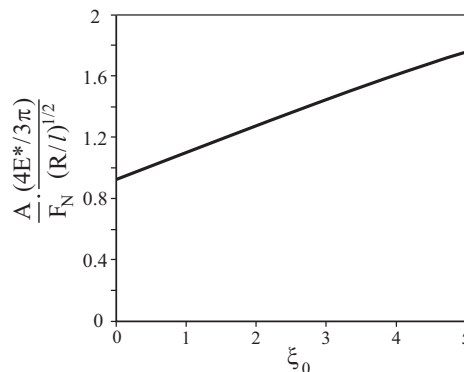


Abbildung VII.4

Für das Verhältnis der realen Kontaktfläche zur Anpresskraft gilt in guter Näherung

$$\frac{A}{F_N} \approx \left(\frac{R}{I}\right)^{1/2} \frac{3,3}{E^*}. \quad (\text{VII.12})$$

Die Kontaktfläche ist bis auf einen schwachen logarithmischen Faktor proportional zur Normalkraft.

Der mittlere Druck ergibt sich aus derselben Gleichung durch Umkehren:

$$\sigma \approx \frac{F_N}{A} \approx 0,3 \cdot E^* \left(\frac{I}{R}\right)^{1/2}. \quad (\text{VII.13})$$

In der modernen Literatur zur Kontaktmechanik findet man oft eine andere Form für das Verhältnis F_N / A für raue Oberflächen. Man kann diese Form qualitativ wie folgt „herleiten“. Das Verhältnis F_N / A kann bis auf einen konstanten Koeffizienten als Mittelwert $\langle \Delta F / \Delta A \rangle$ für einzelne Mikrokontakte abgeschätzt werden und dieses wiederum bis auf ein Konstante der Größenordnung 1 als $\sqrt{\langle (\Delta F / \Delta A)^2 \rangle}$. Da das Verhältnis F_N / A von der Anpresskraft (bzw. Annäherung der Flächen) nur schwach abhängt, können wir es für $h_0 = 0$ abschätzen:

$$\frac{F_N}{A} \sim \sqrt{\langle (\Delta F / \Delta A)^2 \rangle} \sim \sqrt{\left\langle \left(\frac{4E^*}{3\pi} \right)^2 \frac{z}{R} \right\rangle}. \quad \text{Der Krümmungsradius eines Asperiten wird}$$

berechnet aus $1/R = -z''$. Somit bekommen wir für das Verhältnis F_N / A

$$\frac{F_N}{A} \sim \frac{4E^*}{3\pi} \sqrt{\langle -z \cdot z'' \rangle} = \frac{4E^*}{3\pi} \sqrt{\langle z'^2 \rangle}. \quad (\text{VII.14})$$

Bei der letzten Gleichung haben wir berücksichtigt, dass der Mittelwert $\langle -z \cdot z'' \rangle$ als Integral $-\frac{1}{L} \int_0^L z(x) \cdot z''(x) dx$ über eine ausreichend große Strecke L definiert wird. Eine partielle Integration überführt es in $\frac{1}{L} \int_0^L z'(x) \cdot z'(x) dx$ und somit $\langle z'^2 \rangle$.

Dies ist natürlich nur eine sehr grobe Abschätzung. das Ergebnis (VII.14) wird aber durch genaue numerische Berechnungen bestätigt. Mit der Bezeichnung ∇z für den quadratischen Mittelwert des Gradienten des Oberflächenprofils fasst man die Gleichung (VII.14) wie folgt zusammen

$$\frac{F_N}{A} = \kappa^{-1} E^* \nabla z, \quad (\text{VII.15})$$

wobei κ ein Koeffizient ist, der nur schwach von statistischen Eigenschaften der Oberfläche abhängt und in der Regel die Größenordnung 2 hat. Diese Gleichung wurde für verschiedene raue, auch fraktale Oberflächen durch exakte numerische Lösung nachgewiesen. Sie gibt den mittleren Druck im Kontaktgebiet an:

Der mittlere Druck in der wahren Kontaktfläche berechnet sich in guter Näherung als die Hälfte des effektiven elastischen Moduls E^* multipliziert mit dem mittleren Steigungsgradienten des Oberflächenprofils ∇z :

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \approx \frac{1}{2} E^* \nabla z. \quad (\text{VII.16})$$

Zum ähnlichen Ergebnis kann man durch folgende einfache qualitative Abschätzung gelangen: Wenn wir einen Körper mit dem Oberflächenprofil $z = \hat{h} \cdot \cos kx \cdot \cos ky$ betrachten, so ist der Krümmungsradius der Maxima dieser Oberfläche gleich $1/R = \hat{h}k^2$, der quadratische Mittelwert von z ist gleich $l = \hat{h}/2$, und der quadratische Mittelwert des Höhengradienten $\nabla z = \hat{h}k/\sqrt{2}$. Somit gilt:

$$\left(\frac{l}{R}\right)^{1/2} = \nabla z. \quad (\text{VII.17})$$

Einsetzen in (VII.13) führt wieder zu einer Gleichung der Form (VII.16).

Schätzen wir noch die Kraft F_0 ab, bei der die wahre Kontaktfläche A die Hälfte der scheinbaren Kontaktfläche A_0 erreicht:

$$F_0 \approx \frac{A_0}{4} E^* \nabla z. \quad (\text{VII.18})$$

Der dafür erforderliche scheinbare mittlere Druck $\hat{\sigma}$ ist dabei gleich

$$\hat{\sigma} \approx \frac{1}{4} E^* \nabla z. \quad (\text{VII.19})$$

VII.2 Plastische Deformation von Kontaktspitzen

Ist der Druck (VII.16) kleiner als die Härte σ_0 des Materials und somit

$$\Psi = \frac{E^* \nabla z}{\sigma_0} < \frac{1}{2}, \quad (\text{VII.20})$$

so verhält sich die Oberfläche beim Kontakt *elastisch*. Für $\Psi > 1$ sind die Mikrorauigkeiten vollständig im plastischen Zustand. Die Größe Ψ wurde von Greenwood und Williamson eingeführt und wird *Plastizitätsindex* genannt. Die Tatsache, ob sich das System elastisch oder plastisch verhält hängt nicht von der angelegten Normalkraft ab!

Als Beispiel schätzen wir die charakteristische Größe des Steigungsgradienten für einen Kontakt zwischen zwei stählernen Proben ab: Mit $E^* \approx 10^{11} \text{ Pa}$ und $\sigma_0 \sim 10^9 \text{ Pa}$ bekommen wir heraus, dass zwei kontaktierende stählerne Proben sich rein elastisch deformieren wenn $\nabla z < 2 \cdot 10^{-2}$. Bei „geschliffenen Oberflächen“ ist der Steigungsgradient meistens größer und fast alle Bereiche des wahren Kontaktes werden sich im plastischen Zustand befinden. Hoch polierte Oberflächen mit $\nabla z \ll 2 \cdot 10^{-2}$ deformieren sich dagegen rein elastisch.

Die Steigung ∇z hängt im Allgemeinen davon ab, mit welcher Auflösung die Oberfläche gemessen wird – sie ist *skalenabhängig!* Ist die Steigung auf verschiedenen Betrachtungsskalen unterschiedlich, so wird sich die Fläche nur auf den Skalen plastisch deformieren, auf der die Bedingung $\nabla z > 2\sigma_0 / E^*$ erfüllt ist.

Sobald die Spannung in Kontaktgebieten größer wird, verliert die obige Theorie ihre Gültigkeit. Im plastischen Zustand können wir die Größe der Kontaktfläche abschätzen, indem wir bemerken, dass sich das Material in Kontaktgebieten solange deformiert bis die Druckspannung die Härte des Materials erreicht. Zum Zwecke einer Abschätzung nehmen wir an, dass das Material elastisch-ideal plastisches Verhalten mit der Indentationshärte σ_c hat und dass der Druck in allen Asperiten ungefähr gleich der Härte ist.

Die Kontaktfläche ist demnach auch im plastischen Bereich proportional zur Normalkraft:

$$A \approx F_N / \sigma_0. \quad (\text{VII.21})$$

Als ein numerisches Beispiel betrachten wir einen grob geschliffenen stählernen Würfel mit der Kantenlänge 10 cm, der auf einer stählernen Platte liegt. Für die Parameter $\sigma_0 \approx 10^9$ Pa, $F_N \approx 10^2$ N, erhalten wir $A = 10^2 / 10^9 \text{ m}^2 = 0,1 \text{ mm}^2$, $A / A_0 = 10^{-5}$. Beim typischen Durchmesser eines Kontaktes 10 μm beträgt die Zahl der Kontakte $N \approx 10^{-7} / (10^{-5})^2 \approx 1000$.

VII.3 Elektrische Kontakte

Bisher haben wir uns für die *Fläche* des wahren Kontaktes zwischen zwei rauen Oberflächen interessiert. Es gibt aber eine Reihe von Kontaktproblemen, bei denen nicht die Fläche, sondern die *gesamte Länge* des Kontaktes von Bedeutung ist. Dazu gehören elektrische und thermische Kontakte.

In einem elektrischen Kontakt wird elektrischer Strom von einem leitenden Körper zum anderen nur über die Bereiche übertragen, in welchen ein sehr enger Kontakt existiert - in der Regel ein "atomar dichter" Kontakt. Auf den ersten Blick wird das dazu führen, dass die Qualität eines elektrischen Kontaktes sehr stark von der Topographie der kontaktierenden Körper abhängt und darüber hinaus starke Fluktuationen aufweist. Wir diskutieren in diesem Abschnitt die Ursachen, warum elektrische Kontakte in den meisten Fällen doch sehr zuverlässig funktionieren, und wie man die zur Erzeugung eines gewünschten Kontaktes erforderliche Anpresskraft berechnet.

Ein passives leitendes Element kann durch seinen elektrischen Widerstand R charakterisiert werden. Die Größe $\Lambda = 1/R$ wird elektrische Leitfähigkeit genannt. Aus der Elektrotechnik ist bekannt, dass sich bei einer Reihenschaltung die Widerstände und bei einer Parallelschaltung die Leitfähigkeiten summieren. Der elektrische Widerstand eines Stabes mit der Querschnittsfläche S und Länge L berechnet sich aus $R = \rho L / S$, wobei ρ der spezifische Widerstand des Stoffes ist.

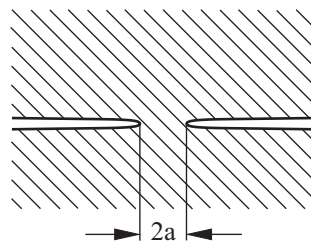


Abbildung VII.5. Kontakt zwischen zwei leitenden Halbräumen

Sind zwei ausgedehnte leitende Körper mit spezifischem Widerstand ρ in einem engen Bereich mit Radius a in einem idealen Kontakt (Abbildung VII.5), so wird der Widerstand überwiegend durch die Größe der Engstelle bestimmt. Er nennt sich daher *Engwiderstand* R_E und berechnet sich als

$$\frac{1}{R_E} = \Lambda = \frac{2a}{\rho}. \quad (\text{VII.22})$$

Gibt es mehrere Mikrokontakte, deren Abstände voneinander viel größer sind als ihre Durchmesser $2a$, so werden die Leitfähigkeiten aller Engstellen summiert. Für die gesamte Leitfähigkeit des Kontaktes ist daher die Summe der Kontaktdurchmesser aller Mikrokontakte von Bedeutung:

$$\Lambda_{ges} = \frac{\sum 2a_i}{\rho} = \frac{L}{\rho}. \quad (\text{VII.23})$$

Die Summe aller Durchmesser haben wir mit L bezeichnet

$$L := \sum 2a_i. \quad (\text{VII.24})$$

Der Kürze halber nennen wir diese Größe im Weiteren *Kontaktlänge*. Bei der Berechnung der Kontaktlänge benutzen wir die Erläuterungen am Anfang des Kapitels und stützen uns auf die Abbildung VII.2. Der Kontaktradius eines Mikrokontaktes berechnet sich als

$$a = \sqrt{\frac{\Delta A}{\pi}} = \sqrt{R(z - h_0)}. \quad (\text{VII.25})$$

Ähnlich wie die Kontaktfläche (VII.6) können wir auch die Kontaktlänge berechnen

$$L = \sum 2a_i = \int_{h_0}^{\infty} 2N_0 \Phi(z) \sqrt{R(z - h_0)} dz. \quad (\text{VII.26})$$

Das Verhältnis der Kontaktlänge zur Normalkraft ist gleich

$$\frac{L}{F_N} = \frac{3}{2E^*} \frac{\int_{h_0}^{\infty} \Phi(z)(z - h_0)^{1/2} dz}{\int_{h_0}^{\infty} \Phi(z)(z - h_0)^{3/2} dz} = \frac{3}{2E^* l} \left[\frac{\int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \exp(-\xi^2 / 2) \cdot (\xi - \xi_0)^{1/2}}{\int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \exp(-\xi^2 / 2) \cdot (\xi - \xi_0)^{3/2}} \right]. \quad (\text{VII.27})$$

Die Größe $\frac{L}{F_N} \cdot \frac{2E^* l}{3}$ als Funktion der Variable ξ_0 ist in der Abbildung VII.6 gezeigt.

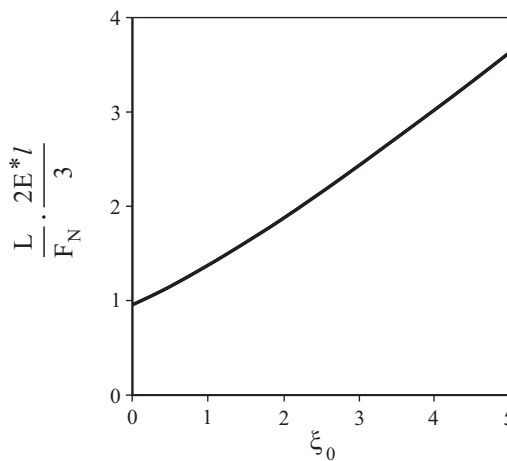


Abbildung VII.6. Abhängigkeit der Kontaktlänge von der Normalkraft

In dem für „typische Kontaktbedingungen“ relevanten Bereich $\xi_0 = 2,5$ bis $3,5$ ändert sich dieses Verhältnis nur geringfügig um den Wert 2,5 herum.

Somit gilt für die Kontaktlänge in guter Näherung

$$\frac{L}{F_N} \approx \frac{3,7}{E^* l}. \quad (\text{VII.28})$$

Die Kontaktlänge ist bis auf schwache logarithmische Faktoren proportional zur Normalkraft².

Für die elektrische Leitfähigkeit ergibt sich laut (VII.23)

$$\Lambda_{ges} \approx \frac{3,7}{E^* \rho l} F_N. \quad (\text{VII.29})$$

Wie die Reibungskraft ist auch die Leitfähigkeit proportional zur Normalkraft und hängt nicht von der (scheinbaren) Kontaktfläche ab. In dieser Gleichung kommt der Krümmungsradius der Kappen bzw. die Steigung der Oberfläche nicht vor. Die Leitfähigkeit hängt somit nur von der Höhenverteilung der rauen Oberfläche, nicht aber von der detaillierten Oberflächentopographie ab.

Bisher haben wir angenommen, dass einzelne Kontakte ausreichend klein und weit voneinander entfernt sind, so dass man sie als unabhängig voneinander betrachten kann. Sobald die Kontaktlänge L den Durchmesser D der kontaktierenden Körper erreicht, steigt die Leitfähigkeit nicht weiter. Sie erreicht ihren Sättigungswert, wenn die Kontaktlänge die Größenordnung der linearen Abmessungen der Körper erreicht:

$$L \approx \frac{3,7}{E^* l} F_N \approx D. \quad (\text{VII.30})$$

Die dafür erforderliche Kraft ist gleich

$$F_{N,c} \approx \frac{DE^* l}{3,7}. \quad (\text{VII.31})$$

Das kann man mit der Kraft (VII.18) vergleichen, bei der die Oberflächenrauigkeit bis zur Hälfte „zerquetscht“ wird: $F_0 \approx \frac{D^2}{4} E^* \nabla z$. Ihr Verhältnis ist gleich

$$\frac{F_{N,c}}{F_0} \approx \frac{4E^* l}{3,7DE^* \nabla z} \approx \frac{l}{D \nabla z}. \quad (\text{VII.32})$$

Bei den Leitern mit linearen Abmessungen $D > l / \nabla z$ wird ein idealer elektrischer Kontakt schneller erreicht, als ein idealer "Materialkontakt". Das ist bei den meisten Kontakten mit Abmessungen größer als 0,1 mm der Fall.

VII.4 Thermische Kontakte

Auch die thermische Leitfähigkeit eines runden Kontaktes und seine mechanische Steifigkeit sind proportional zum Radius des Kontaktes. Auf diese beiden Größen ist die oben skizzierte Theorie von elektrischen Kontakten unmittelbar übertragbar.

Der Wärmewiderstand ist bei der Dimensionierung von Kühlkörpern für Halbleiter oder anderen Schaltungselementen in elektronischen Schaltungen die maßgebliche Kenngröße. Er wird definiert als $R_w = \Delta T / \dot{Q}$, wobei ΔT die Temperaturdifferenz an den Enden des Elementes und \dot{Q} die durch das Element durchströmende Wärme pro Sekunde ist. Die Wärmeleitfähigkeit wird als $\Lambda_w = 1 / R_w$ definiert. Der Wärmewiderstand eines Stabes der Länge L und Querschnittsfläche S ist gleich $R_w = L / S \lambda$, wobei λ die spezifische Wärmeleitfähigkeit ist. Es besteht eine direkte Analogie zu elektrischen Kontakten, nur der

² Eine ausführlichere Untersuchung zeigt, dass die Kontaktlänge besser durch die Beziehung $L = \chi l^{-1/2} (\nabla z)^{-1/4} E^{*-3/4} F_N^{3/4}$ mit $\chi \approx 0.63$ beschrieben wird.

spezifische Widerstand ρ muss durch $1/\lambda$ ersetzt werden. In Analogie zu (VII.29) können wir daher sofort schreiben

$$\Lambda_W \approx \frac{3,7\lambda}{E^* I} F_N : \quad (\text{VII.33})$$

Die Wärmeleitfähigkeit eines rauhen Kontaktes ist direkt proportional zur Anpresskraft.

VII.5 Mechanische Steifigkeit von Kontakten

Besteht zwischen einem elastischen und einem starren Körper ein runder Kontakt mit dem Radius a , so ist seine Steifigkeit bei Bewegungen senkrecht zur Oberfläche gleich $c_{\perp} = 2aE^*$ und bei Bewegungen parallel zur Oberfläche $c_{\parallel} = \frac{8Ga}{2-\nu}$, wobei G der Schubmodul ist (s. nächstes Kapitel). Beide Steifigkeiten sind proportional zum Kontaktdurchmesser. Bei mehreren unabhängigen Kontaktbereichen summieren sich die Steifigkeiten:

$$c_{\perp, ges} = E^* \sum 2a_i = E^* L, \quad (\text{VII.34})$$

$$c_{\parallel, ges} = \frac{4G}{2-\nu} \sum 2a_i = \frac{4GL}{2-\nu}. \quad (\text{VII.35})$$

Mit (VII.28) erhalten wir für die normale und die transversale Steifigkeit eines rauhen Kontaktes

$$c_{\perp, ges} = 3,7 \frac{F_N}{l}, \quad (\text{VII.36})$$

$$c_{\parallel, ges} = \frac{2(1-\nu)}{(2-\nu)} \frac{3,7}{l} F_N \approx 3 \frac{F_N}{l}. \quad (\text{VII.37})$$

VII.6 Dichtungen

Als Dichtung bezeichnet man in der Technik Elemente oder Konstruktionen, die die Aufgabe haben, ungewollte Stoffübergänge von einem Raum in einen anderen zu verhindern bzw. zu begrenzen. Die größte Gruppe der Dichtungen stellen die Berührungsdichtungen dar, bei denen die Dichtungselemente aneinander gedrückt werden (Abbildung VII.7).

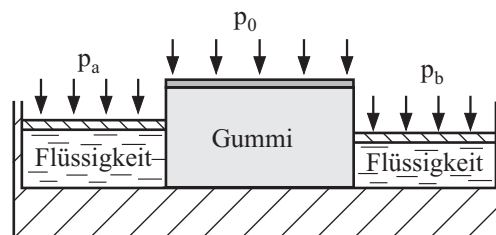


Abbildung VII.7. Schematische Darstellung der Wirkungsweise einer Dichtung

Wegen der immer vorhandenen Rauigkeit der kontaktierenden Flächen müssen sie mit einer bestimmten minimalen Kraft zusammengedrückt werden, damit der Kontakt „dicht“ wird. Dies wird in der Abbildung VII.8 illustriert. Bei kleinen Anpresskräften sind die Oberflächen nur in kleinen Gebieten im wahren Kontakt. Flüssigkeiten oder Gase können zwischen diesen Gebieten durchsickern. Bei Vergrößerung der Anpresskraft werden die Kontaktgebiete größer, bis sie bei einer bestimmten kritischen Kraft einen kontinuierlichen,

durchgehenden Cluster bilden. Alle Wege durch das gesamte Kontaktgebiet werden dadurch unterbrochen.

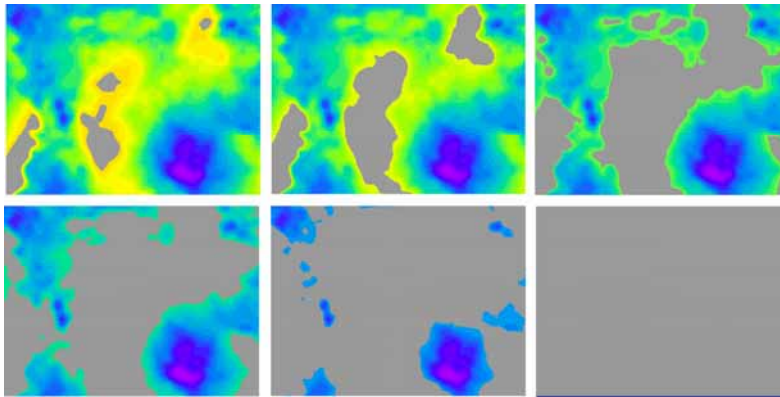


Abbildung VII.8. Kontaktfläche bei verschiedenen Anpresskräften. Der Kontakt wird dicht, wenn die reale Kontaktfläche einen kontinuierlichen Cluster bildet

In der Regel wird diese *Perkulationsgrenze* erreicht, wenn die Oberflächenrauigkeiten etwa bis zur Hälfte „gequetscht“ sind. Dafür ist die Spannung der Größenordnung (VII.19) erforderlich:

$$\sigma_{Dicht} \approx \frac{1}{4} E^* \nabla z. \quad (\text{VII.38})$$

Zu bemerken ist, dass diese Spannung zusammen mit ∇z skalenabhängig ist. Das bedeutet, dass ein Kontakt, dessen Rauigkeit mit einer geringen Auflösung gemessen wurde, als dicht angesehen werden kann, während es bei einer genaueren Betrachtung (auf einer kleineren Skala) immer noch durchgehende Wege durch das Kontaktgebiet gibt. Eine ausführlichere Analyse dieses Sachverhalts führt zu der Erkenntnis, dass die Geschwindigkeit des Durchsickerns eines Stoffes durch eine Dichtung auch nach dem Erreichen der „makroskopischen“ kritischen Anpressspannung (VII.38) nicht verschwindet, sondern mit der Anpresskraft exponentiell stark abnimmt (um einige Dezimalgrößenordnungen bei der Vergrößerung der Anpresskraft um eine Größenordnung).

VII.7 Rauheit und Adhäsion

Rauheit kann Adhäsion drastisch vermindern. Im vorigen Kapitel haben wir „die negative kritische Eindringtiefe“ $d_{crit} = -\left(\frac{3\pi^2 \gamma^2 R}{16E^{*2}}\right)^{1/3}$ eingeführt. Es ist intuitiv klar, dass das Adhäsionsverhalten von rauen Oberflächen durch das Verhältnis $|d_{crit}|/l$ bestimmt wird. Ist $|d_{crit}| \gg l$:

$$\left(\frac{3\pi^2 \gamma^2 R}{16E^{*2}}\right)^{1/3} \gg l, \quad (\text{VII.39})$$

so spielt die Rauigkeit keine Rolle. Unter Berücksichtigung der Abschätzung (VII.17) kann man diese Gleichung auch in der Form

$$\frac{3^{1/2} \pi \gamma}{4E^*} \gg l \cdot \nabla z \quad (\text{VII.40})$$

darstellen. Im entgegengesetzten Fall verschwindet die Adhäsionskraft praktisch vollständig. Numerische Simulationen zeigen, dass es einen kritischen Wert des Produktes $l \cdot \nabla z$ gibt, bei dem die makroskopische Adhäsionskraft zu Null wird:

$$[l \cdot \nabla z]_{crit} = \Upsilon \frac{\gamma}{E^*} \quad (\text{VII.41})$$

wobei Υ eine Konstante der Größenordnung 1 ist.

Aufgaben

Aufgabe 1: Zu bestimmen ist die erforderliche Anpresskraft, um zwischen zwei ebenen Kupferplatten mit der Rauigkeit $l = 1 \mu\text{m}$ einen elektrischen Kontakt mit dem Widerstand $R = 0,1 \text{ m}\Omega$ zu erzeugen.

Lösung: Der Elastizitätsmodul von Kupfer ist etwa $E \approx 10^{11} \text{ Pa}$, die Poisson-Zahl $\nu \approx 0,33$, der spezifische Widerstand $\rho \approx 1,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Für den effektiven elastischen Modul E^* ergibt sich

$$E^* = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \approx \frac{10^{11}}{2(1-0,1)} \text{ Pa} \approx 0,56 \cdot 10^{11} \text{ Pa}. \text{ Aus der Gleichung (VII.29), die wir in}$$

der Form $\frac{1}{R} = \frac{3,7}{E^* \rho l} F_N$ umschreiben, folgt

$$F_N = \frac{E^* \rho l}{3,7R} \approx \frac{0,56 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \cdot 1,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \cdot 10^{-6} \text{ m}}{3,7 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \Omega} \approx 2,7 \text{ N}.$$

Aufgabe 2: Zu bestimmen ist der Anpressdruck, der erforderlich ist, um einen idealen Kontakt zwischen einem elastischen Körper mit einer gewellten Oberfläche $z = \hat{h} \cos(kx)$ und einer starren Ebene zu erzeugen.

Lösung: Wären die Flächen ohne äußere Spannung zusammengeklebt, so wäre die Normalspannung an der Oberfläche gleich

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2} E^* \hat{h} k \cos kx$$

(s. Aufgabe 1 im Kapitel III). Anlegen einer homogenen Normalspannung $-\sigma_0$ führt aufgrund der Linearität zu folgender Normalspannung auf der Grenzfläche:

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2} E^* \hat{h} k \cos kx - \sigma_0.$$

Sie kann auch ohne Zusammenkleben durch reines Anpressen realisiert werden, wenn überall $\sigma_{zz} < 0$ ist, d.h.

$$\sigma_0 > \frac{1}{2} E^* \hat{h} k.$$

Wir bemerken noch, dass in diesem Fall $\nabla z = \hat{h} k / \sqrt{2}$ ist, so dass man diese Gleichung auch in der Form $\sigma_0 > \frac{1}{\sqrt{2}} E^* \nabla z$ umschreiben kann (man vergleiche diese Spannung mit der Spannung (VII.38), die zur Erzeugung eines dichten Kontaktes erforderlich ist).

Aufgabe 3: Zu bestimmen ist der Anpressdruck, der erforderlich ist, um einen idealen Kontakt zwischen einem elastischen Körper mit einer gewellten Oberfläche $z = \hat{h} \cos(kx) \cos(ky)$ (Abbildung VII.9) und einer starren Ebene zu erzeugen.

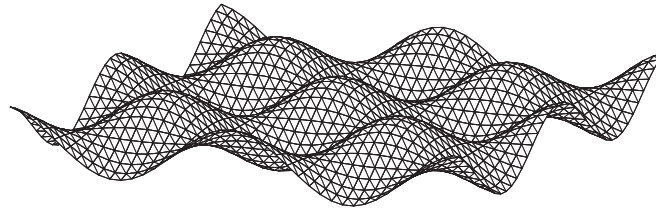


Abbildung VII.9

Lösung: In der Aufgabe 1 zum Kapitel III haben wir gefunden, dass die Oberflächendeformation $u_z = \hat{h} \cos kx$ zur Normalspannungsverteilung $\sigma_{zz} = \frac{1}{2} E^* \hat{h} k \cos kx$ führt. Dieses Ergebnis kann man auch in einer richtungsunabhängigen Form darstellen: Eine Cosinus-förmige Oberflächendeformation $u_z(\vec{r})$ (wobei \vec{r} ein zweidimensionaler Vektor ist) führt zur Spannungsverteilung $\sigma_{zz} = \frac{1}{2} E^* |\vec{k}| u_z(\vec{r})$. Die in der Aufgabenstellung gegebene Welligkeit lässt sich als Summe von zwei Cosinus-Funktionen darstellen:

$$z = \hat{h} \cos(kx) \cos(ky) = \frac{1}{2} \hat{h} (\cos k(x+y) + \cos k(x-y)).$$

Diese Deformation führt zur Normalspannung

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2} E^* |\vec{k}| u_z(\vec{r}) = \frac{\sqrt{2}}{2} E^* k \hat{h} \cos(kx) \cos(ky).$$

Die zur Erzeugung eines vollständigen Kontaktes erforderliche Spannung ist somit gleich

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} E^* \hat{h} k.$$

Der quadratische Mittelwert des Gradienten ist gleich $\nabla z = \hat{h} k / \sqrt{2}$. Somit gilt $\hat{\sigma} = E^* \nabla z$.

Aufgabe 4: Zu bestimmen ist der Anpressdruck, der erforderlich ist, um einen idealen Kontakt zwischen einer starren Ebene und einem elastischen Körper mit einer gewellten Oberfläche $z = \hat{h} \cos(kx) + \hat{h}_1 \cos(k_1 x)$ mit $k_1 \gg k$ und $\hat{h}_1 \ll \hat{h}$ (Abbildung VII.10) zu erzeugen.



Abbildung VII.10. Eine Oberfläche mit Welligkeiten auf zwei Skalen

Lösung: Die kurzwelligen Unebenheiten werden vollständig „zerquetscht“, wenn der Druck in den tiefsten Bereichen der langwelligen Unebenheiten $\sigma_{0,2} > \frac{1}{2} E^* \hat{h}_1 k_1$ ist (s. vorige Aufgabe). Indem wir den Ausdruck für den Druck aus der Aufgabe 2 benutzen, erhalten wir mittels Superposition für den kritischen Druck

$$\sigma_c = \frac{1}{2} E^* (\hat{h} k + \hat{h}_1 k_1).$$

Aufgabe 5: Das in der Abbildung VII.11 skizzierte System besteht aus Federn (Gesamtzahl N_0) gleicher Steifigkeit c , die beim Kontakt adhieren können. Ihre

Adhäsionseigenschaften werden charakterisiert durch die Länge Δd_{crit} , um die sich eine Feder dehnen kann, bevor sie von der Oberfläche abplatzt. Die Höhenverteilung der Federn sei $\Phi(z) = \frac{1}{l} e^{-\frac{z}{l}}$. Zu bestimmen ist die Adhäsionskraft als Funktion der Anpresskraft.

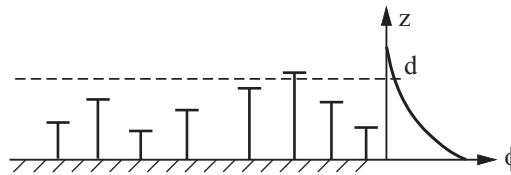


Abbildung VII.11

Lösung: Beim Anpressen mit der Kraft F_N werden diejenigen Federn in Kontakt mit der Ebene kommen, bei denen $z > \tilde{d}$, wobei \tilde{d} sich aus der folgenden Gleichung bestimmt:

$$F_N = \int_{\tilde{d}}^{\infty} \frac{N_0}{l} e^{-\frac{z}{l}} c (z - d) dz = N_0 c e^{-\frac{\tilde{d}}{l}} l.$$

Wird nun die starre Ebene auf die Höhe d gebracht, so werden im Kontakt alle Federn bleiben, deren Höhe im nicht deformierten Zustand kleiner $d - \Delta d_{crit}$ aber nicht kleiner \tilde{d} ist: Die auf die Ebene wirkende Kraft ist gleich

$$F = \begin{cases} \int_{\tilde{d}}^{\infty} \frac{N_0}{l} e^{-\frac{z}{l}} c (z - d) dz = N_0 c e^{-\frac{\tilde{d}}{l}} (l + \tilde{d} - d), & \text{für } d - \Delta d_{crit} < \tilde{d} \\ \int_{d - \Delta d_{crit}}^{\infty} \frac{N_0}{l} e^{-\frac{z}{l}} c (z - d) dz = N_0 c e^{-\frac{\Delta d_{crit} - d}{l}} (l - \Delta d_{crit}), & \text{für } d - \Delta d_{crit} > \tilde{d} \end{cases}$$

Für $l > \Delta d_{crit}$ ist die auf die Ebene wirkende Kraft *immer positiv*, d.h. es gibt *keine makroskopische Adhäsion*. Für $l < d_{crit}$ erreicht die Kraft den betragsmäßig größten negativen Wert für $d = \tilde{d} + d_{crit}$. Dieser Wert ist die Adhäsionskraft:

$$|F_A| = N_0 c e^{-\frac{\tilde{d}}{l}} (d_{crit} - l).$$

Das Verhältnis der Adhäsionskraft zur Anpresskraft

$$\frac{|F_A|}{F_N} = \frac{d_{crit} - l}{l}$$

hängt in diesem Modell nicht von der Anpresskraft ab und wird *Adhäsionskoeffizient* genannt.

Aufgabe 6: In Anlehnung an die Fragestellung der Aufgabe 5 soll wieder die Kraft auf die Ebene ermittelt werden allerdings mit der Höhenverteilung

$$\Phi(z) = \left(\frac{1}{2\pi l^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{z^2}{2l^2}}.$$

Lösung: Die Kraft berechnet sich zu

$$F_N = \int_{d-\Delta d_{crit}}^{\infty} N_0 \left(\frac{1}{2\pi l^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{z^2}{2l^2}} c(z-d) dz .$$

Ergebnisse der numerischen Integration sind in der Abbildung VII.12 als $F_N(d)$ -Plots dargestellt. Für $\Delta d_{crit} < 0,3l$ gibt es keinen Abstand, bei dem F_N negative Wert annimmt (keine makroskopische Adhäsion).

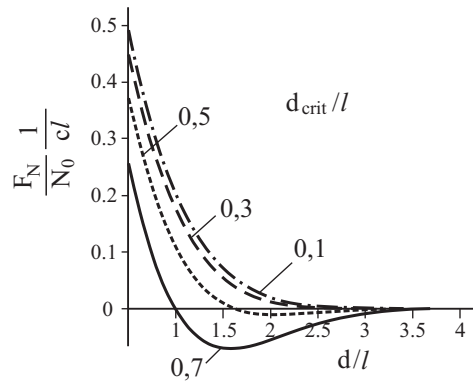
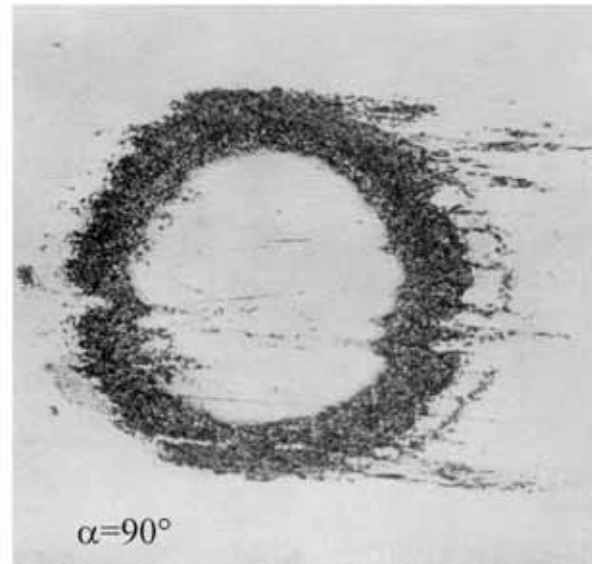
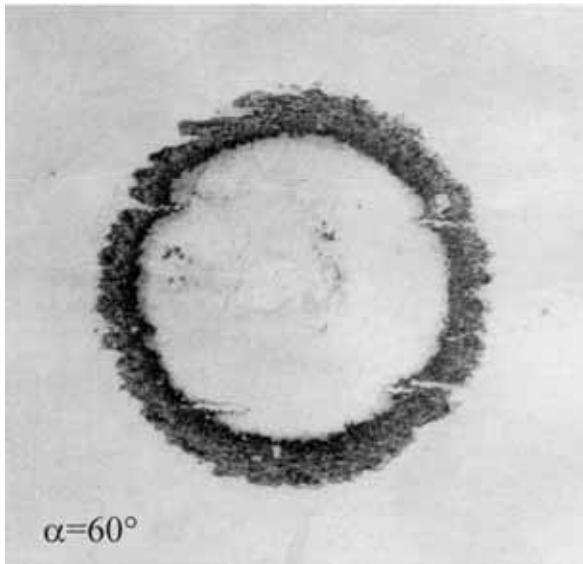
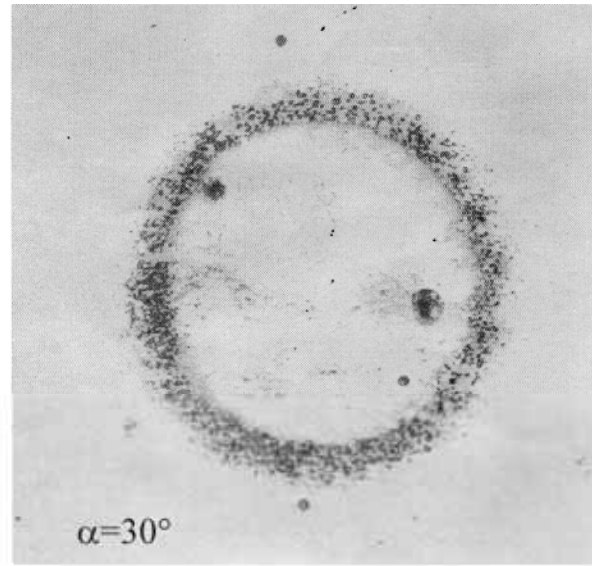
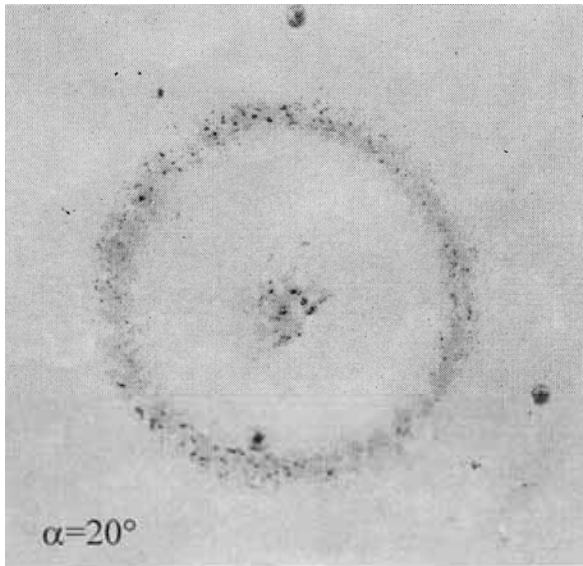


Abbildung VII.12. Abhängigkeit der Normalkraft vom Abstand
in normierter Darstellung parametrisiert durch $\frac{\Delta d_{crit}}{l}$

VIII TANGENTIALES KONTAKTPROBLEM



Bisher haben wir bei Kontaktproblemen angenommen, dass die kontaktierenden Körper absolut glatte und reibungsfreie Oberflächen haben. Dementsprechend entstehen im Kontaktgebiet keine Schubspannungen.

Wird die Kontaktstelle auch in tangentialer Richtung beansprucht, so werden Haft- und Reibungskräfte im Kontakt von Interesse. In diesem Kapitel untersuchen wir Schubspannungen in tangential beanspruchten Kontakten.

Zu bemerken ist, dass die Schubspannungen im Allgemeinen auch bei einem reibungsbehafteten *Normalkontakt* entstehen. Werden zwei Körper mit *verschiedenen elastischen Eigenschaften* in Kontakt gebracht, so entsteht im Kontakt infolge der Querkontraktion eine relative Verschiebung in tangentialer Richtung. Somit kommen die Reibungsspannungen in Kontaktflächen ins Spiel. Nur bei einem Normalkontaktproblem von zwei Körpern mit *gleichen elastischen Eigenschaften* spielen die Schubspannungen keine Rolle, da beide Körper sich seitlich auf die gleiche Weise dehnen. Schubspannungen treten daher auch unter Berücksichtigung einer möglichen Haftung im Kontakt nicht auf.

In diesem Kapitel betrachten wir zunächst das Tangentialkontaktproblem für den Fall, dass im Kontakt eine vollständige Haftung herrscht und erweitern dann unsere Betrachtung auf die Kontakte, in denen ein partielles oder vollständiges Gleiten stattfindet.

VIII.1 Deformation eines elastischen Halbraumes unter Einwirkung von Tangentialkräften

Der zu untersuchende Kontakt ist schematisch in der Abbildung VIII.1 gezeigt: Zwei elastische Festkörper werden aneinander gedrückt und anschließend in tangentialer Richtung bewegt. Im ersten Schritt nehmen wir an, dass bei tangentialer Beanspruchung kein Gleiten im Kontakt auftritt. Es wird somit vorausgesetzt, dass die Körper im Kontaktgebiet „zusammengeklebt“ sind. Kein Gleiten gibt es auch bei einem unendlich großen Reibungskoeffizienten.

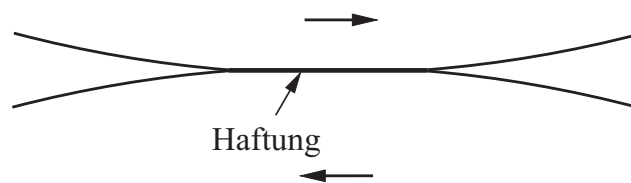


Abbildung VIII.1. Tangentialkontakt zweier elastischer Festkörper

Wie beim Normalkontaktproblem werden wir mit der „Halbraumnäherung“ arbeiten: Die Steigung der Oberflächen der kontaktierenden Körper soll in der für das Kontaktproblem relevanten Umgebung klein sein.

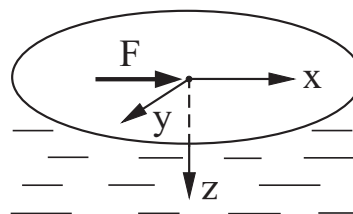


Abbildung VIII.2. Tangentiale Einzelkraft an der Oberfläche eines Halbraums

Als vorbereitenden Schritt betrachten wir die Deformation eines elastischen Halbraumes unter der Einwirkung einer konzentrierten Kraft in einem Punkt auf der Oberfläche, den wir als Koordinatenursprung wählen. Die Kraft \vec{F} habe nur eine Komponente in der x-Richtung. Die Verschiebungen der Oberfläche ($z = 0$) sind durch die folgenden Gleichungen gegeben¹

$$\begin{aligned}
 u_x &= F_x \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2(1-\nu) + \frac{2\nu x^2}{r^2} \right\} \frac{1}{r} \\
 u_y &= F_x \frac{1}{4\pi G} \cdot \frac{2\nu}{r^3} xy \\
 u_z &= F_x \frac{1}{4\pi G} \cdot \frac{(1-2\nu)}{r^2} x \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{VIII.1}$$

wobei G der Schubmodul ist.

¹ L.D. Landau, E.M. Lifschitz. Elastizitätstheorie, Akademie-Verlag, Berlin, 1991.

VIII.2 Deformation eines elastischen Halbraumes unter Einwirkung von Tangentialspannungsverteilungen

1. Betrachten wir jetzt die Verschiebungen der Oberfläche unter der Wirkung der folgenden Verteilung tangentialer Kräfte (in Richtung der x-Achse)

$$\sigma_{zx}(x, y) = \tau(x, y) = \tau_0 \left(1 - r^2 / a^2\right)^{-1/2}, \quad (\text{VIII.2})$$

mit $r^2 = x^2 + y^2 \leq a^2$. Die tangentielle Verschiebung in der x-Richtung berechnet sich als

$$u_x = \frac{1}{4\pi G} \cdot 2 \iint_A \left\{ \frac{1-\nu}{s} + \nu \frac{(x-x')^2}{s^3} \right\} \tau(x', y') dx' dy' \quad (\text{VIII.3})$$

mit

$$s^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 \quad (\text{VIII.4})$$

Die Integration ergibt für die Verschiebungen innerhalb des beanspruchten Gebietes² ($r \leq a$)

$$u_x = \frac{\pi(2-\nu)}{4G} \tau_0 a = \text{konst.} \quad (\text{VIII.5})$$

Einfache Symmetrieüberlegungen führen zum Schluss, dass

$$u_y = 0 \quad (\text{VIII.6})$$

gilt. u_z ist dagegen nicht Null und ist eine ungerade Funktion der Koordinate x. Für eine konzentrierte Kraft folgt das unmittelbar aus (VIII.1). Diese Eigenschaft gilt aber auch für jede symmetrische Spannungsverteilung.

Die in der Kontaktfläche wirkende Gesamtkraft berechnet sich zu

$$F_x = \int_0^a \tau(r) 2\pi r dr = 2\pi \tau_0 a^2. \quad (\text{VIII.7})$$

2. Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass die Spannungsverteilung

$$\tau(x, y) = \tau_0 \left(1 - r^2 / a^2\right)^{1/2} \quad (\text{VIII.8})$$

zu einer Verschiebung der Oberflächenpunkte innerhalb des benachbarten Gebietes ($r \leq a$)

$$u_x = \frac{\tau_0 \pi}{32Ga} \left[4(2-\nu)a^2 - (4-3\nu)x^2 - (4-\nu)y^2 \right] \quad (\text{VIII.9})$$

führt. Die gesamte Kraft ist dabei

$$F_x = \frac{2}{3} \pi \tau_0 a^2. \quad (\text{VIII.10})$$

3. Wird ein elastischer Körper innerhalb eines Streifens der Breite $2a$ (Abbildung VIII.3) in Richtung x mit der Schubspannung

$$\tau(x, y) = \tau_0 \left(1 - x^2 / a^2\right)^{1/2} \quad (\text{VIII.11})$$

² Einzelheiten können in "K. Johnson. Contact mechanics" gefunden werden.

beansprucht, so wird die Verschiebung der Oberflächenpunkte durch

$$u_x = konst - \tau_0 \frac{x^2}{aE^*} \quad (\text{VIII.12})$$

gegeben.

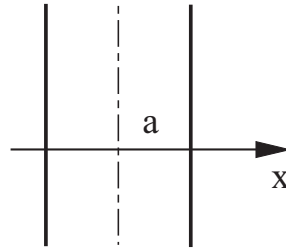


Abbildung VIII.3

4. Ein besonderer Fall einer Tangentialbeanspruchung stellt die *Torsion* dar. Sind die Tangentialkräfte in einem runden Kontaktgebiet mit dem Radius a in jedem Punkt senkrecht zum polaren Radius gerichtet und durch

$$\sigma_{zx} = -\tau(r) \sin \varphi, \quad \sigma_{zy} = \tau(r) \cos \varphi \quad (\text{VIII.13})$$

mit

$$\tau(r) = \tau_0 \frac{r}{a} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (\text{VIII.14})$$

gegeben, so sind die polaren Komponenten der Verschiebung der Oberflächenpunkte gleich³

$$u_\varphi = \frac{\pi \tau_0 r}{4G}, \quad u_r = 0, \quad u_z = 0 \quad (\text{VIII.15})$$

Das gesamte Kontaktgebiet dreht sich daher starr um den Winkel $\pi \tau_0 / 4G$. Die Spannungsverteilung entsteht daher bei einer Torsion eines an die Oberfläche geklebten starren Stempels. Das gesamte Torsionsmoment ist gleich

$$M_z = \frac{4}{3} \pi a^3 \tau_0. \quad (\text{VIII.16})$$

VIII.3 Tangentiales Kontaktproblem ohne Gleiten

Wir gehen jetzt zur Diskussion des tangentialen Kontaktproblems über. Stellen wir uns vor, dass wir in zwei gegenüberliegenden Körpern jeweils in einem Kreis mit dem Radius a eine konstante Verschiebung u_x in einem und $-u_x$ im anderen erzeugt haben. Dafür ist die Spannungsverteilung (VIII.2) auf der einen Seite, und dieselbe mit negativem Vorzeichen auf der anderen Seite erforderlich. Wenn wir jetzt die beiden Spannungsgebiete zusammenkleben würden, so würden sie aufgrund des *actio gleich reactio*-Gesetzes im Gleichgewicht bleiben. Wichtig ist dabei, dass wegen der Antisymmetrie der Verschiebungen in der z -Richtung bezüglich x die „zu klebenden“ Flächen auch in der z -Richtung zueinander genau passen würden. Diese Überlegungen zeigen, dass bei einer relativen tangentialen Bewegung von zwei Körpern *mit gleichen elastischen Eigenschaften* um $2u_x$ genau die Spannungsverteilung (VIII.2) entsteht:

³ K. Johnson. Contact Mechanics

$$\tau(x, y) = \tau_0 \left(1 - r^2 / a^2\right)^{-1/2}. \quad (\text{VIII.17})$$

Zu bemerken ist, dass die Schubspannung am Rande des Haftgebietes gegen unendlich strebt, während der Normaldruck gegen Null geht. Das bedeutet, dass in den meisten Fällen die Haftbedingung in der Nähe des Randes nicht erfüllt ist und relatives Gleiten entsteht. Diese partielle Bewegung – Schlupf – werden wir im nächsten Abschnitt diskutieren.

Definieren wir die *Schubsteifigkeit* c_{\parallel} eines Kontaktes zwischen zwei elastischen Körpern als Verhältnis der tangentialen Kraft zur relativen tangentialen Verschiebung beider Körper. Aus den Gleichungen (VIII.5) und (VIII.7) folgt für die tangential Steifigkeit

$$c_{\parallel} = \frac{F_x}{2u_x} = \frac{4Ga}{(2-\nu)} = 2G^* a, \quad (\text{VIII.18})$$

wobei wir den effektiven Schubmodul $G^* = \frac{2G}{(2-\nu)}$ eingeführt haben. Genauso wie die Normalsteifigkeit ist die Schubsteifigkeit (VIII.18) proportional zum *Durchmesser* des Kontaktes.

Anschließend bemerken wir noch, dass die angeführten Gleichungen im Kontakt zwischen einem elastischen Halbraum und einem starren Körper *nicht exakt* anwendbar sind, da in diesem Fall die Verschiebungen in der vertikalen Richtung verschwinden, was bei der Spannungsverteilung (VIII.2) nicht der Fall ist. Sie stellen aber eine gute Näherung dar. Für einen Kontakt zwischen zwei elastischen Körpern mit den elastischen Konstanten G_1, G_2, ν_1, ν_2 gilt für die Schubsteifigkeit in guter Näherung

$$c_{\parallel} = \frac{F_x}{u_{rel}} \approx 2G^* a \quad (\text{VIII.19})$$

mit

$$\frac{1}{G^*} = \frac{2-\nu_1}{4G_1} + \frac{2-\nu_2}{4G_2}. \quad (\text{VIII.20})$$

u_{rel} in (VIII.19) ist die relative Verschiebung beider Körper. Die Gleichung (VIII.5) nimmt im Fall von zwei Körpern mit verschiedenen elastischen Eigenschaften die Form

$$u_{rel} \approx \frac{\pi \tau_0 a}{G^*} \quad (\text{VIII.21})$$

an.

VIII.4 Tangentiales Kontaktproblem unter Berücksichtigung des Schlupfes

Betrachten wir jetzt ein kombiniertes Kontaktproblem charakterisiert durch gleichzeitige Wirkung von Tangential- und Normalkräften. Stellen wir uns zum Beispiel vor, dass zwei Kugeln zunächst mit einer Normalkraft F_N aneinander gedrückt und anschließend in tangentialer Richtung mit einer Kraft F_x gezogen werden. Zwischen den beiden Körpern wird trockene Reibung nach dem Coulombschen Reibgesetz angenommen: Die maximale Haftreibungsspannung τ_{max} ist gleich der Gleitspannung und diese wiederum gleich der Normalspannung p multipliziert mit einem konstanten Reibungskoeffizienten μ

$$\tau_{max} = \mu p, \quad \tau_{gleit} = \mu p. \quad (\text{VIII.22})$$

Die Haftbedingung lautet

$$\tau \leq \mu p. \quad (\text{VIII.23})$$

Wenn wir annehmen würden, dass die Körper im Kontaktgebiet vollständig haften, so würden wir für die Verteilungen von Normal- und Tangentialspannungen die folgenden Gleichungen bekommen

$$p = p_0 \left(1 - (r/a)^2\right)^{1/2}, \quad F_N = \frac{2}{3} p_0 \pi a^2, \quad (\text{VIII.24})$$

$$\tau = \tau_0 \left(1 - (r/a)^2\right)^{-1/2}, \quad F_x = 2\pi \tau_0 a^2. \quad (\text{VIII.25})$$

Diese Verteilungen sind in der Abbildung VIII.4 gezeigt. Da die Normalspannung am Rande des Haftgebietes gegen Null und die Tangentialspannung gegen Unendlich streben, ist die Bedingung (VIII.23) in der Nähe des Randes *immer verletzt*: Am Rande des Kontaktgebietes gibt es immer Gleiten, auch bei kleinen tangentialen Beanspruchungen. In inneren Bereichen dagegen ist die Bedingung (VIII.23) bei ausreichend kleinen Tangentialkräften immer erfüllt. Im Allgemeinen wird das gesamte Kontaktgebiet in einen inneren Haft- und einen äußeren Gleitbereich geteilt (Abbildung VIII.5). Der Radius c der Grenze zwischen dem Haft- und Gleitgebiet bestimmt sich aus der Bedingung $\tau = \mu p$.

Die Verteilung (VIII.25) der Schubspannungen im Kontakt gilt natürlich nur unter der Annahme, dass es im Kontakt kein Gleiten gibt. Mit dieser Verteilung können wir zwar beweisen, dass diese Annahme widersprüchlich ist und somit das Gleiten am Rande des Kontaktes immer einsetzt, können aber nicht die neue Spannungsverteilung und den Radius des Haftgebietes berechnen.

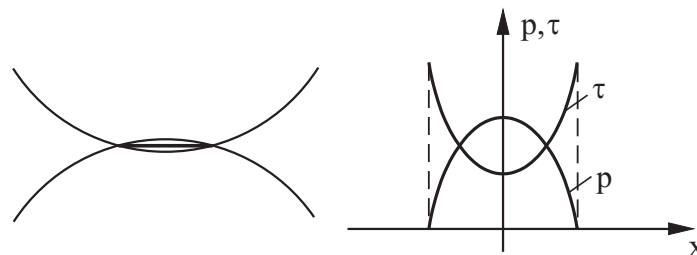


Abbildung VIII.4. Normal- und Tangentialspannungen in einem Kontakt

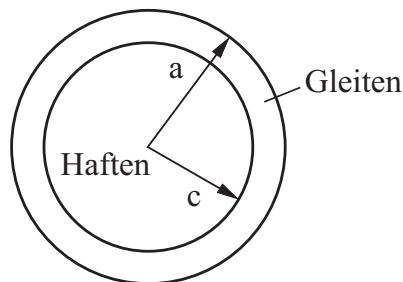


Abbildung VIII.5. Haft- und Gleitgebiete in einem runden Tangentialkontakt

Wie auch bei vielen anderen „klassischen Kontaktproblemen“, erweist es sich aber als möglich, eine korrekte Spannungsverteilung als Kombination von bekannten Verteilungen zu konstruieren. In diesem Fall gelingt es alle Kontaktbedingungen durch eine Superposition von zwei Spannungsverteilungen vom „Hertzschen Typ“ (VIII.8) zu erfüllen. Die Spannungsverteilungen vom Hertzschen Typ zusammen mit der Spannungsverteilung vom Typ (VIII.25) erweisen sich somit als universelle „Bausteine“ der Kontaktmechanik, mit

dessen Hilfe sich alle klassischen Aufgaben der Kontaktmechanik lösen lassen. Wir suchen eine Verteilung der Tangentialspannung im Kontakt in der Form

$$\tau = \tau^{(1)} + \tau^{(2)} \quad (\text{VIII.26})$$

mit

$$\tau^{(1)} = \tau_1 \left(1 - r^2 / a^2\right)^{1/2} \quad (\text{VIII.27})$$

und

$$\tau^{(2)} = -\tau_2 \left(1 - r^2 / c^2\right)^{1/2}, \quad (\text{VIII.28})$$

(Abbildung VIII.6). Die durch diese Spannung verursachte Oberflächenverschiebung ist laut (VIII.9) gleich

$$u_x = \frac{\tau_1 \pi}{32Ga} \left[4(2-\nu)a^2 - (4-3\nu)x^2 - (4-\nu)y^2 \right] - \frac{\tau_2 \pi}{32Gc} \left[4(2-\nu)c^2 - (4-3\nu)x^2 - (4-\nu)y^2 \right]. \quad (\text{VIII.29})$$

Die Druckverteilung ist dabei durch die Hertz'sche Gleichung (VIII.24) gegeben.

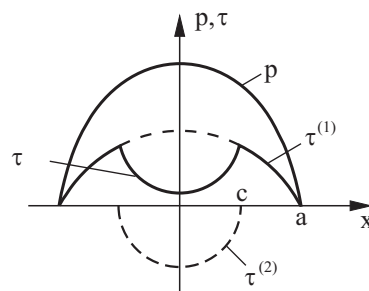


Abbildung VIII.6. Normal- und Tangentialspannung in einem Tangentialkontakt

Das Haften innerhalb des Kreises mit dem Radius c bedeutet, dass in diesem Bereich die Verschiebung *konstant* ist:

$$u_x(r) = \text{konst}, \quad \text{wenn } r < c. \quad (\text{VIII.30})$$

Das Gleiten im übrigen Bereich bedeutet, dass dort das Coulombsche Reibungsgesetz erfüllt ist:

$$\tau(r) = \mu p(r), \quad \text{wenn } c < r < a. \quad (\text{VIII.31})$$

Die zweite Bedingung führt zur Forderung

$$\tau_1 = \mu p_0. \quad (\text{VIII.32})$$

Aus der Bedingung (VIII.30) folgt dann

$$\tau_2 = \mu p_0 \frac{c}{a}. \quad (\text{VIII.33})$$

Die Verschiebung im Haftgebiet ist dabei gleich

$$u_x = \frac{(2-\nu)\pi\mu p_0}{8Ga} (a^2 - c^2). \quad (\text{VIII.34})$$

Bevor das vollständige Gleiten einsetzt ($c=0$), können die Körper in tangentialer Richtung maximal um

$$u_x = \frac{(2-\nu)\pi\mu\rho_0 a}{8G} = \frac{3(2-\nu)\mu F_N}{16Ga} \quad (\text{VIII.35})$$

verschoben werden.

Die gesamte Tangentialkraft im Kontaktgebiet berechnet sich aus (VIII.26), (VIII.27) und (VIII.28) zu

$$F_x = \frac{2}{3}\pi(\tau_1 a^2 - \tau_2 c^2) = \frac{2\pi}{3a}\mu\rho_0(a^3 - c^3). \quad (\text{VIII.36})$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung $F_N = \frac{2}{3}\rho_0\pi a^2$ kann sie in der Form

$$F_x = \mu F_N \left(1 - \left(\frac{c}{a} \right)^3 \right) \quad (\text{VIII.37})$$

geschrieben werden. Für den Radius des Haftgebietes erhalten wir somit

$$\frac{c}{a} = \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/3}. \quad (\text{VIII.38})$$

Die Tangentialkraft, bei der vollständiges Gleiten einsetzt, ist erwartungsgemäß gleich $F_x = \mu F_N$. Wir unterstreichen jedoch, dass unmittelbar vor dem Erreichen dieser Kraft das Gleiten bereits im größten Teil des Kontaktgebietes herrscht. Beim Erreichen der Kraft $F_x = \mu F_N$ haben wir es daher *nicht* mit einem Übergang vom Haften zum Gleiten zu tun, sondern mit einem Übergang vom partiellen Gleiten zum vollständigen Gleiten.

Wir haben gezeigt, dass beim Anlegen einer beliebig kleinen Tangentialkraft auf einen zuvor durch Normalkraft erzeugten Hertzschen Kontakt am Rande des Kontaktes ein ringförmiger Gleitbereich entsteht. Bei periodischer Beanspruchung wird Material dementsprechend nur in diesem Gebiet verschlissen. Diese Erscheinung ist als *Fretting* bekannt.

VIII.5 Abwesenheit des Schlupfes bei einem starren zylindrischen Stempel

Wird an einen elastischen Halbraum ein starrer, flacher, zylindrischer Stempel gedrückt, so ist die Verteilung der Normalspannung durch $p = p_0(1 - r^2/a^2)^{-1/2}$ gegeben. Beim anschließenden Anlegen einer Tangentialkraft entsteht die Schubspannungsverteilung $\tau = \tau_0(1 - r^2/a^2)^{-1/2}$. Die Haftbedingung $\tau < \mu p$ ist daher im gesamten Kontaktgebiet entweder erfüllt oder nicht erfüllt. In diesem Fall gibt es kein Schlupfgebiet.

Aufgaben

Aufgabe 1: Betrachten wir zwei elastische Körper, die entsprechend die Halbräume $z > 0$ und $z < 0$ ausfüllen (Abbildung VIII.7). Der obere Körper bewege sich in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit $du_{rel}/dt = v_c$. Die Körper haften in einem kreisförmigen Gebiet mit einem mit der Zeit steigenden Radius $a(t) = a_0 + v_r t$; im übrigen Gebiet ist die Tangentialspannung gleich Null⁴. Zu bestimmen ist die Tangentialspannungsverteilung im Kontaktgebiet.

⁴ Eine solche Situation kann entstehen, wenn zwei Körper durch eine flüssige Schicht getrennt sind, welche erstarrt. Beim Erstarren ist es typisch, dass sich die Grenze zwischen der festen und der flüssigen Phase mit einer konstanten Geschwindigkeit ausbreitet.

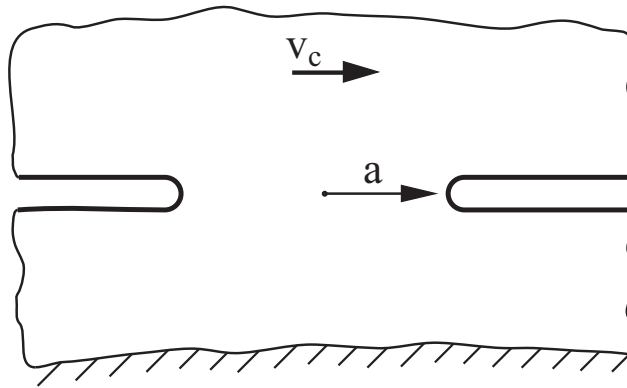


Abbildung VIII.7. Zwei elastische Festkörper im Kontakt, wobei sich der obere mit der konstanten Geschwindigkeit v_c relativ zum unteren Körper bewegt

Lösung: Aus den Gleichungen $du_{rel} / dt = v_c$ und $da / dt = v_1$ erhalten wir

$$du_{rel} = \frac{v_c}{v_1} da.$$

Die Änderung der Schubspannung im Kontaktbereich $r < a(t)$ bei einer tangentialen Bewegung um du_{rel} berechnet sich laut (VIII.17) und (VIII.5) zu

$$d\tau(r) = \frac{G^*}{\pi a} du_{rel} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{-1/2} = \frac{G^* v_c}{\pi a v_1} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{-1/2} da, \quad r < a,$$

wobei G^* durch (VIII.20) definiert ist. Zu dem Zeitpunkt, bei welchem die „Kontaktfront“ vom anfänglichen Radius a_0 bis zum Radius a_1 fortgeschritten ist, berechnet sich die Spannung wie folgt:

$$\tau = \frac{G^* v_c}{\pi v_1} \int_{a_0}^{a_1} \frac{1}{a} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{-1/2} da, \quad \text{für } r < a_0$$

$$\tau = \frac{G^* v_c}{\pi v_1} \int_r^{a_1} \frac{1}{a} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{-1/2} da, \quad \text{für } a_0 < r < a_1.$$

Berechnung der Integrale ergibt

$$\tau = \frac{G^* v_c}{\pi v_1} \ln \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - r^2}}{a_0 + \sqrt{a_0^2 - r^2}}, \quad \text{für } r < a_0$$

$$\tau = \frac{G^* v_c}{\pi v_1} \ln \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - r^2}}{r}, \quad \text{für } a_0 < r < a_1.$$

Diese Abhängigkeit ist in der Abbildung VIII.8 für $a_0 / a_1 = 0,1$ gezeigt.

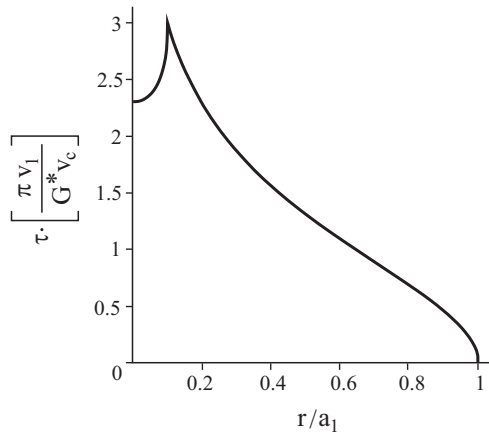


Abbildung VIII.8. Tangentialspannungsverteilung im Kontaktgebiet

Aufgabe 2: Eine elastische Kugel wird an eine starre Ebene gedrückt, wobei die Richtung der Anpresskraft immer dieselbe bleibt. (Abbildung VIII.9). Zu bestimmen sind die Bedingungen, unter denen das gesamte Kontaktgebiet immer haftet.

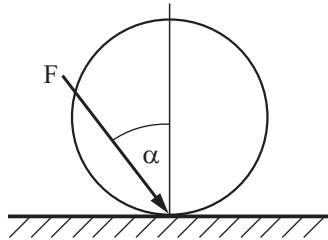


Abbildung VIII.9. Elastische Kugel, welche durch eine schräge Anpresskraft an eine starre Ebene gedrückt wird

Lösung: Wir gehen von der Annahme aus, dass es im Kontaktgebiet kein Gleiten gibt und überprüfen anschließend die Gültigkeit dieser Annahme. Das kontinuierliche Anwachsen der Kraft können wir in infinitesimal kleine Schritte aufteilen, wobei in jedem Schritt die Normalkraft um dF_N und die Tangentialkraft um dF_x erhöht wird. Zwischen den Inkrementen dF_N und dF_x besteht die geometrische Beziehung $dF_x / dF_N = \tan \alpha$. Ein Zuwachs der Tangentialkraft um dF_x unter Haftbedingung bringt einen Zuwachs in der Schubspannung

$$d\tau(r) = \frac{dF_x}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} = \frac{dF_N \tan \alpha}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2}, \quad r < a$$

mit sich. Aus der Beziehung $F_N = \frac{4}{3} \frac{E^* a^3}{R}$ zwischen der Normalkraft und dem Kontaktradius

erhalten wir $dF_N = 4 \frac{E^* a^2 da}{R}$. Der Spannungszuwachs kann daher in der Form

$$d\tau(r) = \frac{2E^*}{\pi R} \tan \alpha \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} da, \quad r < a$$

geschrieben werden. Wächst der Radius des Kontaktgebietes infolge der angebrachten Kraft von a_0 bis a_1 , so erfährt die Tangentialspannung einen Gesamtwachstum

$$\tau(r) = \frac{2E^*}{\pi R} \tan \alpha \int_{a_0}^{a_1} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} da, \quad r < a_0$$

$$\tau(r) = \frac{2E^*}{\pi R} \tan \alpha \int_r^{a_1} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} da, \quad a_0 < r < a_1 .$$

Berechnung der Integrale ergibt

$$\tau(r) = \frac{2E^*}{\pi R} \tan \alpha \cdot \left[(a_1^2 - r^2)^{1/2} - (a_0^2 - r^2)^{1/2} \right], \quad r < a_0$$

$$\tau(r) = \frac{2E^*}{\pi R} \tan \alpha \cdot (a_1^2 - r^2)^{1/2}, \quad a_0 < r < a_1 .$$

Die Hertzsche Druckverteilung berechnet sich zu

$$p(r) = \frac{p_0}{a_1} (a_1^2 - r^2)^{1/2} = \frac{3F_N}{2\pi a_1^3} (a_1^2 - r^2)^{1/2} = \frac{2E^*}{\pi R} (a_1^2 - r^2)^{1/2} .$$

Im Kontaktgebiet gibt es kein Gleiten, wenn überall die Bedingung $\tau(r) \leq \mu p(r)$ erfüllt ist. Das ist der Fall wenn

$$\tan \alpha \leq \mu .$$

Ist der Wirkungswinkel einer Kraft kleiner als der kritische Winkel, so gibt es im Kontakt kein Gleiten. Der kritische Winkel ist übrigens gleich dem *Reibungswinkel* (siehe Kapitel X), somit fällt dieses Ergebnis mit dem rein makroskopischen Ergebnis überein, dass bei einem Wirkungswinkel kleiner Reibungswinkel kein Gleiten stattfindet.

IX ROLLKONTAKT



Mit Rollkontakten haben wir es in unzähligen technischen Anwendungen zu tun. Rad-Schiene- und Reifen-Straße-Kontakte, Rolllager, Zahnräder, diverse Einzugs- und Beförderungsmechanismen (z.B. in einem Drucker) sind die bekanntesten Beispiele.

Mit der Rollkontaktmechanik hat sich bereits Reynolds beschäftigt¹. Er stellte bei experimentellen Untersuchungen mit Gummiwalzen fest, dass bei einem Rollkontakt in der Kontaktfläche Haft- und Gleitgebiete auftreten. Mit einem anwachsenden Antriebs- oder Bremsmoment wird das Gleitgebiet immer größer, bis letztendlich das ganze Kontaktgebiet gleitet. Das Gleiten führt dazu, dass die Translationsgeschwindigkeit des Rades nicht gleich seiner Umfangsgeschwindigkeit ΩR ist. Die Differenz beider Geschwindigkeiten nennt man die *Schlupfgeschwindigkeit*. Sie spielt eine wichtige Rolle in der Kontaktmechanik.

Gleiten im Kontaktgebiet ist aber nicht die einzige Ursache für den Unterschied zwischen der Fahr- und Rotationsgeschwindigkeit. Bei kleinen Antriebs- bzw. Bremsmomenten gibt es im Kontaktgebiet fast kein Gleiten. Die Differenz zwischen der Fahr- und Umfangsgeschwindigkeit besteht dennoch und ist proportional zum Antriebsmoment. Diesen Zusammenhang hat als erster Carter in seiner Rechnung aus dem Jahre 1916 gefunden². Diese kleinen Schlüpfen sind auf die elastischen Deformationen im Rad zurückzuführen.

Von besonderem Interesse für technische Anwendungen ist das in dem Kontaktgebiet auftretende Gleiten, da es auch unter den Bedingungen, bei denen noch kein vollständiges Gleiten einsetzt, zum Verschleiß führt.

¹ O. Reynolds. On rolling friction. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 166 (I): 155-174, 1876.

² F.W. Carter. The electric locomotive. *Proc. Inst. Civil Engr.*, 201: 221-252, 1916. Discussion pages 253-289.

IX.1 Qualitative Diskussion der Vorgänge in einem Rollkontakt

Die Tatsache, dass es in einem angetriebenen oder gebremsten Rad Haft- und Gleitgebiete geben muss, kann man bereits aus der Analogie zwischen Roll- und Tangentialkontakt ableiten. Bringen wir ein Rad mit einer starren Ebene in Kontakt und legen ein Kraftmoment an, so wird das Kontaktgebiet in tangentialer Richtung beansprucht. Im vorigen Kapitel haben wir aber gesehen, dass bei einer Beanspruchung eines Hertzschen Kontaktes in tangentialer Richtung immer ein Gleitgebiet entsteht. Das gilt auch für den Kontakt eines angetriebenen rollenden Rades. Wie bei einem Tangentialkontakt wird sich auch bei einem Rollkontakt bei einem geringen Antriebsmoment zunächst ein kleines Gleitgebiet bilden, welches sich mit zunehmendem Antriebsmoment vergrößert, bis ein Gleiten im gesamten Kontaktgebiet einsetzt.

Diskutieren wir qualitativ die Prozesse, die in einem rollenden Rad ablaufen. Zum besseren Verständnis dieser Prozesse betrachten wir ein in der Abbildung IX.1 a skizziertes vereinfachtes Modell eines elastischen Rades bestehend aus einem inneren starren Ring und einer Reihe von mit diesem Ring sowie untereinander linear elastisch verbundenen Elementen. Zwischen den Elementen und der Unterlage soll es Reibung mit dem Reibungskoeffizienten μ geben. Drücken wir das Rad zunächst an eine starre Unterlage (Abbildung IX.1 b) und legen anschließend ein Kraftmoment an (Abbildung IX.1 c), so werden die Federn rechts vom Kontaktbereich auf Druck und links davon auf Zug beansprucht. Dadurch dreht sich das starre Innere des Rades um einen bestimmten Winkel, der von der Zahl und Steifigkeit der Federn abhängt. Lassen wir jetzt das Rad nach rechts abrollen (Abbildung IX.1 d). Die auf Druck beanspruchten, aber sich auch schon ohne Kontakt zur festen Oberfläche im Gleichgewicht befindlichen Elemente werden in das Kontaktgebiet einlaufen, ohne dass es etwas an dessen Gleichgewicht oder Abstand ändert. Im Kontaktgebiet werden die Elemente also im auf Druck beanspruchten Zustand von der starren Unterlage mitgeführt. Kommen sie zum Auslaufrand, wo der Zugzustand herrscht und der Normaldruck abnimmt, so werden sie entspannt. Dadurch dreht sich das Rad noch etwas weiter durch.

Bei einem gebremsten Rad sind die Federn am Einlaufrand auf Zug und am Auslaufrand auf Druck beansprucht. Die einlaufenden Federn sind aber bereits vor dem Einlaufen im Gleichgewicht und bleiben in diesem Zustand bis sie zum Auslaufrand kommen. Wir kommen daher zur folgenden Erkenntnis:

Bei einem angetriebenen oder gebremsten Rad gibt es im Kontaktgebiet immer einen Haftbereich, der sich am Einlaufrand befindet und einen Gleitbereich, der sich am Auslaufrand befindet.

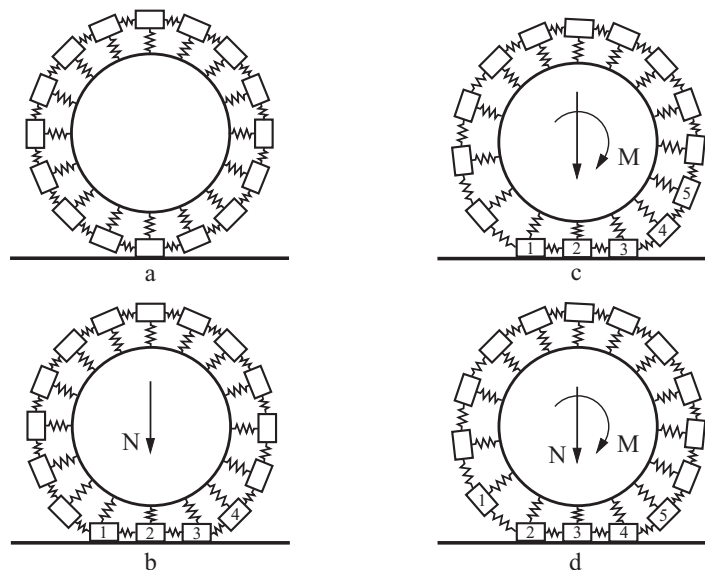


Abbildung IX.1. Vereinfachtes Modell eines angetriebenen Rades

Bei jedem Abrollen um einen Winkel, der einem einzelnen Element des Rades entspricht, wird das Rad neben einer „starrten Rotation“ eine zusätzliche „elastische Rotation“ erfahren. Die Umfangsgeschwindigkeit des Rades wird also größer als die Translationsgeschwindigkeit des Rades sein. Bei einem gebremsten Rad (Kraftmoment und Rollrichtung entgegengerichtet) dagegen wird die Umfangsgeschwindigkeit kleiner als die Translationsgeschwindigkeit sein. Es ist klar, dass die elastische Durchdrehung bei dem Übergang von einem Element zum anderen immer die gleiche ist. Daraus folgt, dass die Geschwindigkeitsdifferenz $v_{\text{Schlupf}} = v - \Omega R$ proportional zur Fahrgeschwindigkeit v sein wird. Zur Charakterisierung des Schlupfes ist es deshalb oft sinnvoll, eine dimensionslose Größe

$$s = \frac{v - \Omega R}{v} = 1 - \frac{\Omega R}{v} \quad (\text{IX.1})$$

einzuführen, die als *Schlupf* bezeichnet wird. Er ist negativ bei einem angetriebenen und positiv bei einem gebremsten Rad. Es ist leicht zu sehen, dass der so definierte dimensionslose Schlupf gleich der *Deformation* ε_{xx} im Haftbereich des Kontaktes ist. Man kann das am einfachsten durch die Betrachtung des Massentransports durch das Kontaktgebiet feststellen. Die Dichte des Materials im Haftgebiet ist gleich $\rho_0 / (1 + \varepsilon_{xx})$. Das Kontaktgebiet bewegt sich mit der Translationsgeschwindigkeit v . Die Massenstromdichte über das Kontaktgebiet ist gleich $v \rho_0 / (1 + \varepsilon_{xx})$. Andererseits ist sie definitionsgemäß gleich $\rho_0 \Omega R$. Daraus folgt

$$\Omega R = \frac{v}{(1 + \varepsilon_{xx})}. \quad (\text{IX.2})$$

Für den Schlupf ergibt sich

$$s = \frac{\varepsilon_{xx}}{1 + \varepsilon_{xx}} \approx \varepsilon_{xx}. \quad (\text{IX.3})$$

IX.2 Spannungsverteilung im stationären Rollkontakt

A. Vorbereitende Schritte

Im Weiteren benutzen wir die uns bereits bekannten Ergebnisse aus der Elastizitätstheorie. Ist in einem kreisförmigen Gebiet eine Tangentialspannung

$$\tau(r) = \sigma_{zx}(r) = \tau_0 \sqrt{1 - r^2/a^2} \quad (\text{IX.4})$$

angebracht (Abbildung IX.1a), so führt sie zu einer Verschiebung

$$u_x = \frac{\pi \tau_0}{32 G a} \left[4(2 - \nu) a^2 - (4 - 3\nu) x^2 - (4 - \nu) y^2 \right] \quad (\text{IX.5})$$

in tangentialer Richtung. Eine Spannungsverteilung

$$\tau = \sigma_{zx}(x) = \tau_0 \sqrt{1 - x^2/a^2} \quad (\text{IX.6})$$

in einem Streifen mit der Breite $2a$ (Abbildung IX.2b) verursacht eine Verschiebung

$$u_x = \text{konst} - \tau_0 \frac{x^2}{a E^*}. \quad (\text{IX.7})$$

Mit diesen Spannungsverteilungen lässt sich die Spannungsverteilung in einem rollenden Rad konstruieren.

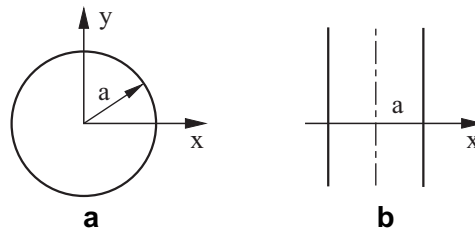


Abbildung IX.2. Verschiedene durch Tangentialspannungen beanspruchte Kontaktgebiete:
(a) kreisförmig, (b) streifenförmig

B. Theorie von Carter

Das zweidimensionale Rollkontaktproblem, d.h. Abrollen einer Walze auf einer Ebene, hat Carter im Jahre 1926 gelöst. Wie viele Lösungen von Normal- oder Tangentialkontaktproblemen beruht seine Lösung auf der Hypothese, dass man die Spannungsverteilung in einem rollenden Kontakt als Superposition von zwei Spannungsverteilungen vom Hertzschen Typ „konstruieren“ kann, für die es analytische Lösungen für die Verschiebungen an der Oberfläche des Kontinuums gibt. Suchen wir die Spannungsverteilung in einem angetriebenen Rad in der Form

$$\tau = \tau^{(1)}(x) + \tau^{(2)}(x) \quad (\text{IX.8})$$

mit

$$\tau^{(1)}(x) = \tau_1 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IX.9})$$

und

$$\tau^{(2)}(x) = -\tau_2 \left(1 - \frac{(x-d)^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{IX.10})$$

wobei a die halbe Breite des gesamten Kontaktes und c die halbe Breite des Haftgebietes am Einlauftrand ist. Die Definition der Größe d kann der *Abbildung IX.3* entnommen werden: $d = a - c$. Die Druckverteilung ist im gesamten Kontakt durch den Hertzschen Ausdruck

$$p(x) = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IX.11})$$

gegeben.

Damit die angegebene Spannungsverteilung tatsächlich einem *Rollkontakt* entspricht, müssen bestimmte kinematische und dynamische Beziehungen erfüllt sein.

Als Erstes bemerken wir, dass sich die einlaufenden Bereiche des Rades vor dem Einlaufen im deformierten Zustand befinden. Sobald sie mit der Unterlage in Kontakt kommen, können sie sich nicht mehr relativ zueinander bewegen, bis sie das Haftgebiet verlassen. Daraus folgt:

1. Im Haftgebiet ist die Deformation konstant. (IX.12)

Unter der Annahme, dass im Gleitgebiet das einfache Coulombsche Reibungsgesetz gilt, folgt weiterhin:

2. Im gesamten *Gleitgebiet* muss die Bedingung

$$\tau(x) = \mu p(x) \quad (\text{IX.13})$$

erfüllt sein.

Diese zwei Bedingungen garantieren, dass wir es mit einem stationären Rollkontakt zu tun haben. Unsere Aufgabe ist es, nun zu zeigen, dass diese zwei Bedingungen durch die Annahme der Spannungsverteilung (IX.8) erfüllt werden können.

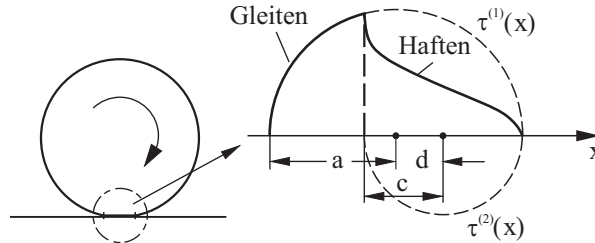


Abbildung IX.3. Verteilung der Tangentialspannungen im Kontaktgebiet für den Rollkontakt einer angetriebenen elastische Walze

Die durch die Spannungen $\tau^{(1)}(x)$ und $\tau^{(2)}(x)$ verursachten Verschiebungen sind entsprechend gleich $u_x^{(1)} = C^{(1)} - \tau_1 \frac{x^2}{aE^*}$ und $u_x^{(2)} = C^{(2)} + \tau_2 \frac{(x-d)^2}{cE^*}$. Für die gesamte Verschiebung ergibt sich

$$u_x = \text{konst} - \tau_1 \frac{x^2}{aE^*} + \tau_2 \frac{(x-d)^2}{cE^*} \quad (\text{IX.14})$$

und für die *Deformation*

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\tau_1 \frac{2x}{aE^*} + \tau_2 \frac{2(x-d)}{cE^*}. \quad (\text{IX.15})$$

Damit die Bedingung (IX.12) erfüllt ist, muss

$$\tau_2 = \frac{c}{a} \tau_1 \quad (\text{IX.16})$$

gelten. Aus der Bedingung (IX.13) folgt

$$\tau_1 = \mu p_0. \quad (\text{IX.17})$$

Die Deformation ist im Haftgebiet konstant und gleich

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{2\mu p_0 d}{aE^*}. \quad (\text{IX.18})$$

Die gesamte Querkraft im Kontaktgebiet berechnet sich zu

$$F_x = \int_{-a}^a L \cdot \tau(x) dx = \left(\frac{\pi}{2} a \mu p_0 - \frac{c}{a} \frac{\pi}{2} c \mu p_0 \right) L = \mu F_N \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right). \quad (\text{IX.19})$$

Für den Radius des Haftgebietes ergibt sich

$$\frac{c}{a} = 1 - \frac{d}{a} = \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/2}. \quad (\text{IX.20})$$

Für den Schlupf bekommen wir laut (IX.3) und (IX.18)

$$s = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{2\mu p_0}{E^*} \left[1 - \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/2} \right]. \quad (\text{IX.21})$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen $F_N = \frac{\pi a p_0}{2} L$ und $F_N = \frac{\pi E^* L a^2}{4R}$ (siehe Gleichung V.34) kann man die Gleichung für den Schlupf auch in der folgenden Form darstellen:

$$s = -\frac{\mu a}{R} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{F_x}{\mu F_N}} \right]. \quad (\text{IX.22})$$

Diese Beziehung ist in der *Abbildung IX.4* dargestellt. Sie wird *Kraftschlusscharakteristik* genannt.

Bei kleinen Tangentialkräften kann der Schlupf in eine Taylorreihe nach $F_x/\mu F_N$ entwickelt werden. In erster Ordnung gilt

$$s \approx -\frac{a F_x}{2R F_N} \quad \text{für } F_x \ll \mu F_N. \quad (\text{IX.23})$$

Der Schlupf hängt demnach bei kleinen Tangentialkräften nicht vom Reibungskoeffizienten μ ab, was auch nicht verwunderlich ist, da es in diesem Grenzfall im gesamten Kontaktgebiet kein Gleiten gibt. Die Gerade $|s| = \frac{a F_x}{2R F_N}$ ist in der *Abbildung IX.4*

mit gepunkteter Linie gezeigt. Die Abweichung des tatsächlichen Schlupfes von der gepunkteten Linie zeigt den Anteil des "echten Gleitens" im Kontaktgebiet. Das Gleiten setzt im gesamten Kontaktgebiet ein, wenn $F_x = \mu F_N$ ist. In diesem Moment ist der Schlupf gleich

$s = -\frac{\mu a}{R}$. Dieser betragsmäßig maximale Schlupf ist gleich dem zweifachen „elastischen Schlupf“ (IX.23) bei der gleichen Kraft. Die Differenz zwischen beiden

$$s_{\text{Gleit}} = -\frac{\mu a}{2R} \quad (\text{IX.24})$$

gibt den Anteil eines durch Gleiten verursachten Schlupfes wieder. Die charakteristische Größe der Gleitgeschwindigkeit im Rollkontakt beim "kritischen Antrieb" (direkt vor dem Beginn des vollen Gleitens) beträgt somit

$$v_{\text{Gleit}} \approx \frac{\mu a}{2R} v, \quad (\text{IX.25})$$

wobei v die Fahrgeschwindigkeit ist. Bei kleineren Antriebskräften kann der Schlupf als Differenz zwischen dem vollen Schlupf (IX.22) und dem elastischen Anteil (IX.23) zu

$$s_{\text{Gleit}} = -\frac{\mu a}{8R} \left(\frac{F_x}{\mu F_N} \right)^2 \quad (\text{IX.26})$$

abgeschätzt werden.

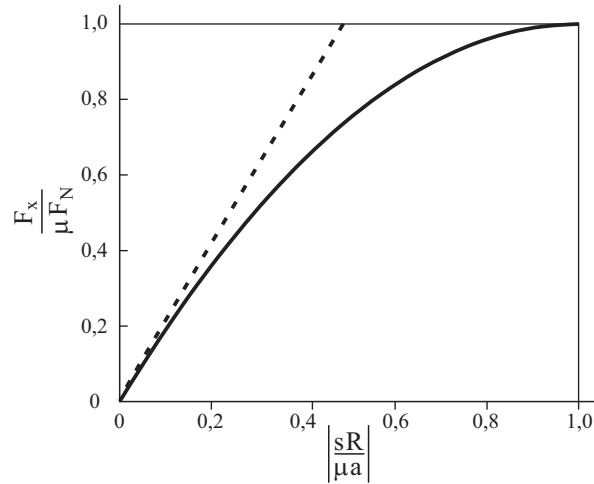


Abbildung IX.4 Kraftschlussdiagramm

C. Dreidimensionales Rollkontaktproblem

Auch im dreidimensionalen Fall kann man die Spannungsverteilung im Rollkontaktgebiet mit einem ähnlichen Verfahren wie bei Carter bestimmen, wobei man zwei Spannungsverteilungen der Form

$$\tau^{(1)}(x, y) = \tau_1 \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}} \quad (\text{IX.27})$$

und

$$\tau^{(2)}(x, y) = -\tau_2 \sqrt{1 - \frac{(x-d)^2 + y^2}{c^2}} \quad (\text{IX.28})$$

superponiert. Das Definitionsgebiet der Spannungsverteilung (IX.28) ist dabei das Haftgebiet. Die durch die Summe dieser Spannungsverteilungen bedingte Verschiebung der Oberflächenpunkte ist gemäß (IX.5) gleich

$$u_x = \frac{\pi}{32G} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau_1}{a} [4(2-\nu)a^2 - (4-3\nu)x^2 - (4-\nu)y^2] \\ -\frac{\tau_2}{c} [4(2-\nu)c^2 - (4-3\nu)(x-d)^2 - (4-\nu)y^2] \end{array} \right\} \quad (\text{IX.29})$$

Die Deformationskomponente $\varepsilon_{xx} = \partial u_x / \partial x$ ist gleich

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\pi(4-3\nu)}{16G} \left\{ -\frac{\tau_1}{a} x + \frac{\tau_2}{c} x - \frac{\tau_2}{c} d \right\}. \quad (\text{IX.30})$$

Aus den Forderungen (IX.12) und (IX.13) folgen dieselben Bedingungen (IX.16) und (IX.17) wie in einem Walzkontakt. Die Deformation und somit der Schlupf sind daher gleich

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\pi(4-3\nu)}{16G} \mu p_0 \frac{d}{a}. \quad (\text{IX.31})$$

Für die Tangentialkraft ergibt sich

$$F_x = \frac{2}{3} \pi a^2 \tau_1 - \frac{2}{3} \pi c^2 \tau_2 = \mu F_N \left(1 - \left(\frac{c}{a} \right)^3 \right) \quad (\text{IX.32})$$

Für den Radius des Haftgebietes ergibt sich die gleiche Formel, wie bei einem reinen Tangentialkontakt:

$$\frac{c}{a} = \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N}\right)^{1/3} \quad (\text{IX.33})$$

und für den Schlupf³

$$s = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{3(4-3\nu)\mu F_N}{32Ga^2} \left[1 - \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N}\right)^{1/3}\right]. \quad (\text{IX.34})$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung $F_N = \frac{4}{3} E^* \frac{a^3}{R}$ kann sie auch in der Form

$$s = -\frac{(4-3\nu)\mu}{4(1-\nu)} \frac{a}{R} \left[1 - \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N}\right)^{1/3}\right] \quad (\text{IX.35})$$

umgeschrieben werden. Bei kleinen Antriebskräften erhalten wir in erster Ordnung

$$s \approx -\frac{(4-3\nu)F_x}{32Ga^2}. \quad (\text{IX.36})$$

Aufgaben

Aufgabe 1. Abzuschätzen ist die Gleitgeschwindigkeit (a) in einem Eisenbahnrad, (b) in einem Autoreifen.

Lösung: (a) Bei einem Eisenbahnrad berechnet sich der Schlupf nach (IX.35):

$$s = -\frac{(4-3\nu)\mu}{4(1-\nu)} \frac{a}{R} \left[1 - \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N}\right)^{1/3}\right].$$

Den Schlupf beim kritisch angetriebenen Rad erhalten wir durch Einsetzen von $F_x = \mu F_N$:

$$|s| = \frac{(4-3\nu)\mu}{4(1-\nu)} \frac{a}{R}.$$

Die Gleitgeschwindigkeit berechnet sich durch Multiplizieren des Schlupfes mit der Fahrgeschwindigkeit v . Mit $\mu \approx 0,3$, $a \approx 7$ mm, $R = 0,5$ m und $\nu = 1/3$ ergibt sich für die Gleitgeschwindigkeit $v_{\text{Gleit}} \approx 5 \cdot 10^{-3} v$. Bei einer Fahrgeschwindigkeit von 30 m/s (108 km/h) hat sie die charakteristische Größe $v_{\text{Gleit}} \approx 0,14$ m/s.

(b) Für einen "kritisch angetriebenen" Autoreifen erhalten wir mit $\mu \approx 1$, $a \approx 5$ cm, $R = 0,3$ m und $\nu = 1/2$ $v_{\text{Gleit}} \approx 0,2v$. Bei einer Fahrgeschwindigkeit von 15 m/s (54 km/h) hat die Gleitgeschwindigkeit die Größenordnung von 3 m/s.

Bei „normalen Betriebsbedingungen“ (gleichmäßiges Fahren mit einer Geschwindigkeit von 15 m/s) ist die Gleitgeschwindigkeit im Rollkontakt zwischen einem Gummireifen und der Straße viel kleiner und hat in der Regel die Größenordnung 1 cm/s.

³ Diese Gleichung gilt für ein elastisches Rad auf einer starren Ebene. Beim Kontakt zwischen gleichen Materialien beträgt der Schlupf das Zweifache von (IX.34).

Aufgabe 2: Abzuschätzen sind die Energieverluste in einem angetriebenen oder einem gebremsten Rad.

Lösung: Eine Abschätzung der Reibungsleistung \dot{W} im Kontakt erhalten wir, indem wir die im Kontakt herrschende Tangentialkraft mit der mittleren Gleitgeschwindigkeit multiplizieren:

$$\dot{W} \approx |s| F_x v = |s| \dot{W}_0,$$

wobei $\dot{W}_0 = F_x v$ die „Fahrleistung“ der Reibkraft ist.

Aufgabe 3: Wird auf ein rollendes, elastisches Rad eine Kraft senkrecht zur Rollrichtung angelegt, so bekommt es aufgrund von elastischen Deformationen und partiellem Gleiten eine Geschwindigkeitskomponente in der Krafrichtung (Querschlepp). Zu berechnen ist der Querschlepp bei einer rollenden elastischen Kugel.

Lösung: Die Drehachse der Kugel soll parallel zur x-Achse sein; ohne Querkraft würde die Kugel daher genau in der y-Richtung abrollen. Das Haftgebiet befindet sich unabhängig von der Art der Beanspruchung immer am Einlauftrand (Abbildung IX.5).

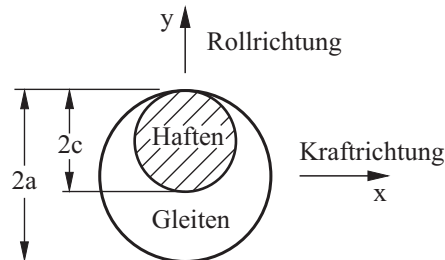


Abbildung IX.5. Haft- und Gleitgebiet bei einem abrollenden elastischen Rad, welches senkrecht zur Rollrichtung durch eine Kraft beansprucht wird

Die Spannung suchen wir in der Form

$$\tau(x, y) = \mu p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}} - \mu p_0 \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2 + (y - d)^2}{c^2}}.$$

Das dazugehörige Verschiebungsfeld ergibt sich aufgrund von (IX.5) zu

$$u_x = \frac{\pi}{32G} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu p_0}{a} [4(2 - \nu)a^2 - (4 - 3\nu)x^2 - (4 - \nu)y^2] \\ - \frac{\mu p_0}{a} [4(2 - \nu)c^2 - (4 - 3\nu)x^2 - (4 - \nu)(y - d)^2] \end{array} \right\}$$

und die relevante Komponente des Deformationstensors zu

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} = - \frac{\pi \mu p_0 (4 - \nu) d}{16G a}.$$

Diese Größe gibt den Winkel an, unter dem die Kugel relativ zur Richtung eines idealen Rollens tatsächlich rollen wird. Analog zur Vorgehensweise bei der Herleiten der Gleichungen (IX.32) - (IX.35) erhalten wir für den Querschlepp

$$s_{\perp} = \varepsilon_{xy} = - \frac{3\mu(4 - \nu)}{32Ga^2} \mu F_N \left[1 - \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/3} \right] = - \frac{(4 - \nu)\mu a}{4(1 - \nu)R} \left[1 - \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/3} \right].$$

Aufgabe 4: Der in der Abbildung IX.6 gezeigte Riemenantrieb soll im Folgenden näher untersucht werden. Die rechte Scheibe wird durch ein Moment M angetrieben, wodurch sie mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_1 rotiert. Die angetriebene (linke) Scheibe dreht

sich hingegen nur mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega_2 < \omega_1$. Sowohl das Haftgebiet, in welchem die Kraft im Riemen konstant gleich F_1 ist, als auch das Gleitgebiet, in welchem die Riemenkraft auf F_2 abnimmt, sind für das Antriebsrad aufgezeigt. Ein entsprechender Wechsel von Haften zu Gleiten besteht auch am angetriebenen Rad. Zu bestimmen sind der Schlupf s und der Verlust an mechanischer Leistung.

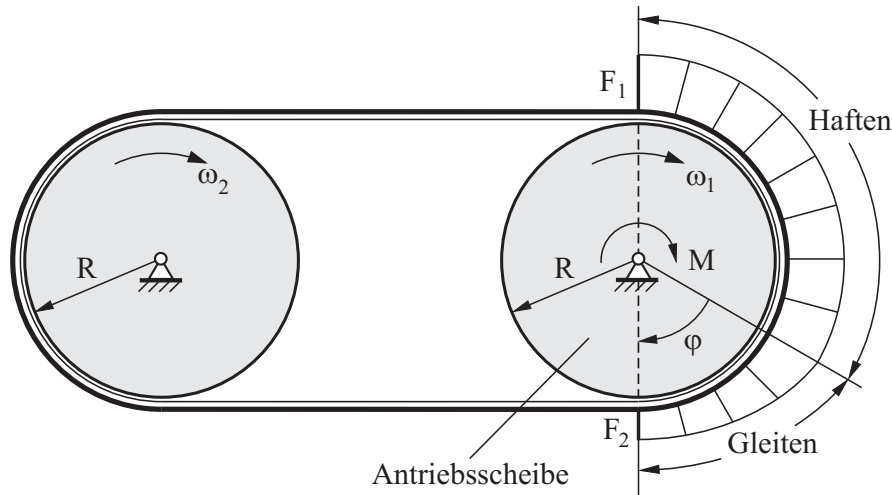


Abbildung IX.6. Elastischer Riemen, welcher ein Moment M zwischen zwei rollende Scheiben überträgt

Lösung: Das durch den Riemenantrieb übertragene Kraftmoment ist gleich

$$M = (F_1 - F_2)R.$$

Da die Dehnung des Riemens im Haftgebiet konstant bleibt, ist auch die Spannkraft im gesamten Haftgebiet konstant und gleich F_1 . Im Gleitgebiet nimmt die Kraft bis zum Wert F_2 ab, dabei gilt die Beziehung

$$F_1 / F_2 = e^{\mu\phi}$$

(siehe Kapitel X Aufgabe 4). Die elastische Deformation des Riemens ist gleich $\varepsilon = F / EA$, wobei E der Elastizitätsmodul ist und A die Querschnittsfläche. Im oberen und unteren Bereich gilt daher

$$\varepsilon_1 = \frac{F_1}{EA}, \quad \varepsilon_2 = \frac{F_2}{EA}.$$

Der Massenstrom muss an jedem Punkt konstant bleiben. Daraus folgt

$$\frac{v_1}{1 + \varepsilon_1} = \frac{v_2}{1 + \varepsilon_2}.$$

Der dimensionslose Schlupf ist gleich

$$s = 2 \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \approx \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{F_1 - F_2}{EA} = \frac{M}{REA}.$$

Die Verlustleistung ist gleich

$$\dot{W} = M(\omega_1 - \omega_2),$$

mit

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R}, \quad \omega_2 = \frac{v_2}{R}.$$

Bei kleinem Unterschied in den Rotationsgeschwindigkeiten der Scheiben gilt somit

$$\dot{W} \approx \frac{M^2 \bar{\omega}}{REA}.$$

$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ ist hier die mittlere Rotationsgeschwindigkeit.

Aufgabe 5: Ein Rad rollt mit der Winkelgeschwindigkeit ω und wird gleichzeitig um die vertikale Achse mit der Winkelgeschwindigkeit Ω gedreht⁴ (als Beispiel denke man an das Lenken eines Autos). Zu bestimmen ist der Torsionsschlupf, den wir als Verhältnis $s = \Omega / \omega$ definieren, als Funktion des Torsionsmomentes unter der Annahme eines unendlich großen Reibungskoeffizienten.

Lösung: Die Spannungsverteilungen

$$\tau_x = \frac{8G(3-\nu) s (a+x)y}{3\pi(3-2\nu) R (a^2-r^2)^{1/2}},$$

$$\tau_y = \frac{8G(1-\nu) s (a^2-2x^2-ax-y^2)}{3\pi(3-2\nu) R (a^2-r^2)^{1/2}}$$

führen zu einer Oberflächenverschiebung, die die Haftbedingung erfüllt (konstante Deformation im gesamten Kontaktgebiet)⁵. Die Tangentialkraft verschwindet dabei ($F_x = F_y = 0$), während das Torsionsmoment gleich

$$M_z = \frac{32(2-\nu)}{9(3-2\nu)} \cdot \frac{a^4}{R} \cdot Gs$$

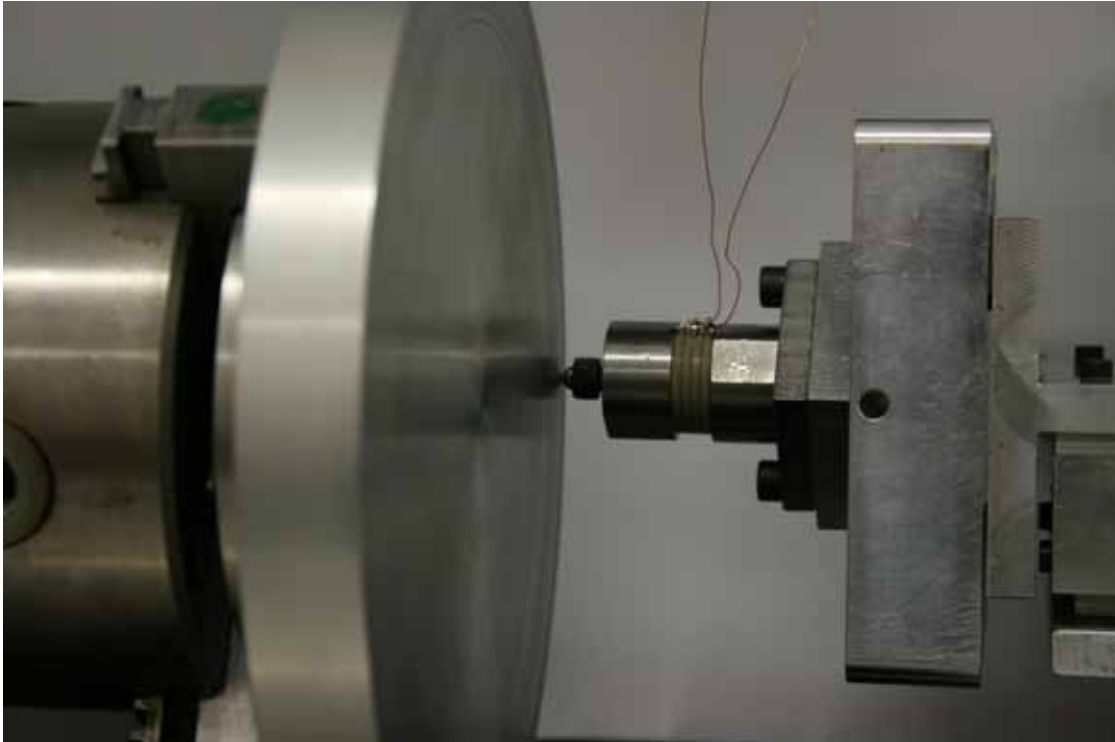
ist. Daraus folgt für den Schlupf

$$s = \frac{9(3-2\nu) R M_z}{32(2-\nu) a^4 G}.$$

⁴ Die Rotation um eine Achse senkrecht zur Unterlage nennt man *Spin*.

⁵ Johnson, K.L. The effect of spin upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane. Transactions ASME, Journal of Applied mechanics, 1958, v. 25, p.332.

X DAS COULOMBSCHE REIBUNGSGESETZ



X.1 Einführung

In diesem Kapitel untersuchen wir nur die *trockene* oder *Coulombsche Reibung* zwischen festen Körpern. Festkörperreibung ist ein außerordentlich kompliziertes physikalisches Phänomen. Es umfasst elastische und plastische Deformationen von Oberflächenbereichen der kontaktierenden Körper, Wechselwirkungen mit einer Zwischenschicht, Mikrobrüche und die Wiederherstellung der Kontinuität des Materials, Anregung von Elektronen und Phononen, chemische Reaktionen und Übertragung von Teilchen von einem Körper zum anderen. Umso erstaunlicher ist es, dass sich ein sehr einfaches Reibungsgesetz formulieren lässt, das für viele Ingenieur Anwendungen in erster Näherung ausreicht: Die Reibungskraft ist proportional zur Normalkraft und so gut wie unabhängig von der Geschwindigkeit. Die erstaunlichste Eigenschaft der trockenen Reibung besteht darin, dass sie - in erster Näherung - weder von der scheinbaren Kontaktfläche noch von der Rauigkeit abhängt. Diese Eigenschaften erlauben uns, den Begriff des Reibungskoeffizienten zu benutzen. Der Reibungskoeffizient gibt aber nur eine sehr grobe erste Näherung des Quotienten aus Reibungskraft und Normalkraft an.

Leonardo da Vinci hat als erster die Reibungsgesetze experimentell untersucht und die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten formuliert, z.B. dass der Reibwiderstand proportional zum Gewicht und unabhängig von der Kontaktfläche ist. Die letztere Eigenschaft hat er mit Hilfe der in der Abbildung X.1 gezeigten Experimente abgeleitet.

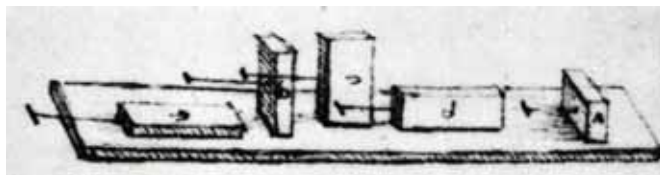


Abbildung X.1. Zeichnung aus einer Schrift von Leonardo da Vinci, die die Unabhängigkeit der Reibungskraft von der Aufstellfläche illustriert

X.2 Haftreibung und Gleitreibung

Durch ausführliche experimentelle Untersuchungen hat Coulomb (1736-1806) festgestellt, dass die Reibungskraft F_R zwischen zwei Körpern, die mit der Normalkraft F_N aneinander gedrückt werden (Abbildung X.2), in erster, grober Näherung folgende einfache Eigenschaften besitzt:

A. *Die Haftreibung.* Um einen auf einer ebenen Unterlage liegenden Körper aus dem Ruhezustand zu bringen, muss eine kritische Kraft – die *statische Reibungskraft* F_s – überwunden werden. Diese Kraft ist in grober Näherung der Anpresskraft F_N proportional¹:

$$F_s = \mu_s F_N. \quad (\text{X.1})$$

Der Koeffizient μ_s heißt *statischer Reibungskoeffizient* (auch *statischer Reibbeiwert*). Er hängt von der Materialpaarung ab, weist aber dagegen fast keine Abhängigkeit von der Kontaktfläche und der Rauigkeit der Oberflächen auf.

B. *Die Gleitreibung* (auch *kinetische Reibungskraft*) F_R ist die Widerstandskraft, die nach Überwindung der Haftung wirkt. Coulomb hat experimentell folgende Eigenschaften der Gleitreibungskraft festgestellt:

– Die Gleitreibung ist proportional zur Anpresskraft F_N :

$$F_R = \mu_k F_N. \quad (\text{X.2})$$

– Sie weist keine wesentliche Abhängigkeit von der Kontaktfläche und Rauigkeit der Oberflächen auf.

– Der *kinetische Reibungskoeffizient* (auch *Gleitreibungskoeffizient*) ist näherungsweise gleich dem statischen Reibungskoeffizienten:

$$\mu_k \approx \mu_s. \quad (\text{X.3})$$

– Die Gleitreibung hängt nicht (bzw. nur sehr schwach) von der Gleitgeschwindigkeit ab.

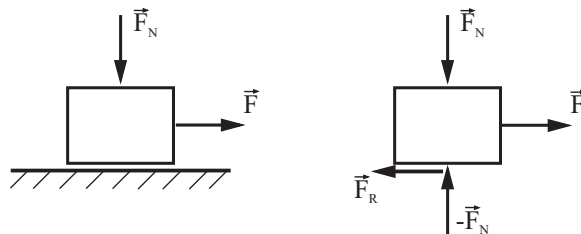


Abbildung X.2. Ein durch Normal- und Tangentialkraft beanspruchter Klotz auf einer Ebene: im zugehörigen Freischnitt die Reaktionskraft und die Reibungskraft zu sehen

Die genannten Gesetze geben nur einen ersten groben Umriss der Eigenschaften der trockenen Reibung. Eine ausführlichere Analyse zeigt, dass die statischen und kinetischen Reibungskräfte die gleiche physikalische Herkunft haben und in vielen mechanischen Aufgaben nicht getrennt betrachtet werden können. So haben wir schon gesehen, dass bei einer tangentialen Beanspruchung eines Kontaktes in der Regel ein partielles Gleiten auch dann auftritt, wenn das „makroskopische Gleiten“ noch nicht eingesetzt hat. Daher erweist sich auch der Unterschied zwischen dem statischen und kinetischen Reibungskoeffizienten als relativ: Oft passiert der Übergang vom statischen zum Gleitkontakt kontinuierlich (das ist der Fall in einem angetriebenen Rad), oder die "Haftreibung" entpuppt sich in Wirklichkeit als

¹ Diese Proportionalität ist als Amontons-Gesetz bekannt.

Gleitreibung bei sehr kleinen Geschwindigkeiten (das ist der Fall bei Gummireibung, z.B. bei einem Gummireifen auf der Straße).

X.3 Reibungswinkel

Die einfachste experimentelle Methode zur Bestimmung des Reibungskoeffizienten, die praktisch immer zur Hand ist, ist die Messung des Neigungswinkels, bei dem ein auf einer geneigten Ebene liegender Körper zu rutschen beginnt. Dieser Winkel wird *Reibungswinkel* genannt. Die dabei auf den Körper wirkenden Kräfte sind in der Abbildung X.3b gezeigt.

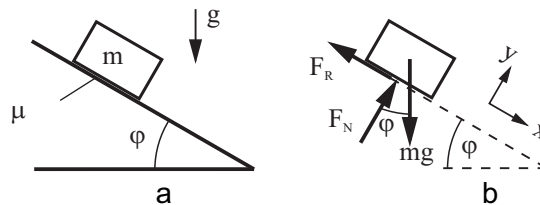


Abbildung X.3. Ein Körper auf geneigter Ebene

Beim Erreichen des Reibungswinkels erreicht die Haftkraft ihren maximalen Wert $F_s = \mu_s F_N$. Das Kräftegleichgewicht in diesem kritischen Zustand (in dem in der Abbildung X.3b gezeigten Koordinatensystem) lautet:

$$\begin{aligned} x: \quad mg \sin \varphi - \mu_s F_N &= 0 \\ y: \quad F_N - mg \cos \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{X.4})$$

Daraus folgt

$$\tan \varphi = \mu_s. \quad (\text{X.5})$$

Der Tangens des Reibungswinkels ist demnach gleich dem statischen Reibungskoeffizienten.

X.4 Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Kontaktzeit

Es war ebenfalls Coulomb, der Abweichungen von dem einfachen Reibungsgesetz festgestellt hat. Er hat unter anderem entdeckt, dass die Haftreibungskraft nach dem Stillstand mit der Zeit wächst. In der Tabelle X.1 sind die experimentellen Daten von Coulomb aufgeführt. In der Abbildung X.4 ist die Reibkraft über den Logarithmus der Zeit aufgetragen. In diesen Koordinaten ist dies eine Gerade: Die Haftreibungskraft steigt logarithmisch mit der Zeit. Physikalische Gründe für diese Zeitabhängigkeit können sehr verschieden sein. Bei metallischen Werkstoffen wächst die wahre Kontaktfläche in Mikrokontakten mit der Zeit dank der immer vorhandenen Kriechprozesse. Bei höheren Temperaturen ist dieses Wachstum schneller. Mit der steigenden Kontaktfläche verlangsamt sich dieser Prozess, was zu einer logarithmischen Abhängigkeit der Kontaktfläche und dadurch bedingt zur logarithmischen Abhängigkeit der statischen Reibungskraft führt. Dieses Wachstum beginnt bei der ersten Berührung der Körper auf atomarer Skala – zeitlich im Subnanosekundenbereich – und hört auch nach sehr langer Zeit nicht auf. Bei Elastomeren ist dieser Effekt mit der Zunahme der Kontaktfläche infolge der Viskoelastizität des Materials verbunden. Auch Kapillarkräfte tragen zur Reibungskraft bei und führen nach den heutigen Erkenntnissen zu einer annähernd logarithmischen zeitlichen Abhängigkeit der statischen Reibkraft.

Es ist zu bemerken, dass die zeitliche Abhängigkeit des „statischen“ Reibungskoeffizienten die statische Reibungskraft zu einem dynamischen Prozess macht.

Wenn der Reibungskoeffizient von der Kontaktzeit abhängt, so wird das auch für einen Rollkontakt richtig sein, denn „Rollen“ kann man als kontinuierliches Aufstellen von neuen Oberflächenbereichen betrachten. Bei großer Rollgeschwindigkeit ist die Kontaktzeit klein, und man kann eine kleinere „statische“ Reibungskraft im Kontakt erwarten.

Auch bei der Gleitreibung kommt es zwischen den Mikrorauigkeiten zu Kontakten, die abhängig von der Gleitgeschwindigkeit, verschiedene Zeit andauern, was zu einer geschwindigkeitsabhängigen Gleitreibungskraft führt.

Diese Beispiele zeigen, dass die Unterscheidung der „statischen“ und der „kinetischen“ Reibungskraft relativ ist und nur ein sehr grobes Bild liefert. In Wirklichkeit sind sie bei vielen Prozessen auf verschiedene Art eng miteinander und mit der Kontaktdynamik verflochten.

Tabelle X.1. Statische Reibungskraft für Eiche gegen Eiche geschmiert durch Talg als Funktion der Standzeit

t , min	F_s , arb. units
0	5,02
2	7,90
4	8,66
9	9,25
26	10,36
60	11,86
960	15,35

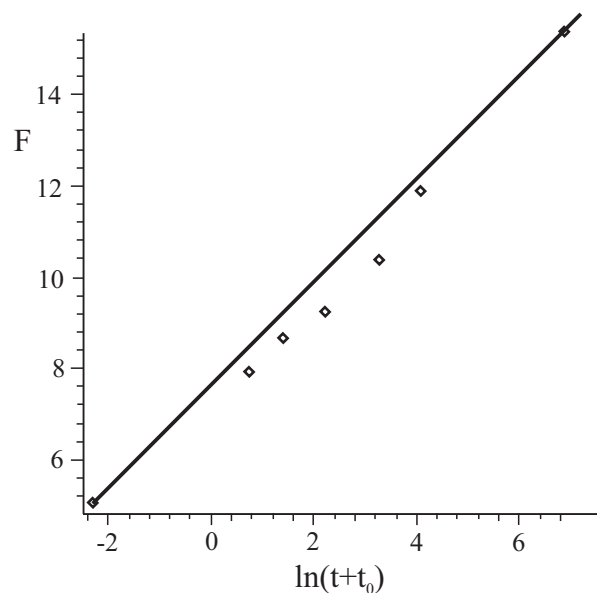


Abbildung X.4. Die Daten von Coulomb aus der **Tabelle X.1**: Die statische Reibungskraft ist als Funktion des Logarithmus der Zeit aufgetragen: $F = a + b \ln(t + t_0)$ mit $a = 7,28$, $b = 1,10$ und $t_0 = 0,101$ min

X.5 Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Normalkraft

Auch die lineare Abhängigkeit (X.1) oder (X.2) der Reibungskraft von der Anpresskraft ist nur in einem bestimmten Kraftbereich erfüllt – für nicht zu kleine und nicht zu große Anpresskräfte. Bei metallischen Stoffen kann dieser Bereich mehrere Dezimalgrößenordnungen der Anpresskraft umfassen, wie es in der Abbildung X.5 illustriert wird².

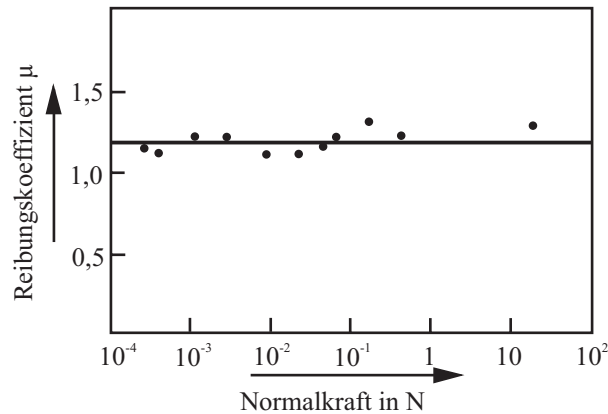


Abbildung X.5 Reibungskoeffizient von Stahl auf elektrolytisch poliertem Aluminium. Der Reibungskoeffizient bleibt konstant für Belastungen von 10 mg bis 10 kg, d.h. bei einer Änderung der Belastung um den Faktor 10^6 .

Sie ist nicht mehr gültig, wenn die wahre Kontaktfläche vergleichbar mit der scheinbaren Kontaktfläche wird. Diese Grenze wird sehr leicht bei weichen Metallen wie Indium oder Blei, besonders aber bei Polymeren und Elastomeren erreicht, bei denen aus diesem Grunde oft wesentliche Abweichungen von Amontons Gesetz auftreten. In Abbildung X.6 ist die Reibungskraft zwischen Stahl und Teflon als Funktion der Normalkraft dargestellt. Die Reibungskraft ist in guter Näherung proportional zu $F_N^{0,85}$. Der Reibungskoeffizient nimmt somit mit der Normalkraft ab.

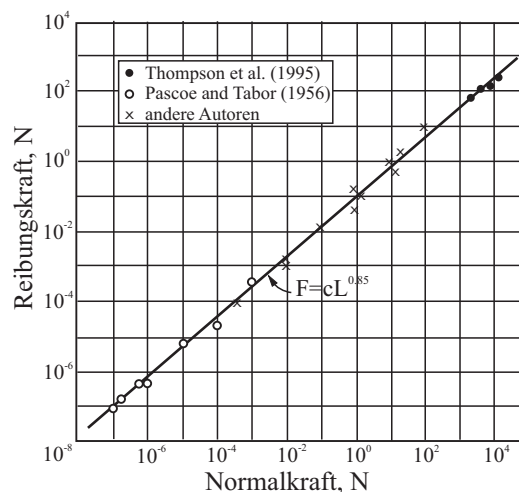


Abbildung X.6. Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten zwischen Stahl und Teflon von der Normalkraft

² Bowden, Tabor. S. 99.

X.6 Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Gleitgeschwindigkeit

Oftmals wird der Einfachheit halber angenommen, dass der Gleitreibungskoeffizient von der Geschwindigkeit nicht abhängt. Auch das ist eine gute, aber grobe Näherung, die bei nicht zu großen und nicht zu kleinen Geschwindigkeiten gültig ist. Die genaue Abhängigkeit der Reibungskraft von der Geschwindigkeit ist für viele Anwendungen wichtig. Nimmt die Reibungskraft mit der Geschwindigkeit ab, so ist das stationäre Gleiten in der Regel nicht stabil, und es entwickeln sich Reibungsinstabilitäten³.

X.7 Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Oberflächenrauheit

Oft wird die Herkunft der Reibung mit der Rauheit der Oberflächen in Verbindung gebracht. In der Technischen Mechanik bezeichnet man sogar die Flächen, in denen es Reibung bzw. Haftung gibt, als „rau“, während „glatte“ Oberfläche als reibungslos eingestuft werden. Jeder Tribologe weiß, dass diese Bezeichnungen nicht zutreffen: In großen Bereichen der Rauheit von Oberflächen hängt die Reibungskraft nicht bzw. nur sehr gering von der Rauigkeit ab. Entgegen der Erwartung kann der Reibungskoeffizient für besonders glatte metallische Oberflächen sogar größer sein als bei rauen Oberflächen. Der Einfluss der Rauigkeit auf die Reibung hängt von vielen Faktoren ab, unter anderem von der Anwesenheit von Verunreinigungen oder flüssigen Zwischenschichten im tribologischen Kontakt.

Einen beeindruckenden Nachweis für die schwache Abhängigkeit der Reibungskraft (und des Verschleißes) von der Oberflächenrauheit liefern Experimente mit der Übertragung von radioaktiven Elementen zwischen zwei Kontaktpartnern.

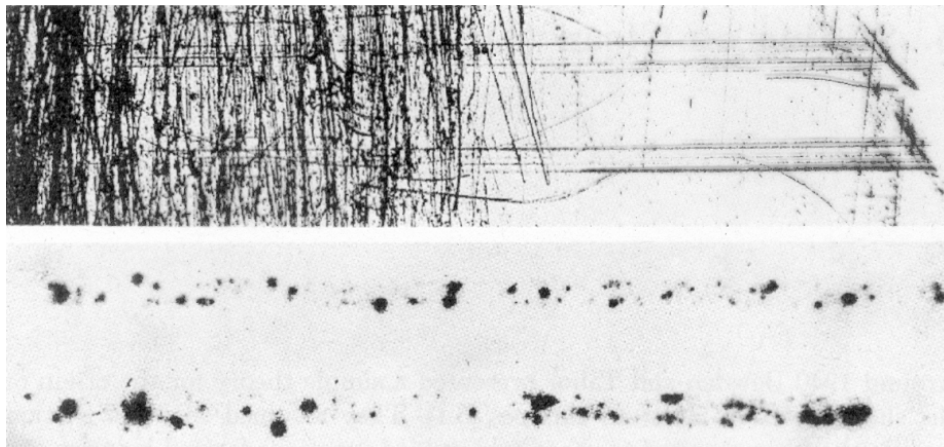


Abbildung X.7. Fotoaufnahme und Radiogramm einer Kupfer-Oberfläche, die in einem Teil eine Rauigkeit von 250 Å und im anderen Teil eine 20 mal größere Rauigkeit von 5000 Å hat, nach einem Reibexperiment mit einer Belastung von 40N und einer Gleitgeschwindigkeit von 0,01 cm/s. Sowohl die Reibungskraft als auch der Verschleiß sind beinahe unabhängig von der Rauigkeit⁴

In der Abbildung X.7 sind Ergebnisse eines Experimentes dargestellt, in dem ein radioaktiver Kupferklotz über eine Kupferplatte gezogen wurde, die in einem Teil eine Rauigkeit von 25 nm, und im anderen Teil eine zwanzigmal größere Rauigkeit von 500 nm hatte. Der große Unterschied in der Rauigkeit hat aber beinahe keinen Einfluss auf die Reibungskraft und den Materialtransfer von einem Körper zum anderen (den man sich durch die anschließende Messung der Radioaktivität veranschaulichen kann). Die Rauigkeit hat nicht einmal einen Einfluss auf die Größe der Kontaktgebiete.

³ Reibungsinstabilitäten werden ausführlich im Kapitel XII diskutiert.

⁴ E. Rabinowicz, Friction and wear of materials. Second Edition. John Wiley & Sons, inc., 1995.

X.8 Vorstellungen von Coulomb über die Herkunft des Reibungsgesetzes

Coulomb hat die ersten Modellvorstellungen über die physikalische Herkunft der Reibung aufgestellt, die einige wichtige Eigenschaften der trockenen Reibung auf eine einfache Weise erklären. Nach seinen Vorstellungen ist für die Reibungskraft die Verzahnung von Mikrorauigkeiten beider kontaktierender Oberflächen verantwortlich, wie schematisch in seinen Skizzen (Abbildung X.8) gezeigt ist. Wie bereits erwähnt, ist der Einfluss der Rauheit von Oberflächen auf die Reibung in der Realität viel komplizierter. Dennoch führen auch ganz komplizierte moderne Analysen der Reibung immer wieder zu den einfachsten Ideen, die bereits von Coulomb vorgeschlagen wurden. Wir diskutieren daher kurz diese Ideen.

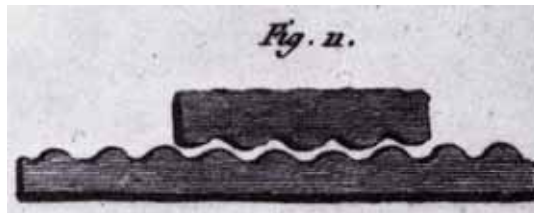


Abbildung X.8. Verzahnung von Rauigkeiten als Ursache für die Reibungskraft (Skizze von Coulomb)

Betrachten wir nach Coulomb als Modell für die trockene Reibung einen Körper, welcher auf eine gewellte Oberfläche gedrückt wird. Zur weiteren Vereinfachung reduzieren wir den Körper zu einem Massenpunkt. Das sich ergebende einfache Modell ist in der Abbildung X.9 a dargestellt.

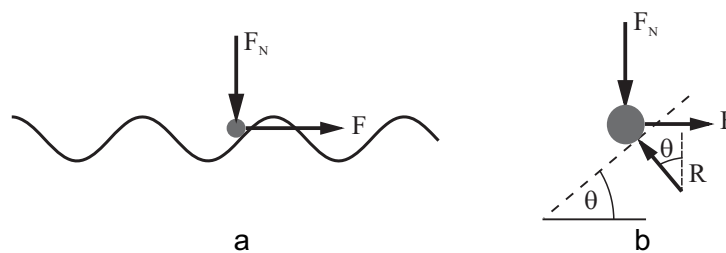


Abbildung X.9. Vereinfachtes Modell von Coulomb für trockene Reibung

Zwischen der gewellten Oberfläche und dem Massenpunkt soll es keine weitere statische Reibung geben. Aus dem in der Abbildung X.9 b gezeigten Freischnitt folgen die Gleichgewichtsbedingungen

$$R \cos \theta = F_N, \quad R \sin \theta = F. \quad (\text{X.6})$$

Daraus folgt

$$F = F_N \tan \theta. \quad (\text{X.7})$$

Die statische Reibungskraft F_s ist definitionsgemäß gleich der maximalen Kraft F , bei der ein Gleichgewicht noch möglich ist:

$$F_s = F_{\max} = F_N \tan \theta_{\max} \quad (\text{X.8})$$

Somit ist der statische Reibungskoeffizient gleich der maximalen Steigung der Oberfläche:

$$\mu_s = \tan \theta_{\max}. \quad (\text{X.9})$$

Dieses Modell liefert auf einfache Weise eine der wichtigsten Eigenschaften der trockenen Reibung – ihre Proportionalität zur Normalkraft – und gibt für den Reibungskoeffizienten eine einfache geometrische Erklärung. Angewendet auf ausgedehnte

Körper mit periodischer „Verzahnung“ - wie in den Skizzen von Coulomb - erklärt dieses Modell auch die Unabhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Kontaktfläche. Es erklärt aber nicht die beobachtbare Unabhängigkeit (bzw. nur eine relativ schwache Abhängigkeit) der Reibungskraft von der Oberflächenrauheit.

X.9 Theorie von Bowden und Tabor

Es gab viele Versuche, die Universalität und die Einfachheit des Coulombschen Reibungsgesetzes zu erklären. Es scheint, dass die Robustheit des Coulombschen Reibungsgesetzes gleichzeitig mehrere Ursachen hat. Ein wichtiger Grund für die Proportionalität der Reibungskraft zur Normalkraft liegt in den Kontakteigenschaften von rauen Oberflächen. Wir haben im Kapitel VII gesehen, dass solche Kontakteigenschaften wie die wahre Kontaktfläche und die Kontaktlänge annähernd linear mit der Anpresskraft steigen und von der scheinbaren Kontaktfläche nicht abhängen. Der Steigungswinkel der Oberfläche in Mikrokontakten dagegen hängt von der Anpresskraft nicht (bzw. nur sehr schwach) ab. Würden wir die Reibungskraft nach den Vorstellungen von Coulomb mit dem Steigungswinkel der Oberflächen im Kontakt in Zusammenhang bringen, so würde der Reibungskoeffizient unabhängig von der Anpresskraft sein. Der Reibungskoeffizient wäre aber sehr verschieden für geschliffene und polierte Oberflächen, was meistens nicht der Fall ist.

1949 haben Bowden und Tabor eine einfache Theorie vorgeschlagen, welche die Herkunft der Gleitreibung zwischen reinen metallischen Oberflächen durch Bildung von Schweißbrücken erklärt. Wenn zwei Körper zusammengedrückt werden, so kommen sie in einigen Bereichen so nahe aneinander, dass die Atome eines Körpers in Kontakt mit den Atomen des zweiten Körpers kommen, während es erhebliche Bereiche gibt, in denen die Entfernung so groß ist, dass jegliche interatomare Wechselwirkungen vernachlässigt werden können. Die Kontaktbereiche nennen wir Brücken; die Gesamtfläche aller Brücken ist die reale Kontaktfläche A . Die restliche Fläche ist meistens viel größer als die reale Kontaktfläche, gibt aber beinahe keinen Beitrag zur Gleitreibungskraft.

Bei Metallen kann die reale Kontaktfläche in den meisten praktischen Fällen in guter Näherung abgeschätzt werden, indem wir annehmen, dass alle Mikrokontakte plastisch deformiert sind und die Spannung gleich der Eindruckhärte σ_0 des Materials ist. Diese Annahme liefert für die reale Kontaktfläche

$$A \approx F_N / \sigma_0 \quad (\text{X.10})$$

Ist zum Scheren einer Schweißbrücke eine Tangentialspannung τ_c erforderlich, so ist die maximale Haftreibung gleich

$$F_s = F_N \frac{\tau_c}{\sigma_0}. \quad (\text{X.11})$$

Da die Scherfestigkeit für isotrope plastische Körper ca. $1/\sqrt{3}$ der Zugfestigkeit beträgt und diese wiederum ca. $1/3$ der Eindruckhärte ist, sollte sich in der Regel eine universelle Abhängigkeit $F_s \approx (\frac{1}{6} \div \frac{1}{5}) F_N$ ergeben mit einem Reibungskoeffizienten $\mu \approx \frac{1}{6} \div \frac{1}{5}$. Für viele nicht geschmierte metallische Paarungen (z.B. Stahl gegen Stahl, Stahl gegen Bronze, Stahl gegen Grauguss u.a.) hat der Reibungskoeffizient tatsächlich die Größenordnung $\mu \sim 0.16 - 0.2$. Bei großen Druckkräften kann der Reibungskoeffizient zwischen reinen Metallen höhere Werte erreichen, was vermutlich mit großer plastischer Deformation und der dadurch verursachten wesentlichen Veränderung der Oberflächentopographie zusammenhängt.

Reibungskoeffizienten zwischen verschiedenen Materialien hängen von vielen Parametern ab. In Anlehnung an Ideen von Bowden und Tabor lässt sich jedoch eine grobe

Klassifikation erstellen. Bemerken wir zunächst, dass es bei starker Adhäsion in einem tribologischen Kontakt im Allgemeinen sowohl Kontaktgebiete gibt, die auf Druck beansprucht sind (Kontaktfläche A_{Druck}) als auch Kontaktgebiete, die auf Zug beansprucht sind (Kontaktfläche A_{Zug}). Die Spannung in den Druckgebieten ist ungefähr gleich der Härte $\sigma_0 \approx 3\sigma_c$. In den Zuggebieten gilt $\sigma_0 \approx \zeta\sigma_c$, wobei ζ im Allgemeinen kleiner 3 ist. Die Normalkraft ist daher gleich

$$F_N = \sigma_c (3A_{Druck} - \zeta A_{Zug}) \quad (X.12)$$

Geschert werden alle Schweißbrücken, daher gilt für die statische Reibungskraft

$$F_s \approx \tau_c (A_{Druck} + A_{Zug}) \quad (X.13)$$

Für den Reibungskoeffizienten ergibt sich die Abschätzung

$$\mu \approx \frac{\tau_c (A_{Druck} + A_{Zug})}{\sigma_c (3A_{Druck} - \zeta A_{Zug})} \quad (X.14)$$

Unter Annahme $\tau_c \approx \sigma_c / \sqrt{3}$, die für plastisch isotrope Medien gilt, erhalten wir die Abschätzung

$$\mu \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{A_{Druck} + A_{Zug}}{3A_{Druck} - \zeta A_{Zug}} \right) \quad (X.15)$$

Betrachten wir jetzt die folgenden Fälle:

1. *Reine Metalle in Anwesenheit von kleinsten Resten von Schmiermitteln, die keinen eigenen Schmiereffekt haben, jedoch die starke metallische Adhäsion verhindern.* In diesem Fall ist $A_{Zug} = 0$ und der Reibungskoeffizient hat den oben erwähnten universellen Wert von der Größenordnung

$$\mu \approx \frac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0,19 \quad (X.16)$$

Dieser Reibungskoeffizient ist demnach charakteristisch für trockene Reibung von Metallen unter „normalen Bedingungen“, bei denen die Oberfläche mit Oxiden sowie weiteren Verunreinigungen in kleinen Mengen bedeckt ist.

2. *Reine Metalle mit der Oberfläche, die von Schmiermitteln befreit ist, jedoch eine Oxidschicht aufweist.* In diesem Fall kann man davon ausgehen, dass die Adhäsion stark ist und die auf Druck und Zug beanspruchten Flächen in etwa gleich sind. Die tragende Funktion der Mikrokontakte bleibt erhalten aufgrund des Unterschieds der plastischen Eigenschaften auf Zug und Druck. Für den Reibungskoeffizienten ergibt sich die Abschätzung

$$\mu \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{3 - \zeta} \right) \quad (X.17)$$

Für $\zeta = 1 \div 2$ ergeben sich Reibungskoeffizienten im Intervall $\mu \approx 0,6 \div 1,2$. Solche Reibungskoeffizienten haben reine Metalle mit dem kubischen Kristallgitter (z.B. Fe, Al, Cu, Ni, Pb, Sn). Bei Metallen mit hexagonalem Gitter (Mg, Ti, Zn, Cd) liegt der Reibungskoeffizient bei 0,6.

3. *Reine Metalle mit einer dünnen Schicht eines weichen Metalls* (z.B. Blei oder Zinn auf Stahl, Kupfer, Silber,...). Solange die Schicht ausreichend dünn ist (ca. 100 Nanometer),

gilt die Gleichung (X.11), wobei σ_0 die Härte des härteren Werkstoffes und τ_c die Schubfestigkeit des weicheren Metalls sind. Der Reibungskoeffizient ist in diesem Fall kleiner als bei reinen Metallen und kann 0,1 und kleiner werden.

4. *Mehrphasige Stoffe.* Die meisten Materialien, die in tribologischen Anwendungen eingesetzt werden, sind keine reinen Metalle, sondern mehrphasige Legierungen, die in der Regel aus einer härteren Matrix und weicheren Einschlüssen bestehen. Diese Struktur haben zum Beispiel Zinn- und Bleibronzen, die als Lagerwerkstoffe eingesetzt werden. Man geht davon aus, dass die Funktion dieser Legierungen auf der Extrusion des weicheren Metalls basiert, der auf der Gleitoberfläche eine dünne Schicht bildet und nach dem im Fall 3 beschriebenen Mechanismus die Reibung reduziert.

5. *Oberflächen, die nur elastisch deformiert werden.* Im Fall von Diamant oder amorphen Kohlenstoffbeschichtungen ist die Gleichung (X.11) nicht anwendbar, da die Oberflächen rein elastisch deformiert werden.

X.10 Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Temperatur

Da das Verhältnis der Scherfestigkeit zur Härte von der Temperatur nicht abhängt, hängt auch der Reibungskoeffizient zwischen reinen Metallen nicht von der Temperatur ab. Das gilt solange sich die Bedingungen nicht so ändern, dass ein Übergang zwischen den oben beschriebenen Kategorien stattfindet. In Anwesenheit von dünnen, weichen Schichten auf der harten Grundfläche steigt der Reibungskoeffizient schnell wenn die Schmelztemperatur der Schicht erreicht wird. Bei metallischen Schichten geschieht das abrupt bei der Schmelztemperatur des weicheren Metalls. Bei Schmierfetten oder den auf der Gleitoberfläche gebildeten Metallseifen ist das die Erweichungstemperatur des Schmierfettes oder der Metallseife.

Unter den „normalen Bedingungen“, die im vorigen Abschnitt unter „Fall 1“ beschrieben sind, hängt der Reibungskoeffizient bei vielen metallischen Reibpaarungen bis ca. 150°C nur schwach von der Temperatur ab. Zwischen 200°C und 300°C tritt ein Steilanstieg auf. Dabei kann der Reibungskoeffizient auf den doppelten oder dreifachen Wert steigen. Bei noch höheren Temperaturen bleibt es fast konstant oder steigt mit einer kleineren Steigung an. Ein typischer Temperaturverlauf ist in *Abbildung X.10* gezeigt. Offenbar handelt es sich dabei um Erweichung oder Zerlegung der Fremdschichten, typischerweise Reste von Fetten.

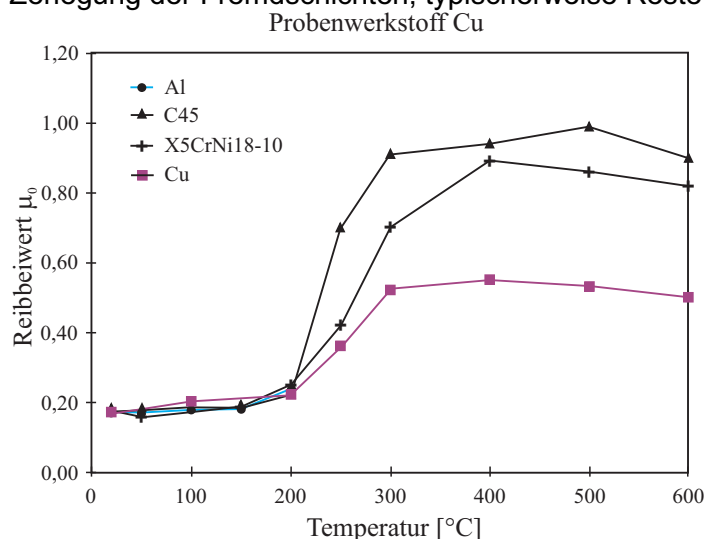


Abbildung X.10. Haftreibungskoeffizient als Funktion der Temperatur für Proben aus Kupfer gegen Aluminium, Stahl und Kupfer. Daten aus: Martin Köhler. Beitrag zur Bestimmung des Coulombschen Haftreibungskoeffizienten zwischen zwei metallischen Festkörpern. Cuvillier Verlag Göttingen, 2005

Für den Tieftemperaturbereich ist ein konstanter, relativ kleiner und von der Werkstoffkombination nur schwach abhängender Reibungskoeffizient in der Größenordnung 0,16-0,22 charakteristisch. Dieser Bereich wird durch die Bedingungen gekennzeichnet, bei denen die Oxidschicht bzw. weitere Fremdschichten an der Oberfläche des Metalls im Reibungsprozess erhalten bleiben. Der Bereich der höheren Reibungskoeffizienten ist für die Bedingungen charakteristisch, bei denen Metallkontakt auftritt.

Aufgaben⁵

Aufgabe 1: Selbstsperrung. An einer auf einer vertikalen Stange verschiebbaren Führungsbuchse ist ein Arm befestigt, an dem ein Gewicht verschiebbar angeordnet ist (Abbildung X.11a). Solange sich das Gewicht weit genug außen befindet, wird es durch die Reibungskräfte, die in den Eckpunkten der Führungsbuchse auftreten, gehalten (Selbstsperrung). Zu bestimmen ist die Bedingung für die Selbstsperrung.

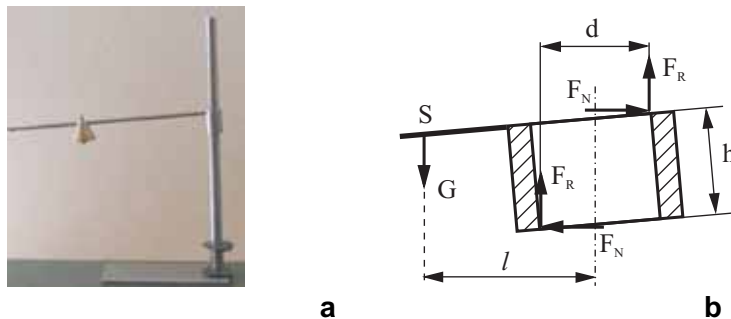


Abbildung X.11. Einfaches, selbstsperrendes System mit zugehörigen Freischnitt

Lösung: Aus dem Kräftegleichgewicht in horizontaler Richtung folgt, dass beide Reaktionskräfte F_N in den Eckpunkten betragsmäßig gleich groß sind (so sind sie in der Abbildung X.11b eingezeichnet). An der Grenze zwischen Gleiten und Selbstsperrung erreicht die Reibungskraft ihren maximalen Wert $F_s = \mu_s F_N$. Aus dem Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung

$$2\mu_s F_N - G = 0$$

und dem Momentengleichgewicht bezüglich des Zentrums der Buchse

$$Gl - 2F_N \frac{h}{2} = 0$$

folgt für die kritische Länge:

$$l_c = \frac{h}{2\mu_s}.$$

⁵ In den Aufgaben zu diesem Kapitel wird das Coulombsche Reibungsgesetz in seinen einfachsten Formen (X.1) und (X.2) benutzt.

Aufgabe 2: Seitliche Kraft. Ein Auto wird durch die Reibungskraft zwischen den Rädern und der Straße beschleunigt oder abgebremst. Die Reibungskraft F_R soll dabei kleiner sein als die maximale Haftreibung⁶: $F_R < F_s = \mu_k F_N$. Zu bestimmen ist die seitliche Kraft F_{\perp} , bei der das Auto seitlich zu rutschen beginnt.

Lösung: Sowohl die abbremsende Kraft als auch die seitliche Kraft sind Komponenten der Reibungskraft im Rollkontakt. Volles Gleiten setzt ein, wenn $F_R^2 + F_{\perp}^2 > F_s^2$. Daraus folgt

$$F_{\perp} > \sqrt{(\mu_k F_N)^2 - F_R^2}.$$

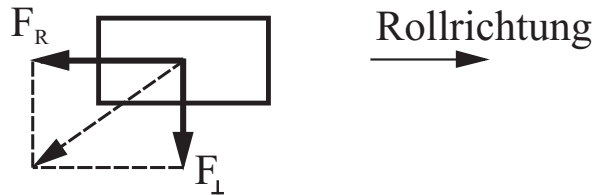


Abbildung X.12. Resultierende Reibungskraft im Rollkontakt

Aufgabe 3: Bei Vollbremsung eines Autos blockieren die Räder und gleiten mit einer Geschwindigkeit v_0 über die Straße. Welche seitliche Geschwindigkeit wird eine kleine seitlich wirkende Kraft F_{\perp} verursachen?

Lösung: Der Betrag der Gleitreibungskraft hängt von der Geschwindigkeit nicht ab, ihre Richtung ist aber genau entgegengesetzt zur Gleitrichtung. Daraus folgt: $\frac{v_{\perp}}{v_0} \approx \frac{F_{\perp}}{\mu_k F_N}$ und

$$v_{\perp} \approx F_{\perp} \left(\frac{v_0}{\mu_k F_N} \right).$$

Die seitliche Geschwindigkeit ist proportional zur seitlichen Kraft.

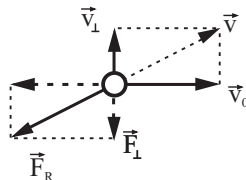


Abbildung X.13. Kraft- und Geschwindigkeitskomponenten eines gleitenden Rades, welches durch eine kleine seitlich wirkende Kraft F_{\perp} beansprucht wird

Aufgabe 4: Seilreibung. Ein Seil wird um einen kreisförmigen Poller geschlungen (Abbildung X.14 a). Der Kontaktwinkel zwischen Seil und Poller betrage $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$. Das Seil wird an einem Ende mit der Kraft \vec{F}_2 gezogen. Zu bestimmen ist die Kraft F_1 , die notwendig ist, um es von der Bewegung abzuhalten.

Lösung: Betrachten wir ein infinitesimal kleines Element des Seils (Abbildung X.14 b). Das Kräftegleichgewicht in der Längsrichtung des Elementes lautet

⁶ Beim Rollen wird die maximale Reibungskraft durch den Gleitreibungskoeffizienten bestimmt $F_s = \mu_k F_N$, da es sich hier um einen Übergang von partiellem zum vollständigen Gleiten handelt.

$$F(\varphi + d\varphi) - F(\varphi) - dF_R = 0$$

oder

$$\frac{dF}{d\varphi} d\varphi - dF_R = 0.$$

In der senkrechten Richtung gilt

$$dN - Fd\varphi = 0.$$

Hier sind: dN : die auf das Element wirkende Reaktionskraft; dF_R : die auf das Element wirkende Reibungskraft. Das Seil gleitet gerade noch nicht, wenn die Reibungskraft ihren Maximalwert $dF_R = \mu dN$ erreicht. Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich

$$\frac{dF}{d\varphi} = \mu F.$$

Nach der Trennung der Variablen $dF / F = \mu d\varphi$ und Integration erhalten wir $\ln F \Big|_{F_1}^{F_2} = \mu(\varphi_2 - \varphi_1) = \mu\alpha$. Daraus folgt

$$F_2 = F_1 e^{\mu\alpha} \text{ bzw. } F_1 = F_2 e^{-\mu\alpha}.$$

Numerisches Beispiel: Für $\mu = 0,4$, $\alpha = 2\pi$ (eine volle Schleife) ergibt sich $F_2 \approx 12 \cdot F_1$. Für zwei Umwindungen hätten wir $F_2 \approx 152 \cdot F_1$.

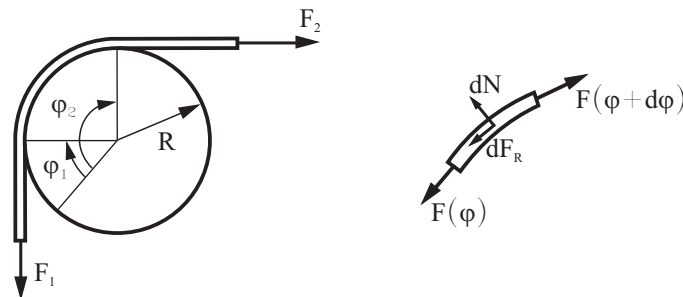


Abbildung X.14. Ein um einen Poller geschlungenes Seil, sowie Freischnitt eines infinitesimalen Seilstücks

Aufgabe 5: Ein zylindrisches Gefäß (Radius R) ist mit Sand gefüllt. Der Reibungskoeffizient des Sandes mit der Wand sei μ . Zu bestimmen ist der Druck im Sand als Funktion der Höhe.

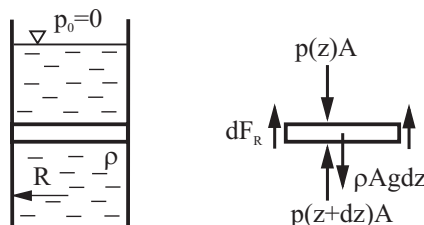


Abbildung X.15. Infinitesimaler Ausschnitt aus der Sandseule

Lösung: Falls der Reibungskoeffizient nicht zu groß ist, ist der Druck im Sand "fast isotrop" (wie in einer Flüssigkeit). Betrachten wir in dieser Näherung das Kräftegleichgewicht an einem infinitesimalen Ausschnitt aus der Sandsäule (Abbildung X.15):

$$\rho g \pi R^2 dz + (p(z) - p(z + dz)) \pi R^2 - dF_R = 0$$

oder

$$\rho g \pi R^2 dz - \frac{dp}{dz} dz \cdot \pi R^2 - dF_R = 0.$$

Die Reibungskraft ergibt sich aus dem Coulombschen Gesetz zu $dF_R = \mu p 2\pi R dz$. Aus den beiden Gleichungen erhält man

$$\rho g - \frac{dp}{dz} - 2 \frac{\mu p}{R} = 0.$$

Trennung der Variablen $dz = \frac{dp}{(\rho g - 2\mu p / R)}$ und Integration ergeben

$$p = \frac{\rho g R}{2\mu} \left(1 - e^{-\frac{2\mu z}{R}} \right).$$

Bei großen z erreicht der Druck den Sättigungswert $p_\infty = \rho g R / 2\mu$.

Aufgabe 6: Zur Steuerung der Vorderräder eines Autos werden Querlenker eingesetzt. Im ersten Schritt wird der Querlenker durch Tiefziehen aus einem Blech hergestellt (Abbildung X.16 a). Das Gummimetall-Lager (Abbildung X.16 b) wird im zweiten Schritt in den Querlenker eingepresst (Abbildung X.16 c). Der Automobilhersteller verlangt für seine Qualitätssicherung eine Mindestauspresskraft von 5,5 kN. Zu berechnen ist die Auspresskraft. Welche Faktoren beeinflussen die Auspresskraft? Benutzen Sie die folgenden Daten: die Höhe der zylindrischen Öse $L = 2$ cm, Radius der Öse $R = 1,6$ cm, Dicke des Blechs $t = 1,6$ mm, Fließgrenze des Blechs $\sigma_c = 300$ MPa, Reibungskoeffizient $\mu = 0,16$.



Abbildung X.16. (a) Querlenker mit Blechdurchzug, (b) Einseitig geschlitztes Gummi-Metall-Lager, (c) Fertiger Querlenker mit eingepresstem Lager

Lösung: Die radiale, auf die zylindrische Öse des Querlenkers wirkende Spannung σ_r , verursacht eine Zugspannung σ_φ im Blech (Abbildung X.17). Den Zusammenhang zwischen diesen Spannungen gibt die *Kesselformel* $\sigma_\varphi = \sigma_r R / t$ an. Beim Einpressen des Lagers wird sich das Blech plastisch deformieren: $\sigma_\varphi = \sigma_c$.

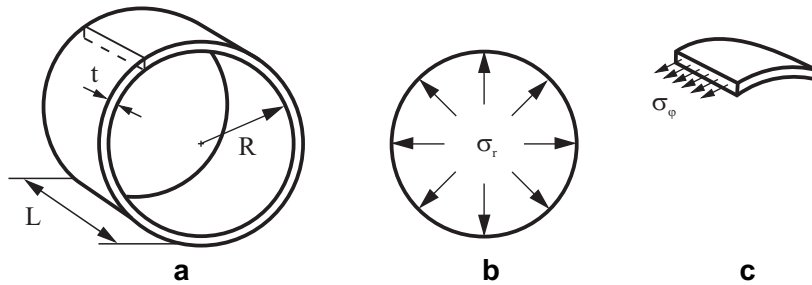


Abbildung X.17. (a) Dünnwandiger Zylinder (b) konstante Radialspannungen verursacht durch die Flächenpressung (c) Umfangsspannung σ_ϕ durch einen geeigneten Schnitt sichtbar gemacht

Für die radiale Spannung ergibt sich daher

$$\sigma_r = \sigma_c \frac{t}{R}.$$

Die maximale Haftreibung berechnet sich durch Multiplikation dieser Spannung mit der Fläche $2\pi RL$ der Öse und mit dem Reibungskoeffizienten:

$$F_{\text{Auspress}} = 2\pi L \mu \sigma_c t.$$

Für die in der Aufgabenstellung angegebenen Parameterwerte ergibt sich für die Auspresskraft $F_{\text{Auspress}} \approx 9,6 \text{ kN}$.

Aufgabe 7: Thermisches Kriechen. Auf eine auf einem Untergrund mit dem Reibungskoeffizienten μ liegende Platte der Länge L wirkt in horizontaler Richtung eine Kraft F , die kleiner ist als die Gleitreibungskraft. Wird die Platte erwärmt, so dehnt sie sich aufgrund der angelegten Kraft F relativ zum Untergrund nicht symmetrisch. Wird die Temperatur wieder auf den ursprünglichen Wert gebracht, so zieht sie sich wieder zusammen. Zu bestimmen ist die Verschiebung der Platte nach einem vollen thermischen Zyklus

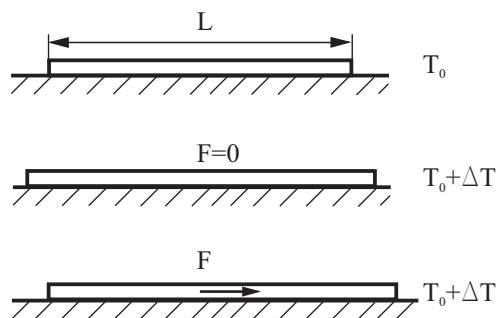


Abbildung X.18

Lösung: Wir nehmen an, dass die Platte ausreichend starr ist. Wird die Platte erwärmt, so dehnt sie sich relativ zum Untergrund um den Betrag $\Delta L = \alpha \Delta T L$ aus, und zwar symmetrisch in beide Richtungen, so dass ihr Schwerpunkt an der gleichen Stelle bleibt. Wirkt auf die Platte während der Erwärmung eine Kraft F in horizontaler Richtung, so wird sich die Platte asymmetrisch bewegen. Statt des Schwerpunktes wird jetzt der Punkt ruhen, der sich im Abstand Δl links davon befindet, denn der Anteil der Reibungskraft,

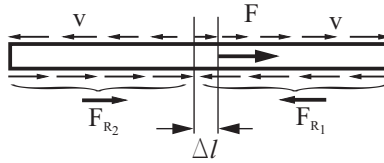


Abbildung X.19

der nach rechts wirkt, muss größer sein als der Anteil, der nach links wirkt, damit die Resultierende mit F gerade im Gleichgewicht ist. Da die Reibungskraft entgegengesetzt zur Richtung der Bewegung ist, muss ein größerer Anteil der Reibungskraft nach links als nach rechts zeigen. Die Gleichgewichtsbedingung während des Erwärmens lautet also:

$$F - \mu mg \left(\frac{L/2 + \Delta l}{L} \right) + \mu mg \left(\frac{L/2 - \Delta l}{L} \right) = 0.$$

Daraus folgt

$$\Delta l = \frac{F}{\mu mg} \frac{L}{2}.$$

Der Schwerpunkt verschiebt sich somit während der Erwärmung um

$$u_s = \varepsilon_{th} \Delta l = \frac{FL}{2\mu mg} \alpha \Delta T.$$

Während der Abkühlung bewegt sich der Schwerpunkt in der *gleichen* Richtung um den *gleichen* Betrag: Der ruhende Punkt muss nun *rechts* vom Schwerpunkt liegen, da Ausdehnungsrichtung und Richtungen der Reibungskräfte sich gerade umkehren. Die gesamte Verschiebung während des ganzen Zyklus' ist somit gleich

$$u_{ges} = \frac{FL}{\mu mg} \alpha \Delta T.$$

Die Verschiebung ist proportional zur Kraft – auch bei sehr kleinen Kräften. Ähnliche Prozesse an den Grenzen zwischen Phasen mit verschiedenen thermischen Ausdehnungskoeffizienten sind die Ursache für das *thermozyklische Kriechen* von mehrphasigen Werkstoffen und Verbundwerkstoffen.

Aufgabe 8: Zu bestimmen ist der statische Reibungskoeffizient auf einer gewellten Oberfläche mit der maximalen Steigung $\mu_1 = \tan \theta_1$ (Abbildung X.20) in Anwesenheit einer „mikroskopischen“ Reibung, die durch den Reibungskoeffizienten μ_0 charakterisiert wird.

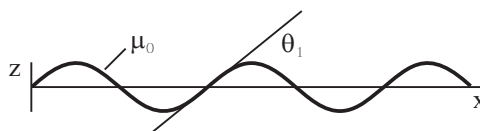


Abbildung X.20

Lösung: Aufgrund des in Abbildung X.21 gezeigten Freischnitts können wir für den kritischen Zustand die folgenden Gleichgewichtsgleichungen (für die Richtungen x' und z') aufstellen:

$$F_N \cos \theta_1 + F \sin \theta_1 = R,$$

$$F_N \sin \theta_1 + \mu_0 R = F \cos \theta_1.$$

Daraus folgt

$$\mu = \frac{F}{F_N} = \frac{\mu_0 + \mu_1}{1 - \mu_0 \mu_1}.$$

Zu bemerken ist, dass diese „Superpositionsregel“ für die Reibungskoeffizienten verschiedener Skalen eine einfache geometrische Interpretation hat und bedeutet, dass die Reibungswinkel auf verschiedenen Skalen summiert werden. In der Tat, indem wir $\mu_1 = \tan \theta_1$, $\mu_0 = \tan \theta_0$ und $\mu = \tan \theta$ mit $\theta = \theta_1 + \theta_2$ schreiben, kommen wir zu dem gleichen Ergebnis

$$\mu = \tan \theta = \frac{\sin(\theta_0 + \theta_1)}{\cos(\theta_0 + \theta_1)} = \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_1 + \cos \theta_0 \sin \theta_1}{\cos \theta_0 \cos \theta_1 - \sin \theta_0 \sin \theta_1} = \frac{\tan \theta_0 + \tan \theta_1}{1 - \tan \theta_0 \cdot \tan \theta_1} = \frac{\mu_0 + \mu_1}{1 - \mu_0 \mu_1}$$

Wir können daher die folgende allgemeine Regel für die Superposition der Reibungskoeffizienten verschiedener Skalen formulieren:

$$\mu_{\text{gesamt}} = \tan \left(\sum_i \arctan \mu_i \right),$$

wobei μ_i die Reibungskoeffizienten auf verschiedenen räumlichen Skalen sind.

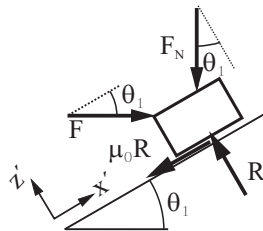
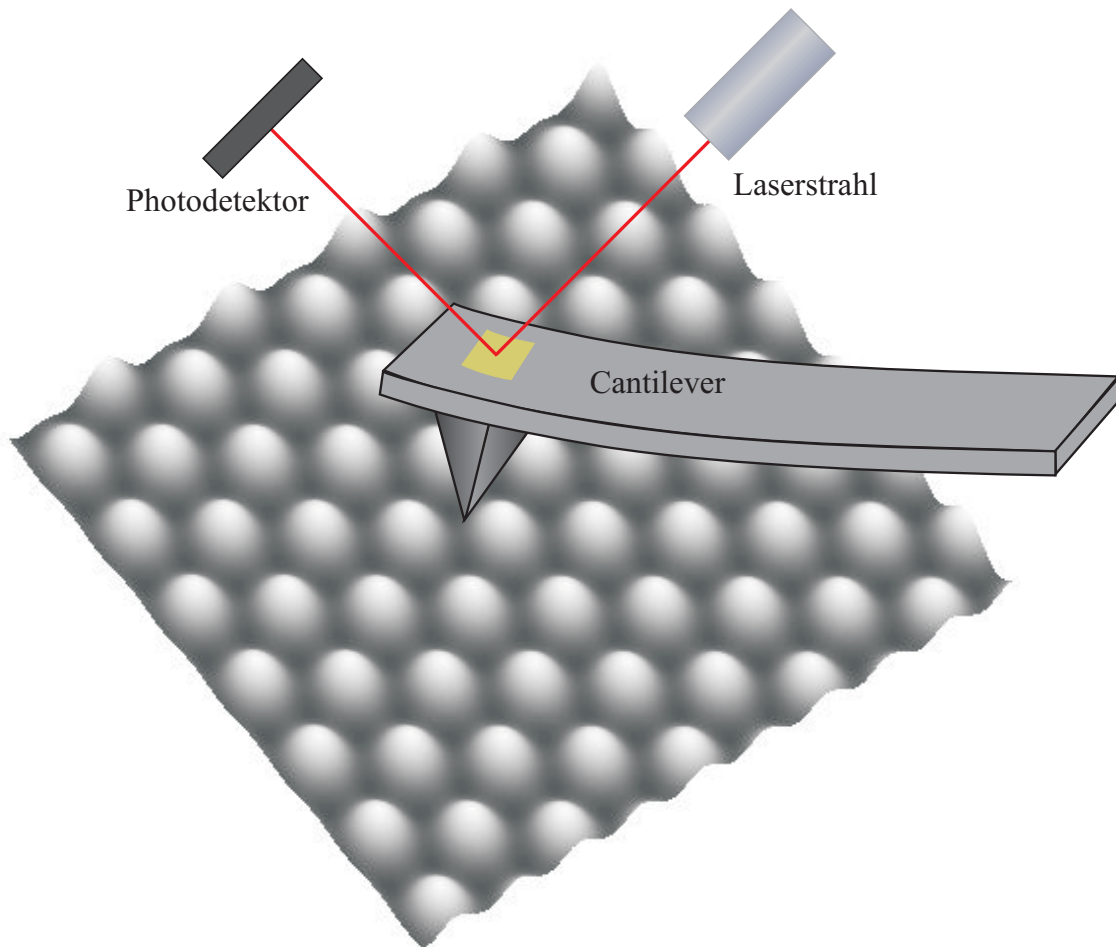


Abbildung X.21

XI DAS PRANDTL-TOMLINSON-MODELL FÜR TROCKENE REIBUNG



XI.1 Einführung

Die Entwicklung experimenteller Methoden zur Untersuchung von Reibungsprozessen auf atomarer Ebene und numerischer Simulationsmethoden haben in den letzten Jahrzehnten ein schnelles Anwachsen der Anzahl von Forschungsarbeiten im Bereich der Reibung von Festkörpern auf atomarer Skala hervorgerufen. Als Grundlage für viele Untersuchungen der Reibungsmechanismen auf atomarer Skala kann das als „Tomlinson-Modell“ bekannte einfache Modell benutzt werden. Es wurde von Prandtl 1928 zur Beschreibung plastischer Deformation in Kristallen vorgeschlagen¹. Das in diesem Zusammenhang oft zitierte Paper von Tomlinson² enthält das „Tomlinson-Modell“ nicht und ist einer Begründung für den adhäsiven Beitrag zur Reibung gewidmet³. Wir werden dieses

¹ Prandtl L.: Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper. ZAMM, 1928, Vol. 8, p. 85-106

² Tomlinson G.A.: A molecular theory of friction. The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science, 1929, Vol. 7 (46 Supplement), p. 905.)

³ Dies beweist die Richtigkeit der folgenden Definition der Wissenschaft:

*Die Wissenschaft, sie ist und bleibt,
Was einer ab vom andern schreibt.
Doch trotzdem ist, ganz unbestritten,
Sie immer weiter fortgeschritten...*
Eugen Roth

Modell im Weiteren als „Prandtl-Tomlinson-Modell“ bezeichnen. Prandtl betrachtete eine eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes in einem periodischen Potential mit der Wellenzahl k und einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung unter der Wirkung der äußeren Kraft F ⁴ (Abbildung XI.1):

$$m\ddot{x} = F - \eta\dot{x} - N \sin kx . \quad (\text{XI.1})$$

x ist hier die Koordinate des Körpers, m seine Masse, F die auf den Körper wirkende äußere Kraft, η der Dämpfungskoeffizient, N die Amplitude der periodischen Kraft und k die Wellenzahl.



Abbildung XI.1. Prandtl-Tomlinson-Modell: Ein Massenpunkt in einem periodischen Potential

Das Modell von Prandtl-Tomlinson beschreibt viele wesentliche Eigenschaften der trockenen Reibung. In der Tat müssen wir an den Körper eine bestimmte Mindestkraft anlegen, damit eine makroskopische Bewegung überhaupt beginnen kann. Diese Mindestkraft ist makroskopisch gesehen nichts anderes als die Haftreibung. Ist der Körper in Bewegung und wird die Kraft zurückgenommen, so wird sich der Körper im Allgemeinen auch bei einer kleineren Kraft als der Haftreibungskraft bewegen, da er einen Teil der nötigen Energie dank seiner Trägheit aufbringen kann. Makroskopisch bedeutet dies, dass die Gleitreibung kleiner als die Haftreibung sein kann, was ebenfalls ein oft auftretendes Merkmal der trockenen Reibung ist. Die statische Reibungskraft im Modell (Abbildung XI.1) ist gleich N .

Der Erfolg des Modells, das in verschiedenen Variationen und Verallgemeinerungen in unzähligen Publikationen untersucht und zur Interpretation von zahlreichen tribologischen Vorgängen herangezogen wurde, beruht darauf, dass es ein minimalistisches Modell ist, welches die zwei wichtigsten Grundeigenschaften eines beliebigen Reibungssystems abbildet. Es beschreibt einen Körper unter der Wirkung einer periodischen konservativen Kraft mit einem Mittelwert Null in Kombination mit einer geschwindigkeitsproportionalen dissipativen Kraft. Ohne die konservative Kraft könnte es keine Haftung geben, ohne die Dämpfung kann sich keine makroskopische Reibungskraft ergeben. Die makroskopische Reibungskraft zu modellieren, ist aber das Hauptanliegen des Modells. Diese beiden notwendigen Eigenschaften sind im Prandtl-Tomlinson-Modell vorhanden. Das Prandtl-Tomlinson-Modell ist in diesem Sinne das einfachste brauchbare Modell eines tribologischen Systems. Im Grunde genommen ist das Prandtl-Tomlinson-Modell eine Umformulierung und eine weitere Vereinfachung der Vorstellungen von Coulomb über „Verzahnung“ von Oberflächen als Ursache für die Reibung.

Selbstverständlich kann das Modell nicht alle Feinheiten eines realen tribologischen Systems abbilden. Zum Beispiel gibt es in diesem Modell keine Änderung des Oberflächenpotentials, die durch Verschleiß verursacht wird. Zu bemerken ist aber, dass es grundsätzlich möglich ist, durch Erweiterung des Modells auch plastische Deformationen in Betracht zu ziehen. In diesem Zusammenhang soll noch einmal erwähnt werden, dass das Modell 1928 von L. Prandtl gerade zur Beschreibung plastischer Deformation in Kristallen vorgeschlagen wurde.

In diesem Kapitel untersuchen wir das Prandtl-Tomlinson-Modell sowie einige seiner Anwendungen und Verallgemeinerungen.

⁴ Auf diese Weise lässt sich z.B. die Bewegung der Spitze eines Atomkraftmikroskops über eine kristalline Oberfläche beschreiben.

XI.2 Grundeigenschaften des Prandtl-Tomlinson-Modells

Befindet sich der Körper in Ruhe, und wird an ihn eine Kraft F angelegt, so verschiebt sich sein Gleichgewicht in den Punkt x , der der Gleichung

$$F = N \sin kx \quad (\text{XI.2})$$

genügt. Diese Gleichung hat nur eine Lösung wenn $F < N$ ist. Die statische Reibungskraft in diesem Modell ist daher gleich

$$F_s = N. \quad (\text{XI.3})$$

Bei einer größeren Kraft ist kein Gleichgewicht möglich, und der Körper versetzt sich in eine makroskopische Bewegung⁵. Jede makroskopische Bewegung des Körpers in diesem Modell ist vom mikroskopischen Gesichtspunkt die Superposition einer Bewegung mit einer konstanten Geschwindigkeit und von periodischen Schwingungen, wie in der Abbildung XI.2a gezeigt. Auf diesem Bild sind Ergebnisse einer numerischen Integration der Gleichung (XI.1) dargestellt. Die tangentielle Kraft änderte sich langsam von Null bis zu einem maximalen Wert größer als die statische Reibungskraft und nahm danach ab. Die Kurve zeigt die momentane Geschwindigkeit als Funktion der momentanen Kraft. Nachdem die kritische Kraft erreicht wird, beginnt sich der Körper mit einer endlichen makroskopischen Geschwindigkeit zu bewegen. Bei der Abnahme der Kraft bleibt der Körper in Bewegung auch bei Kräften kleiner als die Haftreibungskraft. Bei einer bestimmten kritischen Geschwindigkeit hört die makroskopische Bewegung auf, der Körper macht einige Schwingungen in einem Potentialminimum und kommt zum Stillstand.

Auf der makroskopischen Skala empfinden wir die mikroskopischen Schwingungen nicht. Die oben beschriebene Bewegung stellt vom makroskopischen Gesichtspunkt einen quasistationären Reibungsprozess dar. Die Abhängigkeit der mittleren Geschwindigkeit von der angelegten Kraft wird vom makroskopischen Beobachter als makroskopisches Reibungsgesetz empfunden (Abbildung XI.2b).

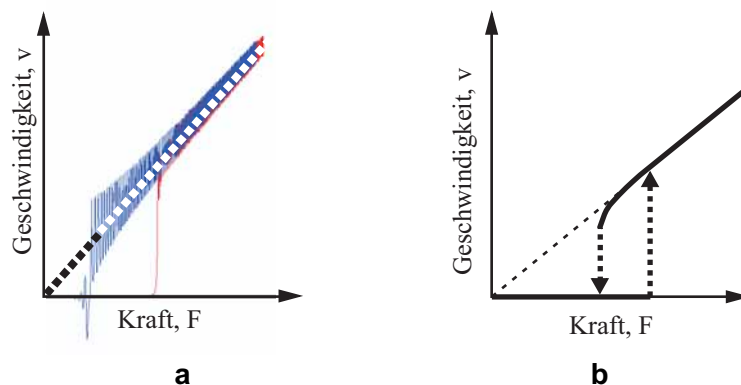


Abbildung XI.2. (a) Abhängigkeit der momentanen Geschwindigkeit von der (linear mit der Zeit steigenden) Kraft im Tomlinson-Modell. (b) Makroskopisches Reibungsgesetz: Abhängigkeit der mittleren Geschwindigkeit von der Kraft

Grenzfall kleiner Dämpfung

Ist die Dämpfung $\eta = 0$, und wurde der Körper einmal in Bewegung gesetzt, so wird er sich unbegrenzt auch in Abwesenheit der äußeren Kraft ($F = 0$) weiter bewegen. Dabei gilt der Energieerhaltungssatz

⁵ Als „makroskopisch“ bezeichnen wir hier die Bewegung eines Körpers auf der räumlichen Skala viel größer als die Potentialperiode. Die durch die Potentialperiode bestimmte räumliche Skala bezeichnen wir dagegen als „mikroskopisch“.

$$E_0 = \frac{mv^2}{2} - \frac{N}{k} \cos kx = \text{konst}, \quad \text{für } \eta = 0, \quad F=0. \quad (\text{XI.4})$$

Für die Geschwindigkeit als Funktion der Koordinate folgt in diesem Fall

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E_0 + \frac{N}{k} \cos kx \right)}, \quad \text{für } \eta = 0, \quad F=0. \quad (\text{XI.5})$$

In Anwesenheit einer kleinen Dämpfung muss eine kleine Kraft angelegt werden, um eine stationäre Bewegung aufrechterhalten zu können. Die Bewegung ist stationär, wenn die durch die äußere Kraft F auf einer Periode $a = 2\pi / k$ geleistete Arbeit Fa gleich dem Energieverlust $\int_0^T \eta v^2(t) dt$ ist:

$$\frac{2\pi F}{k} = \int_0^T \eta v^2(t) dt = \int_0^a \eta v(x) dx = \eta \int_0^a \sqrt{\frac{2}{m} \left(E_0 + \frac{N}{k} \cos kx \right)} dx. \quad (\text{XI.6})$$

Die kleinste Kraft F_1 , bei der eine makroskopische Bewegung noch besteht, wird durch (XI.6) mit $E_0 = N / k$ gegeben:

$$\frac{F_1}{N} = \frac{4}{\pi} \frac{\eta}{\sqrt{mkN}}. \quad (\text{XI.7})$$

Die Dämpfung, bei der die Gleitreibungskraft gleich der Haftreibungskraft wird, hat die Größenordnung

$$\frac{\eta}{\sqrt{mkN}} \approx 1 \quad (\text{XI.8})$$

und kennzeichnet die Grenze zwischen dem betrachteten Fall der kleinen Dämpfung (*untergedämpftes System*) und dem Fall der großen Dämpfung (*übergedämpftes System*).

Grenzfall großer Dämpfung

Bei großer Dämpfung kann man den Trägheitsterm in (XI.1) vernachlässigen:

$$0 = F - \eta \dot{x} - N \sin kx. \quad (\text{XI.9})$$

Man spricht von einer *übergedämpften* Bewegung. Die Bewegungsgleichung ist in diesem Fall eine Differentialgleichung erster Ordnung; sie kann in der Form

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{F}{\eta} - \frac{N}{\eta} \sin kx \quad (\text{XI.10})$$

umgeschrieben werden. Eine räumliche Periode wird in der Zeit

$$T = \int_0^{2\pi/k} \frac{dx}{\frac{F}{\eta} - \frac{N}{\eta} \sin kx} = \frac{\eta}{kN} \int_0^{2\pi} \frac{dz}{\frac{F}{N} - \sin z} = \frac{\eta}{kN} \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{F}{N}\right)^2 - 1}} \quad (\text{XI.11})$$

durchlaufen. Die mittlere Gleitgeschwindigkeit ist daher gleich

$$\bar{v} = \frac{a}{T} = \frac{\sqrt{F^2 - N^2}}{\eta}. \quad (\text{XI.12})$$

Für die Kraft als Funktion der mittleren Geschwindigkeit ergibt sich

$$F = \sqrt{N^2 + (\eta\bar{v})^2} . \quad (\text{XI.13})$$

Diese Abhängigkeit ist in der Abbildung XI.3 dargestellt.

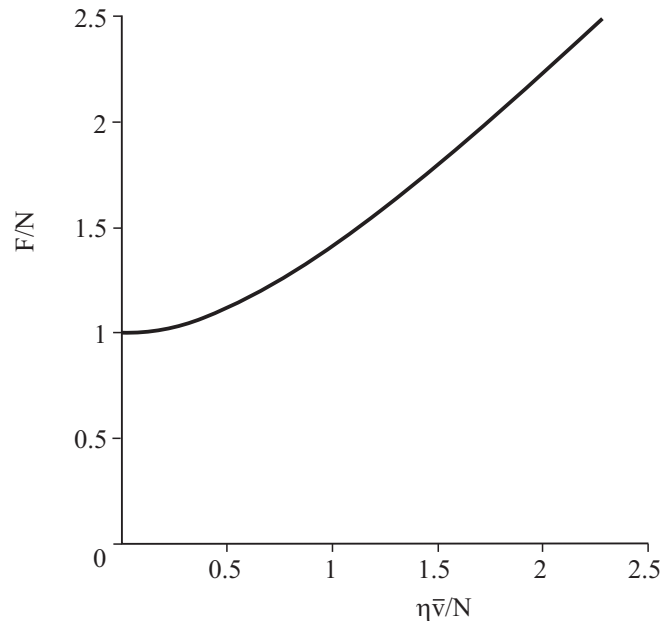


Abbildung XI.3/ Das Reibungsgesetz für das Tomlinson-Modell im übergedämpften Fall

Das „Phasendiagramm“ für das Prandtl-Tomlinson-Modell

Um die Eigenschaften der Prandtl-Tomlinson-Gleichung bei beliebigen Parametern zu untersuchen, führen wir in (XI.1) die dimensionslosen Variablen

$$x = \xi\tilde{x}, \quad t = \tau\tilde{t} \quad (\text{XI.14})$$

ein. Die Bewegungsgleichung nimmt daraufhin die Form

$$\frac{m\xi}{N} \frac{\tilde{x}''}{\tau^2} = \frac{F}{N} - \frac{\eta\xi}{N} \frac{\tilde{x}'}{\tau} - \sin(k\xi\tilde{x}) \quad (\text{XI.15})$$

an, wobei mit dem Strich die Ableitung $\partial / \partial \tilde{x}$ bezeichnet wird.. Wir wählen

$$k\xi = 1, \quad \tau^2 \frac{N}{m\xi} = 1. \quad (\text{XI.16})$$

und bringen die Gleichung (XI.15) in die Form

$$\tilde{x}'' + \frac{\eta}{\sqrt{mkN}} \tilde{x}' + \sin \tilde{x} = \frac{F}{N}. \quad (\text{XI.17})$$

In den neuen Variablen enthält sie nur zwei dimensionslose Parameter

$$\kappa_1 = \frac{\eta}{\sqrt{mkN}}, \quad \kappa_2 = \frac{F}{N}. \quad (\text{XI.18})$$

Der Charakter der Bewegung in den dimensionslosen Koordinaten \tilde{x}, \tilde{t} hängt nur von der Lage des Systems auf der Parameterebene (κ_1, κ_2) ab. In der Abbildung XI.4 ist das „Phasenportrait“ des Systems dargestellt.

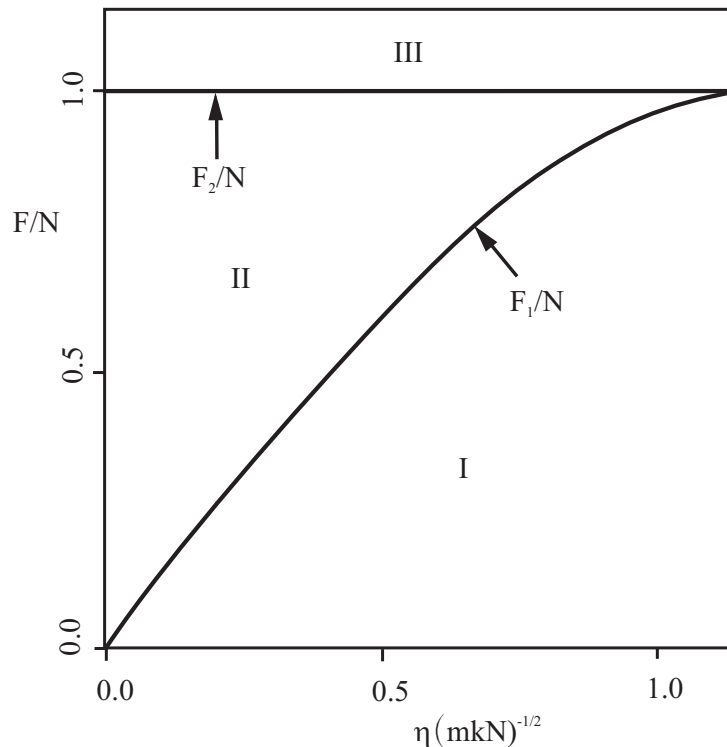


Abbildung XI.4. Zwei kritische Kräfte F_1 und F_2 als Funktion der Dämpfungskonstante

Für $\kappa_1 = \frac{\eta}{\sqrt{mkN}} < 1,193$ gibt es drei Kraftbereiche I, II und III, die durch die kritischen Kräfte F_1 und F_2 getrennt sind. Für $F > F_2$ gibt es keine Gleichgewichtslösungen und der Körper bewegt sich unbeschränkt. Nimmt aber die Kraft ab, so kommt der Körper zum Stillstand wenn $F < F_1$ wird. Zwischen den Bereichen, in denen entweder nur Ruhezustand ($F < F_1$) oder nur Bewegung ($F > F_2$) herrscht, gibt es einen Bereich der *Bistabilität*, in dem sich der Körper abhängig von der Vorgeschichte entweder im Ruhe- oder im Bewegungszustand befinden kann. Diesen Bereich der Bistabilität gibt es nicht, wenn die Dämpfung größer als ein kritischer Wert ist:

$$\frac{\eta}{\sqrt{mkN}} > 1,193. \quad (\text{XI.19})$$

Bei kleinen Dämpfungen ist die Kritische Kraft F_1 durch (XI.7) gegeben.

XI.3 Elastische Instabilität

Die einfachste Verallgemeinerung des Prandtl-Tomlinson-Modells ist in der Abbildung XI.5 dargestellt: Der Körper wird statt mit einer konstanten Kraft mit einer Feder (Steifigkeit c) verbunden, die an einem Gleitschlitten befestigt ist, welcher in horizontale Richtung bewegt wird. Dieses Modell eignet sich besser zur Beschreibung der Bewegung einer Spitze eines Atomkraftmikroskops als das ursprüngliche Modell von Tomlinson, denn es berücksichtigt auf die einfachste Weise die Steifigkeit des Armes des Atomkraftmikroskops.

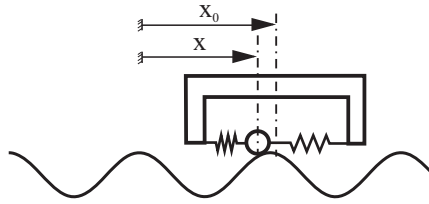


Abbildung XI.5. Ein Körper in einem periodischen Potential gezogen über eine Feder

Die Bewegungsgleichung lautet in diesem Fall

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = c(x_0 - x). \quad (\text{XI.20})$$

Wird der Schlitten langsam mit einer konstanten Geschwindigkeit gezogen, so befindet sich der Messenpunkt zu jedem Zeitpunkt in einer Gleichgewichtsposition $x(x_0)$, wobei $x_0 = x_0(t)$ die Koordinate des Schlittens ist. Der Mittelwert der Federkraft ist dabei gleich der (makroskopischen) Reibungskraft. Gibt es für jedes x_0 nur einen Gleichgewichtspunkt $x(x_0)$, so ist der Mittelwert der auf den Körper wirkenden Kraft *identisch Null*. Die gesamte potentielle Energie des Körpers ist gleich

$$U_{\text{ges}}(x, x_0) = U(x) + \frac{1}{2}c(x - x_0)^2. \quad (\text{XI.21})$$

Die Gleichgewichtsposition bestimmt sich aus der Bedingung

$$U'_{\text{ges}}(x, x_0) = U'(x) + c(x - x_0) = 0, \quad (\text{XI.22})$$

wobei mit dem Strich die Ableitung $\partial / \partial x$ bezeichnet wird. Der Mittelwert dieser Kraft (über der Zeit, oder – was in diesem Fall dasselbe ist – über x_0) ist gleich

$$\bar{F}_{\text{Unterlage}} = -\frac{1}{L} \int_0^L U' dx_0. \quad (\text{XI.23})$$

L ist hier eine räumliche Periode des Potentials. Indem wir die Gleichung (XI.22) differenzieren, erhalten wir

$$(U''(x) + c) dx = c dx_0. \quad (\text{XI.24})$$

Damit kann man in (XI.23) die Integration über dx_0 durch die Integration über dx ersetzen:

$$\bar{F}_{\text{Unterlage}} = -\frac{1}{L} \int_0^L U' \left(1 + \frac{U''}{c} \right) dx = -\frac{1}{L} \left[U(x) + \frac{U'^2(x)}{2c} \right]_0^L = 0. \quad (\text{XI.25})$$

Für die mittlere Kraft ergibt sich Null, da sowohl $U(x)$ als auch $U'^2(x)$ periodische Funktionen des Argumentes x sind. Daraus folgt, dass *die Reibungskraft unter diesen Bedingungen identisch Null* ist. Das gilt für beliebige periodische Potentiale.

Die Situation verändert sich wesentlich, wenn die Gleichgewichtskoordinate x eine nicht stetige Funktion von x_0 ist, so dass in einigen Punkten die Gleichung (XI.24) nicht erfüllt ist.

Als Beispiel untersuchen wir das in der Abbildung XI.5 gezeigte System mit einem Potential der Form

$$U(x) = -\frac{N}{k} \cos kx. \quad (\text{XI.26})$$

Die Gleichgewichtsbedingung (XI.22) nimmt die Form

$$-\sin kx = \frac{c}{N}(x - x_0) \quad (\text{XI.27})$$

an. Die Funktionen $-\sin kx$ und $\frac{c}{N}(x - x_0)$ sind in der Abbildung XI.6 für verschiedene x_0 gezeigt. Ihr Schnittpunkt gibt die Gleichgewichtskoordinate des Körpers an. Ist $c / Nk > 1$, so ist x eine stetige Funktion der Koordinate x_0 des Schlittens, was in der Abbildung XI.6b durch eine Beispielrechnung mit $c / Nk = 1,5$ illustriert wird. Ist dagegen die Steifigkeit der Feder kleiner als ein kritischer Wert:

$$c / Nk < 1, \quad (\text{XI.28})$$

so weist die Abhängigkeit der Gleichgewichtskoordinate von x_0 Sprünge auf (Abbildung XI.6d). In diesem Fall ist die zeitlich gemittelte Kraft nicht gleich Null. Die Abhängigkeit der Federkraft von der Koordinate x_0 für den Fall einer weichen Feder ($c / Nk = 0,1$) ist in Abbildung XI.7 dargestellt.

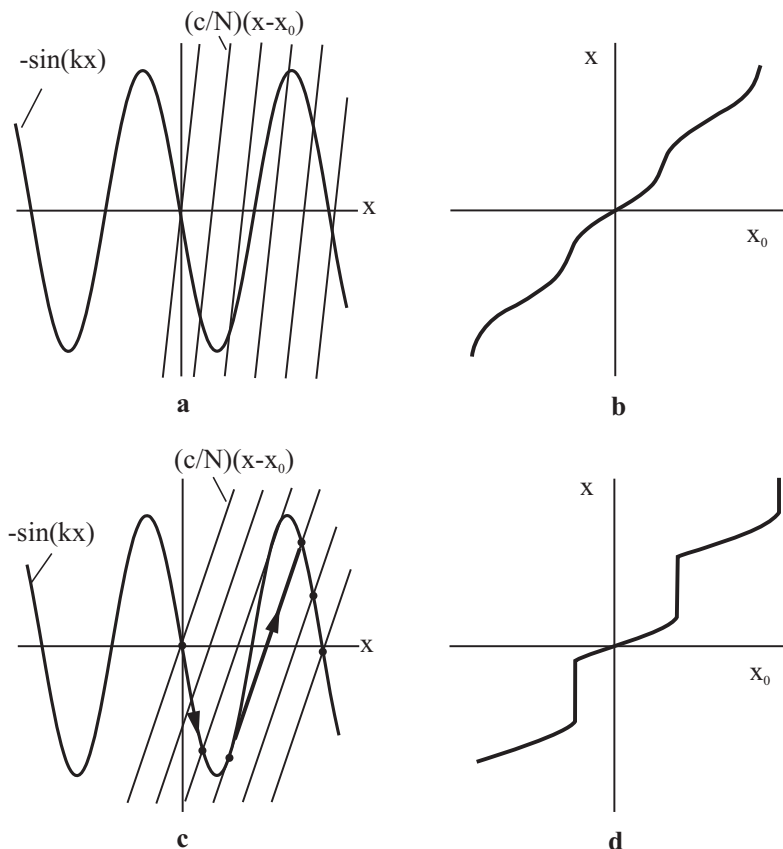


Abbildung XI.6. Die Funktionen $-\sin kx$ und $\frac{c}{N}(x - x_0)$ sind in (a) für $c / Nk = 1,5$ und in (c) für $c / Nk = 0,5$ aufgetragen. Wenn x_0 steigt, verschiebt sich die Gerade nach rechts. Die Gleichgewichtskoordinate hängt von x_0 stetig ab, wenn $c / Nk > 1$ ist

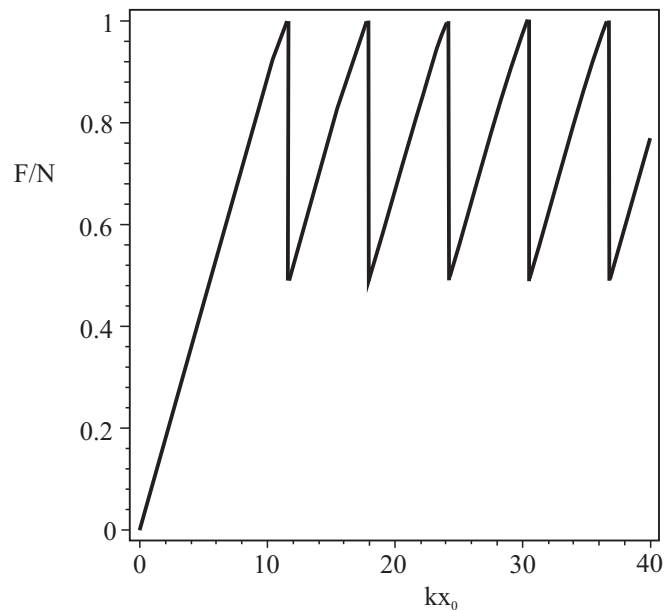


Abbildung XI.7. Abhängigkeit der auf den Körper im Modell (XI.20) wirkenden Kraft als Funktion der Koordinate des Gleitschlittens x_0 für den Fall $c / Nk = 0,1$. Wegen den auftretenden elastischen Instabilitäten ist der Mittelwert der Kraft nicht gleich Null

XI.4 Supergleiten

Experimentelle und theoretische Untersuchungen der letzten Jahre haben zur Schlussfolgerung geführt, dass es in einem „atomar dichten“ Kontakt zwischen zwei kristallinen Festkörpern keine Haftreibung geben kann, vorausgesetzt, dass die Perioden der Kristallgitter inkompatibel sind (wie in der Abbildung XI.8 gezeigt). Eine zusätzliche Voraussetzung ist, dass keine elastischen Instabilitäten im Kontakt der beiden Körper vorkommen. Die Ursache für die Abwesenheit der statischen Reibung besteht darin, dass sich die Atome eines der Kristallgitter aufgrund der Periodendifferenz in allen möglichen energetischen Zuständen relativ zu den Atomen des anderen Gitters befinden. Die Bewegung eines Körpers führt darum lediglich zu einer anderen Verteilung der Atome, die in den niedrig- und hochenergetischen Stellen sitzen, verursacht aber keine Veränderung der mittleren (makroskopischen) Energie des Körpers. Aus diesem Grunde kann bereits eine infinitesimale Kraft den Körper in Bewegung setzen.

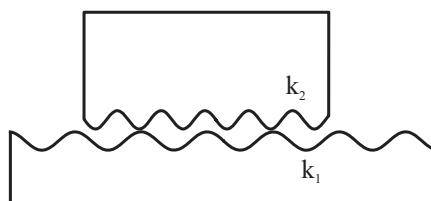


Abbildung XI.8. Kontakt von zwei periodischen Oberflächen (z.B. zwei Kristalle) mit verschiedenen Gitterperioden

Diese Überlegungen hängen natürlich nicht von der Skala ab. Sie gelten auch für einen Kontakt zwischen zwei makroskopisch strukturierten Flächen, z.B. zwischen einer gewellten Gummisohle und einer gewellten stählernen Platte. Solange die Perioden der Strukturen an beiden Flächen verschieden sind und keine elastischen Instabilitäten auftreten, geben diese Strukturen keinen Beitrag zur Haftreibung.

XI.5 Nanomaschinen: Konzepte für Mikro- und Nanoantriebe

Aufgrund der Tendenz zur Miniaturisierung mechanischer Geräte muss man sich die Frage über die theoretischen Grenzen der Miniaturisierung stellen. Ein wichtiger Aspekt ist dabei, ob es möglich ist, thermische oder chemisch gespeicherte Energie in die Energie einer gerichteten Bewegung auch auf der kleinsten, atomaren Skala umzusetzen. Als Vorbild für viele Untersuchungen über Nanoantriebe haben für viele Forscher die Bewegungsmechanismen der so genannten Motorproteinen entlang von periodisch aufgebauten Mikrofasern gedient. Alle Motorproteine haben eine ähnliche Struktur bestehend aus zwei "Köpfen" und einem Verbindungselement. Die Länge der Bindung kann durch Verbrennung von „Energimolekülen“ geändert werden. Bei der Erwärmung geht das Eiweißmolekül aus dem globularen Zustand in den Zustand eines statistischen Knäuels über, wodurch sich die Länge der Bindung vergrößert. Nach der Abkühlung nimmt die Bindung ihre ursprüngliche Länge wieder ein.

Ausgehend von diesem Bild basieren die meisten in der Literatur diskutierten Methoden zur Anregung einer gerichteten Bewegung von mikroskopischen oder molekularen Objekten auf einer Wechselwirkung zwischen einem zu bewegendem Objekt und einer heterogenen, in den meisten Fällen periodischen Unterlage. Das angetriebene Objekt kann aus einem oder mehreren Körpern bestehen, deren Abstände steuerbar sind. Die Unterlage kann sowohl asymmetrisch als auch symmetrisch sein. Bei nicht symmetrischen Unterlagen benutzt man das Prinzip „Knarre und Sperrhaken“⁶. Eine gerichtete Bewegung ist aber auch in symmetrischen Potentialen möglich.

Wir illustrieren in diesem Abschnitt die Ideen für Nanoantriebe am Beispiel einer „Dreikörpermaschine“. Aus mathematischer Sicht handelt es sich dabei um die Bewegung eines Mehrkörpersystems in einem (räumlich) periodischen Potential, was eine einfache Verallgemeinerung des Prandtl-Tomlinson-Modells darstellt.

Unten zeigen wir, dass eine gezielte Steuerung der Verbindungslängen zwischen den Körpern in einem periodischen Potential zu einer gerichteten Bewegung des Systems führt, bei der sowohl die Bewegungsrichtung, als auch die Bewegungsgeschwindigkeit, beliebig steuerbar sind.

Singuläre Punkte und Bifurkationsmenge einer Dreikörpermaschine

Betrachten wir drei Massenpunkte in einem periodischen Potential (Abbildung XI.9), die mit zwei masselosen Stäben der Längen l_1 und l_2 verbunden sind. Die potentielle Energie des Systems ist gleich

$$U = U_0 (\cos(k(x - l_1)) + \cos(kx) + \cos(k(x + l_2))), \quad (\text{XI.29})$$

wobei $k = 2\pi / a$ die Wellenzahl ist und a die räumliche Periode des Potentials. Die potentielle Energie kann in der Form

$$U = U_0 \sqrt{(\sin kl_1 - \sin kl_2)^2 + (1 + \cos kl_1 + \cos kl_2)^2} \cos(kx - \varphi) \quad (\text{XI.30})$$

umgeschrieben werden, wobei

$$\tan \varphi = \frac{\sin kl_1 - \sin kl_2}{1 + \cos kl_1 + \cos kl_2} \quad (\text{XI.31})$$

⁶ Auf Englisch "ratchet-and-pawl" principle. Diese „Maschinen“ werden daher oft „Ratchets“ genannt.

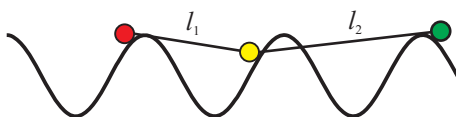


Abbildung XI.9. Dreikörpermaschine

Die Phase φ ist eine stetige und eindeutige Funktion der Parameter l_1 und l_2 auf einem beliebigen Weg in der Parameterebene (l_1, l_2) , solange dieser Weg nicht über die *singulären Punkte* geht, in denen die Amplitude des Potentials (XI.30) zu Null wird und die Phase (XI.31) nicht bestimmt ist. Die Lage dieser Punkte bestimmt sich aus den Bedingungen

$$\sin kl_1 - \sin kl_2 = 0 \quad (\text{XI.32})$$

und

$$1 + \cos kl_1 + \cos kl_2 = 0. \quad (\text{XI.33})$$

Daraus folgt

$$kl_1 = \pi \pm \pi / 3 + 2\pi n, \quad kl_2 = \pi \pm \pi / 3 + 2\pi m, \quad (\text{XI.34})$$

wobei m und n ganze Zahlen sind. Die Lage der singulären Punkte auf der (l_1, l_2) -Ebene ist in der Abbildung XI.10 gezeigt. Alle diese Punkte kann man durch periodische Wiederholung von zwei Punkten $(kl_1, kl_2) = (2\pi / 3, 2\pi / 3)$ und $(kl_1, kl_2) = (4\pi / 3, 4\pi / 3)$ erhalten.

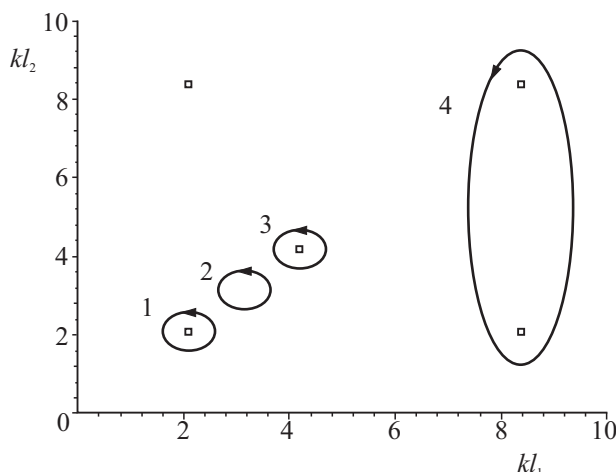


Abbildung XI.10 Lage der singulären Punkte der „Dreikörpermaschine“

Bedingungen für eine gerichtete Bewegung

Nehmen wir jetzt an, dass die Längen l_1 und l_2 beliebig steuerbar sind. Wenn sie sich so ändern, dass der erste singuläre Punkt in der Abbildung XI.10 auf einem geschlossenen Weg umkreist wird, vermindert sich die Phase um 2π . Beim Umkreisen des zweiten Punktes vergrößert sie sich um 2π . Wir schreiben dem ersten Punkt den topologischen Index -1 und dem zweiten den Index $+1$ zu. Im allgemeinen Fall wird sich die Phase auf einem geschlossenen Weg in der (l_1, l_2) -Ebene um $2\pi i$ ändern, wobei i die Summe der Indizes aller von dem Weg umschlossenen Punkte ist. Der Weg 2 in der Abbildung XI.10 umkreist zum Beispiel keinen singulären Punkt, die Phase ändert sich daher bei der Umkreisung nicht. Der Weg 4 umschließt zwei Punkte mit dem Index -1 , die Phase wird sich bei dem vollen Umlauf um -4π ändern. Eine Phasenänderung um 2π bedeutet eine Bewegung des Dreikörpersystems um eine räumliche Periode.

Eine periodische Änderung der Stablängen l_1 und l_2 auf einem Weg, der singuläre Punkte mit einer nicht verschwindenden topologischen Summe umschließt, wird zu einer gerichteten Bewegung des Systems führen. Wird ein Weg in der (l_1, l_2) -Ebene periodisch mit der Kreisfrequenz ω umlaufen, so wird sich das System mit einer makroskopischen (mittleren) Geschwindigkeit $v = \frac{\omega l}{k}$ bewegen.

Eine interessante Frage ist, ob sich diese „Maschine“ auch gegen eine von außen wirkende Kraft bewegen kann und daher zum Transport von Lasten geeignet ist. Um diese Frage zu beantworten, lassen wir auf das System eine äußere Kraft $-F$ wirken. Sie führt zu einem zusätzlichen Term Fx in der potentiellen Energie, so dass die gesamte potentielle Energie die Form

$$U_{ges} = U_0 (\cos(k(x - l_1)) + \cos(kx) + \cos(k(x + l_2))) + Fx \quad (XI.35)$$

annimmt. Bestimmen wir die *Bifurkationsmenge* (auch „*Katastrophenmenge*“ genannt) für dieses Potential. Unter Bifurkationsmenge versteht man die Parametermenge, bei der sich die Zahl der Gleichgewichtspunkte des Potentials ändert und somit im Allgemeinen die Gleichgewichtsposition nicht mehr stetig von den Parametern l_1 und l_2 abhängt. Sie wird durch zwei Bedingungen bestimmt:

$$\frac{\partial U_{ges}}{\partial x} = 0 \quad (XI.36)$$

und

$$\frac{\partial^2 U_{ges}}{\partial x^2} = 0. \quad (XI.37)$$

Die erste Bedingung bedeutet, dass es sich um Gleichgewichtspositionen handelt, die zweite besagt, dass dies ein Moment ist, in dem das Gleichgewicht gerade seine Stabilität verliert. In unserem Fall lautet (XI.36)

$$\frac{\partial U_{ges}}{\partial x} = U_0 k (-\sin(k(x - l_1)) - \sin(kx) - \sin(k(x + l_2))) + F = 0 \quad (XI.38)$$

und (XI.37)

$$\frac{\partial^2 U_{ges}}{\partial x^2} = U_0 k^2 (-\cos(k(x - l_1)) - \cos(kx) - \cos(k(x + l_2))) = 0. \quad (XI.39)$$

Durch Anwendung trigonometrischer Additionstheoreme mit anschließendem Quadrieren und Summieren lassen sich diese Gleichungen auf die Form

$$(1 + \cos kl_1 + \cos kl_2)^2 + (\sin kl_1 - \sin kl_2)^2 = (F / U_0 k)^2 \quad (XI.40)$$

bringen. Die durch diese Gleichung bestimmte Bifurkationsmenge ist in der Abbildung XI.11 für 4 verschiedene Werte des Parameters $f = F / U_0 k$ gezeigt. Eine Translationsbewegung wird induziert, wenn sich die Längen l_1 und l_2 auf einem geschlossenen Weg ändern, der eine geschlossene Bifurkationsmenge vollständig umschließt, so dass die Phase in jedem Punkt stetig bleibt. Offensichtlich ist das nur für $f < 1$ möglich. Die maximale Antriebskraft ist daher gleich $F_{max} = U_0 k$.

Eine gerichtete Bewegung des Systems kann besonders eindrucksvoll bei einer speziellen zeitlichen Änderung der Längen l_1 und l_2 gezeigt werden. Bei der Wahl

$$l_1 = (4/3)\pi/k + l_0 \cos(\omega t), \quad l_2 = (4/3)\pi/k + l_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{XI.41})$$

mit

$$\varphi = (2/3)\pi \quad (\text{XI.42})$$

und $l_0 \ll 1/k$ nimmt die potentielle Energie (XI.29) die Form

$$\begin{aligned} U_0 k l_0 [\sin(kx + \pi/3) \cos(\omega t + 2\pi/3) - \sin(kx - \pi/3) \cos \omega t] \\ = U_0 k l_0 (\sqrt{3}/2) \cos(kx + \omega t + \pi/3) \end{aligned} \quad (\text{XI.43})$$

an. Das ist ein periodisches Profil, das sich mit konstanter Geschwindigkeit ω/k in der negativen x -Richtung ausbreitet. Das System wird zusammen mit dieser Welle in einem ihrer Minima mitwandern.

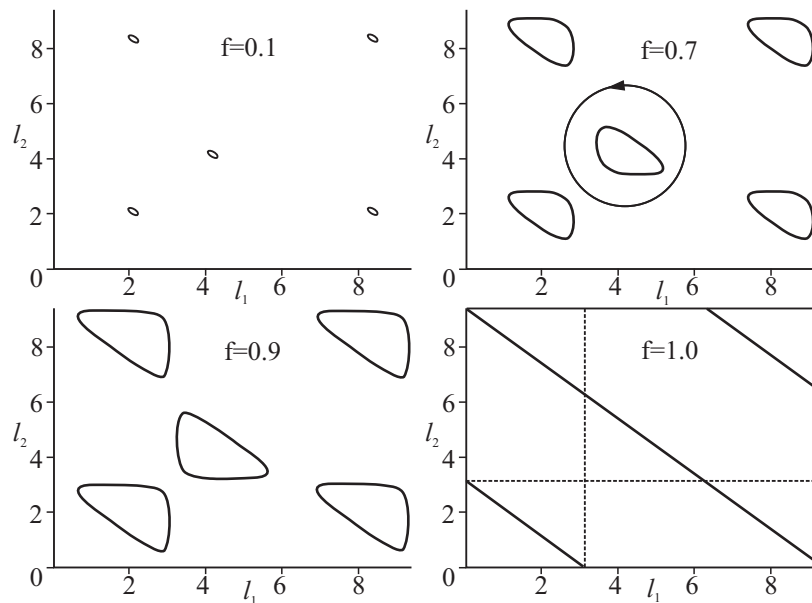


Abbildung XI.11. Bifurkationsmengen des Potentials (XI.35) für verschiedene Werte der äußeren Kraft $f = F/U_0 k$. Eine gerichtete Bewegung ist möglich, solange die Bifurkationsmengen geschlossene Gebilde bilden, die umkreist werden können, ohne sie zu berühren

Die in diesem Abschnitt diskutierten Ideen werden in der Nanotribologie aktiv benutzt, unter anderem zur Beschreibung von Molekularmotoren in Zellen, Muskelkontraktion oder zur Konzipierung von Nanomotoren.

Aufgaben

Aufgabe 1: Untersuchen Sie ein etwas abgeändertes Tomlinson-Modell: Ein Massenpunkt (Masse m) bewegt sich unter einer angelegten Kraft F in einem periodischen Potential, das sich aus einzelnen Parabelstücken zusammensetzt:

$$U(x) = \frac{1}{2} cx^2 \quad \text{für} \quad -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$$

mit

$$U(x+a) = U(x).$$

(Abbildung XI.12). Außerdem soll eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung mit der Dämpfungskonstante η vorhanden sein. Zu bestimmen sind: (a) die Haftreibungskraft, (b) die minimale Geschwindigkeit, bei der eine makroskopische Bewegung aufhört, (c) die Gleitreibungskraft als Funktion der mittleren Gleitgeschwindigkeit und der Dämpfung, (d) das „Phasenportrait“ des Systems ähnlich zum klassischen Prandtl-Tomlinson-Modell.

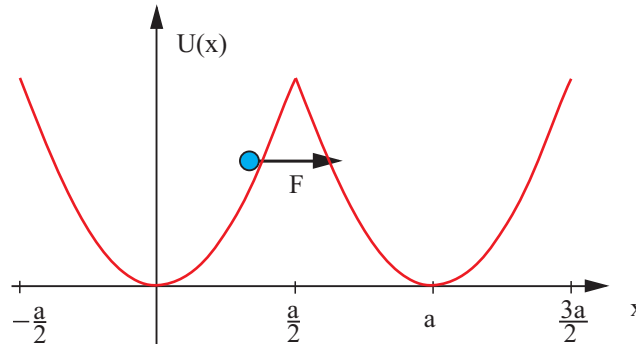


Abbildung XI.12. Abgeändertes Prandtl-Tomlinson-Modell mit parabolischen Potentialen

Lösung: Die Haftreibungskraft ist gleich der maximalen Steigung des Potentials, die am Ende jeder Periode erreicht wird, z.B. für $x = a / 2$:

$$F_s = \frac{ca}{2}.$$

Die Bewegungsgleichung innerhalb einer Periode des Potentials lautet

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + cx = F.$$

Der minimalen Kraft, bei der eine makroskopische Bewegung noch möglich ist, entspricht offenbar der Situation, bei der der Körper bei $x = -a / 2$ mit der Geschwindigkeit $\dot{x} = 0$ startet und bei $x = a / 2$ wieder mit der Geschwindigkeit $\dot{x} = 0$ ankommt. Dies ist genau die Hälfte der gedämpften Schwingungsperiode in einem parabolischen Potential. Die Schwingungsfrequenz von gedämpften Schwingungen ist bekanntlich gleich

$$\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

mit $\omega_0^2 = c / m$ und $\delta = \eta / 2m$. Eine räumliche Periode des Potentials wird demnach in der Zeit

$$T = \frac{\pi}{\omega^*}$$

zurückgelegt. Die kleinstmögliche mittlere Geschwindigkeit einer stationären unbegrenzten Bewegung ist gleich

$$v_{\min} = \frac{a}{T} = \frac{a\omega^*}{\pi} = \frac{a}{\pi} \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{\eta}{2m}\right)^2}.$$

Die minimale Kraft, bei der eine makroskopische Bewegung noch möglich ist, kann man am einfachsten durch folgende Überlegungen ermitteln. Die gesamte potentielle Energie des Körpers unter Berücksichtigung der äußeren Kraft F ist gleich

$$U = \frac{cx^2}{2} - Fx = \frac{c}{2} \left[\left(x - \frac{F}{c} \right)^2 - \left(\frac{F}{c} \right)^2 \right].$$

Die Änderung der potentiellen Energie vom Punkt $x = -a/2$ bis zum Minimum dieser potentiellen Energie ist gleich $\Delta U_0 = \frac{c}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{F}{c} \right)^2$, und die Änderung der potentiellen Energie vom Minimum bis zum Punkt $x = a/2$ ist gleich $\Delta U_1 = -\frac{c}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{F}{c} \right)^2$. Bei der minimalen Kraft durchläuft der Körper von $-a/2$ bis $a/2$ genau die Hälfte der Schwingungsperiode der gedämpften Schwingung. Aus der Schwingungstheorie ist bekannt, dass die Energie einer gedämpften Schwingung nach dem Gesetz $e^{-2\delta t}$ abnimmt. Das Verhältnis der oben erwähnten Energien ist daher gleich $e^{-2\delta T}$:

$$\left(\frac{a - 2F/c}{a + 2F/c} \right)^2 = e^{-2\delta T}.$$

Daraus folgt

$$F = \frac{ac}{2} \frac{1 - e^{-\delta T}}{1 + e^{-\delta T}} = F_s \frac{1 - e^{-\delta T}}{1 + e^{-\delta T}}$$

mit

$$\delta T = \frac{\pi\eta}{\sqrt{4mc - \eta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{4mc}{\eta^2} - 1}}.$$

Die Abhängigkeit der normierten Kraft F/F_s vom dimensionslosen Parameter $\eta/\sqrt{4mc}$ ist in Abbildung XI.13 gezeigt.

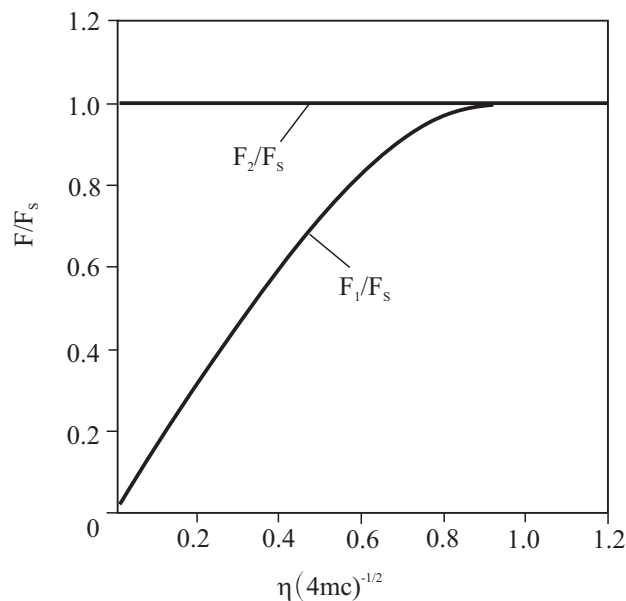


Abbildung XI.13. Phasendiagramm des abgeänderten Prandtl-Tomlinson-Modells mit parabolischen Potentialabschnitten für zwei kritische Kräfte F_1 und F_2

Aufgabe 2. Ein Massenpunkt ist mit einem starren Schlitten mit einer „vertikalen Steifigkeit“ c_{\perp} und einer „tangentialen Steifigkeit“ c_{\parallel} gekoppelt⁷. Er wird wie in Abbildung XI.14 gezeigt in ein sinusförmiges Profil ($y = h_0 \cos kx$) eingeführt. Danach bewegt sich der Schlitten nach rechts. Zu bestimmen ist die Bedingung für das Auftreten von elastischen Instabilitäten in diesem System.

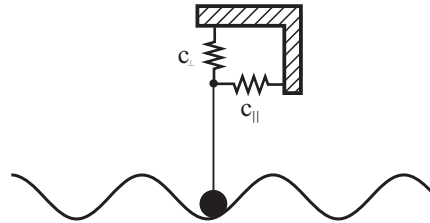


Abbildung XI.14. Ein vertikal und horizontal elastisch gekoppelter, über eine gewellte Oberfläche gleitender Körper

Lösung: Die potentielle Energie des Systems ist gleich

$$U(x, y, x_0, y_0) = \frac{c_{\perp}}{2} (y - y_0)^2 + \frac{c_{\parallel}}{2} (x - x_0)^2.$$

Für das in der Aufgabenstellung beschriebene System gilt $y = h_0 \cos kx$ und $y_0 = -h_0$. Die potentielle Energie nimmt die Form

$$U(x, x_0) = \frac{c_{\perp}}{2} (h_0 \cos kx + h_0)^2 + \frac{c_{\parallel}}{2} (x - x_0)^2$$

an. Die Bedingung für das Auftreten einer elastischen Instabilität lautet

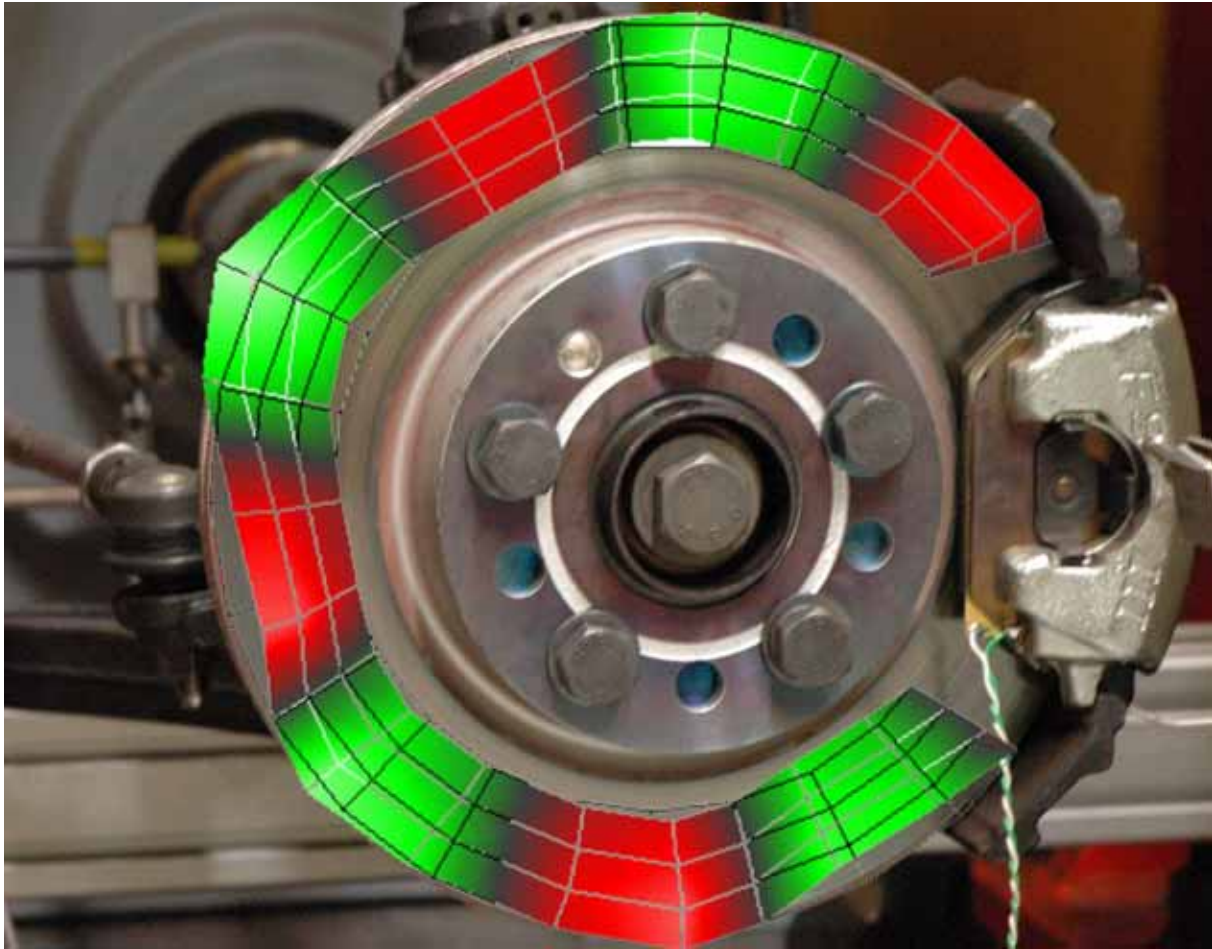
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -c_{\perp} h_0^2 k^2 [\cos kx + \cos 2kx] + c_{\parallel} = 0.$$

Diese Gleichung hat Lösungen und das System weist somit elastische Instabilitäten auf wenn

$$c_{\parallel} < 2c_{\perp} h_0^2 k^2.$$

⁷ Dieses Modell kann z.B. ein Element eines elastischen Profils einer Gummisohle beschreiben.

XII REIBERREGTE SCHWINGUNGEN



XII.1 Einführung

Technische Systeme mit Reibung sind vom Gesichtspunkt der Systemdynamik nichtlineare dissipative offene Systeme. Auch wenn ein solches System eine stationäre Bewegung ausführen kann, kann diese nur dann realisiert werden, wenn sie stabil relativ zu kleinen Störungen ist. Anderenfalls schaukelt sich das System auf – das Ergebnis ist eine periodische oder chaotische Schwingung. Ist die Schwingungsamplitude so groß, dass die relative Geschwindigkeit der reibenden Oberflächen zeitweise Null wird, so besteht die Bewegung aus wechselnden Phasen von Ruhe (Stick) und Gleiten (Slip) und wird als *Stick-Slip-Bewegung* bezeichnet.

Instabilität einer gleichmäßigen stationären Bewegung ist aber nicht der einzige Mechanismus von reiberregten Schwingungen. Unter bestimmten Bedingungen kann es passieren, dass eine stationäre Bewegung des Tribosystems überhaupt nicht existiert. In diesem Fall ist nur eine oszillierende Bewegung möglich. Ein Beispiel dafür stellt die so genannte *Sprag-Slip* Bewegung dar.

Die in vielen technischen Reibungssystemen (Bremsen, Gleitlager, Rad-Schiene-Kontakte usw.) auftretenden reiberregten Schwingungen können einerseits zu erhöhtem Verschleiß und zur Bildung von unerwünschten Strukturen auf den Reiboberflächen (Riffeln auf den Schienen, Rissbildung, Polygonisierung der Bahnräder, Waschbrettmuster), andererseits zu subjektiv unangenehmem Vibrieren oder Geräuschen verschiedener Natur (Rattern, Heulen, Pfeifen, Quietschen) führen. Für das Problem der Bekämpfung von

Bremsenquietschen oder Kurvenquietschen gibt es in vielen Bereichen bis heute noch keine Lösungen, die zuverlässig und preisgünstig technisch umgesetzt werden könnten. Auch in den Anwendungen, wo Quietschen den technischen Vorgang an sich nicht beeinträchtigt, können technische Lösungen manchmal alleine aufgrund des Quietschens und der damit verbundenen Komfortstörung nicht benutzt werden. So können in vielen Bereichen der Gleitlagertechnik die Gleitlager aus Manganhartstahl trotz ihrer hervorragenden Verschleißbeständigkeit nicht eingesetzt werden, da sie Quietsch-Geräusche verursachen.

In diesem Kapitel untersuchen wir einige Modelle der reiberregten Schwingungen, die es erlauben, ein besseres Verständnis der Bedingungen einer stabilen oder instabilen Bewegung zu gewinnen und praktische Empfehlungen zur Vermeidung der reiberregten Schwingungen zu erarbeiten.

XII.2 Reibungsinstabilität bei abfallender Abhängigkeit der Reibungskraft von der Geschwindigkeit

Als erstes betrachten wir das einfachste Ersatzmodell einer Reibpaarung, in dem einer der Reibpartner als eine starre Ebene und der andere als ein starrer Block der Masse m modelliert wird. Die ganze Elastizität des Systems wird in einer Feder mit der Steifigkeit c zusammengefasst. Der Block wird über eine Feder-Dämpfer-Kombination mit der Geschwindigkeit v_0 über die starre Oberfläche gezogen. Es wird angenommen, dass die Reibungskraft in der Kontaktfläche eine für alle Gleitgeschwindigkeiten definierte Funktion $F(\dot{x})$ der Gleitgeschwindigkeit ist. Die Bewegungsgleichung für den Block lautet:

$$m\ddot{x} + F(\dot{x}) + \eta\dot{x} + cx = cv_0t + \eta v_0, \quad (\text{XII.1})$$

wobei $F(\dot{x})$ die geschwindigkeitsabhängige Gleitreibungskraft ist. Die Gleichung (XII.1) hat eine stationäre Lösung

$$x = x_0 + v_0t \quad (\text{XII.2})$$

mit

$$x_0 = -\frac{F(v_0)}{c}. \quad (\text{XII.3})$$

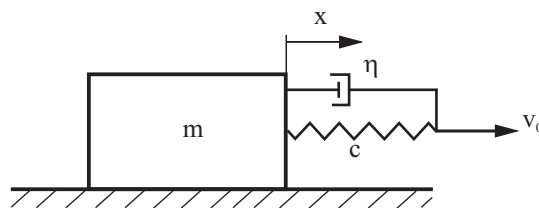


Abbildung XII.1. Ein Block wird auf einer Oberfläche mit einer Feder-Dämpfer-Kombination gezogen

Ob die stationäre Lösung in einem realen Vorgang realisiert werden kann, hängt von der Stabilität dieser Lösung bezüglich immer vorhandener Störungen ab. Zur Untersuchung der Stabilität nehmen wir an, dass die stationäre Lösung (XII.2) schwach gestört wird:

$$x = x_0 + v_0t + \delta x \quad (\text{XII.4})$$

mit $\delta\dot{x} \ll v_0$. Nach Einsetzen von (XII.4) in die Bewegungsgleichung (XII.1) und Linearisierung bezüglich δx erhalten wir für die Störung:

$$m\delta\ddot{x} + \left(\eta + \left. \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} \right|_{\dot{x}=v_0} \right) \delta\dot{x} + c\delta x = 0. \quad (\text{XII.5})$$

Diese Gleichung beschreibt die Schwingung eines Körpers mit der Masse m an einer Feder mit der Steifigkeit c in Anwesenheit einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung mit der Dämpfungskonstanten

$$\alpha = \eta + \left. \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} \right|_{\dot{x}=v_0} \quad (\text{XII.6})$$

Auch ohne formale Stabilitätsanalyse ist es klar, dass die Gleichung (XII.5) bei einer positiven Dämpfung

$$\alpha = \eta + \left. \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} \right|_{\dot{x}=v_0} > 0, \quad (\text{stabile Bewegung}) \quad (\text{XII.7})$$

eine abklingende Schwingung beschreibt: Die stationäre Bewegung ist stabil. Im entgegengesetzten Fall

$$\alpha = \eta + \left. \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} \right|_{\dot{x}=v_0} < 0, \quad (\text{instabile Bewegung}) \quad (\text{XII.8})$$

hätten wir es mit einer *negativen Dämpfung* und einer *aufklingenden* Schwingung zu tun: Die stationäre Lösung ist instabil.

Die Frequenz der schwach gedämpften Schwingungen ist gleich

$$\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - (\alpha / 2)^2}, \quad (\text{XII.9})$$

wobei $\omega_0 = \sqrt{c / m}$ die Frequenz der nicht gedämpften Eigenschwingungen des Körpers ist. Bei schwacher Dämpfung gilt $\omega^* \approx \omega_0$.

Aus dem Gesagten lassen sich die folgenden Schlussfolgerungen ziehen:

I. In einem System ohne Dämpfung ($\eta = 0$) hängt die Stabilitätsbedingung nur von der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Reibungskraft ab:

– Nimmt die Reibungskraft mit der Gleitgeschwindigkeit zu, so ist die Gleitbewegung stabil.

– Nimmt die Reibungskraft mit der Geschwindigkeit ab, so tritt eine Instabilität auf.

Wenn die Reibungskraft bei kleinen Geschwindigkeiten mit der Geschwindigkeit abnimmt und bei größeren Geschwindigkeiten wieder steigt¹, wie es schematisch in *Abbildung XII.1* dargestellt ist, so ist die Bewegung bei kleinen Geschwindigkeiten $v < v_{\min}$ instabil und bei größeren Geschwindigkeiten stabil.

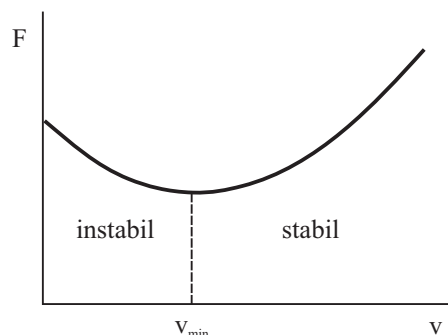


Abbildung XII.2. In vielen tribologischen Systemen nimmt die Reibungskraft mit der Geschwindigkeit zunächst ab und nimmt bei größeren Geschwindigkeiten wieder zu

¹ Ein solcher Verlauf ist zum Beispiel für geschmierte Systeme beim Übergang von Mischreibung zur hydrodynamischen Reibung (Stribeck-Kurve) typisch.

II. Die charakteristische Frequenz der nach diesem Mechanismus erregten Schwingungen wird praktisch nur durch die Eigenfrequenz des „Resonators“ (des Tribosystems als Ganzes) bestimmt. Dies wird in vielen tribologischen Systemen und bei der Metallbearbeitung experimentell bestätigt. So beeinflussen in vielen Fällen praktisch alle Parameter des Tribosystems wie seine Zusammensetzung, die relative Geschwindigkeit der Körper und die Rauheit der Oberflächen zwar die Intensität der akustischen Emission bei Reibung, nicht aber deren Frequenzspektrum.

III. Die betrachtete Art der Instabilität lässt sich beheben, indem im System eine ausreichend große Dämpfung eingeführt wird: Die Stabilitätsbedingung (XII.7) ist bei ausreichend großer Dämpfung auch dann erfüllt, wenn die Ableitung $dF/d\dot{x}$ einen negativen Wert hat.

XII.3 Instabilität in einem System mit verteilter Elastizität

Die im vorigen Abschnitt untersuchte Modellierung eines gleitenden Körpers mittels einer über eine Feder gezogenen starren Masse ist eine starke Vereinfachung der Realität. Es stellt sich die Frage, welche Auswirkung die verteilte Elastizität von Tribopartnern hat. Insbesondere ist es von Interesse nachzuprüfen, ob die Einführung einer Dämpfung in das System die Entwicklung der Instabilität auch dann verhindern kann, wenn diese Dämpfung „weit entfernt“ von der Reiboberfläche eingeführt wird.

Als eine erste Verallgemeinerung des einfachen Modells untersuchen wir ein System bestehend aus einem starren und einem elastischen Körper² (Abbildung XII.3). Der starre Körper sei in horizontaler Richtung mit konstanter Geschwindigkeit geführt. Die elastische Schicht sei unten starr gebettet. Der Einfachheit halber untersuchen wir nur Schubschwingungen in der elastischen Schicht, d.h. wir nehmen an, dass das Verschiebungsfeld nur eine x-Komponente hat und diese nur von der z-Koordinate abhängt. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (\text{XII.10})$$

mit den Randbedingungen

$$G \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \sigma_{\text{Reib}}(v_0 - \dot{u}|_{z=0}) \quad (\text{XII.11})$$

und

$$u(z = -l) = 0. \quad (\text{XII.12})$$

$\sigma_{\text{Reib}}(v)$ ist die geschwindigkeitsabhängige Reibspannung – die auf die Fläche bezogene Reibungskraft. Bei schwacher Geschwindigkeitsabhängigkeit der Reibspannung können wir sie bis zu den Gliedern erster Ordnung in \dot{u} entwickeln:

$$\sigma_{\text{Reib}}(v_0 - \dot{u}|_{z=0}) = \sigma_{\text{Reib}}(v_0) - \left. \frac{d\sigma_{\text{Reib}}}{dv} \right|_{v=v_0} \cdot \dot{u}(z=0) \quad (1.13)$$

² Eine Verallgemeinerung auf den Kontakt zweier elastischer Körper ist problemlos möglich, würde aber unsere Betrachtung unnötig verkomplizieren.

Die Randbedingung (XII.11) nimmt dann die Form

$$G \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \sigma_{\text{Reib}}(v_0) - \frac{d\sigma_{\text{Reib}}}{dv} \Big|_{v=v_0} \cdot \dot{u}(z=0) \quad (\text{XII.14})$$

an. Die Lösung der Wellengleichung (XII.10) mit den Randbedingungen (XII.12) und (XII.14) kann als Summe

$$u(z, t) = u^{(0)}(z, t) + u^{(1)}(z, t), \quad (\text{XII.15})$$

geschrieben werden, wobei

$$u^{(0)}(z, t) = \frac{\sigma_{\text{Reib}}(v_0)}{G} (z + l) \quad (\text{XII.16})$$

die statische Lösung der Bewegungsgleichung ist, die die Randbedingungen $u^{(0)}(-l) = 0$ und

$G \frac{\partial u^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \sigma_{\text{Reib}}(v_0)$ erfüllt und $u^{(1)}(z, t)$ Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial z^2} \quad (\text{XII.17})$$

mit den Randbedingungen

$$G \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = - \frac{d\sigma_{\text{Reib}}}{dv} \Big|_{v=v_0} \cdot \dot{u}^{(1)}(0) \quad \text{und} \quad u^{(1)}(-l) = 0 \quad (\text{XII.18})$$

ist. Die Summe $u^{(0)}(z, t) + u^{(1)}(z, t)$ erfüllt sowohl die Wellengleichung als auch die Randbedingungen (XII.12), (XII.14) und ist somit die Lösung unserer Aufgabe.

Gäbe es keine Abhängigkeit der Reibspannung von der Geschwindigkeit ($d\sigma_{\text{Reib}} / dv = 0$), so wäre $u^{(1)}$ die Lösung der Wellengleichung für freie Schwingungen einer Schicht mit fester Einspannung an einem Ende und freien Randbedingungen am anderen. In Anwesenheit einer schwachen Geschwindigkeitsabhängigkeit mit $d\sigma_{\text{Reib}} / dv > 0$ hätten wir es mit freien Schwingungen einer Schicht zu tun, die an einer Fläche schwach geschwindigkeitsproportional gedämpft ist. Auch ohne formale Lösung der Bewegungsgleichung ist es intuitiv klar, dass wir es in diesem Fall mit gedämpften Schwingungen der Schicht zu tun hätten. Nimmt dagegen die Kraft mit der Geschwindigkeit ab, so bedeutet das die Einführung einer schwachen *negativen Dämpfung* an der Oberfläche. In diesem Fall würden wir es mit einer angefachten Schwingung zu tun haben. Aus diesen Überlegungen folgt, dass die Stabilitätsbedingungen in diesem verteilten System dieselben sind, wie im einfachen System mit einer Masse und Feder. Es ist ferner klar, dass die Instabilität durch Einführung einer Dämpfung an einer *beliebigen* Stelle des Systems bekämpft werden kann. Wichtig ist nur, dass bei gegebener Schwingungsform der Energiezuwachs durch alle negativen Dämpfungen (die sich aus der negativen Geschwindigkeitsabhängigkeit der Reibungskraft ergeben) mittels Energiedissipation über positive Dämpfungen kompensiert wird.

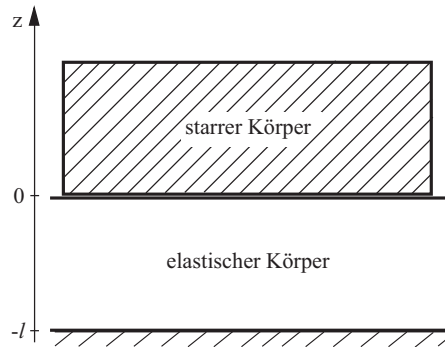


Abbildung XII.3. Ein Tribosystem bestehend aus einem starren und einem elastischen Körper. Der elastische Körper ist unten starr gebettet. Der starre Körper wird in horizontaler Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 gezogen

Bei schwacher Geschwindigkeitsabhängigkeit haben wir es in erster Näherung mit einer Eigenschwingung des Systems zu tun, deren Amplitude sich nur langsam mit der Zeit ändert (also entweder steigt oder abnimmt, abhängig davon, welche Dämpfung – positive oder negative – im System überwiegt). Diese Schwingungen kann man im „d’Alembertschen Bild“ der Eigenschwingungen als Fortpflanzung einer elastischen Welle betrachten, die mehrmalig von den Grenzen des Mediums zurückgespiegelt wird, wobei sie bei jeder Abspiegelung einen gewissen Anteil der Energie verliert (positive Dämpfung) oder bekommt (negative Dämpfung). Es ist klar, dass es bei der Dämpfung darauf ankommt, wie groß der Energieverlust bei der Reflexion der Welle an der Grenze des Mediums ist.

XII.4 Kritische Dämpfung und optimale Unterdrückung des Quietschens

Ausgehend von der d’Alembertschen Sicht auf die Eigenschwingungen können wir behaupten, dass wir eine „ideale Dämpfung“ in dem Fall hätten, wenn eine Welle beim Eintreffen an einer Grenze *vollständig absorbiert wird*. Untersuchen wir Bedingungen, unter denen das möglich ist.

Betrachten wir eine elastische Schicht, die auf der unteren Grenzfläche mit einer starren Unterlage über eine dämpfende Schicht gekoppelt ist (Abbildung XII.4). Die Spannung in dieser Schicht soll proportional zur relativen Geschwindigkeit zwischen dem elastischen Körper und der starren Unterlage sein. Daraus ergibt sich die Randbedingung für die elastische Schicht am unteren Rand:

$$G \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=-l} = \beta \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{z=-l}, \quad (\text{XII.19})$$

wobei β die Dämpfungskonstante ist.

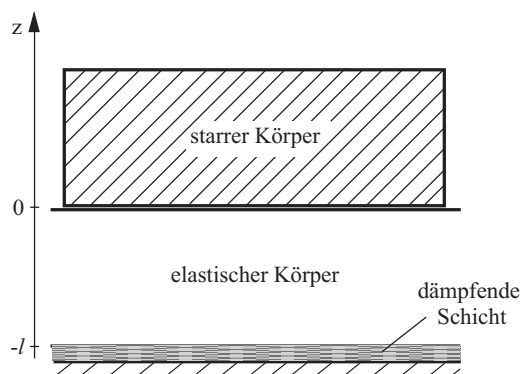


Abbildung XII.4. Elastische Schicht, die mit einer starren Unterlage über eine dämpfende dünne Schicht gekoppelt ist

Die Forderung nach einer vollständigen Absorption einer Welle am unteren Rand bedeutet, dass die Bewegungsgleichung (XII.10) mit der Randbedingung (XII.19) eine Lösung in Form einer sich in negativer z -Richtung ausbreitenden Welle hat:

$$u(z,t) = f(z + ct), \quad (\text{XII.20})$$

wobei $c = \sqrt{G/\rho}$ die Transversalgeschwindigkeit elastischer Wellen ist. Indem wir diese spezielle Lösung der Wellengleichung in die Randbedingung (XII.19) einsetzen, erhalten wir

$$\beta = \sqrt{G\rho}. \quad (\text{XII.21})$$

Bei dieser Dämpfung gibt es keine Rückstrahlung der von oben ankommenden Welle: Wir haben somit eine perfekte Dämpfung. Zu bemerken ist, dass es sowohl bei einem kleineren Dämpfungskoeffizienten als auch bei einem größeren Dämpfungskoeffizienten eine Rückspiegelung gibt. In den beiden Grenzfällen $\beta \rightarrow 0$ und $\beta \rightarrow \infty$ hätten wir es sogar mit dissipationsfreien Systemen zu tun.

Der Effekt der vollständigen Absorption hat in der Physik und der Technik viele Anwendungen, von denen wir hier die wichtigsten auflisten:

1. Unterdrückung des Quietschens.
2. Abschirmung akustischer Abstrahlung: Ein so genannter „Schalltoter Raum“ soll an den Wänden genau die kritische Dämpfung aufweisen.
3. Bei molekulardynamischen und anderen numerischen Simulationen muss an den Grenzen des Simulationsbereiches die kritische Dämpfung eingeführt werden, um die nicht physikalische, durch die Größe des simulierenden Bereichs bedingte Rückstrahlung zu unterdrücken.
4. In der Hochfrequenztechnik wird dieselbe Idee zur Unterdrückung der Abspiegelung in Wellenleitern benutzt.

Schätzen wir die nötigen Parameter der dämpfenden Schicht ab, die zur Unterdrückung der Quietschgeräusche in einem stählernen Lager erforderlich sind. Für Stahl ($G \approx 78 \text{ GPa}$, $\rho \approx 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) wird eine vollständige Dämpfung laut (XII.21) bei $\beta \approx 2,5 \cdot 10^7 \text{ Pa} \cdot \text{s/m}$ erreicht. Einen solchen Dämpfungskoeffizienten hat z.B. eine 1 cm dicke Schicht aus einem Polymer mit einer Viskosität, die in etwa einem dicken Honig entspricht. Experimentelle Untersuchungen zeigen, dass das Anbringen von richtig dimensionierten Polymerschichten tatsächlich zu einer praktisch vollständigen Unterdrückung des Quietschens führt (*Abbildung XII.5*).



Abbildung XII.5. Teile eines Gleitlagers aus Manganhartstahl, bei denen zur Unterdrückung der Quietschgeräusche eine passend dimensionierte Polymerbeschichtung angebracht wurde

XII.5 Aktive Unterdrückung des Quietschens

Neben der passiven Unterdrückung des Quietschens durch Einführung einer Dämpfung in das tribologische System ist es möglich, die Instabilitäten durch Design passender Regelungskreise *aktiv* zu unterdrücken. Zur Erläuterung der Grundidee einer aktiven Unterdrückung von Instabilitäten untersuchen wir das einfache Modell in *Abbildung XII.6*.

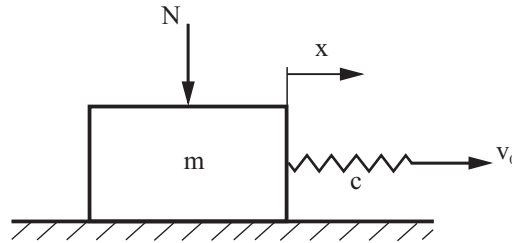


Abbildung XII.6. Einfaches Modell zur Erläuterung der Grundidee einer aktiven Unterdrückung von Instabilitäten

Wir nehmen an, dass die Normalkraft eine periodische Funktion der Zeit ist mit der selben Frequenz ω_0 wie die Eigenfrequenz des Systems:

$$N = N_0 + N_1 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (\text{XII.22})$$

mit $N_1 \ll N_0$. Bei schwacher Dämpfung führt der Körper in erster Näherung freie ungedämpfte Schwingungen mit der Geschwindigkeit

$$v = v_0 + v_1 \cos \omega_0 t \quad (\text{XII.23})$$

aus. Zur qualitativen Stabilitätsuntersuchung berechnen wir die Änderung der Energie der oszillierenden Bewegung des Körpers über eine Schwingungsperiode. Dabei nehmen wir an, dass die Reibungskraft als Produkt aus der Normalkraft und einem geschwindigkeitsabhängigen Reibungskoeffizienten dargestellt werden kann:

$$F_{\text{Reib}} = N\mu(v) \quad (\text{XII.24})$$

Die Änderung der Schwingungsenergie wird bestimmt durch die mittlere Leistung der Reibungskraft im Bezugssystem, das sich mit der mittleren Geschwindigkeit v_0 bewegt:

$$W = \overline{-F_R(v - v_0)} = -N \overline{\left(\mu_0 + \frac{d\mu}{dv} v \right) (v - v_0)}. \quad (\text{XII.25})$$

Einsetzen von (XII.22) und (XII.23) in (XII.25) ergibt

$$\begin{aligned} W &= \overline{-(N_0 + N_1 \cos(\omega_0 t + \varphi)) \left(\mu_0 v_1 \cos \omega_0 t + \frac{d\mu}{dv} (v_0 + v_1 \cos \omega_0 t) v_1 \cos \omega_0 t \right)} \\ &= -\frac{1}{2} v_1 \left(N_0 v_1 \frac{d\mu}{dv} + N_1 \left(\mu_0 + \frac{d\mu}{dv} v_0 \right) \cos \varphi \right) \end{aligned} \quad (\text{XII.26})$$

oder für schwache Dämpfung

$$W \approx -\frac{1}{2} v_1 \left(N_0 v_1 \frac{d\mu}{dv} + N_1 \mu_0 \cos \varphi \right). \quad (\text{XII.27})$$

Gäbe es keine Schwingungen der Normalkraft, so wäre die mittlere Leistung gleich $-\frac{1}{2} N_0 v_1^2 \frac{d\mu}{dv}$. Wir würden dann zu dem bereits bekannten Ergebnis kommen: Bei fallender

Reibungskraft als Funktion der Geschwindigkeit ($d\mu/dv < 0$) steigt die Energie und der Prozess ist instabil. Durch Änderung der Normalkraft kann aber die Leistung negativ gemacht werden und so die Schwingungen gedämpft. Dafür muss die folgende Bedingung gelten:

$$N_0 v_1 \frac{d\mu}{dv} + N_1 \mu_0 \cos \varphi > 0. \quad (\text{XII.28})$$

Sie kann nur erfüllt werden, wenn $\cos \varphi > 0$ ist – am besten $\cos \varphi = 1$ und folglich $\varphi = 0$. Mit anderen Worten: Die Normalkraft (XII.22) soll nach Möglichkeit in der gleichen Phase wie die Geschwindigkeit (XII.23) oszillieren.

Dies kann mittels eines Regelungskreises realisiert werden, in dem die Geschwindigkeit gemessen und eine zur Geschwindigkeit proportionale Änderung der Normalkraft $\Delta N = \xi(\dot{x} - v_0)$ erzeugt wird. Die Bewegungsgleichung würde in diesem Fall lauten:

$$m\ddot{x} + (N_0 + \xi(\dot{x} - v_0))\mu(\dot{x}) + \eta\dot{x} + cx = cv_0 t + \eta v_0. \quad (\text{XII.29})$$

Die um die stationäre Lösung (XII.2) linearisierte Gleichung ist

$$m\delta\ddot{x} + \left(N_0 \frac{d\mu}{dv} + \mu_0 \xi + \eta \right) \delta\dot{x} + c\delta x = 0. \quad (\text{XII.30})$$

Damit das stationäre Gleiten stabil bleibt, muss die gesamte Dämpfung in (XII.30) positiv sein:

$$N_0 \frac{d\mu}{dv} + \mu_0 \xi + \eta > 0 \quad (\text{XII.31})$$

Bei abfallender Reibungskraft als Funktion der Gleitgeschwindigkeit kann das entweder durch eine ausreichend große Dämpfung η oder durch eine ausreichend starke Kopplung $\mu_0 \xi$ zwischen Geschwindigkeit und Normalkraft realisiert werden. Wie man aus der Gleichung (XII.31) sieht, hat der beschriebene Regelungskreis die gleiche Wirkung, wie eine Dämpfung. Der Vorteil einer aktiven Unterdrückung liegt in einfacherer Steuerbarkeit eines Regelungskreises verglichen mit einer passiven Dämpfung, deren Parameter nur durch Materialwahl und Dimensionierung eingestellt werden können.

XII.6 Festigkeitsaspekte beim Quietschen

Wir wollen die in einem quietschenden System auftretenden Spannungen abschätzen, um festzustellen, unter welchen Bedingungen diese die Festigkeit des Systems beeinträchtigen können. Untersuchen wir das in *Abbildung XII.3* gezeigte System. Bei schwacher Dämpfung können wir die Lösung der Störungsgleichung (XII.17) in erster Näherung mit den Randbedingungen

$$G \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{und} \quad u^{(1)}(-l) = 0 \quad (\text{XII.32})$$

lösen. Die Lösung für die Eigenschwingung mit der kleinsten Eigenform lautet

$$u(z, t) = A \sin\left(\frac{\pi}{2l}(z+l)\right) \cdot \sin\frac{\pi c}{2l} t, \quad (\text{XII.33})$$

wobei $c = \sqrt{G/\rho}$ die Transversalgeschwindigkeit elastischer Wellen ist. Die Schwingungsamplitude der Geschwindigkeit \dot{u} ist dabei gleich $\bar{v} = A \frac{\pi C}{2l}$, die der Spannungen $G \frac{\partial u}{\partial z}$ gleich $\bar{\sigma} = AG \frac{\pi}{2l}$. Zwischen der Amplitude der Spannung und der Amplitude der Geschwindigkeit besteht demnach das folgende Verhältnis:

$$\bar{\sigma} = G \frac{\bar{v}}{c} = \bar{v} \sqrt{G\rho}. \quad (\text{XII.34})$$

In der Regel wird die Schwingungsamplitude der Geschwindigkeit im stationären Zyklus dieselbe Größenordnung haben wie die Gleitgeschwindigkeit v_0 . Die Größenordnung der Spannungen in einem quietschenden System kann daher mit

$$\bar{\sigma} = G \frac{\bar{v}_0}{c} = \bar{v}_0 \sqrt{G\rho} \quad (\text{XII.35})$$

abgeschätzt werden.

Dies ist ein sehr allgemeines Ergebnis, welches auch für Eigenschwingungen mit höheren Frequenzen gültig bleibt: Die Spannungen im stationären Zyklus hängen im Wesentlichen nur von der Gleitgeschwindigkeit ab! Die kritische Geschwindigkeit, bei der die Spannungen die Festigkeitsgrenze σ_F des Materials erreichen, ist gegeben durch

$$v_c = \frac{\sigma_F}{\sqrt{\rho G}}. \quad (\text{XII.36})$$

Für einen Stahl mit $\sigma_F = 300 \text{ MPa}$ (was einer Zugfestigkeit von ca. 500 MPa entspricht) erhalten wir für die kritische Geschwindigkeit $v_0 \approx 12 \text{ m/s}$. Bei größeren Gleitgeschwindigkeiten würde Quietschen zur Zerstörung von Bauteilen aus solchem Stahl führen!

XII.7 Abhängigkeit der Stabilitätsbedingungen von der Steifigkeit des Systems

Der in vorigen Abschnitten untersuchte Mechanismus zur Entwicklung einer Instabilität wird nur durch die Abnahme der Reibungskraft mit der Geschwindigkeit bedingt. Die Stabilitätsbedingung hängt somit nicht von der Steifigkeit des Systems ab. In dem in *Abbildung XII.2* gezeigten Beispiel ist die Bewegung bei einer mittleren Gleitgeschwindigkeit unterhalb der Geschwindigkeit v_{\min} immer instabil. Die Steifigkeit des Systems beeinflusst die Frequenz der reiberregten Schwingungen, nicht aber die Instabilitätsbedingung. In der Praxis zeigt sich allerdings, dass sich viele Systeme durch Änderung der Steifigkeit des Systems stabilisieren lassen. Diese in zahlreichen experimentellen Untersuchungen festgestellte Eigenschaft bedeutet, dass die einfache Erklärung der Instabilität durch die abfallende Abhängigkeit der Reibungskraft von der Geschwindigkeit nicht immer zutrifft.

Der Grund dafür liegt aus mathematischer Sicht in der Ungültigkeit der Annahme, dass die Reibungskraft nur durch den momentanen Zustand des Reibkontaktes – im Wesentlichen durch die Normalkraft und die Gleitgeschwindigkeit – bedingt wird. Für die statische Reibungskraft würde diese Annahme bedeuten, dass sie immer konstant bleibt. Seit Coulomb ist es aber bekannt, dass dies nicht ganz genau stimmt. Auch wenn sich die Normalkraft nicht ändert und die „Gleitgeschwindigkeit“ konstant bleibt (gleich Null), ändert sich die statische Reibungskraft mit der Zeit. Diese Änderung kann verschiedene physikalische Ursachen haben. In metallischen Stoffen sind es Kriechprozesse, die zu einer zeitlichen Änderung der realen Kontaktfläche und dadurch bedingt der Reibungskraft führen.

In Elastomeren ist es ihre Viskosität, die für die verzögerte Reaktion sorgt. In geschmierten Systemen ändert sich die Schichtdicke mit der Zeit auch ohne Änderungen der Normalkraft. Darüber hinaus ändert sich die Temperatur der Kontaktpartner und des Schmieröls, was ebenfalls eine Auswirkung auf die Reibungskraft hat. Auch bei der Grenzschichtschmierung hat die statische Reibungskraft eine Eigendynamik durch „Verknöten“ von hydrophoben Enden der Moleküle des Schmiermittels. Der durch Bildung von Kapillarbrücken verursachte Beitrag zu den Reibungskräften ist ebenfalls explizit zeitlich abhängig.

Alle diese Prozesse könnte man in jedem Einzelfall durch Einführung passender zusätzlicher Variablen beschreiben, die man als „interne Variablen“ bezeichnet, die den Zustand der Reibschicht und des Zwischenstoffs ausreichend charakterisieren. Die Idee von internen Variablen wurde ursprünglich von Ruina auf Erdbebendynamik angewendet. In manchen Fällen haben diese Variablen klare physikalische Bedeutungen (wie z.B. die Temperatur), in anderen Fällen werden in den internen Variablen phänomenologische Erfahrungen zusammengefasst.

Untersuchen wir das einfachste phänomenologische Modell, das eine typische Eigendynamik des „Kontaktzustandes“ beschreibt. Wir betrachten wieder das in *Abbildung XII.1* gezeigte Modell, das durch die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + F(\dot{x}, \theta) + \eta\dot{x} + cx = cv_0 t + \eta v_0 \quad (\text{XII.37})$$

beschrieben wird, wobei die Reibungskraft $F(\dot{x}, \theta)$ jetzt nicht nur von der Geschwindigkeit, sondern auch von einer internen Zustandsvariablen θ abhängt. Für diese Abhängigkeit nehmen wir

$$F(\dot{x}, \theta) = F_k + (F_s - F_k)\theta \quad (\text{XII.38})$$

an. θ ist hier eine interne Variable, die den Zustand der Kontaktzone beschreibt und sich von $\theta = 0$ im ersten Zeitpunkt des Kontaktes bis $\theta = 1$ nach einem langen Stillstand ändert. F_s ist somit die statische und F_k die kinetische Reibungskraft. Die Zustandsvariable θ soll der folgenden kinetischen Gleichung genügen

$$\dot{\theta} = \left(\frac{1}{\tau}(1 - \theta) - \frac{1}{D}\dot{x} \right), \quad 0 < \theta < 1. \quad (\text{XII.39})$$

Bei verschwindender Geschwindigkeit $\dot{x} = 0$ steigt θ mit der Zeit bis zum Sättigungswert $\theta = 1$. Setzt sich der Körper in Bewegung, so nimmt die Zustandsvariable θ ab, und zwar desto schneller, je schneller die Geschwindigkeit ist. Physikalischer Sinn von τ in (XII.39) ist die charakteristische Relaxationszeit des Parameters θ beim Stillstand, während D die charakteristische „Relaxationslänge“ von diesem Parameter beim Einsetzen der Bewegung ist. In einem physikalischen Bild eines Kontaktes zwischen rauen Oberflächen könnte man sich unter τ die charakteristische Zeit der Kriechprozesse und unter D eine Strecke von der Größenordnung der Kontaktlänge zwischen zwei Mikrokontakten vorstellen, wobei abhängig vom System auch andere Interpretationen möglich sind.

Das Gleichungssystem (XII.37), (XII.38), (XII.39) hat eine stationäre Lösung mit

$$\dot{x} = v_0, \quad (\text{XII.40})$$

$$\theta = \theta_0 = \begin{cases} 1 - v_0 / v_c, & \text{für } v_0 < v_c \\ 0, & \text{für } v_0 > v_c \end{cases}, \quad (\text{XII.41})$$

$$F = F_k + (F_s - F_k)(1 - v_0 / v_c), \quad (\text{XII.42})$$

wobei

$$v_c = D / \tau. \quad (\text{XII.43})$$

Die Abhängigkeit der stationären Reibungskraft (XII.41) von der Geschwindigkeit ist in *Abbildung XII.7* dargestellt. Das Gleichungssystem (XII.37)-(XII.39) gibt somit die bekannten Eigenschaften der Reibung qualitativ richtig wieder. Dazu zählt die Abnahme der Reibungskraft vom statischen Wert zum Gleitwert innerhalb eines gewissen Geschwindigkeitsintervalls sowie das Wachstum der statischen Reibungskraft mit der Zeit nach dem Stillstand.

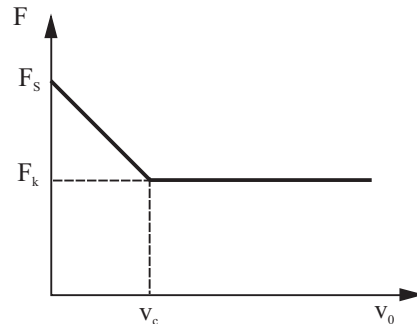


Abbildung XII.7. Stationäre Reibungskraft als Funktion der Gleitgeschwindigkeit nach Gleichung (XII.42)

Würden wir die Abhängigkeit (XII.42) der Reibungskraft von der Gleitgeschwindigkeit in einem stationären Gleitvorgang zur Stabilitätsanalyse benutzen, so würden wir zum Schluss kommen, dass das Gleiten bei $v_0 < v_c$ instabil ist. In Wirklichkeit ist diese Schlussfolgerung nur dann berechtigt, wenn die Schwingungszeit viel größer ist als die charakteristische Relaxationszeit τ , denn nur unter dieser Voraussetzung kann man die Abhängigkeit (XII.42) auch für dynamische Vorgänge benutzen. Daraus folgt, dass bei *ausreichend kleiner Steifigkeit* und daraus folgender großer Schwingungsperiode das Gleiten tatsächlich *instabil* wird. Bei großen Steifigkeiten und folgend kleinen Schwingungszeiten dagegen hat der Parameter θ keine Zeit, sich zu verändern. Die Reibungskraft hängt dann von der Geschwindigkeit laut (XII.38) überhaupt nicht ab, und die Instabilität tritt nicht auf.

Um die Stabilität der stationären Lösung (XII.40)-(XII.42) im allgemeinen Fall zu untersuchen und die Stabilitätsgrenze in Abhängigkeit von der Gleitgeschwindigkeit und der Steifigkeit des Systems zu bekommen, betrachten wir eine kleine Störung der stationären Lösung:

$$x = x_0 + v_0 t + \delta x, \quad \theta = \theta_0 + \delta \theta. \quad (\text{XII.44})$$

Die linearisierten Gleichungen lauten

$$m\delta\ddot{x} + \eta\delta\dot{x} + c\delta x + (F_s - F_k)\delta\theta = 0, \quad (\text{XII.45})$$

$$\delta\dot{\theta} = -\frac{1}{\tau}\delta\theta - \frac{1}{D}\delta\dot{x}. \quad (\text{XII.46})$$

Wir suchen eine Lösung von diesem Gleichungssystem in der Exponentialform

$$\delta x = A e^{\lambda t}, \quad \delta \theta = B e^{\lambda t}. \quad (\text{XII.47})$$

Einsetzen in (XII.45) und (XII.46) liefert

$$(\lambda^2 m + \eta\lambda + c)A + (F_s - F_k)B = 0, \quad (\text{XII.48})$$

$$\frac{1}{D}\lambda A + \left(\lambda + \frac{1}{\tau}\right)B = 0, \quad (\text{XII.49})$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat eine nicht triviale Lösung, wenn ihre Hauptdeterminante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} \left(\lambda^2 + \frac{\eta}{m} \lambda + \frac{c}{m} \right) & \frac{(F_s - F_k)}{m} \\ \frac{1}{D} \lambda & \left(\lambda + \frac{1}{\tau} \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{XII.50})$$

oder

$$\lambda^3 + \lambda^2 P + \lambda Q + R = 0 \quad (\text{XII.51})$$

mit

$$P = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\eta}{m} \right), \quad Q = \left(\frac{c}{m} + \frac{\eta}{\tau m} - \frac{(F_s - F_k)}{Dm} \right), \quad R = \frac{c}{\tau m}. \quad (\text{XII.52})$$

An der Stabilitätsgrenze führt das System nicht gedämpfte Schwingungen aus. Das bedeutet, dass zwei der insgesamt drei Lösungen dieser algebraischen Gleichung dritter Ordnung bezüglich λ rein imaginär und komplex konjugiert sind und die dritte reell und negativ:

$$\lambda_1 = -\Lambda, \quad \lambda_2 = +i\omega_c, \quad \lambda_3 = -i\omega_c. \quad (\text{XII.53})$$

Die allgemeine Lösung lautet in diesem Fall

$$\delta x = x_1 e^{-\Lambda t} + x_2^* e^{i\omega_c t} + x_3^* e^{-i\omega_c t} = x_1 e^{-\Lambda t} + x_2 \cos \omega_c t + x_3 \sin \omega_c t \quad (\text{XII.54})$$

und stellt nach ausreichend großer Zeit periodische Schwingungen mit konstanter Amplitude dar.

Eine algebraische Gleichung dritter Ordnung mit diesen Wurzeln hat die Form

$$(\lambda + \Lambda)(\lambda - i\omega_c)(\lambda + i\omega_c) = \lambda^3 + \lambda^2 \Lambda + \lambda \omega_c^2 + \Lambda \omega_c^2 = 0. \quad (\text{XII.55})$$

Ein Vergleich zwischen (XII.51) und (XII.55) ergibt:

$$P = \Lambda, \quad Q = \omega_c^2, \quad R = \Lambda \omega_c^2. \quad (\text{XII.56})$$

Daraus folgt, dass an der Stabilitätsgrenze die Bedingung $R = PQ$ oder unter Berücksichtigung von (XII.52)

$$\frac{c}{\tau m} = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\eta}{m} \right) \left(\frac{c}{m} + \frac{\eta}{\tau m} - \frac{(F_s - F_k)}{Dm} \right) \quad (\text{XII.57})$$

erfüllt sein muss. Daraus bestimmt sich die kritische Steifigkeit

$$c_c = \frac{m}{\eta} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\eta}{m} \right) \left(\frac{(F_s - F_k)}{D} - \frac{\eta}{\tau} \right). \quad (\text{XII.58})$$

Bei sehr kleinen Dämpfungskonstanten vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$c_c = \frac{(F_s - F_k) m}{\eta D \tau}. \quad (\text{XII.59})$$

Bei kleineren Steifigkeiten als c_c ist das Gleiten instabil und bei größeren stabil. Die Bewegung ist stabil auch für $v_0 > v_c$. Somit ergibt sich das in *Abbildung XII.8* dargestellte Stabilitätsdiagramm. Die Bewegung kann in diesem Fall sowohl durch Erhöhung der Geschwindigkeit als auch durch Erhöhung der Steifigkeit stabilisiert werden. In der Realität sieht das Stabilitätsdiagramm nie so eckig aus. Die qualitative Aussage über die Existenz

eines Bereichs der Instabilität bei kleinen Gleitgeschwindigkeiten und Steifigkeiten ist aber sehr allgemein und wird bei verschiedensten Reibungsmechanismen festgestellt.

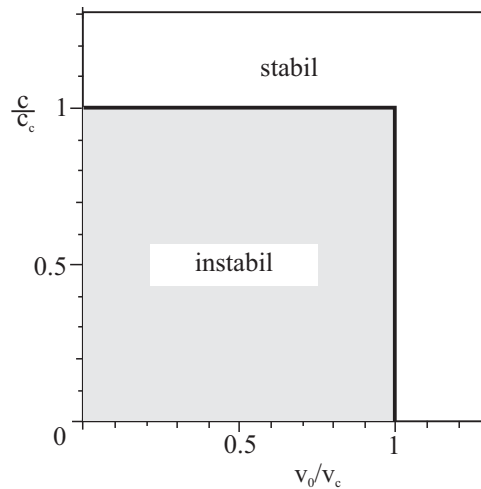


Abbildung XII.8. Stabilitätsgrenze eines tribologischen Systems auf der Parameterebene „Gleitgeschwindigkeit – Steifigkeit“

XII.8 Sprag-Slip

In allen vorangegangenen Modellen wurde nur die Bewegung des Systems in der Gleitrichtung untersucht. In Wirklichkeit kann auch die Bewegung in der Richtung senkrecht zur Reiboberfläche das Verhalten eines tribologischen Systems wesentlich beeinflussen. Zur Illustration untersuchen wir das in *Abbildung XII.9a* gezeigte Modell.

Ist die in horizontaler Richtung wirkende Kraft F größer $\mu_s N$, wobei N die durch die Feder erzeugte Druckkraft auf die Unterlage ist, so wird das System gleiten. Wird aber der Körper in Schwingung in vertikaler Richtung gebracht, so ändert sich die Druckkraft periodisch. Jedes Mal, wenn sie den Wert F / μ_s erreicht, haftet der „Fuß“. In dem Zeitintervall, in dem die Druckkraft kleiner F / μ_s ist, gleitet das System: Die Bewegung besteht aus wechselnden Phasen von Haftung und Gleiten.

In dem in *Abbildung XII.9a* gezeigten System sind Bewegungen in horizontaler und vertikaler Richtung unabhängig. Nach Abklingen von Schwingungen in vertikaler Richtung wird sich das System entweder im Haft- oder im Gleitzustand befinden. Anders ist es im System in *Abbildung XII.9b*. Jedes Mal wenn die Druckkraft aufgrund der Schwingungen den Wert F / μ_s übersteigt, haftet der Fuß des Systems, wodurch das System plötzlich gebremst wird. Aufgrund der Neigung kann dies Schwingungen des Körpers anfachen.

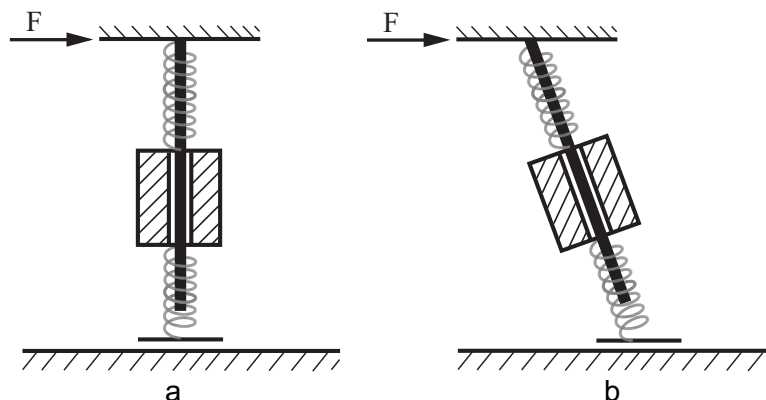


Abbildung XII.9 Einfaches Modell zur Erklärung des Mechanismus von Sprag-Slip

Die auf diese Weise erregten Schwingungen und die damit verbundene Haft-Gleit-Bewegung werden als *Sprag-Slip* bezeichnet. Diese Bezeichnung wird immer dann benutzt, wenn ein System durch Änderung der Anpresskraft zum Haften kommt. Als Beispiel seien das Rattern von Scheibenwischern oder das in *Abbildung XII.10* gezeigte Spielzeug genannt.



Abbildung XII.10. Im Ruhezustand ist dieses System im „selbstgesperrten“ Zustand. Lässt man den Vogel schwingen, so wird die Selbstsperrung zeitweise aufgehoben und die Halterung rutscht nach unten. Der sich einstellende Wechsel aus Haften und Gleiten ist Beispiel einer *Sprag-Slip*-Bewegung

Aufgaben

Aufgabe 1: Stick-Slip. Der bereits von Coulomb erkannte Unterschied zwischen der Haft- und Gleitreibung stellt im Grunde genommen einen Sonderfall der Geschwindigkeitsabhängigkeit dar: Bei sehr kleinen Geschwindigkeiten ($v \approx 0$) ist die Reibungskraft gleich F_s und fällt dann schnell auf das Niveau der Gleitreibungskraft F_k (Abbildung XII.11). Für diesen Fall ist der Verlauf einer instabilen Bewegung zu bestimmen. Dabei soll als einfaches Modell einer Reibpaarung wiederum der starre Block, welcher mittels einer Feder über eine starre Ebene gezogen wird, betrachtet werden.

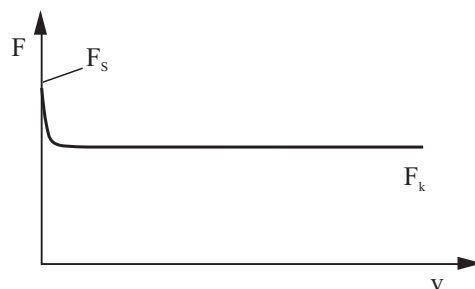


Abbildung XII.11. Reibungsgesetz mit einer schnellen Abnahme der Reibungskraft vom statischen Wert F_s zur Gleitreibung F_k

Lösung: Befindet sich der Körper ursprünglich im Ruhezustand bei $x = 0$ und wird die Feder mit konstanter Geschwindigkeit v_0 gezogen, so steigt die Federkraft nach dem Gesetz

$$F_{\text{Feder}} = cv_0 t$$

bis sie bei

$$t_0 = F_s / cv_0$$

die statische Reibungskraft F_s erreicht. In diesem Moment setzt sich der Körper in Bewegung, dabei sinkt die Reibungskraft auf den Wert F_k . Die Bewegungsgleichung in der Gleitphase lautet

$$m\ddot{x} + cx = cv_0 t - F_k$$

Die Anfangsbedingungen sind

$$x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0.$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung lautet

$$x = a \sin \omega t + b \cos \omega t + v_0 t - \frac{F_k}{c},$$

$$\dot{x} = a\omega \cos \omega t - b\omega \sin \omega t + v_0.$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen ergibt als Lösung

$$x = a \sin \omega t + b \cos \omega t + v_0 t - F_k / c = A \sin(\omega t + \varphi) + v_0 t - F_k / c,$$

$$\dot{x} = a\omega \cos \omega t - b\omega \sin \omega t + v_0 = A\omega \cos(\omega t + \varphi) + v_0,$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \sin \omega t - b\omega^2 \cos \omega t = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi).$$

mit

$$a = \frac{1}{\omega} \left(-v_0 \cos \frac{\omega F_s}{cv_0} - \omega \frac{F_s - F_k}{c} \sin \frac{\omega F_s}{cv_0} \right), \quad b = \frac{1}{\omega} \left(v_0 \sin \frac{\omega F_s}{cv_0} - \omega \frac{F_s - F_k}{c} \cos \frac{\omega F_s}{cv_0} \right).$$

und

$$A = \frac{1}{\omega} \sqrt{v_0^2 + \left(\omega \frac{F_s - F_k}{c} \right)^2}.$$

Der Körper kommt wieder zum Stillstand wenn $\dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) + v_0 = 0$. Daraus folgt $\cos(\omega t + \varphi) = -v_0 / A\omega$. Die Beschleunigung ist dabei gleich

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -A\omega^2 \sqrt{1 - \cos^2(\omega t + \varphi)} = -(F_s - F_k) / m,$$

die auf den Körper wirkende Kraft ist gleich $-(F_s - F_k)$ und die Federkraft

$$F_{\text{Feder}} = -F_s + 2F_k < F_s.$$

Da diese Kraft kleiner als die statische Reibungskraft ist, bleibt der Körper haften bis die Federkraft wieder den Wert F_s erreicht. Danach wiederholt sich die Slip-Phase. Die Bewegung besteht aus wechselnden Phasen von Ruhe (Stick) und Gleiten (Slip) und wird als *Stick-Slip-Bewegung* bezeichnet. Zeitliche Abhängigkeiten der Geschwindigkeit und der Federkraft bei einer Stick-Slip-Bewegung sind in *Abbildung XII.12* dargestellt.

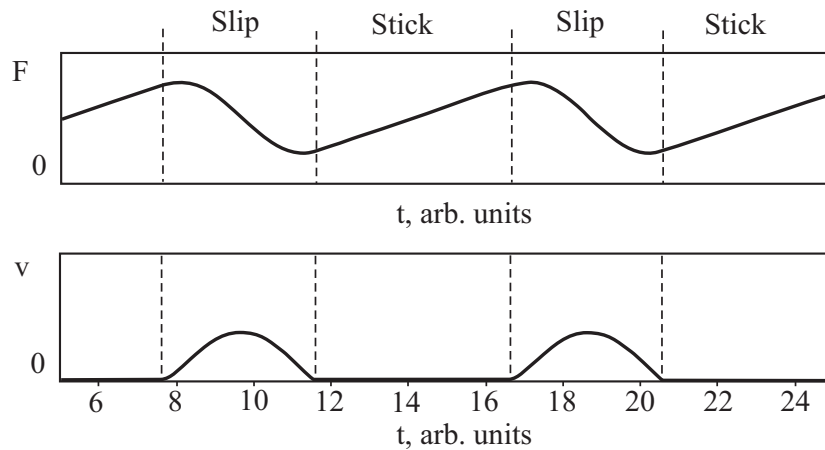


Abbildung XII.12. Federkraft (oben) und Gleitgeschwindigkeit (unten) als Funktion der Zeit bei einer Stick-Slip-Bewegung unter der Einwirkung der Reibungskraft von dem in Abbildung XII.11 gezeigten Typ.

Der Körper bewegt sich nicht, und die Federkraft steigt linear mit der Zeit (Stick-Phase) bis die Federkraft die statische Reibungskraft erreicht. In diesem Moment setzt sich der Körper in Bewegung und schwingt, bis die Geschwindigkeit wieder Null wird. Es folgt die nächste Stick-Phase

Aufgabe 2: Zu bestimmen ist der Abspiegelungskoeffizient von der dämpfenden Schicht in dem in Abbildung XII.4 gezeigten System bei einem beliebigen Dämpfungskoeffizienten.

Lösung: Wir suchen die Lösung der Wellengleichung (XII.10) mit der Randbedingung (XII.19) als Superposition einer fallenden und einer zurückgespiegelten Welle in komplexer Form:

$$u = u_0 e^{ikct} (e^{ikz} + B e^{-ikz}).$$

Die Amplitude der fallenden Welle haben wir als 1 angenommen. Die Amplitude der zurück gespiegelten Welle ist B . Einsetzen in die Randbedingung (XII.19) ergibt

$$B = e^{-2ikl} \cdot \frac{G - \beta c}{G + \beta c}.$$

Den Abspiegelungskoeffizienten definieren wir als Verhältnis der Intensitäten der zurück gespiegelten und der fallenden Wellen; er ist somit gleich $|B|^2$:

$$|B|^2 = \left(\frac{G - \beta c}{G + \beta c} \right)^2.$$

Der Abspiegelungskoeffizient wird Null für $\beta = G / c = \sqrt{G\rho}$. Für $\beta \rightarrow 0$ und $\beta \rightarrow \infty$ strebt er gegen 1.

Aufgabe 3: Zu bestimmen ist der Abspiegelungskoeffizient zwischen einer elastischen und einer flüssigen Schicht mit der dynamischen Viskosität³ $\bar{\eta}$.

³ Die dynamische Viskosität $\bar{\eta}$ darf nicht mit dem früher in diesem und anderen Kapiteln benutzten Dämpfungskoeffizienten η verwechselt werden, der eine andere Dimension hat.

Lösung: Die zu lösenden Bewegungsgleichungen sind die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

im elastischen Kontinuum und die Navier-Stokes'sche Gleichung für das flüssige Medium, die für reine Transversalbewegungen die Form

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \bar{\eta} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

hat. Die Fläche $z=0$ legen wir in die Grenzfläche zwischen dem elastischen und dem flüssigen Medium. Die positive z -Richtung sei in die elastische Schicht hinein gerichtet. Die Randbedingungen an der Grenzfläche lauten:

$$\dot{u}(0, t) = v(0, t) \quad (\text{Haftbedingung})$$

und

$$G \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \bar{\eta} \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (\text{Gleichgewichtsbedingung}).$$

Die Lösung der Wellengleichung suchen wir wie in der Aufgabe 2 als Superposition einer fallenden und einer zurückgespiegelten Welle

$$u = e^{i\omega t} \left(e^{i\frac{\omega}{c}z} + B e^{-i\frac{\omega}{c}z} \right).$$

Die Lösung der Navier-Stokes-Gleichung mit der Frequenz ω , die im Unendlichen verschwindet, ist

$$v = C e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\rho\omega}{\bar{\eta}}} z} e^{i\omega t}.$$

Einsetzen in die Randbedingungen an der Grenzfläche liefert das folgende Gleichungssystem

$$i\omega(1+B) = C,$$

$$iG \frac{\omega}{c} (1-B) = \bar{\eta} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\rho\omega}{\bar{\eta}}} C.$$

Für den Abspiegelungskoeffizienten ergibt sich

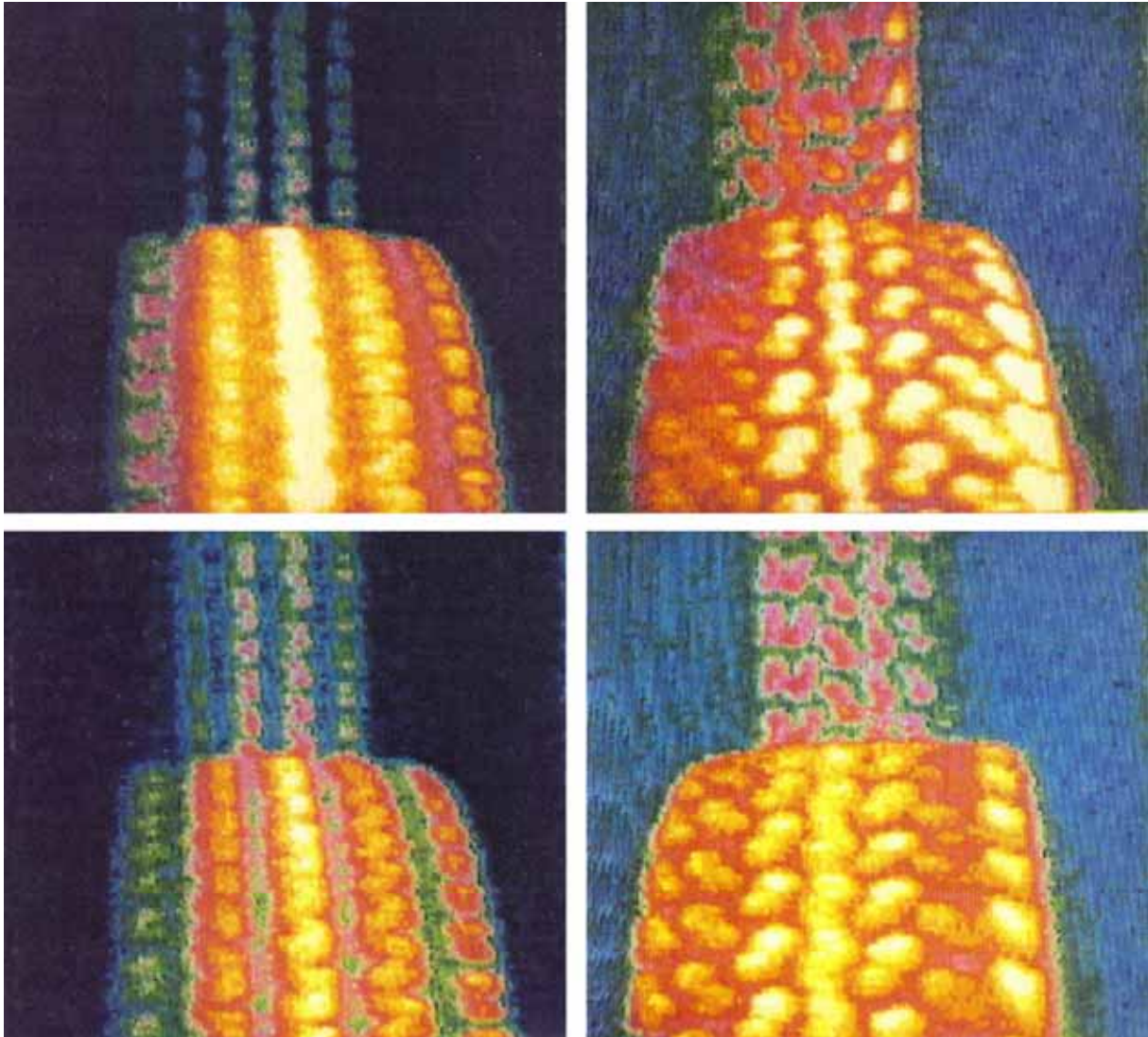
$$|B|^2 = \frac{(1-\zeta)^2 + \zeta^2}{(1+\zeta)^2 + \zeta^2}$$

mit

$$\zeta = \frac{c}{G} \sqrt{\frac{\rho\omega\bar{\eta}}{2}} = \sqrt{\frac{\omega\bar{\eta}}{2G}}.$$

Der Abspiegelungskoeffizient erreicht sein Minimum $|B|^2 \approx 0,17$ für $\zeta = 1/\sqrt{2}$. Wir sehen, dass sich in einem bestimmten Frequenzbereich Schwingungen auch mittels einer flüssigen Schicht (bzw. eines Polymers mit entsprechenden rheologischen Eigenschaften) recht gut dämpfen lassen. In den beiden Grenzfällen verschwindender und unendlich großer Viskosität ist der Abspiegelungskoeffizient erwartungsgemäß gleich 1.

XIII THERMISCHE EFFEKTE IN KONTAKTEN



XIII.1 Einführung

An der Grenzfläche zwischen zwei aneinander reibenden Körpern wird Wärmeenergie freigesetzt. Da die reale Kontaktfläche in der Regel nur einen Bruchteil der scheinbaren Fläche beträgt, ist die Wärmefreisetzung in einem tribologischen Kontakt sehr heterogen. Die lokalen Temperaturerhöhungen in einzelnen Mikrokontakten können so hoch sein, dass sie die Materialeigenschaften beeinflussen oder das Material sogar zum Schmelzen bringen.

Eine lokale Änderung der Temperatur führt ferner zu einer lokalen Wärmedehnung und der damit bedingten Änderung in den Kontaktbedingungen. Diese Rückkopplung kann unter bestimmten Bedingungen zur Entwicklung von thermomechanischen Instabilitäten in Kontakten führen. In diesem Kapitel untersuchen wir verschiedene Aspekte der reibungsbedingten Wärmefreisetzung in tribologischen Kontakten.

XIII.2 Blitztemperaturen in Mikrokontakten

Betrachten wir den Kontakt zwischen zwei rauen Oberflächen im Rahmen des Modells von Greenwood und Williamson (s. Kapitel VII). Wir nehmen dabei an, dass es zwischen Mikrorauigkeiten Reibung gibt mit dem Reibungskoeffizienten μ . Wir berechnen die Temperaturerhöhung in einem Mikrokontakt unter der Annahme, dass die charakteristische Ausbreitungslänge der Wärme $D \approx \sqrt{2\alpha t}$ während der „Lebensdauer“ eines Kontaktes $t \approx a/v$ viel größer ist als der Kontaktradius: $\sqrt{2\alpha t} \gg a$ oder

$$\frac{va}{2\alpha} \ll 1. \quad (\text{XIII.1})$$

α ist hier die *Temperaturleitfähigkeit*, a der Kontaktradius und v die Gleitgeschwindigkeit. Das Verhältnis $va/2\alpha$ ist als *Péclet-Zahl* bekannt. Wenn die Bedingung (XIII.1) erfüllt ist, kann man die Wärmeausbreitung zu jedem Zeitpunkt als einen stationären Prozess mit der gegebenen Wärmeproduktion an der Oberfläche betrachten. Für metallische Stoffe ($\alpha \approx 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, $a \approx 10^{-5} - 10^{-4} \text{ m}$) bedeutet das, dass die Gleitgeschwindigkeit nicht größer sein darf als $2\alpha/a \approx 2 - 20 \text{ m/s}$, was in den meisten Anwendungen erfüllt ist. Für Keramiken und Polymere ($\alpha \approx 10^{-7} - 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $a \approx 10^{-5} \text{ m}$) ist diese Näherung bei Geschwindigkeiten unter $0,02 - 0,2 \text{ m/s}$ gültig.

Eine homogene Temperaturerhöhung ΔT in einem runden Gebiet mit dem Radius a an der Oberfläche eines Halbraumes mit der Wärmeleitfähigkeit λ erzeugt einen Wärmestrom \dot{W} , der mit ΔT durch den Wärmewiderstand R_w verbunden ist:

$$\dot{W} = \frac{\Delta T}{R_w}. \quad (\text{XIII.2})$$

Der Wärmewiderstand für einen runden Kontakt ist gleich

$$R_w = \frac{1}{2a\lambda}. \quad (\text{XIII.3})$$

Wir können die Gleichung (XIII.2) auch umgekehrt zur Abschätzung der Temperaturerhöhung der Oberfläche bei einem gegebenen Wärmestrom benutzen:

$$\Delta T = \frac{\dot{W}}{2a\lambda}. \quad (\text{XIII.4})$$

Unter der Annahme, dass die gesamte Wärme nur in einen Körper fließt, bedeutet das für einen einzelnen elastischen Mikrokontakt

$$\Delta T = \frac{\mu \Delta F_N v}{2a\lambda}. \quad (\text{XIII.5})$$

Indem wir hier die Hertzsche Formel $\Delta F_N = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2}$ einsetzen, erhalten wir

$$\Delta T = \frac{2}{3} \frac{\mu E^* d v}{\lambda}. \quad (\text{XIII.6})$$

Wie wir im Kapitel VII gesehen haben, hängt die mittlere Eindringtiefe \bar{d} praktisch nicht von der Anpresskraft ab und ist ungefähr gleich der Rauigkeit l .

Für die mittlere Temperaturerhöhung in Mikrokontakten erhalten wir daher

$$\overline{\Delta T} \approx \frac{2}{3} \frac{\mu E^* l v}{\lambda} \quad (\text{XIII.7})$$

Für einen Kontakt Stahl-Saphir ($E^* \approx 140 \text{ GPa}$, $\mu \approx 0,15$, $l \approx 1 \mu\text{m}$ und $\lambda \approx 40 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$) bei einer Gleitgeschwindigkeit von 1 m/s erreicht die mittlere Temperaturerhöhung in Mikrokontakten $\overline{\Delta T} \approx 350 \text{ K}$. Für Kupfer mit $E^* \approx 100 \text{ GPa}$ und $\lambda \approx 400 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$ hätten wir unter sonst gleichen Annahmen eine mittlere Temperaturerhöhung von $\overline{\Delta T} \approx 25 \text{ K}$. In den Anwendungen, wo die Blitztemperaturen möglichst klein gehalten werden müssen¹, ist es vorteilhaft, eine Paarung aus einem Polymer und einer Keramik zu wählen. Für E^* gilt dann der (kleine) Elastizitätsmodul des Polymers und für λ eine in der Regel viel größere Wärmeleitfähigkeit der Keramik.

XIII.3 Thermomechanische Instabilität

Werden zwei aneinander gepresste ebene Körper in relative Bewegung versetzt, so kann es durch Wechselwirkung zwischen Freisetzung der Reibenergie und thermischer Dehnung zu einer Instabilität kommen: Bereiche mit höherer Temperatur und somit größerer Dehnung werden einer höheren Normalspannung ausgesetzt und dadurch noch stärker erwärmt (Abbildung XIII.1). Wir wollen die Bedingung für die Entwicklung einer solchen Instabilität untersuchen.

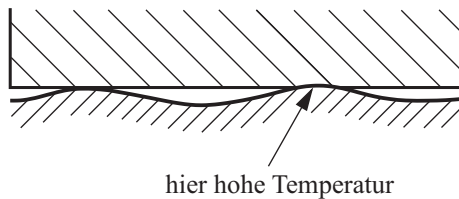


Abbildung XIII.1. Die Bereiche mit erhöhter Temperatur beulen sich durch die thermische Dehnung aus, dies führt zu einer erhöhten Reibungsleistung und weiterer Erwärmung dieser Bereiche. Dies kann zu einer Instabilität und der Bildung eines bleibenden Musters führen

Als erstes machen wir eine grobe Abschätzung. Würde sich eine Instabilität mit einer Wellenzahl k entwickeln, so gebe es in dem Oberflächenbereich periodische Spannungs- und Temperaturverteilungen mit dieser Wellenzahl. Die „Abklingtiefe“ dieser Spannungs- und Temperaturfluktuationen – und somit die Größenordnung der deformierten Oberflächenzone, hat die Größenordnung $1/k$. Wird die Oberfläche (im Druckgebiet) um ΔT erwärmt, so führt das zur thermischen Spannung

$$\Delta \sigma \approx \gamma \Delta T \cdot E^*, \quad (\text{XIII.8})$$

wobei γ der volumenspezifische Wärmeausdehnungskoeffizient und E^* der effektive elastische Modul ist. Die Reibungsleistung pro Flächeneinheit $\mu \Delta \sigma v$ muss im stationären Zustand gleich dem Wärmestrom in die Tiefe des Werkstoffs sein:

$$\mu \Delta \sigma v \approx \lambda \frac{\Delta T}{1/k}. \quad (\text{XIII.9})$$

¹ In künstlichen Hüftgelenken darf die Temperatur nicht die Temperatur der Zersetzung von Eiweiß übersteigen.. Die zulässige Temperaturerhöhung ist somit auf 2-4 K begrenzt.

Unter Berücksichtigung von (XIII.8) folgt daraus für den Wellenvektor, bei dem die Wärmeproduktion und der Wärmeabfluss im Gleichgewicht sind,

$$k_c = \frac{E^* \mu \gamma V}{\lambda}. \quad (\text{XIII.10})$$

Temperaturstörungen mit kleineren Wellenzahlen als die kritische sind instabil.

Thermomechanische Instabilität kann unter anderem für das bekannte Phänomen des ‚waschbrettartigen‘ Verschleißes im Laufbereich von Kolbenringen in sehr hoch belasteten Motoren verantwortlich sein (s. Abbildung XIII.2).



Abbildung XIII.2. Aufnahme einer Zylinderlauffläche mit ‚Waschbrett‘

Aufgaben

Aufgabe 1: Es ist die Stabilitätsbedingung für eine thermomechanische Instabilität in einem Kontakt zwischen einem elastischen und einem starren Körper zu bestimmen.

Lösung: Es handelt sich um das gleiche Problem, für das wir oben bereits eine Abschätzung gemacht haben. Wir betrachten das in Abbildung XIII.3 gezeigte System. Der obere Körper soll absolut starr und nicht wärmeleitend sein.

An der Grenze zwischen einem stabilen und einem instabilen Zustand sind die Störungen stationär. Zur Feststellung der Instabilitätsbedingung gehen wir daher von einer Gleichgewichtsgleichung für den elastischen Körper unter Berücksichtigung der Wärmedehnung:

$$\frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \Delta \bar{u} + \frac{3}{2} \frac{1}{(1+\nu)} \nabla \operatorname{div} \bar{u} = \gamma \nabla T \quad (\text{XIII.11})$$

und der stationären Gleichung für thermische Leitung aus

$$\Delta T = 0. \quad (\text{XIII.12})$$

\bar{u} ist der Verschiebungsvektor, ν die Poisson-Zahl, T die Abweichung der Temperatur von ihrem stationären Wert weit weg von der Oberfläche und $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ist der Laplace-Operator. Der Spannungstensor berechnet sich zu

$$\sigma_{ik} = -\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \gamma T \delta_{ik} + \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta_{ik} + G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right), \quad (\text{XIII.13})$$

G ist hier der Schubmodul.

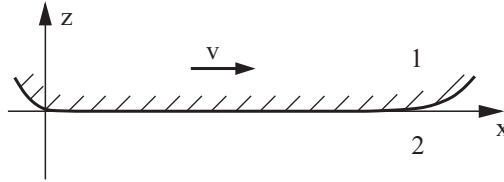


Abbildung XIII.3. Ein starrer, nicht wärmeleitender Körper 1 im Kontakt mit einem elastischen Kontinuum 2. Die Körper bewegen sich relativ zueinander mit einer tangentialen Geschwindigkeit v

Unter Annahme der Starrheit des oberen Körpers kann die Oberfläche des elastischen Körpers keine vertikalen Verschiebungen ausführen:

$$u_z(z=0) = 0 \quad (\text{XIII.14})$$

Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass der Reibungskoeffizient sehr klein ist und die Normalspannungskomponente σ_{zz} dominiert, so dass die Tangentialspannung in den mechanischen Gleichgewichtsbedingungen als verschwindend klein angenommen werden darf:

$$\sigma_{xz}(z=0) = 0 \quad (\text{XIII.15})$$

Die die Bedingungen (XIII.14) und (XIII.15) erfüllende Lösung der Gleichungen (XIII.11) und (XIII.12) ist²

$$T = T_0 \cos kx \cdot e^{kz}, \quad \vec{u} = -\frac{\gamma T_0 (1+\nu)}{6(1-\nu)k} \left((-1+kz) \sin kx, 0, -kz \cos kx \right) \cdot e^{kz} \quad (\text{XIII.16})$$

Im stationären Zustand muss die auf der Oberfläche freigesetzte Wärme gleich dem Wärmeabfluss von der Oberfläche sein (der nach unserer Annahme nur in den unteren Körper erfolgt):

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -\mu \nu \sigma_{zz}(z=0) \quad (\text{XIII.17})$$

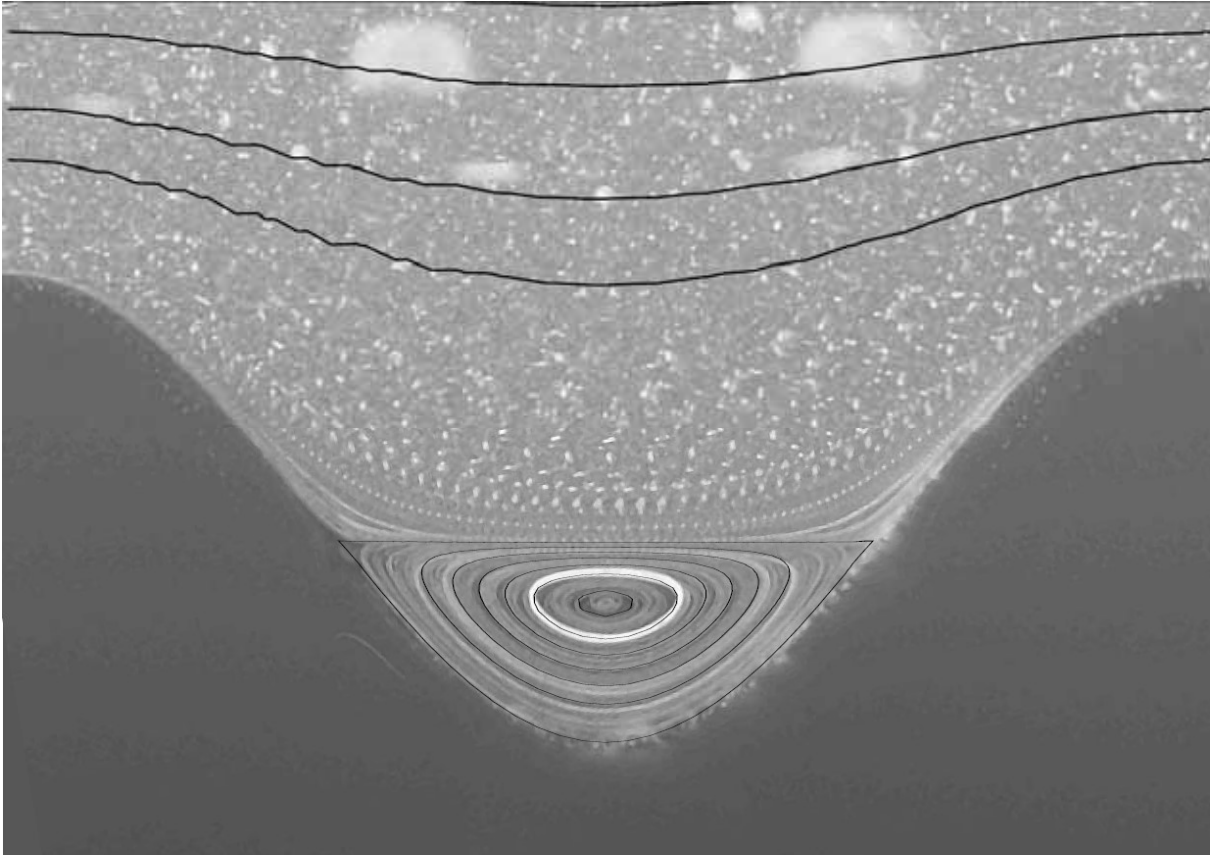
λ ist der Wärmeleitungskoeffizient. Daraus folgt für den kritischen Wert der Wellenzahl

$$k_c = \frac{\nu \mu G \gamma (1+\nu)}{3\lambda(1-\nu)}. \quad (\text{XIII.18})$$

Für $\nu = 1/3$ gilt $k_c = \frac{2}{3} \frac{\nu \mu G \gamma}{\lambda}$. Temperaturstörungen mit kleineren Wellenzahlen als die kritische sind instabil.

² Die Wahl der Abhängigkeit $\cos kx$ der Lösung von der Koordinate x bedeutet, dass wir die Entwicklung einer harmonischen Störung untersuchen. Eine beliebige Störung kann infolge der Linearität des Problems immer als Superposition von Fourier-Komponenten mit verschiedenen Wellenzahlen k dargestellt werden.

XIV GESCHMIERTE SYSTEME



XIV.1 Einführung

Zur Verminderung der Reibungskraft und des Verschleißes werden seit Jahrtausenden Schmiermittel eingesetzt, deren Wirkung darauf beruht, dass direkter Kontakt zwischen zwei Festkörpern verhindert und dadurch die trockene Reibung durch die Flüssigkeitsreibung ersetzt wird. Die Anwesenheit einer Flüssigkeitsschicht zwischen zwei Festkörpern beeinflusst aber nicht nur Tangential-, sondern auch Normalkräfte: Zwei trockene Glasscheiben können ohne Mühe auseinander genommen werden, während zum Auseinandernehmen von zwei nassen Scheiben eine erhebliche Kraft erforderlich sein kann. Dieses Phänomen kann zum einen auf die Kapillarkräfte zurückgeführt werden, zum anderen kann es von rein hydrodynamischer Natur sein: Eine viskose Flüssigkeit braucht eine gewisse Zeit, um in einen engen Spalt zwischen zwei Scheiben hinein zu fließen. Diese Erscheinung führt bei dynamischen Beanspruchungen zu einer scheinbaren „Adhäsion“ zwischen geschmierten Körpern, die wir als „viskose Adhäsion“ bezeichnen.

In geschmierten Tribosystemen haben wir es in den meisten Fällen mit nichtturbulenten Strömungen zu tun. Die Schmiermittel können außerdem in guter Näherung als inkompressibel angenommen werden. Unsere Betrachtung der hydrodynamischen Schmierung und der viskosen Adhäsion beginnen wir mit der Untersuchung einer stationären Strömung zwischen zwei parallelen Platten, welche die Grundlage für die Schmierungstheorie bildet.

XIV.2 Strömung zwischen zwei parallelen Platten

Die Dynamik einer linear-viskosen (Newtonschen) Flüssigkeit wird durch die Navier-Stokes-Gleichung gegeben, die für inkompressible Flüssigkeiten die folgende Form annimmt

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v}, \quad (\text{XIV.1})$$

wobei ρ die Dichte, η die dynamische Viskosität der Flüssigkeit und p der Druck in der Flüssigkeit sind. Eine inkompressible Flüssigkeit genügt darüber hinaus der Gleichung

$$\text{div} \vec{v} = 0. \quad (\text{XIV.2})$$

Bei quasistatischen Strömungen (so genannte *schleichende* Strömungen), mit denen wir es in den Schmierungsproblemen meistens zu tun haben, kann der Trägheitsterm in der Navier-Stokes-Gleichung vernachlässigt werden, und sie nimmt die folgende *quasistatische* Form an

$$\eta \Delta \vec{v} = \nabla p \quad (\text{XIV.3})$$

Betrachten wir zwei durch eine flüssige Schicht getrennte Platten. Im allgemeinen Fall können sich die Platten relativ zu einander bewegen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir die Geschwindigkeit der oberen Platte als Null annehmen. Die Geschwindigkeit der unteren Platte bezeichnen wir durch $-v_0$.

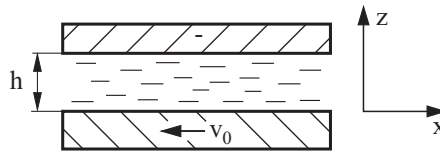


Abbildung XIV.1. Strömung zwischen zwei parallelen Platten

Wir betrachten eine stationäre Strömung in der x-Richtung. Demnach hat die Geschwindigkeit nur die x-Komponente, die von der z-Koordinate abhängt: $\vec{v} = (v(z), 0)$. Die Gleichung (XIV.3) nimmt die folgende Form an

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_x = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (\text{XIV.4})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_z = 0 \quad (\text{XIV.5})$$

Aus (XIV.5) folgt, dass der Druck von der vertikalen Koordinate z nicht abhängt: $p = p(x)$. Zweimalige Integration von (XIV.4) ergibt

$$\eta v = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2. \quad (\text{XIV.6})$$

Aus den Randbedingungen $v(0) = -v_0$ und $v(h) = 0$ folgen $C_2 = -\eta v_0$ und $C_1 = \frac{\eta v_0}{h} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{h}{2}$. Die Geschwindigkeitsverteilung ist somit durch

$$\eta v = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{z(z-h)}{2} + \frac{\eta v_0}{h} (z-h). \quad (\text{XIV.7})$$

gegeben.

XIV.3 Hydrodynamische Schmierung

Betrachten wir jetzt zwei in Abbildung XIV.2 skizzierte Körper. Die Oberfläche des einen sei etwas geneigt relativ zur Oberfläche des zweiten Körpers, die wir hier als absolut eben und glatt annehmen. Wir nehmen weiterhin an, dass sich die Unterlage nach links mit der Geschwindigkeit $-v_0$ bewegt. Bei kleiner Neigung kann man die Strömung an jedem Punkt als eine Strömung zwischen zwei parallelen Platten betrachten und für die Geschwindigkeitsverteilung die Gleichung (XIV.7) benutzen:

$$v = p' \cdot \frac{z(z-h)}{2\eta} + \frac{v_0}{h}(z-h) \quad (\text{XIV.8})$$

Hier haben wir den Druckgradienten mit p' bezeichnet.

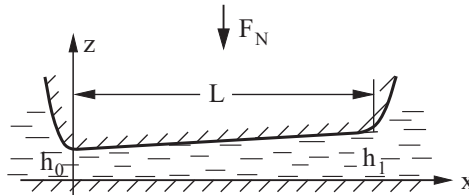


Abbildung XIV.2 Zwei aneinander gleitende Körper getrennt durch eine Schmierflüssigkeit.

Aus der Massenerhaltung folgt, dass die durch jeden Querschnitt pro Zeiteinheit fließende Flüssigkeitsmenge Q konstant ist:

$$\frac{Q}{D} = \int_0^h v(z) dz = \int_0^h \left(p' \cdot \frac{z(z-h)}{2\eta} + \frac{v_0}{h}(z-h) \right) dz = -p' \cdot \frac{h^3}{12\eta} - \frac{v_0 h}{2} = \text{const}, \quad (\text{XIV.9})$$

wobei D die Breite des gleitenden Körpers ist. Für den Druckgradienten erhalten wir demnach

$$\frac{dp}{dx} = -6\eta v_0 \left(\frac{1}{h^2} - \frac{C}{h^3} \right). \quad (\text{XIV.10})$$

Bei einem linearen Anstieg der Höhe $h = h_0 + ax$ kann (XIV.10) explizit integriert werden, und wir bekommen für den Druck

$$\begin{aligned} p &= p_{\text{ext}} - 6\eta v_0 \int_0^x \left(\frac{1}{h^2} - \frac{C}{h^3} \right) dx = p_{\text{ext}} - \frac{6\eta v_0}{a} \int_{h_0}^h \left(\frac{1}{h^2} - \frac{C}{h^3} \right) dh \\ &= p_{\text{ext}} + \frac{3\eta v_0}{a} \left(2 \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0} \right) - C \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{XIV.11})$$

Bei der bestimmten Integration haben wir berücksichtigt, dass $p(0) = p_{\text{ext}}$ ist. Auf der anderen Seite ($x=L$) ist der Druck ebenfalls gleich dem Aussendruck p_{ext} , woraus $C = 2h_0 h_1 / (h_0 + h_1)$ folgt. Für die Druckverteilung erhalten wir somit

$$p = p_{\text{ext}} + \frac{6\eta v_0}{a} \left(\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0} \right) - \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) \right). \quad (\text{XIV.12})$$

Das Geschwindigkeitsfeld ist gegeben durch

$$v = v_0 (z-h) \left[\frac{1}{h} + 3z \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{2}{h^3} \cdot \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1} \right) \right]. \quad (\text{XIV.13})$$

Dieses Geschwindigkeitsprofil und die Druckverteilung für $p_{\text{ext}} = 0$ (XIV.12) sind in der *Abbildung XIV.3* gezeigt.

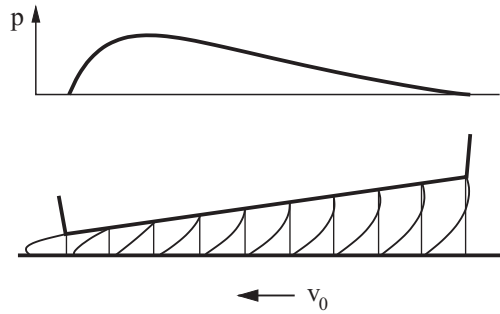


Abbildung XIV.3. Geschwindigkeitsprofil und Druckverteilung zwischen zwei hydrodynamisch geschmierten ebenen Gleitflächen

Sind sowohl die Geschwindigkeitsverteilung als auch die Druckverteilung bekannt, so kann man leicht die x- und z-Komponenten der auf den oberen Körper wirkenden Kraft berechnen. Für die vertikale Kraftkomponente gilt

$$F_N = \int dx dy (p - p_{ext}) = \frac{\eta A L v_0}{h_0^2} \alpha \quad (\text{XIV.14})$$

mit $\alpha = \frac{6}{(\xi - 1)^2} \left[\ln \xi - \frac{2(\xi - 1)}{\xi + 1} \right]$ und $\xi = h_1 / h_0$; $A = LD$ ist die scheinbare „Kontaktfläche“.

Die horizontale Kraftkomponente ist durch die viskose Spannung $\sigma_{xz} = \eta \partial v / \partial z$ verursacht und berechnet sich zu

$$F_R = \eta \int_A dx dy \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\eta A v_0}{h_0} \beta \quad (\text{XIV.15})$$

mit $\beta = \frac{1}{\xi - 1} \left[4 \ln \xi - \frac{6(\xi - 1)}{\xi + 1} \right]$. Für den Reibungskoeffizienten erhalten wir

$$\mu = \frac{F_R}{F_N} = \left(\frac{h_0}{L} \right) \frac{\beta}{\alpha}. \quad (\text{XIV.16})$$

Der Reibungskoeffizient hängt von dem im Kontaktgebiet herrschenden mittleren Druck ab. Wenn wir die Spaltdicke h_0 aus (XIV.14) berechnen und in (XIV.16) einsetzen, erhalten wir

$$\mu = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{A \eta v_0}{L F_N}} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{\eta v_0}{L P}}. \quad (\text{XIV.17})$$

$P = F_N / A$ ist hier der mittlere Druck im Kontaktgebiet. Die Abhängigkeit der Parameter β / α sowie $\beta / \sqrt{\alpha}$ von ξ ist in *Abbildung XIV.4* gezeigt. Das Verhältnis β / α liegt im relevanten Bereich von ξ -Werten zwischen 5 und 10. Für den Reibungskoeffizienten ergibt sich somit die folgende grobe Abschätzung

$$\mu \approx 10 \left(\frac{h_0}{L} \right). \quad (\text{XIV.18})$$

Der Reibungskoeffizient ist in etwa gleich dem 10fachen Verhältnis der kleinsten Spaltdicke zur Länge des Gleitkontaktes. Im breiten Intervall von relevanten Verhältnissen ξ ändert sich das Verhältnis $\beta / \sqrt{\alpha}$ nur schwach und ist ungefähr gleich 2. Wir erhalten daher aus (XIV.17) in guter Näherung

$$\mu \approx 2 \sqrt{\frac{\eta v_0}{L P}}. \quad (\text{XIV.19})$$

Bei gleicher Länge des Kontaktbereiches ist der Reibungskoeffizient eine Funktion der Parameterkombination $\eta v_0 / P$.

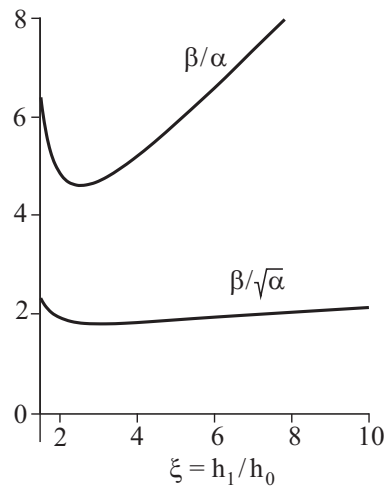


Abbildung XIV.4

Je Größer der Druck, desto kleiner ist der Reibungskoeffizient. Zu beachten ist aber, dass die Spaltdicke mit dem steigenden Druck ebenfalls abnimmt: $h_0 = \sqrt{\alpha L \frac{\eta v_0}{P}}$. Bei ausreichend kleinen Spaltdicken ist die getroffene Annahme, dass die Flächen glatt sind, nicht mehr gültig; der Einfluss von Rauigkeiten wird wesentlich und das System geht in das Gebiet der Mischreibung über. Bei noch größeren Drücken steigt deshalb der Reibungskoeffizient wieder an. Die Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von dem Parameter $\eta v_0 / P$ nennt man „Stribeck-Kurve“. Sie beschreibt die Abhängigkeit von allen auftretenden Parametern. Insbesondere bestimmt sie die Abhängigkeit der Reibungskraft in einem geschmierten System von der Geschwindigkeit. Bei großen Werten von $\eta v_0 / P$ hat diese Abhängigkeit einen universellen Charakter. Im Bereich der Mischreibung dagegen hängt der Verlauf der Kurve von den Eigenschaften der Fläche und der Schmiermittel ab. Zur Mischreibung kommt es auch bei einer Verminderung der Gleitgeschwindigkeit. Je größer die Geschwindigkeit, desto größer die Schichtdicke des Schmiermittels und desto seltener kommen die Flächen in direkten Kontakt mit den Rauigkeiten.

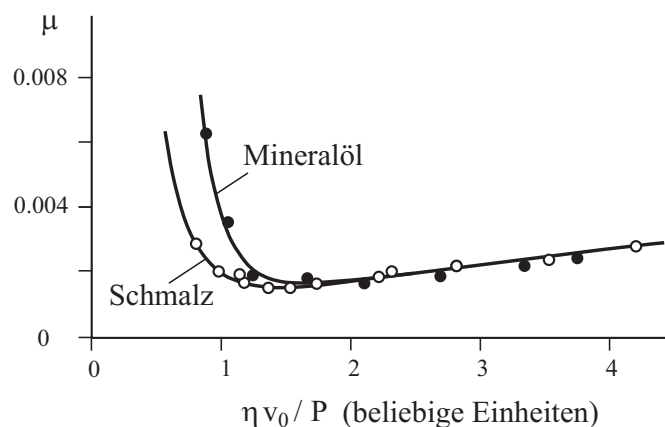


Abbildung XIV.5. Stribeck-Kurven für zwei verschiedene Öle als Schmiermittel. Bei großen Geschwindigkeiten fallen sie zusammen. Bei kleinen Werten von $\eta v_0 / P$ weisen aber gleiche Systeme mit verschiedener Schmierung verschiedenem Verhalten auf¹

¹ A.E. Norton: Lubrication (McGraw-Hill, New York 1942).

XIV.4 „Viskose Adhäsion“

Befindet sich zwischen zwei Körpern eine flüssige Schicht, so können diese weder schnell an einander gedrückt noch schnell getrennt werden. Der letztere Effekt wird oft als eine Art „Adhäsion“ empfunden. Bei dynamischen Vorgängen ist es oft schwer zwischen einer „echten“ Adhäsion (die entweder durch die Oberflächenkräfte zwischen Festkörpern oder Kapillarbrücken bedingt ist) und dieser „viskosen Adhäsion“ zu unterscheiden. Die Annäherung zweier Körper mit einer flüssigen Zwischenschicht kann nur durch „Ausquetschen“ der Schicht passieren. Bei der Trennung muss die Flüssigkeit wieder in den Spalt einfließen, es sei denn, die Trennung geschieht durch Kavitation (Bildung und Zusammenfließen von Dampfblasen). Beide Prozesse erfordern jedoch eine bestimmte Zeit.

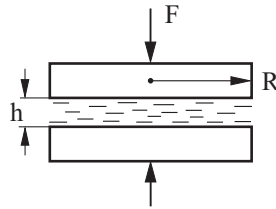


Abbildung XIV.6. Ausquetschen einer flüssigen Schicht zwischen zwei runden Platten

Wir betrachten zunächst die Annäherung zweier runder Platten mit dem Radius R mit einer zwischen denen sich eine flüssige Schicht befindet (Abbildung XIV.6). Die durch die vertikale Annäherung der Platten ausgequetschte Flüssigkeit führt zu einer radialen Strömung. Aus Symmetriegründen ist klar, dass die Strömungsgeschwindigkeit radial symmetrisch ist. Ist die Dicke des Spaltes zwischen den Platten viel kleiner als der Radius der Platten, so ist die radiale Komponente der Geschwindigkeit viel größer als die Annäherungsgeschwindigkeit der Platten, und wir haben es im Wesentlichen mit einer Strömung unter der Wirkung eines Druckgradienten zu tun, die wir im ersten Abschnitt untersucht haben. Die Geschwindigkeit ist demnach gleich

$$v = p' \frac{z(z-h)}{2\eta} \quad (\text{XIV.20})$$

wobei $p' = \partial p / \partial r$. Der Volumenstrom durch eine zylindrische Fläche mit dem Radius r ist

$$Q = \int_0^h 2\pi r v(z) dz = p' \frac{\pi r}{\eta} \int_0^h z(z-h) dz = -p' \frac{\pi r h^3}{6\eta}. \quad (\text{XIV.21})$$

Dieser Strom muss andererseits gleich dem Volumenstrom $Q = -\pi r^2 \dot{h}$ durch die obere Fläche der Schicht dank der vertikalen Bewegung der oberen Platte sein:

$$-\pi r^2 \dot{h} = -p' \frac{\pi r h^3}{6\eta}. \quad (\text{XIV.22})$$

Für den Druckgradienten ergibt sich daraus

$$p' = \frac{6\eta \dot{h}}{h^3} \quad (\text{XIV.23})$$

oder nach einer einmaligen Integration

$$p = \frac{6\eta \dot{h}}{h^3} \int r dr = \frac{3\eta \dot{h}}{h^3} r^2 + C. \quad (\text{XIV.24})$$

Die Integrationskonstante bestimmt sich aus der Randbedingung $p(r=R) = p_0$ (Aussendruck):

$$C = p_0 - \frac{3\eta \dot{h}}{h^3} R^2. \quad (\text{XIV.25})$$

Die Druckverteilung nimmt somit endgültig die Form

$$p = \frac{3\eta\dot{h}}{h^3}(r^2 - R^2) + p_0 \quad (\text{XIV.26})$$

an. Berechnen wir die auf die vertikale Platte wirkende Druckkraft

$$F = \int_0^R 2\pi r (p(r) - p_0) dr = \frac{6\eta\pi\dot{h}}{h^3} \int_0^R (r^2 - R^2) r dr = -\frac{3\eta\pi\dot{h}}{2h^3} R^4. \quad (\text{XIV.27})$$

Bei der vorgegebenen Kraft können wir jetzt die Zeit berechnen, die gebraucht wird, damit sich die Platten von einem Abstand h_0 bis zum Abstand h annähern:

$$\int_0^t \frac{2F}{3\eta\pi R^4} dt = -\int_{h_0}^h \frac{dh}{h^3} \quad (\text{XIV.28})$$

$$\frac{2F}{3\eta\pi R^4} t = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \right). \quad (\text{XIV.29})$$

Bei großen Anfangsabständen hängt diese Zeit praktisch nur vom minimalen Abstand ab, der zu erreichen ist:

$$t = \frac{3\eta\pi R^4}{4Fh^2}. \quad (\text{XIV.30})$$

Hängt die Kraft F von der Zeit ab, so gilt:

$$\int_0^t F(t) dt = \frac{3\eta\pi R^4}{4h^2}. \quad (\text{XIV.31})$$

Das heißt, die minimale erreichbare Schichtdicke hängt nur vom Kraftstoß ab.

Zur Illustration dieser Idee betrachten wir einen mit einer viskosen Flüssigkeit beschmierten Körper, der gegen die Decke mit der Geschwindigkeit v geworfen wird (*Abbildung XIV.7*). Wie lange wird er anschließend an der Decke hängen bleiben? Direkt vor dem Stoß ist der Impuls des Körpers gleich Mv . Er wird während des Stoßes durch den Kraftstoß der Reaktionskraft der Decke auf Null gebracht. Der Kraftstoß ist demnach auch gleich Mv . Da der Kraftstoß zur Annäherung bis zum Abstand h gleich dem Kraftstoß zum Trennen vom Abstand h ist, muss der Kraftstoß Mgt der Schwerkraft bis zum "Abreißen" der Platte gleich Mv sein. Daraus folgt, dass $t = v/g$. Das gilt nur für Newtonsche Flüssigkeiten. Aus (XIV.31) folgt, dass viskose Adhäsion mit Newtonschen Flüssigkeiten zum Gehen auf der Decke nicht benutzt werden kann. Anders ist es, wenn die Viskosität einer Flüssigkeit vom Geschwindigkeitsgradienten abhängig ist. Wie man der Gleichung (XIV.31) entnehmen kann, ist der Kraftstoß zur Annäherung bis zur Schichtdicke h (bzw. zum Auseinandernehmen der Platten vom Abstand h) proportional zur Viskosität. Bei nichtlinear viskosen Flüssigkeiten hängt die Viskosität von der Geschwindigkeit ab (in der Regel kleiner). Schiebt man die Platten zunächst sehr schnell zusammen und dann langsam auseinander, so ist der positive Kraftstoß bei der Annäherung kleiner als der negative beim Auseinandernehmen der Platten. Diese Differenz kann benutzt werden, um einen sich so bewegenden Körper im Gleichgewicht an der Decke zu halten.

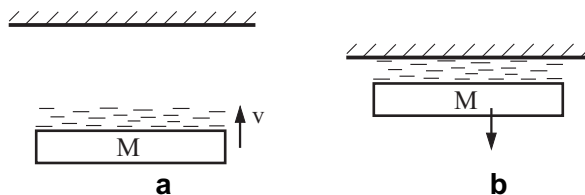


Abbildung XIV.7. Eine gegen die "Decke" geschleuderte Platte mit einer flüssigen Schicht wird an der Decke eine Weile hängen bleiben

XIV.5 Rheologie von Schmiermitteln

Bisher haben wir angenommen, dass das Schmiermittel eine linear viskose (Newtonsche) Flüssigkeit ist. Das bedeutet, dass die Viskosität eine Konstante ist, die weder von dem Geschwindigkeitsgradienten, noch vom Druck abhängt. In der Praxis sind Abweichungen vom linearviskosen Verhalten oft gewünscht und werden durch spezielle Additive herbeigeführt. In diesem Paragraphen diskutieren wir qualitativ die wichtigsten Abweichungen vom linearviskosen Verhalten.

Auf der räumlichen Skala von einigen atomaren Durchmessern und zeitlicher Skala von $10^{-13} \div 10^{-10}$ s stellt eine Flüssigkeit einen amorphen Körper dar, in dem jedes Molekül in einem von den Nachbarn gebildeten Minimum der potentiellen Energie oszilliert und seinen Platz nur sehr selten dank thermischer Fluktuationen verlässt. Diese vom mikroskopischen Gesichtspunkt sehr seltenen Sprünge sind jedoch physikalische Ursache für das Fließen von Flüssigkeiten unter der Einwirkung von Scherspannungen. Ist die Scherspannung im Medium gleich Null, so kann jedes Molekül in jede Richtung mit der gleichen Wahrscheinlichkeit P springen, die durch den Boltzmannschen Faktor

$$P \propto e^{-\frac{U_0}{kT}} \quad (\text{XIV.32})$$

gegeben wird, wobei U_0 die Aktivierungsenergie, T die absolute Temperatur und k die Boltzmannsche Konstante sind. In Abwesenheit einer makroskopischen Spannung herrscht keine makroskopische Bewegung in der Flüssigkeit. Wird an das Medium eine Scherspannung τ angelegt, so verändert dies die Höhe der Potentialbarrieren bei Sprüngen von Molekülen „nach rechts“ ($U_r = U_0 - \tau V_0$) und „nach links“ ($U_l = U_0 + \tau V_0$). V_0 ist hier das so genannte Aktivierungsvolumen. Die Aktivierungsenergie U_0 hängt darüber hinaus von dem in der Flüssigkeit herrschenden Druck p ab. In der Regel steigt sie mit dem Druck: $U_0 = E_0 + pV_1$, wobei V_1 eine weitere Konstante mit der Dimension „Volumen“ ist. Die Aktivierungsenergien für Molekülbewegung in entgegengesetzten Richtungen können daher als

$$\begin{aligned} U_r &= E_0 + pV_1 - \tau V_0 \\ U_l &= E_0 + pV_1 + \tau V_0 \end{aligned} \quad (\text{XIV.33})$$

geschrieben werden. Beide Aktivierungsvolumen V_0 und V_1 haben die Größenordnung eines atomaren Volumens a^3 , wobei a der atomare Radius ist. Die Geschwindigkeit der makroskopischen Scherdeformation ist proportional zu der Differenz zwischen Molekularströmen in entgegengesetzten Richtungen:

$$\dot{\gamma} = \frac{dv_x}{dz} = \text{const} \left\{ e^{-\frac{E_0 + pV_1 - \tau V_0}{kT}} - e^{-\frac{E_0 + pV_1 + \tau V_0}{kT}} \right\} = C \cdot e^{-\frac{E_0 + pV_1}{kT}} \cdot \sinh\left(\frac{\tau V_0}{kT}\right) \quad (\text{XIV.34})$$

Diese Gleichung bildet in kompakter Form die wichtigsten typischen Abweichungen der Rheologie von Flüssigkeiten von den Eigenschaften einer Newtonschen Flüssigkeit ab. Folgende Grenzfälle geben einen differenzierteren Einblick in die Eigenschaften, die durch die Gleichung (XIV.34) beschrieben sind:

1). Ist die Spannung sehr klein: $\frac{\tau V_0}{kT} \ll 1$, so kann man $\sinh\left(\frac{\tau V_0}{kT}\right)$ bis auf die Glieder höherer Ordnung gleich $\frac{\tau V_0}{kT}$ setzen. Für die Geschwindigkeit der Scherdeformation erhalten wir

$$\dot{\gamma} = \frac{dv_x}{dz} = C \cdot e^{-\frac{E_0 + pV_1}{kT}} \cdot \frac{\tau V_0}{kT} \quad (\text{XIV.35})$$

Diese Gleichung besagt, dass der Geschwindigkeitsgradient proportional zur Scherspannung ist. Der Proportionalitätskoeffizient ist nichts anderes als die dynamische Viskosität des Mediums:

$$\eta = \frac{kT}{CV_0} e^{\frac{E_0 + pV_1}{kT}} \quad (\text{XIV.36})$$

Unter der bei Raumtemperatur gültigen Bedingung $kT \ll E_0$ nimmt die Viskosität mit der Temperatur exponentiell schnell ab. Typisch ist eine ca. zweifache Verminderung der Viskosität bei einem Temperaturanstieg von 30° . Viskosität weist weiterhin eine exponentielle Druckabhängigkeit auf. Der Koeffizient $\alpha = V_1 / kT$ in der Druckabhängigkeit $\eta \propto e^{\alpha p}$ trägt den Namen *Druckindex*. Bei Raumtemperatur hat der Druckindex die Größenordnung von $\alpha \sim 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$.

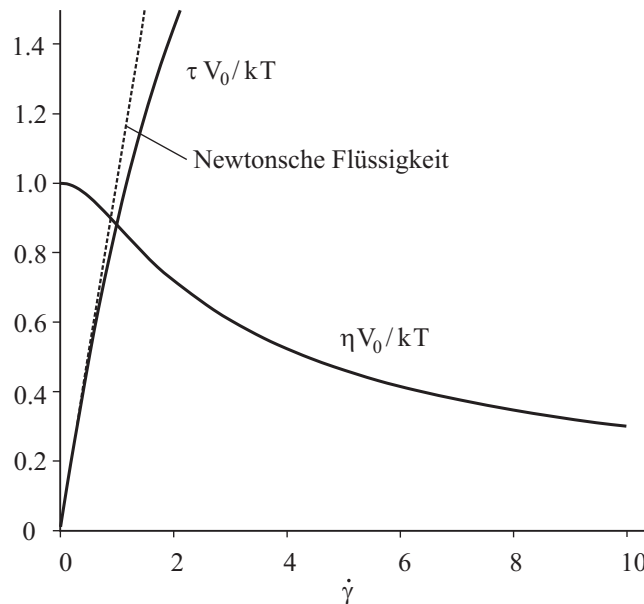


Abbildung XIV.8. Abhängigkeit der Scherspannung von der Geschwindigkeit der Scherdeformation (Geschwindigkeitsgradienten) gemäß (XIV.34) und der als $\tau / \dot{\gamma}$ definierten Viskosität.

Die Viskosität nimmt mit der Deformationsgeschwindigkeit ab

II). Im Allgemeinen ist die Abhängigkeit (XIV.34) nicht linear. Die Deformationsgeschwindigkeit steigt mit der Scherspannung schneller als nach einem linearen Gesetz. Das bedeutet, dass bei großen Spannungen bzw. Geschwindigkeitsgradienten die Viskosität kleiner ist.

XIV.6 Grenzschichtschmierung

Wird die Dicke des Schmierfilms vergleichbar mit der Rauigkeit der Oberflächen, so kommt das System in den Bereich der *Mischreibung*, bei der ein Teil der Oberflächen nach wie vor durch eine flüssige Schicht getrennt sind, während an anderen Stellen die Mikrorauigkeiten in engen Kontakt kommen. An diesen Stellen können die Oberflächen plastisch deformiert und in einen atomar dichten Kontakt kommen. Hardy (1919-1922) hat als erster festgestellt, dass unter diesen Bedingungen Schmierung mit Fetten die Oberflächen besser schützt als mit flüssigen Ölen. Er hat gezeigt, dass bereits eine monomolekulare Fettschicht sowohl die Reibung als auch Verschleiß drastisch verringern kann. Hardy hat auch richtig erkannt, dass die Grenzschicht an der Metalloberfläche haftet. Reibung unter Bedingungen, bei denen die Oberfläche durch eine sehr dünne, mit der Metalloberfläche fest verbundene Schicht bleibt, nennt man *Grenzschichtreibung*. Sowohl

der Reibungskoeffizient als auch Verschleiß nehmen nach Hardy mit der Zunahme des Molekulargewichtes des Fettes ab. Für die Effektivität von Grenzschichten ist wichtig, dass die Fettsäure mit der Metalloberfläche eine *Metallseife* bildet. Der Mechanismus der Schutzwirkung der Grenzschichtschmierung ist nach Bowden und Tabor ähnlich, wie bei dünnen Metallschichten (s. Kapitel X). Insbesondere bleiben die Schichten wirksam nur bis zur Schmelz- bzw. Erweichungstemperatur der an der Oberfläche gebildeten Metallseife.

Der wichtigste Unterschied eines Schmierfettes zu einem Schmieröl besteht daran, dass Schmieröle flüssige Stoffe, während Fette und Metallseifen Festkörper mit einer kleinen, aber endlichen Fließgrenze sind. Ein Öl kann daher an Kontaktstellen in endlicher Zeit vollständig ausgepresst werden, eine plastische Schicht jedoch nicht. In der Tat, Änderung des Abstandes zwischen einer kugelförmigen Rauigkeit und einer starren Ebene getrennt durch eine Schmierschicht wird durch die Gleichung

$$\dot{h} = -\frac{h}{6\pi\eta R^2} F_N \quad (\text{XIV.37})$$

gegeben (siehe Aufgabe 2 zu diesem Kapitel). Sie nimmt exponentiell ab mit der charakteristischen Zeit

$$\hat{t} = \frac{6\pi\eta R^2}{F_N}. \quad (\text{XIV.38})$$

Unter Berücksichtigung der atomaren Struktur des Schmieröls wäre die Schicht in wenigen Mehrfachen von (XIV.38) durchbrochen. Die Dicke der plastischen Schicht mit der Schubfestigkeit τ_c strebt dagegen unter diesen Bedingungen zu einem endlichen Wert der Größenordnung

$$h_c \approx \frac{F_N}{\tau_c R} \quad (\text{XIV.39})$$

Aufgaben

Aufgabe 1: Zu berechnen ist die Reibungskraft zwischen einer gewellten Fläche mit einem periodischen Profil $a \cos kx$ und einer ebenen Fläche, die durch eine flüssige Schicht getrennt sind.

Lösung: Den Abstand zwischen beiden Flächen bezeichnen wir mit $h = h(x)$. Die Steigung h' wird als sehr klein angenommen. Der Spalt zwischen den Körpern sei mit einem Schmiermittel mit einer Viskosität η gefüllt. Das Geschwindigkeitsprofil einer schleichenden Strömung in einem parallelen Spalt hat die Form (XIV.7):

$$v = p' \cdot \frac{z(z-h)}{2\eta} + \frac{v_0}{h}(z-h)$$

mit dem Druckgradienten (XIV.10)

$$\frac{dp}{dx} = -6\eta v_0 \left(\frac{1}{h^2} - \frac{C}{h^3} \right).$$

Integration über eine räumliche Periode Λ ergibt

$$p(\Lambda) - p(0) = -6\eta v_0 \int_0^\Lambda \left(\frac{1}{h(x)^2} - \frac{C}{h(x)^3} \right) dx = 0.$$

Wir haben dieses Integral auf Null gesetzt, da wir in einem periodischen System mit einer Periode Λ erwarten können, dass auch die Druckverteilung eine periodische Funktion mit derselben Periode ist. Daraus folgt

$$C = \frac{\int_0^\Lambda \frac{dx}{h(x)^2}}{\int_0^\Lambda \frac{dx}{h(x)^3}}$$

Die in der Flüssigkeit an der ebenen (unteren) Ebene herrschende Scherspannung ist gleich

$$\tau = \eta \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{p'h}{2} + \frac{\eta v_0}{h} = \eta v_0 \left(\frac{4}{h} - \frac{3C}{h^2} \right).$$

Für die über eine Periode gemittelte tangentielle Spannung, die wir als makroskopische Reibspannung τ_R empfinden, ergibt sich

$$\tau_R = \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda \tau dx = \frac{\eta v_0}{\Lambda} \int_0^\Lambda \left(\frac{4}{h(x)} - \frac{3C}{h(x)^2} \right) dx$$

oder nach Einsetzen von C

$$\tau_R = \frac{\eta v_0}{\Lambda} \left(4 \int_0^\Lambda \frac{dx}{h(x)} - 3 \left(\int_0^\Lambda \frac{dx}{h(x)^3} \right)^{-1} \left(\int_0^\Lambda \frac{dx}{h(x)^2} \right)^2 \right).$$

Bei konstanter Spaltbreite gibt diese Gleichung die elementare Formel $\tau_R = \eta v_0 / h$ wieder. Nehmen wir jetzt an, dass die gewellte Oberfläche durch die Gleichung

$$h(x) = h_0 + a(1 - \cos(kx))$$

gegeben ist, so dass die minimale Spaltbreite h_0 ist, die Amplitude der Welligkeit a und die Wellenzahl gleich $k = 2\pi / \Lambda$. In diesem Fall folgt

$$\tau_R = \frac{\eta v_0}{h_0} \frac{1}{\sqrt{1 + 2a/h_0}} \frac{h_0^2 + 2h_0 a + 3a^2}{h_0^2 + 2h_0 a + \frac{3}{2} a^2}.$$

Im Grenzfall $h_0 \ll a$ gilt

$$\tau_R \approx \sqrt{2} \frac{\eta v_0}{\sqrt{ah_0}}.$$

Aufgabe 2: Zu berechnen ist die Kraft, die zwischen einer Ebene und einer sich der Ebene nähernden Kugel (Radius R) wirkt. Der Abstand zwischen der Kugel und der Ebene soll viel kleiner als R sein.

Lösung: In diesem Fall haben wir es mit einer reinen Quetschströmung unter der Wirkung eines Druckgradienten zu tun. Für den Druckgradienten gilt die Gleichung (XIV.23)

$$p' = \frac{6\eta r \dot{h}}{h^3}.$$

Die Spalthöhe wird in unserem Fall durch

$$h \approx h_0 + r^2 / 2R$$

gegeben. Integration des Druckgradienten ergibt

$$p = p_{\text{ext}} - \int_r^\infty 6\eta \dot{h} \frac{r dr}{(h_0 + r^2 / 2R)^3} = p_{\text{ext}} - \frac{3\eta R \dot{h}}{(h_0 + r^2 / 2R)^2}$$

(Da das Integral an der oberen Grenze konvergiert, haben wir diese durch ∞ ersetzt). Die auf die Kugel wirkende Kraft ist somit gleich

$$F_N = \int_0^\infty 2\pi r (p(r) - p_{\text{ext}}) dr = -\frac{6\pi\eta R^2 \dot{h}}{h_0}$$

Aufgabe 3: Abzuschätzen ist die Kraft, die auf eine sich horizontal im Abstand h_0 von einer Ebene wegbewegenden Kugel wirkt.

Lösung: Die Größenordnung der Spannung im Spalt ist $\tau \sim \eta v_0 / h(r)$. Die Größenordnung der Kraft ist daher

$$F_R \sim 2\pi\eta v_0 \int_0^R \frac{rdr}{h(r)} = 2\pi\eta v_0 \int_0^R \frac{rdr}{h_0 + r^2 / 2R} = 2\pi\eta R v_0 \ln\left(1 + \frac{R}{2h_0}\right).$$

Aufgabe 4: Eine Welle vom Radius r dreht sich in einem zylindrischen Lager mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω (Abbildung XIV.9), während der äußere Zylinder vom Radius $R = r + a$ unbeweglich ist. Die Länge des Lagers sei L . Der Zwischenraum ist mit einer Flüssigkeit mit der Viskosität η gefüllt. Im Allgemeinen liegt die Welle in Bezug auf das Lager exzentrisch, da diese eine Belastung trägt. Unter der Annahme $a \ll r$ sind das Reibungsmoment, die auf die Welle wirkende Kraft und der Reibungskoeffizient zu berechnen.

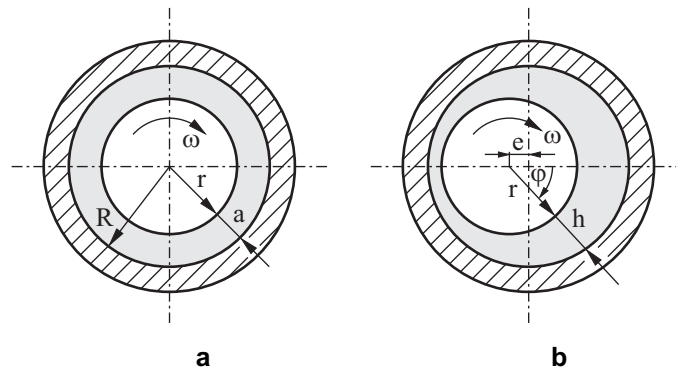


Abbildung XIV.9. Hydrodynamisches Lager: (a) ohne Belastung, (b) unter Kraftbelastung

Lösung: Unter der Annahme $a \ll r$ kann die Strömung zwischen dem Lager und der Welle als eine Schichtenströmung angesehen werden. Die Geschwindigkeit hat dabei nur die Umfangskomponente v_φ und der Druck p hängt nur vom Winkel ab. Für das Strömungsprofil gilt die Gleichung (XIV.8), die in unserem Fall die folgende Form annimmt

$$v_\varphi = \frac{dp}{rd\varphi} \cdot \frac{\tilde{z}(\tilde{z} - h(\varphi))}{2\eta} + \frac{\omega r}{h(\varphi)}(h(\varphi) - \tilde{z})$$

mit

$$h(\varphi) \approx a + e \cos \varphi.$$

Die Druckverteilung wird durch

$$p(\varphi) - p(0) = +6\eta\omega r^2 \int_0^\varphi \left(\frac{1}{h(\varphi)^2} - \frac{C}{h(\varphi)^3} \right) d\varphi$$

mit

$$C = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h(\varphi)^2}}{\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h(\varphi)^3}}$$

gegeben (s. völlig analoge Gleichungen in der Aufgabe 1). Sie ist eine ungerade Funktion des Winkels φ . Die horizontale Komponente der Kraft $F_x = Lr \int_0^{2\pi} p(\varphi) \cos \varphi d\varphi$ verschwindet, da $p(\varphi)$ eine ungerade Funktion ist. Die vertikale Komponente der Kraft berechnet sich zu²

$$F_z = Lr \int_0^{2\pi} p(\varphi) \sin \varphi d\varphi = -Lr^3 6\eta\omega \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi) \left(\frac{1}{h(\varphi)^2} - \frac{C}{h(\varphi)^3} \right) d\varphi = \frac{12\pi e L r^3 \eta \omega}{(2a^2 + e^2) \sqrt{a^2 - e^2}}$$

Die Tangentialspannung berechnet sich ebenfalls in völliger Analogie zur Aufgabe 1 zu

$$\tau = -\eta\omega r \left(\frac{4}{h(\varphi)} - \frac{3C}{h(\varphi)^2} \right).$$

Für das Kraftmoment ergibt sich

$$M = Lr^2 \int_0^{2\pi} \tau(\varphi) d\varphi = -L\eta\omega r^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{h(\varphi)} - \frac{3C}{h(\varphi)^2} \right) d\varphi = -\frac{4\pi\eta\omega r^3 L (a^2 + 2e^2)}{\sqrt{a^2 - e^2} (2a^2 + e^2)}.$$

Für das Verhältnis $\mu = |M| / rF_z$, das in diesem Fall die Rolle des Reibungskoeffizienten spielt, erhalten wir

$$\mu = \frac{(a^2 + 2e^2)}{3er}$$

Bei großen Belastungen, wenn $e \rightarrow a$, nimmt der Reibungskoeffizient den Grenzwert

$$\mu = \frac{a}{r}$$

an.

² In Wirklichkeit gibt auch die viskose Spannung einen Beitrag in die vertikale Kraft. Man kann aber zeigen, dass dieser Beitrag unter den getroffenen Annahmen klein ist und vernachlässigt werden kann.

XV VISKOELASTISCHE EIGENSCHAFTEN VON ELASTOMEREN



XV.1 Einführung

Gummi und andere Elastomere spielen eine wichtige Rolle in vielen tribologischen Anwendungen. Sie werden dort eingesetzt, wo große Haft- oder Reibkräfte oder große Deformierbarkeit gefordert werden. Insbesondere finden sie Verwendung als Material für Reifen, Beförderungsrollen (z.B. in Druckern), Sportschuhe, Dichtungen, Gummibänder, in elektronischen Geräten (z.B. für Kontakte in Tastaturen) sowie in Haftvorrichtungen.

Die zwei wichtigsten Eigenschaften von Elastomeren sind: (1) ein extrem kleiner Elastizitätsmodul (ca. 1 bis 10 MPa, d.h. 4 bis 5 Größenordnungen kleiner als bei „normalen Festkörpern“) und (2) eine extrem hohe Deformierbarkeit: Oft können Elastomere um ein Mehrfaches ihrer Anfangslänge gedehnt werden.

Die Ursache für beide Grundeigenschaften von Elastomeren liegt in ihrer Struktur. Elastomere bestehen aus Polymermolekülen, die relativ schwach miteinander wechselwirken. Im thermodynamischen Gleichgewichtszustand befinden sie sich in einem statistisch bevorzugten verknäulten Zustand. Wird an das Elastomer eine mechanische Spannung angelegt, so beginnen sich die Polymermoleküle zu entflechten (Abbildung XV.1). Wird das Elastomer entlastet, so relaxieren die Polymermoleküle wieder in den knäulartigen Zustand zurück. Während bei „normalen Festkörpern“ der Gleichgewichtszustand im Wesentlichen einem Minimum der potentiellen Energie entspricht, ist es bei Elastomeren im

Wesentlichen die Entropie, die im Gleichgewichtszustand ihr Maximum erreicht. Man spricht dann von *Entropieelastizität*¹.

Um ein vollständiges Auseinanderlaufen der Ketten unter der Zugbelastung zu vermeiden, werden die Ketten bei Gummi durch Schwefelbrücken untereinander verbunden – diese Behandlung ist als Vulkanisation bekannt². Beim Zusatz von viel Schwefel bei der Vulkanisation entsteht Hartgummi, bei der Zugabe von wenig Schwefel Weichgummi. Um ein Optimum an Elastizität, Verschleißbeständigkeit und Haftung zu erzielen, wird Gummi bei der Herstellung von Autoreifen mit Ruß vermischt. Den so hergestellten Verbundwerkstoff nennt man „gefüllten Gummi“.

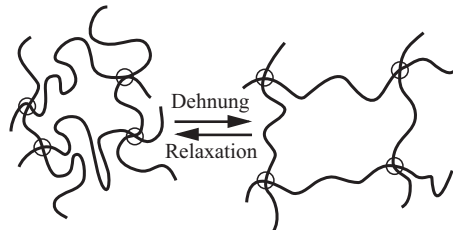


Abbildung XV.1. Schematische Darstellung der Änderung der Struktur eines Elastomers bei Dehnung

Im Hinblick auf tribologische Eigenschaften geht man davon aus, dass die Kontakt- und Reibungseigenschaften von Elastomeren im Wesentlichen auf ihre rheologischen Eigenschaften zurückzuführen sind. Mit anderen Worten, die tribologischen Eigenschaften von Elastomeren sind im Wesentlichen nicht durch ihre Oberflächeneigenschaften, sondern durch ihre Volumeneigenschaften bedingt. Das ist der Grund, warum wir uns in diesem Kapitel zunächst einer ausführlichen Analyse der rheologischen Eigenschaften von Gummi sowie Methoden zu deren Beschreibung widmen. Die in diesem Kapitel eingeführten Begriffe und Methoden werden im nächsten Kapitel zur Diskussion der Reibung von Elastomeren benutzt. Wir behandeln dabei Elastomere als *lineare* viskoelastische Stoffe. Die Behandlung von Nichtlinearitäten ginge über die Grenzen dieses Buches hinaus.

XV.2 Spannungsrelaxation in Elastomeren

Betrachten wir einen Gummiblock, der auf Schub beansprucht wird (Abbildung XV.2). Wird er schnell deformiert, so steigt die Spannung im ersten Moment auf ein hohes Niveau $\sigma(0)$ und relaxiert danach langsam zu einem viel kleineren Niveau $\sigma(\infty)$ (Abbildung XV.3), wobei bei Elastomeren $\sigma(\infty)$ um 3 bis 4 Größenordnungen kleiner sein kann als $\sigma(0)$. Die physikalische Ursache für dieses Verhalten ist klar: Im ersten Moment haben die Polymerketten noch keine Zeit, um sich zu entflechten, und der Gummi reagiert wie ein „normaler fester Stoff“. Der entsprechende Schubmodul $G(0) = \sigma(0) / \varepsilon_0$ hat dieselbe Größenordnung wie der Schubmodul von Glas und wird *Glasmodul* genannt. Das Verhältnis $G(\infty) = \sigma(\infty) / \varepsilon_0$ beschreibt das Materialverhalten nach einer langen Wartezeit und wird *statischer Schubmodul* genannt. Im Laufe der Zeit wickeln sich die Moleküle auseinander, und die innere Spannung im Material gibt nach. Das Verhältnis

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (\text{XV.1})$$

¹ In diesem Sinne ist die Gummieelastizität verwandt mit der „Elastizität“ eines idealen Gases, wo die Wechselwirkungen zwischen Molekülen keine Rolle spielen und die Elastizität ebenfalls rein entropischer Natur ist.

² Die Vulkanisation wurde 1839 von Charles Goodyear entwickelt.

bezeichnet man als *zeitabhängigen Schubmodul*. Es ist leicht zu sehen, dass diese Funktion die mechanischen Eigenschaften eines Stoffes vollständig beschreibt, vorausgesetzt, dass der Stoff ein *lineares* Verhalten aufweist:

Nehmen wir an, dass der Block nach einem beliebigen Gesetz $\varepsilon(t)$ deformiert wird. Eine beliebige Abhängigkeit $\varepsilon(t)$ kann immer als eine Summe von zeitlich versetzten Stufenfunktionen dargestellt werden, wie dies schematisch in Abbildung XV.4 gezeigt ist. Eine „elementare Stufenfunktion“ in dieser Abbildung zum Zeitpunkt t' hat offenbar die Amplitude $d\varepsilon(t') = \dot{\varepsilon}(t')dt'$. Der mit ihr zusammenhängende Beitrag zur Spannung ist gleich $d\sigma = G(t - t')\dot{\varepsilon}(t')dt'$, und die gesamte Spannung zu jedem Zeitpunkt berechnet sich somit zu

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t - t')\dot{\varepsilon}(t')dt' . \tag{XV.2}$$

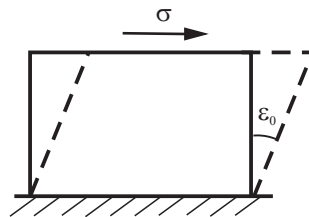


Abbildung XV.2. Schubdeformation eines Gummiblocks

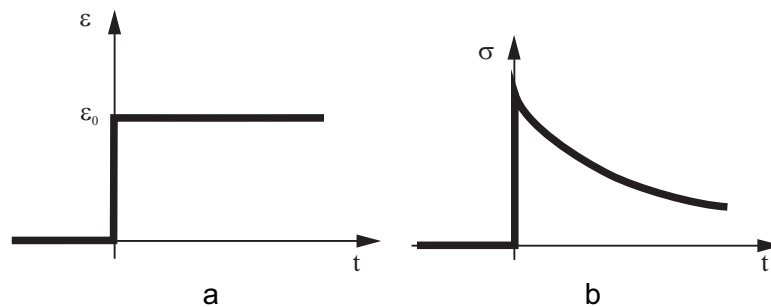


Abbildung XV.3. Wird ein Gummiblock zum Zeitpunkt $t = 0$ schnell um ε_0 deformiert, so steigt die Spannung zunächst auf ein hohes Niveau und relaxiert danach mit der Zeit zu einer viel kleineren Spannung

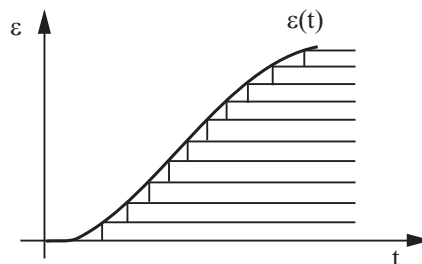


Abbildung XV.4. Darstellung einer Funktion der Zeit als Superposition von mehreren versetzten Stufenfunktionen

Gleichung (XV.2) zeigt, dass der zeitlich abhängige Schubmodul im mathematischen Sinne als eine Gewichtsfunktion verstanden werden kann, mit der die in der Vergangenheit liegenden Deformationsänderungen zur Spannung zum laufenden Zeitpunkt beitragen. Aus diesem Grunde wird $G(t)$ manchmal auch *Gedächtnisfunktion* genannt.

XV.3 Komplexer, frequenzabhängiger Schubmodul

Ändert sich $\varepsilon(t)$ nach einem harmonischen Gesetz

$$\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon} \cos(\omega t), \quad (\text{XV.3})$$

so stellt sich nach einem Einschwingvorgang eine periodische Änderung der Spannung mit der gleichen Frequenz ω ein. Den Zusammenhang zwischen der Änderung der Deformation und der Spannung kann man besonders einfach darstellen, wenn man die reelle Funktion $\cos(\omega t)$ als Summe von zwei komplexen Exponenten darstellt:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}). \quad (\text{XV.4})$$

Wegen des Superpositionsprinzips kann man zunächst die Spannungen berechnen, die sich aufgrund der komplexen Schwingungen

$$\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad \varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon} e^{-i\omega t} \quad (\text{XV.5})$$

ergeben und diese Spannungen anschließend summieren. Setzen wir $\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t}$ in (XV.2) ein, so erhalten wir für die Spannung

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t') i\omega \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t'} dt'. \quad (\text{XV.6})$$

Durch Substitution $\xi = t - t'$ bringen wir dieses Integral zur folgenden Form

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t') i\omega \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t'} dt' = i\omega \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t} \int_0^{\infty} G(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi \quad (\text{XV.7})$$

oder:

$$\sigma(t) = \hat{G}(\omega) \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t} = \hat{G}(\omega) \varepsilon(t). \quad (\text{XV.8})$$

Für eine harmonische Anregung in Form einer komplexen Exponente $e^{i\omega t}$ ist die Spannung proportional zur Deformation. Der Proportionalitätskoeffizient

$$\hat{G}(\omega) = i\omega \int_0^{\infty} G(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi \quad (\text{XV.9})$$

ist im Allgemeinen eine komplexe Größe und wird *komplexer Schubmodul* genannt. Sein Realteil $G'(\omega) = \text{Re} \hat{G}(\omega)$ wird *Speichermodul*, sein Imaginärteil $G''(\omega) = \text{Im} \hat{G}(\omega)$ *Verlustmodul* genannt.

Die *Amplitude* der Schwingungen wird durch den *Betrag* der komplexen Spannung bzw. Deformation gegeben:

$$|\sigma(t)| = |\hat{G}(\omega) \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t}| = |\hat{G}(\omega)| |\tilde{\varepsilon}| |e^{i\omega t}|. \quad (\text{XV.10})$$

Da der Betrag $|e^{i\omega t}| = 1$ folgt daraus:

$$|\sigma(t)| = |\hat{G}(\omega)| |\tilde{\varepsilon}|. \quad (\text{XV.11})$$

Demnach sind die Schwingungs*amplituden* der Spannung und der Deformation durch den *Betrag der komplexen Steifigkeit* verbunden.

Um den Begriff des komplexen Moduls näher zu erläutern, betrachten wir zwei einfache Beispiele:

(a) Für einen *linearelastischen Körper* gilt für die Scherdeformation nach dem Hookeschen Gesetz: $\sigma = G\varepsilon$. Der komplexe Modul hat in diesem Fall nur einen Realteil, und dieser ist gleich G .

(b) Für reine Scherung einer *linear viskosen Flüssigkeit* (Abbildung XV.5) gilt

$$\sigma = \eta \frac{dv}{dz}. \quad (\text{XV.12})$$

Für eine periodische Bewegung $\hat{u}(l,t) = u_0 e^{i\omega t}$ gilt somit:

$$\hat{\sigma}(t) = \eta \left. \frac{dv}{dz} \right|_{z=l} = \eta \frac{\hat{v}(t)}{l} = \eta i \omega \frac{u_0}{l} e^{i\omega t} = i \omega \eta \hat{\varepsilon}(t). \quad (\text{XV.13})$$

Der komplexe Modul

$$\hat{G}(\omega) = i \omega \eta \quad (\text{XV.14})$$

hat in diesem Fall nur einen imaginären Teil: $\text{Re } \hat{G} = 0$, $\text{Im } \hat{G} = \omega \eta$.

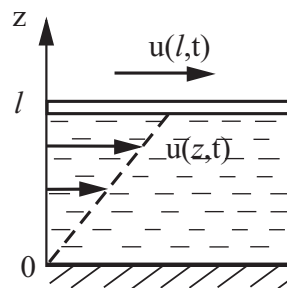


Abbildung XV.5. Gleichmäßige Scherströmung einer linear-viskosen Flüssigkeit

XV.4 Eigenschaften des komplexen Moduls

Aus der Definition (XV.9) folgt, dass

$$\hat{G}(-\omega) = \hat{G}^*(\omega). \quad (\text{XV.15})$$

„*“ bedeutet hier komplex konjugierte Größe. Für den Real- und Imaginärteil des Moduls bedeutet das:

$$\begin{aligned} G'(-\omega) &= G'(\omega), \\ G''(-\omega) &= -G''(\omega). \end{aligned} \quad (\text{XV.16})$$

Real- und Imaginärteil des komplexen Moduls sind nicht unabhängig voneinander, sondern müssen den sogenannten *Kramers-Kronig-Relationen* genügen:

$$\begin{aligned} G'(\omega) &= G_0 + \frac{2\omega^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{z} \frac{G''(z)}{\omega^2 - z^2} dz, \\ G''(\omega) &= -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{G'(z)}{\omega^2 - z^2} dz. \end{aligned} \quad (\text{XV.17})$$

Integrale in dieser Gleichung sind als Cauchy-Hauptwertintegrale zu verstehen (d.h. man nähert sich Polstellen symmetrisch an, damit sich Unendlichkeitsstellen gegenseitig aufheben können).

Ist der komplexe Modul im gesamten Frequenzbereich bekannt, so kann der zeitlich abhängige Modul berechnet werden. In dem wir (XV.9) mit $\frac{1}{i\omega 2\pi} e^{i\omega t}$ multiplizieren und anschließend über ω (von $-\infty$ bis ∞) integrieren, erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\omega} \hat{G}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(\varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i\omega t - \varepsilon)} d\omega d\varepsilon. \quad (\text{XV.18})$$

Die in Abbildung XV.3a gezeigte Stufenfunktion entspricht $\dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0 \delta(t)$, wobei $\delta(t)$ die Diracsche δ -Funktion ist. Indem wir die Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = 2\pi \delta(t) \quad (\text{XV.19})$$

benutzen, vereinfacht sich die rechte Seite und es verbleibt lediglich der zeitlich abhängige Schubmodul. Unter Berücksichtigung von (XV.1) gilt damit folgender Zusammenhang

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{G}(\omega)}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} (G'(\omega) \sin \omega t + G''(\omega) \cos \omega t) d\omega. \quad (\text{XV.20})$$

XV.5 Energiedissipation in einem viskoelastischen Material

Deformation des Materials nach dem Gesetz $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$ führt nach der Definition des komplexen Schubmoduls zur Spannung $\sigma_1 = \varepsilon_0 \hat{G}(\omega) e^{i\omega t}$. Bei der Deformation $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 e^{-i\omega t}$ müssen wir nur das Vorzeichen der Frequenz ändern: $\sigma_2 = \varepsilon_0 \hat{G}(-\omega) e^{-i\omega t} = \varepsilon_0 \hat{G}^*(\omega) e^{-i\omega t}$. Ist die gesamte Deformation über die Summe von ε_1 und ε_2 darstellbar

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t = \frac{\varepsilon_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \quad (\text{XV.21})$$

so berechnet sich die Spannung aufgrund der Linearität des Systems über die Summe von σ_1 und σ_2 :

$$\sigma = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (G(\omega) e^{i\omega t} + G(\omega)^* e^{-i\omega t}) = \varepsilon_0 (G'(\omega) \cos \omega t - G''(\omega) \sin \omega t). \quad (\text{XV.22})$$

Wir können nun die Leistung \bar{P} dieser Kraft in einem Einheitsvolumen berechnen:

$$\bar{P} = \langle \sigma(t) \dot{\varepsilon}(t) \rangle = \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0^2 G''(\omega). \quad (\text{XV.23})$$

Die Energiedissipation wird unmittelbar durch den Imaginärteil des komplexen Moduls bestimmt. Damit hängt die Bezeichnung "Verlustmodul" für den Imaginärteil des elastischen Moduls zusammen.

Bei vorgegebener Spannung berücksichtigen wir die Eigenschaft (XV.11) und schreiben $\sigma_0^2 = |\hat{G}(\omega)|^2 \varepsilon_0^2$. Damit können wir (XV.23) auf die Form

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \omega \sigma_0^2 \frac{\text{Im} \hat{G}(\omega)}{|\hat{G}(\omega)|^2} = -\frac{1}{2} \omega \sigma_0^2 \text{Im} \left(\frac{1}{\hat{G}(\omega)} \right) \quad (\text{XV.24})$$

bringen.

XV.6 Messung komplexer Module

Wird ein lineares viskoelastisches Material periodisch mit der Kreisfrequenz ω nach dem Gesetz $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ deformiert und der Spannungsverlauf (XV.22) im eingeschwungenen Zustand aufgezeichnet, so kann man den komplexen Modul bestimmen, indem man die Mittelwerte

$$\bar{E} = \langle \sigma(t)\varepsilon(t) \rangle \quad \text{und} \quad \bar{P} = \langle \sigma(t)\dot{\varepsilon}(t) \rangle \quad (\text{XV.25})$$

ermittelt. Die mittlere Leistung haben wir bereits oben berechnet und mit dem Verlustmodul verbunden. Der Mittelwert \bar{E} kann nun mit dem *Speichermodul* verknüpft werden, denn es gilt:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} G' \varepsilon_0^2. \quad (\text{XV.26})$$

Der Realteil des G-Moduls berechnet sich also aus

$$\text{Re } \hat{G} = G' = \frac{2\bar{E}}{\varepsilon_0^2}, \quad (\text{XV.27})$$

während man den Imaginäranteil aus (XV.23) erhält:

$$\text{Im } \hat{G} = G'' = \frac{2\bar{P}}{\omega \varepsilon_0^2}. \quad (\text{XV.28})$$

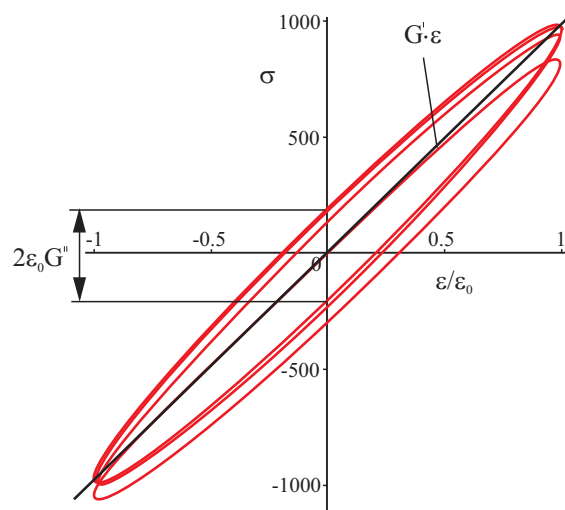


Abbildung XV.6. Spannungs-Dehnungs-Diagramm für ein viskoelastisches Material

Die Gleichungen (XV.21) und (XV.22) beschreiben in parametrischer Form das dynamische Spannungs-Dehnungs-Diagramm, welches eine elliptische Form hat. Die mittlere Steigung des Diagramms ist dabei gleich G' . Für $\varepsilon = 0$ erhalten wir $\sigma = \pm \varepsilon_0 G''$. Der Imaginärteil kann somit aus der Breite der Hysteresefigur bestimmt werden.

XV.7 Rheologische Modelle

Bei räumlich homogenen Deformationen kann man oft anstatt mit Modulen mit Steifigkeiten arbeiten. Die zwei Grundelemente sind dabei eine linear elastische Feder und ein Dämpfer. Aus diesen Elementen lassen sich kompliziertere Kombinationen zusammenstellen, die praktisch beliebiges viskoelastisches Verhalten abbilden können.

Betrachten wir zunächst die Grundelemente, die periodisch angeregt werden sollen. Für eine *linearelastische Feder* ohne innere Dissipation (Abbildung XV.7a) gilt bekanntlich das Hooke'sche Gesetz:

$$F = cx. \quad (\text{XV.29})$$

Den Proportionalitätskoeffizienten c nennen wir *Federzahl* oder auch *Federsteifigkeit*.

Betrachten wir jetzt einen *linearen Dämpfer* (Abbildung XV.7b):

$$F = d\dot{x}. \quad (\text{XV.30})$$

Für eine harmonische Anregung in komplexer Form $\hat{F} = F_0 e^{i\omega t}$ suchen wir die Lösung in der Form $\hat{x} = \hat{x}_0 e^{i\omega t}$. Das Ergebnis lautet: $\hat{F}(t) = id\omega\hat{x}(t)$, d.h. die Kraft ist zu jedem Zeitpunkt *proportional zur Auslenkung, wie bei einer Feder*. Der Koeffizient

$$\hat{c}_d = id\omega, \quad (\text{XV.31})$$

der die Kraft mit der Auslenkung verbindet, ist jetzt aber komplex und hängt von der Frequenz ab. Wir nennen ihn *komplexe, frequenzabhängige Federzahl* oder *-steifigkeit*.

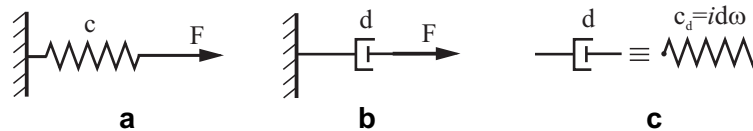


Abbildung XV.7. (a) linearelastische Feder, (b) geschwindigkeitsproportionaler Dämpfer, (c) komplexe Steifigkeit eines Dämpfers

Für ein *allgemeines* lineares mechanisches System (d.h. ein beliebig kompliziertes System aufgebaut aus linearen Federn und Dämpfern) gilt bei einer Erregerkraft $F_0 e^{i\omega t}$ ein linearer Zusammenhang:

$$\hat{F}(t) = \hat{c}(\omega)\hat{x}(t), \quad (\text{XV.32})$$

wobei $\hat{c}(\omega)$ nun die komplexe Federzahl des Systems ist. Diese Gleichung gilt allerdings nur bei einer Anregung mit der Frequenz ω . In expliziter Form lautet sie: $F_0 e^{i\omega t} = \hat{c}(\omega)\hat{x}_0 e^{i\omega t}$.

Bei einer Parallelschaltung von zwei Federn mit den Federzahlen c_1 und c_2 ergibt sich eine Feder mit der Federzahl $c = c_1 + c_2$. Bei einer Reihenschaltung gilt $\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \Rightarrow c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$.

Ähnliche Schaltungen kann man auch für Kontinua benutzen, dann müssen die Steifigkeiten durch Module ersetzt werden.

Der für uns im Weiteren wichtigste Bestandteil von vielen rheologischen Modellen ist das *Maxwellsche Element* bestehend aus einer Feder, die in Reihe mit einem Dämpfer geschaltet ist. Untersuchen wir die Eigenschaften von diesem Element, wobei wir gleich von der kontinuumsmechanischen Version des Modells ausgehen und nicht von Steifigkeiten, sondern von Modulen sprechen.

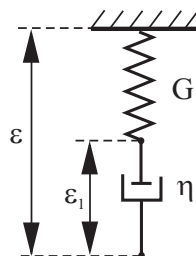


Abbildung XV.8. Maxwellsches Element

Die komplexen Module der Feder und des Dämpfers sind G und $i\eta\omega$. Aufgrund der Reihenschaltung ergibt sich der gesamte Modul

$$\hat{G}_{Maxwell} = \frac{G \cdot i\eta\omega}{G + i\eta\omega} = \frac{G \cdot i\eta\omega}{(G + i\eta\omega)(G - i\eta\omega)} = \frac{G(i\eta\omega G + (\eta\omega)^2)}{G^2 + (\eta\omega)^2}. \quad (XV.33)$$

Der Speicher- und der Verlustmodul sind gleich

$$G'_{Maxwell} = \frac{G(\eta\omega)^2}{G^2 + (\eta\omega)^2} \quad (XV.34)$$

$$G''_{Maxwell} = \frac{\eta\omega G^2}{G^2 + (\eta\omega)^2}$$

Indem wir die Größe

$$\tau = \eta / G \quad (XV.35)$$

eingeführen, können wir die Gleichungen (XV.34) auch in der Form

$$G'_{Maxwell} = G \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (XV.36)$$

$$G''_{Maxwell} = G \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}$$

darstellen. Die Größe τ hat die Dimension Zeit.

Untersuchen wir nun die Spannungsrelaxation in einem Medium, das durch ein Maxwell-Element beschrieben wird. Wir benutzen dabei die in Abbildung XV.8 eingeführten Bezeichnungen. Die auf den Verbindungspunkt zwischen Feder und Dämpfer wirkende Spannung ist gleich $-G(\varepsilon - \varepsilon_1) + \eta\dot{\varepsilon}_1$. Wegen der Masselosigkeit des Verbindungspunktes muss diese Spannung verschwinden: $-G(\varepsilon - \varepsilon_1) + \eta\dot{\varepsilon}_1 = 0$. Indem wir diese Gleichung durch G dividieren und die Bezeichnung (XV.35) einführen, können wir sie wie folgt schreiben:

$$\tau\dot{\varepsilon}_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon. \quad (XV.37)$$

Wird das Material zum Zeitpunkt $t=0$ *plötzlich* um ε_0 deformiert, so gilt für alle Zeitpunkte $t > 0$

$$\tau\dot{\varepsilon}_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \quad (XV.38)$$

mit der Anfangsbedingung $\varepsilon_1(0) = 0$. Die Lösung dieser Gleichung mit der genannten Anfangsbedingung lautet

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0(1 - e^{-t/\tau}). \quad (XV.39)$$

Für die Spannung ergibt sich

$$\sigma = G(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) = G\varepsilon_0 e^{-t/\tau}. \quad (XV.40)$$

Die Spannung klingt exponentiell mit der charakteristischen Zeit τ ab, die man *Relaxationszeit* nennt.

XV.8 Ein einfaches rheologisches Modell für Gummi („Standardmodell“)

Wir wollen nun ein Feder-Dämpfer-Modell aufbauen, das die wichtigsten dynamischen Eigenschaften von Gummi bei periodischer Beanspruchung enthält. Diese sind:

1. $\omega \approx 0$: Bei kleinen Frequenzen misst man einen kleinen elastischen Modul (quasistatische Deformation) und kaum Dissipation, d.h. der Dämpfungsanteil ist sehr klein.
2. $\omega \rightarrow \infty$: Bei sehr hohen Frequenzen misst man einen sehr großen Modul (typischerweise 2 bis 3 Größenordnungen größer als bei quasistatischer Beanspruchung), und ebenfalls keine nennenswerte Dissipation.
3. Bei mittleren Frequenzen misst man mittlere Module, gleichzeitig aber auch starke Dissipation.

Diese Eigenschaften resultieren aus der Tatsache, dass die Molekülketten sich nur in endlichen Zeiten ver- und entknäulen können.

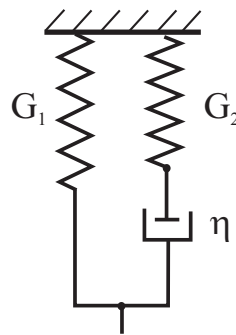


Abbildung XV.9. Ein einfaches rheologisches Modell für Gummi

Diese Eigenschaften eines Gummiblocks sollen nun qualitativ durch das in Abbildung XV.9 dargestellte *rheologische Modell* beschrieben werden. Da es sich dabei um eine Parallelschaltung einer linearelastischen Feder und eines Maxwellschen Elementes handelt, können wir sofort schreiben

$$G' = G_1 + G_2 \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (\text{XV.41})$$

$$G'' = G_2 \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}$$

mit $\tau = \eta / G_2$. Die Abhängigkeiten der Module von der Frequenz im *doppelt-logarithmischen* Maßstab sind für den Fall $G_2 / G_1 = 1000$ in Abbildung XV.10 dargestellt.

Für kleine Frequenzen $\omega < G_1 / \eta$ (quasistatische Belastung) strebt der Modul gegen G_1 . Für sehr große Frequenzen $\omega > G_2 / \eta$ strebt er gegen $G_2 \gg G_1$. Das bedeutet, dass bei sehr langsamen Belastungen Gummi weich ist, bei sehr schnellen Belastungen hingegen hart. Typische Schubmodule eines Gummis bei kleinen Frequenzen liegen bei 10 MPa, während er bei großen Frequenzen ca. 1000 Mal größer ist. Im mittleren Bereich ist der Imaginäranteil überwiegend: $G''(\omega) \approx \eta\omega$, d.h. das Medium verhält sich bei periodischer Beanspruchung wie eine viskose Flüssigkeit.

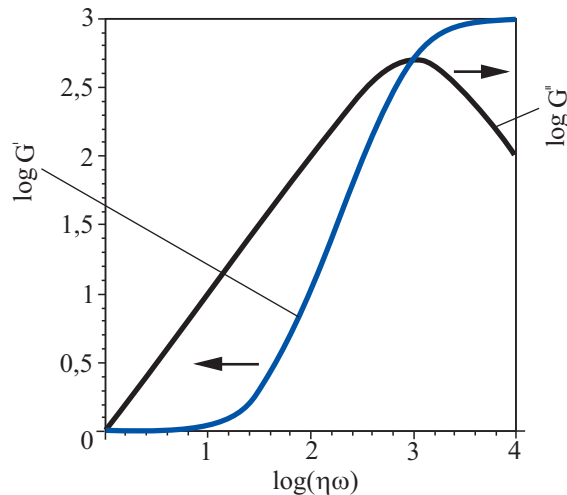


Abbildung XV.10. Real- und Imaginärteil des frequenzabhängigen Moduls für das in Abbildung XV.9 gezeigte rheologische Modell mit $G_2 / G_1 = 1000$

Aufgrund der Tatsache, dass es sich um eine Parallelschaltung einer Feder und eines Maxwell'schen Elementes handelt, können wir wiederum sofort schreiben

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 (G_1 + G_2 e^{-t/\tau}). \quad (\text{XV.42})$$

Dividiert durch ε_0 ergibt sich die normierte Spannung, die wir als zeitlich abhängigen Modul bezeichnet haben:

$$G(t) = \sigma / \varepsilon_0 = (G_1 + G_2 e^{-t/\tau}). \quad (\text{XV.43})$$

Er relaxiert vom Wert $G_0 = G_1 + G_2 \approx G_2$ für $t = 0$ zum Wert $G_\infty = G_1$ für $t \rightarrow \infty$.

XV.9 Einfluss der Temperatur auf rheologische Eigenschaften

Die endliche Zeit der Spannungsrelaxation ist physikalisch durch kinetische Prozesse der "Auseinanderwicklung" von Polymermolekülen bedingt. Dies sind thermisch aktivierte Prozesse; sie hängen daher stark von der Temperatur ab. Da die Relaxationszeit im komplexen Modul (XV.41) nur in der Kombination $\omega\tau(T)$, und in dem zeitlich abhängigen Modul (XV.43) nur in der Kombination $t / \tau(T)$ erscheint:

$$G(t) = F(t / \tau(T)), \quad \hat{G}(\omega) = Q(\omega\tau(T)) \quad (\text{XV.44})$$

unterscheiden sich Frequenz- bzw. Zeitverläufe von Modulen im logarithmischen Maßstab nur durch eine Verschiebung der gesamten Kurve als Ganzes parallel zur Zeit- bzw. Frequenz-Achse um den Betrag $\log(\tau(T_2) / \tau(T_1))$ (Abbildung XV.11). Aus diesen Gründen nennt man $\tau(T)$ auch *Shift-Funktion*.

Bei der Beschreibung von rheologischen Eigenschaften von Elastomeren wird sehr oft davon ausgegangen, dass die oben gemachte Annahme (XV.44) auch dann gilt, wenn die Rheologie nicht durch das oben gezeigte einfache Modell beschrieben wird.

Williams, Landel und Ferry haben 1955 für die Shift-Funktion eine analytische Approximation vorgeschlagen, die zwei Konstanten C_1 und C_2 enthält und als *WLF-Funktion* bekannt ist. Die Konstanten sind für jede Gummisorte experimentell zu bestimmen:

$$\log \tau(T) = \frac{C_1(T - T_g)}{C_2 + T - T_g} = C_1 \left(1 - \frac{1}{1 + C_2^{-1}(T - T_g)} \right) \quad (\text{XV.45})$$

T_g ist die so genannte *Verglasungstemperatur*.

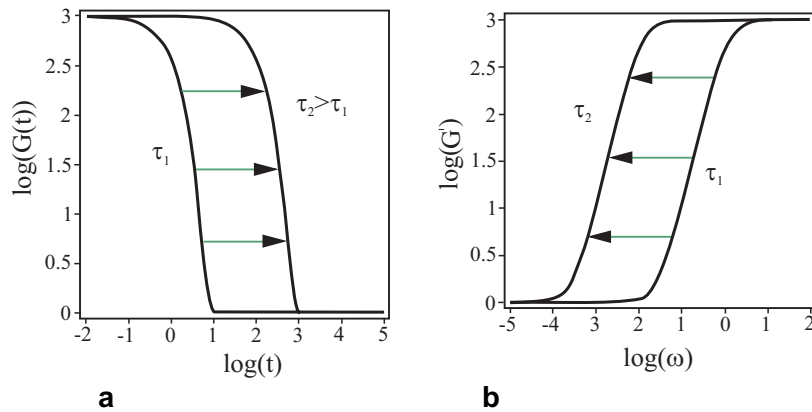


Abbildung XV.11. Relaxationsfunktion (a) und frequenzabhängiger Modul (b) bei zwei Temperaturen. Die kleinere Relaxationszeit τ_1 entspricht einer höheren Temperatur als die (in diesem Beispiel ca. 100 mal größere) Relaxationszeit τ_2

XV.10 Masterkurven

Die Annahme (XV.44) wird zur experimentellen Wiederherstellung der gesamten Relaxationskurve mittels Messungen in einem begrenzten Zeitintervall benutzt. Betrachten wir beispielsweise die Spannungsrelaxation bei einem Zugversuch: Die Probe wird schnell um $\varepsilon = 1\%$ deformiert, und anschließend die Spannung als Funktion der Zeit gemessen. Experimentell gibt es nur begrenzte Möglichkeiten, die Zeit bei solchen Experimenten aufzulösen. Wir werden als Beispiel die Spannungsrelaxation im Zeitfenster von 3 bis 600 s nach der plötzlichen Deformation untersuchen: kürzere Zeiten sind schwierig zu realisieren, während größere Zeiten zu praktisch nicht akzeptablen Laufzeiten des Experiments führen.

Experimentelle Ergebnisse bei verschiedenen Temperaturen können im *doppellogarithmischen* Maßstab wie in Abbildung XV.12 aussehen. Wir gehen von der Hypothese aus, dass die bei verschiedenen Temperaturen gemessenen Kurven nur gegeneinander verschobene Teile derselben Kurve sind. Man versucht nun, diese Teile so zu verschieben, dass sie eine ganze Kurve bilden (Abbildung XV.13).

Dieses Verfahren zeigt sich erfolgreich und führt zu einer „experimentellen“ Relaxationskurve in einem Zeitintervall, das einer direkten experimentellen Messung unzugänglich ist (z.B. vom Submillisekunden-Bereich bis Jahre). Diese Kurve nennt sich „Masterkurve“. Die Verschiebung ist dabei bei verschiedenen Temperaturen bzw. in verschiedenen Zeitbereichen nicht die gleiche, was Unterschiede in den Aktivierungsenergien auf verschiedenen Skalen widerspiegelt.

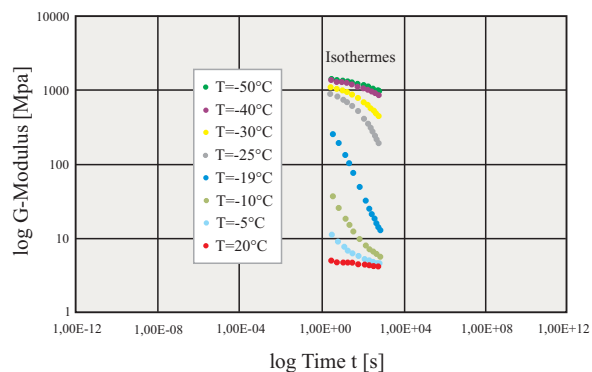


Abbildung XV.12. Messungen der Spannungsrelaxation bei verschiedenen Temperaturen im gegebenen Zeitfenster

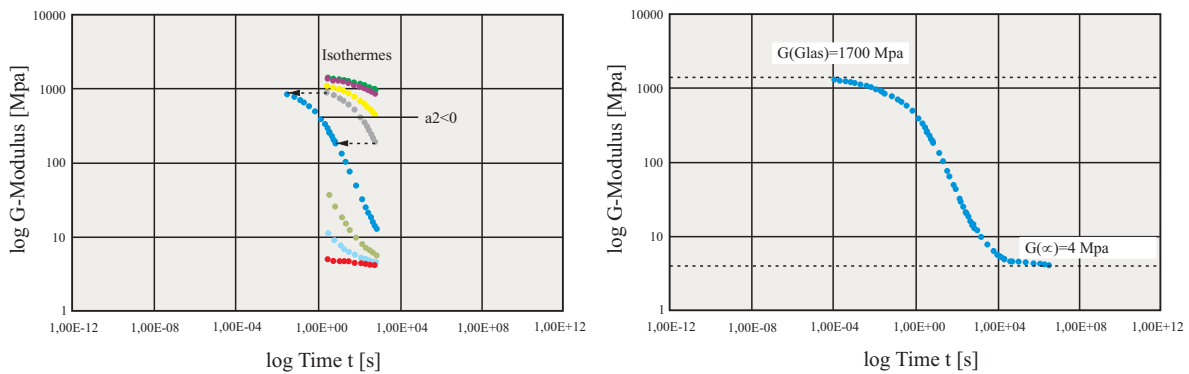


Abbildung XV.13. Die Abschnitte der Spannungs-Relaxations-Kurven bei verschiedenen Temperaturen (im doppellogarithmischen Maßstab) werden so verschoben, dass sie eine einzige Masterkurve bilden

XV.11 Prony-Reihen

Die mit den oben genannten Methoden erhaltene Masterkurve unterscheidet sich wesentlich von der Relaxationskurve in dem oben beschriebenen einfachen Modell aus einer parallelgeschalteten Feder und einem Maxwell-Element. Der Übergang vom großen „Glasmodul“ bei sehr kleinen Zeiten zum kleinen „Gummimodul“ bei sehr großen Zeiten findet in realen Elastomeren nicht in einem engen Zeitintervall um τ statt, sondern erstreckt sich über mehrere Größenordnungen in der Zeit. Daher muss das Modell angepasst werden.

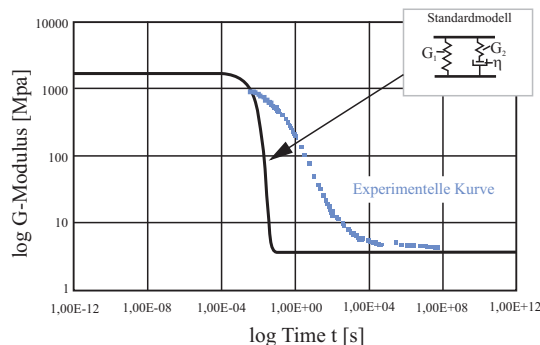


Abbildung XV.14. Doppellogarithmische Darstellung des zeitlich abhängigen Schubmoduls für das einfache rheologische Modell (durchgezogene Kurve) und ein reales Elastomer

Eine Anpassung kann erreicht werden, indem man statt eines Maxwell-Elements mit einer Relaxationszeit τ eine Reihe von Elementen mit verschiedenen Relaxationszeiten parallel zueinander schaltet (Abbildung XV.15). Durch eine ausreichend große Zahl von Maxwell-Elementen lässt sich jede Relaxationsfunktion ausreichend gut abbilden. Dieses Modell nennt man *Prony-Reihe*.

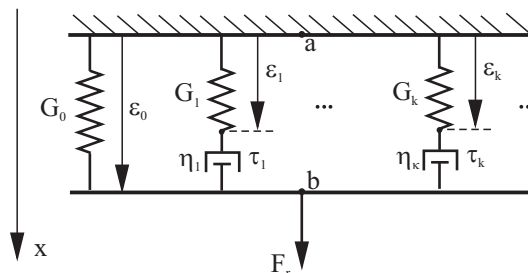


Abbildung XV.15. Prony-Reihe

Die Relaxation des G-Moduls wird in diesem Modell gegeben durch

$$G(t) = G_0 + \sum_{i=1}^N G_i \cdot e^{-t/\tau_i} . \quad (\text{XV.46})$$

Man kann diese Gleichung auch auf eine Integralform verallgemeinern:

$$G(t) = G_0 + G_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(\tau) e^{-t/\tau} d\tau \quad (\text{XV.47})$$

Der komplexe Schubmodul ist gegeben durch

$$G'(\omega) = G_0 + \sum_{k=1}^{N_k} G_k \frac{\omega^2 \tau_k^2}{1 + \omega^2 \tau_k^2} \quad (\text{XV.48})$$

$$G''(\omega) = \sum_{k=1}^{N_k} G_k \frac{\omega \tau_k}{1 + \omega^2 \tau_k^2}$$

oder in der Integralform

$$G'(\omega) = G_0 + G_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} g(\tau) d\tau \quad (\text{XV.49})$$

$$G''(\omega) = G_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} g(\tau) d\tau .$$

Statt einer für ein Maxwell'sches Element charakteristischen exponentiellen Abnahme der Spannung mit der Zeit findet man bei vielen Elastomeren eine Abnahme, die durch eine Potenzfunktion beschrieben werden kann. Um eine solche Relaxationsfunktion zu beschreiben, muss auch die Gewichtsfunktion $g(\tau)$ in den Gleichungen (XV.47) und (XV.49) als Potenzfunktion gewählt werden: $g(\tau) \propto \tau^{-s}$. Die Relaxationsfunktion wird dann durch die Wahl der Parameter G_0 , G_1 , s , τ_1 und τ_2 vollständig parametrisiert. Zur Illustration berechnen wir die Relaxation des Schubmoduls in einem Modell mit den folgenden Parametern: $G_0 = 1$, $G_1 = 1000$, $\tau_1 = 10^{-2}$, $\tau_2 = 10^2$, $g(\tau) = \tau_1^{-2}$. Einsetzen in (XV.47) liefert

$$G(t) = G_0 + \frac{G_1 \tau_1}{t} \left(e^{-\frac{t}{\tau_2}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) . \quad (\text{XV.50})$$

Das Ergebnis ist in der Abbildung XV.16 dargestellt. Man sieht, dass im mittleren Bereich, zwischen $\tau_1 \ll t \ll \tau_2$, die Abhängigkeit im doppellogarithmischen Maßstab linear mit der Steigung -1 ist: Die Spannung nimmt in diesem Bereich nach einem Potenzgesetz $G \propto t^{-1}$ ab.

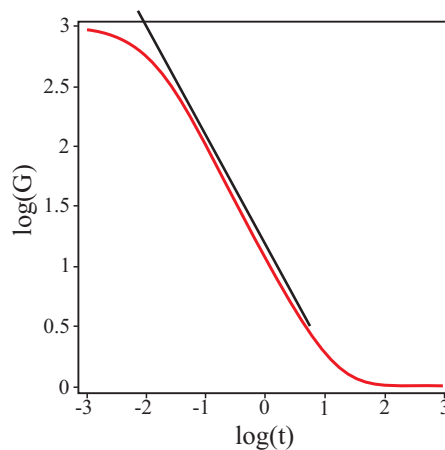


Abbildung XV.16. Zeitlich abhängiger Schubmodul laut (XV.50)

Für den Frequenzgang des komplexen Moduls erhalten wir

$$G'(\omega) = G_0 + G_1 \tau_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\omega^2}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau = G_0 + G_1 \omega \tau_1 (\arctan \omega \tau_2 - \arctan \omega \tau_1) \quad (\text{XV.51})$$

$$G''(\omega) = \frac{1}{2} G_1 \tau_1 \omega \ln \left(\frac{\tau_2^2 (1 + \omega^2 \tau_1^2)}{\tau_1^2 (1 + \omega^2 \tau_2^2)} \right).$$

Im mittleren Frequenzbereich $1/\tau_2 \ll \omega \ll 1/\tau_1$ gilt:

$$G'(\omega) = G_0 + \frac{\pi}{2} G_1 \tau_1 \omega \quad (\text{XV.52})$$

$$G''(\omega) = G_1 \omega \tau_1 \ln(1/\omega \tau_1).$$

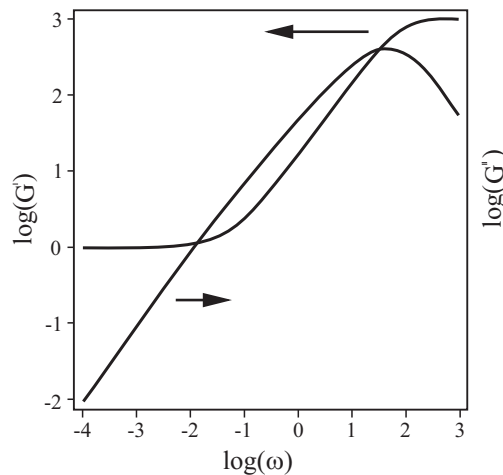


Abbildung XV.17

Aufgaben

Aufgabe 1: Stoßzahl für ein viskoelastisches Material. Ein Block aus einem viskoelastischen Material stößt gegen eine starre Wand mit der Geschwindigkeit v_0 und springt wieder ab mit einer kleineren Geschwindigkeit v_1 . Zu bestimmen ist die Stoßzahl $e = v_1 / v_0$. Der Block soll vereinfachend als eine starre Masse m mit einer Feder-Dämpfer-Kombination (Steifigkeit c , Dämpfungskonstante η), wie in Abb. gezeigt, modelliert werden.

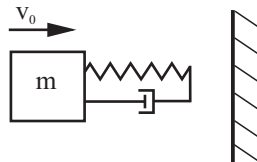


Abbildung XV.18. Modell eines viskoelastischen Blocks beim Zusammenstoß mit einer Wand

Lösung: Ab dem Zeitpunkt des ersten Kontaktes haben wir es mit einem gedämpften Oszillator zu tun. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + cx = 0 \quad (\text{XV.53})$$

oder

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{XV.54})$$

mit $2\delta = \eta / m$ und $\omega_0^2 = c / m$. Die Anfangsbedingungen lauten $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.

Die Lösung der Bewegungsgleichung mit gegebenen Anfangsbedingungen lautet:

$$x(t) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\delta t} \sin \tilde{\omega} t, \quad \dot{x}(t) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\delta t} (-\delta \sin \tilde{\omega} t + \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t) \quad (\text{XV.55})$$

mit $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Der Block bleibt im Kontakt mit der Wand solange die Druckkraft auf die Wand $F = \eta \dot{x} + cx$ positiv bleibt. Der letzte Kontaktzeitpunkt t^* bestimmt sich aus der Gleichung

$$2\delta \dot{x}(t^*) + \omega_0^2 x(t^*) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\delta t^*} \left[(-2\delta^2 + \omega_0^2) \sin \tilde{\omega} t^* + 2\delta \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t^* \right] = 0. \quad (\text{XV.56})$$

Daraus folgt

$$\tan \tilde{\omega} t^* = \frac{-2\delta \tilde{\omega}}{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (\text{XV.57})$$

Die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt ist gleich

$$\dot{x}(t^*) = v_0 e^{-\delta t^*} (-\delta \sin \tilde{\omega} t^* + \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t^*). \quad (\text{XV.58})$$

Die Stoßzahl berechnet sich somit zu

$$e = \frac{|\dot{x}(t^*)|}{v_0} = \frac{1}{\tilde{\omega}} e^{-\delta t^*} |-\delta \sin \tilde{\omega} t^* + \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t^*| = e^{-\frac{\delta}{\tilde{\omega}} \left(\pi^* H(-\omega_0^2 - 2\delta^2) - \arctan \frac{2\delta \tilde{\omega}}{\omega_0^2 - 2\delta^2} \right)} \quad (\text{XV.59})$$

mit

$$H(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}. \quad (\text{XV.60})$$

Diese Abhängigkeit ist in *Abbildung XV.19* gezeigt.

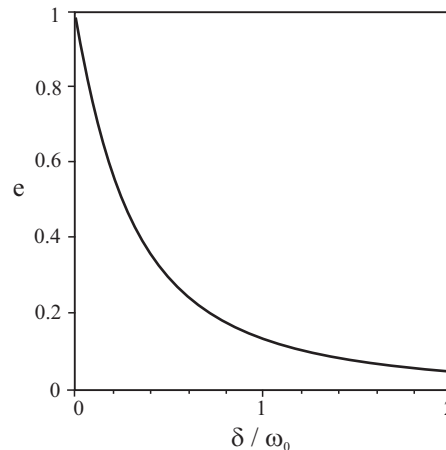


Abbildung XV.19. Abhängigkeit der Stoßzahl von der Dämpfungskonstante des viskoelastischen Materials

XVI GUMMIREIBUNG UND KONTAKTMECHANIK VON GUMMI



XVI.1 Einführung

Die Natur der Reibung zwischen Gummi und einer harten Unterlage ist von großer Bedeutung für viele technische Anwendungen. Gummireibung unterscheidet sich wesentlich von der Reibung von „harten“ Stoffen wie Metalle oder Keramiken. Vor allem durch die Arbeiten von Grosch (1962) wurde klar, dass die Gummireibung sehr eng mit der inneren Reibung im Gummi zusammenhängt. Das wird unter anderem dadurch bestätigt, dass der Reibungskoeffizient eine Temperaturabhängigkeit aufweist, die mit der Temperaturabhängigkeit des komplexen Schubmoduls korreliert. Dies ist ein Zeichen dafür, dass die Gummireibung eine *Volumeneigenschaft* ist.

XVI.2 Idee zur Berechnung der Reibungskraft

Man kann die Reibungskraft auf zweifache Weise bestimmen – entweder durch eine direkte Berechnung der tangentialen Kraftkomponenten und deren Mittelung oder durch Berechnung der Energieverluste, die durch Materialdeformation verursacht werden. Ist bei einer makroskopisch gleichmäßigen Bewegung mit der Geschwindigkeit v die Energie \dot{W} pro Sekunde dissipiert, so kann die gesamte Verlustleistung vom makroskopischen Gesichtspunkt der Reibungskraft zugeschrieben werden, somit gilt

$$\dot{W} = F_R v . \quad (\text{XVI.1})$$

Die Reibungskraft bestimmt sich daraus als Verhältnis der Verlustleistung zur Gleitgeschwindigkeit

$$F_R = \frac{\dot{W}}{v}. \quad (\text{XVI.2})$$

In einem Kontakt zwischen einer starren Oberfläche und einem Elastomer kann Energie nur durch Deformation des Elastomers dissipiert werden. Aus diesem Grunde spielen die Rauigkeiten der starren Oberfläche und der Oberfläche des Elastomers völlig verschiedene Rollen. Das wird durch Abbildung XVI.1 illustriert. Gleitet ein Elastomer auf einer glatten starren Ebene (Abbildung XVI.1 a), so gibt es keine zeitliche Änderung des Deformationszustandes des Elastomers und somit keine Verlustleistung: Die Reibung ist gleich Null. Gleitet dagegen ein glatter Elastomer auf einer rauen Oberfläche (Abbildung XVI.1 b) so hängt der lokale Deformationszustand einzelner Bereiche des Elastomers von der Zeit ab und die Energie wird dissipiert. Daraus folgt, dass für die Elastomerreibung die Rauigkeit der Oberfläche des Elastomers nur eine geringe Rolle spielt: Die Reibung wird im Wesentlichen durch die Rauigkeit der starren Oberfläche bestimmt. Im Weiteren betrachten wir daher die Reibung zwischen einer rauen starren Oberfläche und einem Elastomer, dessen Oberfläche wir als eben annehmen.



Abbildung XVI.1. (a) Ein rauer Gummiblock auf einer glatten starren Ebene und (b) ein glatter Gummiblock auf einer rauen starren Ebene

Wir wollen die Deformation und Energiedissipation im Elastomer berechnen. Dabei benutzen wir Ergebnisse aus der Kontaktmechanik rauer Oberflächen (Kapitel VII). Wird die raue Oberfläche durch den quadratischen Mittelwert l der Höhenstreuung von "Kappen" und einem Mittelwert R der Krümmungsradien der Kappen charakterisiert, so gilt für die mittlere Kontaktfläche eines Asperiten

$$\Delta A \approx Rl. \quad (\text{XVI.3})$$

Der charakteristische Durchmesser eines Mikrokontaktes ist demnach gleich

$$r \approx \sqrt{\Delta A} \approx \sqrt{Rl}. \quad (\text{XVI.4})$$

Bei einer Gleitgeschwindigkeit v wird ein Bereich mit den charakteristischen Ausmaßen r in der Zeit

$$t \approx \frac{r}{v} \approx \frac{\sqrt{Rl}}{v} \quad (\text{XVI.5})$$

„überfahren“. Die für diesen Prozess charakteristischen Frequenzen haben die Größenordnung

$$\tilde{\omega} \approx \frac{1}{t} \approx \frac{v}{r}. \quad (\text{XVI.6})$$

Für den mittleren Druck in Mikrokontakten gilt

$$\langle \sigma \rangle = \frac{F_N}{A} = \kappa^{-1} E^* \nabla z \quad (\text{XVI.7})$$

mit $\kappa \approx 2$. Mit ∇z bezeichnen wir den quadratischen Mittelwert der Steigung der Oberfläche

$$\nabla z = \sqrt{\langle z'^2 \rangle}. \quad (\text{XVI.8})$$

Der effektive Elastizitätsmodul für Gummi ist gleich¹

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2} = \frac{2(1+\nu)G}{1-\nu^2} \approx 4G. \quad (\text{XVI.9})$$

Da der Schubmodul frequenzabhängig ist, muss in (XVI.7) die charakteristische Frequenz (XVI.6) eingesetzt werden:

$$\langle \sigma \rangle = 4\kappa^{-1} |G(\tilde{\omega})| \nabla z. \quad (\text{XVI.10})$$

Dabei haben wir den *Betrag* des frequenzabhängigen Moduls eingesetzt, da für den Zusammenhang zwischen den Amplituden der Spannung und der Deformation der Betrag des komplexen Moduls maßgeblich ist. Zur Berechnung der Energiedissipation im Einheitsvolumen eines Mikrokontaktes benutzen wir die Gleichung

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \tilde{\omega} \langle \sigma \rangle^2 \frac{G''(\tilde{\omega})}{|\hat{G}(\tilde{\omega})|^2} \quad (\text{XVI.11})$$

aus dem vorigen Kapitel. Multipliziert mit der Tiefe des wesentlich deformierten Volumens $\approx r$ ergibt sie die Verlustleistung pro Flächeneinheit und bezogen auf die Normalspannung den Reibungskoeffizienten:

$$\mu = \xi \nabla z \frac{G''(\nu/r)}{|\hat{G}(\nu/r)|}. \quad (\text{XVI.12})$$

ξ ist hier ein dimensionsloser Koeffizient der Größenordnung 1, der durch eine genauere Berechnung zu ermitteln ist. Numerische Simulationen zeigen, dass $\xi \approx 1$ ist.

Im mittleren Frequenzbereich gilt für viele Gummisorten $G'' \gg G'$. Daraus folgt $\frac{G''(\nu/r)}{|\hat{G}(\nu/r)|} \approx 1$. Für den Reibungskoeffizienten gilt dann

$$\mu \approx \nabla z. \quad (\text{XVI.13})$$

Im mittleren Frequenzbereich erhalten wir ein sehr einfaches Ergebnis: Der Reibungskoeffizient ist gleich dem quadratischen Mittelwert der Steigung der Oberfläche. Dieses Ergebnis hat eine einfache physikalische Bedeutung, die durch die Abbildung XVI.2 illustriert wird: Für einen rein imaginären Schubmodul kann das Medium schnell eingedrückt werden, relaxiert aber nur langsam zurück, so dass sich die Kontaktkonfiguration ergibt, die qualitativ in Abbildung XVI.2 gezeigt ist. Da der Gummi aus diesem Grunde überall nur auf einer Seite der Rauheitserhöhungen im Kontakt mit der Unterlage ist, ist es klar, dass der Reibungskoeffizient, den wir als Verhältnis der horizontalen Kraft zur Normalkraft definieren, in etwa der mittleren Steigung der Oberfläche in Kontaktgebieten gleich ist. Wie numerische Simulationen zeigen, kann diese für zufällig raue Oberflächen im Zusammenhang mit der mittleren Steigung der Oberfläche gebracht werden, wodurch sich (XVI.13) ergibt.

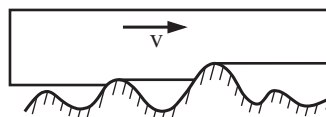


Abbildung XVI.2. Viskoelastisches Material im Kontakt mit rauher Oberfläche

¹ Gummi kann als praktisch nicht kompressibles Medium angenommen werden. Dementsprechend ist die Poisson-Zahl in guter Näherung gleich $\nu \approx 1/2$.

Untersuchen wir ausführlich die Gleichung (XVI.12). Als erstes bemerken wir, dass $\frac{G''(v/r)}{|\hat{G}(v/r)|}$ immer kleiner oder gleich 1 ist. *Der Reibungskoeffizient kann daher nie größer werden als die mittlere Steigung der Oberfläche*². Für das „Standardmodell“ für Gummi bestehend aus einer Feder und einem Maxwell'schen Element ist der frequenzabhängige Modul unter Berücksichtigung von $G_1 \ll G_2$ gleich

$$\hat{G}(\omega) = G_2 \frac{G_1 + i\eta\omega}{G_2 + i\eta\omega}. \quad (\text{XVI.14})$$

Für den Reibungskoeffizienten erhalten wir mit $\tau := \eta / G_2$

$$\mu \approx \frac{\tilde{\omega}\tau}{\sqrt{(1 + (\tilde{\omega}\tau)^2)((G_1/G_2)^2 + (\tilde{\omega}\tau)^2)}} \nabla z = \frac{v/\bar{v}}{\sqrt{(1 + (v/\bar{v})^2)((G_1/G_2)^2 + (v/\bar{v})^2)}} \nabla z, \quad (\text{XVI.15})$$

wobei hier die charakteristische Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{r}{\tau} \quad (\text{XVI.16})$$

eingeführt wurde. Die Abhängigkeit (XVI.15) ist in Abbildung XVI.3 dargestellt. Für Geschwindigkeiten im Intervall $\bar{v}(G_1/G_2) < v < \bar{v}$ bleibt der Reibungskoeffizient ungefähr konstant und gleich ∇z . Zu bemerken ist aber, dass dabei die in Mikrokontakten herrschende Spannung sich laut (XVI.10) von $\sigma_1 = 4\kappa^{-1}G_1\nabla z$ bei kleinen Geschwindigkeiten bis $\sigma_2 = 4\kappa^{-1}G_2\nabla z$ bei großen Geschwindigkeiten ändert. Bei großen Gleitgeschwindigkeiten ist daher das Material in Mikrobereichen stärker beansprucht.

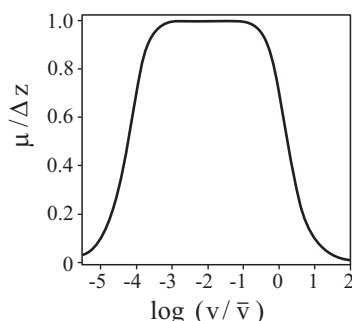


Abbildung XVI.3. Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Gleitgeschwindigkeit im „Standardmodell“ mit $G_2/G_1 = 10^4$

Für das rheologische Modell mit einer kontinuierlichen Verteilung von Relaxationszeiten, welches im vorigen Kapitel untersucht wurde, erhalten wir

$$\begin{aligned} G'(\tilde{\omega}) &= G_0 + G_1\tau_1\tilde{\omega}(\arctan(\tilde{\omega}\tau_2) - \arctan(\tilde{\omega}\tau_1)) \\ G''(\tilde{\omega}) &= \frac{1}{2}G_1\tau_1\tilde{\omega} \ln \left(\frac{\tau_2^2}{\tau_1^2} \frac{1 + (\tilde{\omega}\tau_1)^2}{1 + (\tilde{\omega}\tau_2)^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{XVI.17})$$

Der entsprechende Reibungskoeffizient als Funktion der Gleitgeschwindigkeit ist in Abbildung XVI.4 dargestellt. Anders als im „Standardmodell“ kann der Reibungskoeffizient in einem realen Gummi bei einer Geschwindigkeitsänderung um mehrere Zehnerpotenzen

² Das gilt in dem hier betrachteten Kontakt ohne Adhäsion.

ungefähr konstant bleiben. Im „Plateaubereich“ ist er auch in diesem Fall ungefähr gleich der mittleren Steigung ∇z der Oberfläche.

Auch die Temperaturabhängigkeit des Reibungskoeffizienten wird durch die Temperaturabhängigkeit des komplexen Schubmoduls bestimmt: Als Funktion von $\log(\nu)$ verschiebt sich die Kurve (μ - $\log \nu$) in der gleichen Richtung und um den gleichen Betrag wie der frequenzabhängige Schubmodul. Diese Eigenschaft wird bei der Messung des Reibungskoeffizienten zur Konstruktion von *Masterkurven* benutzt – auf die gleiche Weise, wie bei der „Messung“ des frequenzabhängigen Schubmoduls (s. Kapitel XV). Dadurch kann man die Geschwindigkeitsbereiche erfassen, welche einer direkten Messung nicht zugänglich sind. Bei Temperaturerhöhung verschiebt sich die Kurve nach rechts (in den Bereich von größeren Geschwindigkeiten). Eine für eine bestimmte Temperatur erstellte Masterkurve im Zusammenhang mit der WLF-Shift-Funktion bestimmt somit den Reibungskoeffizienten bei beliebigen Temperaturen und Geschwindigkeiten.

Experimentelle Daten (Masterkurven) für zwei Elastomere sind in Abbildung XVI.5 dargestellt.

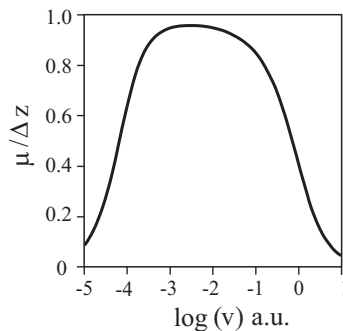


Abbildung XVI.4

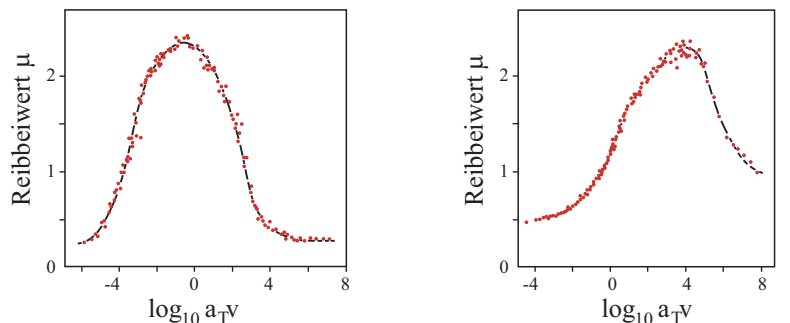


Abbildung XVI.5. Experimentelle Daten von Grosch für die Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von zwei Gummisorten auf verschiedenen Unterlagen (K. A. Grosch: *The relation between the friction and visco-elastic properties of rubber*, Proc.Roy.Soc. A2 74, (1963) 21)

XVI.3 Rollwiderstand

Auch bei reinem Rollen ohne Schlupf gibt es im Fall von Elastomeren Energiedissipation und den damit verbundenen Widerstand. In der Regel ist es gewünscht, dass dieser Widerstand minimiert, während die Gleitreibung gleichzeitig maximiert wird. Das ist möglich, da der charakteristische Frequenzbereich für das Gleiten $\omega_{\text{Gleiten}} \approx v / \lambda$ (wobei λ die charakteristische Wellenlänge der Rauigkeit der Straße von der Größenordnung 10–100 μm ist) und die charakteristische Frequenz für Rollen $\omega_{\text{Rollen}} \approx v / a$ (a ist der Kontaktradius von der Größenordnung 5 cm) sich um zwei bis drei Größenordnungen unterscheiden. Für einen Normalbetrieb eines Rades ist es erwünscht, dass in dem

Frequenzbereich ω_{Gleiten} der Verlustmodul größer als der Speichermodul ist: $G'' \geq G'$, während in dem Frequenzbereich ω_{Rollen} umgekehrt $G'' \ll G'$ gilt (Abbildung XVI.6).

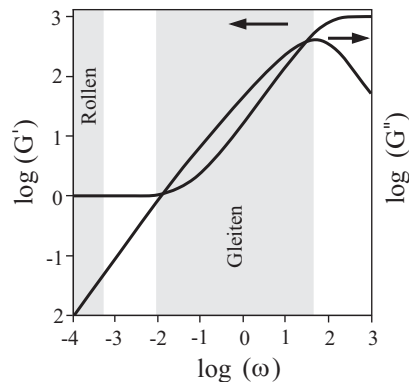


Abbildung XVI.6. Frequenzabhängige Speicher- und Verlustmodule für ein im Kapitel XV beschriebenes rheologisches Modell eines Elastomers. Damit der Rollwiderstand klein und die Gleitreibung groß (und konstant) bleiben, müssen die Betriebsbedingungen so gewählt werden, dass die für das Rollen charakteristischen Frequenzen im linken hervorgehobenen Frequenzbereich liegen und die für das Gleiten charakteristischen Frequenzen dem rechten hervorgehobenen Frequenzbereich entsprechen

In dem Frequenzbereich, in dem die beim Rollen gewünschte Bedingung $G'' \ll G'$ erfüllt ist, hängt der Speichermodul praktisch nicht von der Frequenz ab und fällt mit dem statischen Modul G_∞ zusammen. Wir können daher in erster Näherung annehmen, dass wir es mit einem rein elastischen, Hertzschen Kontakt zu tun haben.

Die Energieverluste beim Rollen können wir abschätzen, indem wir das Rollen als „kontinuierliches, wiederholtes Aufstellen“ eines Rades betrachten. Beim Rollen einer Kugel mit dem Radius R auf einer starren Ebene gelten für die Normalkraft F_N und für den Kontaktradius a die Hertzschen Beziehungen:

$$F_N \approx \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2} \approx \frac{16}{3} G_\infty R^{1/2} d^{3/2}, \quad (\text{XVI.18})$$

$$a^2 \approx Rd, \quad (\text{XVI.19})$$

wobei d die Eindringtiefe ist. Die charakteristische Frequenz schätzen wir mit

$$\omega \approx \frac{v}{a} \quad (\text{XVI.20})$$

ab, die Amplitude der Deformation mit

$$\varepsilon_0 \approx \frac{d}{a}. \quad (\text{XVI.21})$$

Für die Verlustleistung in einem Einheitsvolumen erhalten wir nach (XV.23)

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0^2 G''(\omega) \approx \frac{1}{2} \frac{v}{a} \left(\frac{d}{a} \right)^2 G'' \left(\frac{v}{a} \right) \quad (\text{XVI.22})$$

und für die Verlustleistung im gesamten Kontaktvolumen $\sim a^3$

$$\dot{W} \approx \frac{1}{2} v d^2 G'' \left(\frac{v}{a} \right). \quad (\text{XVI.23})$$

Indem wir die Verlustleistung durch die die Geschwindigkeit dividieren, erhalten wir die Widerstandskraft

$$F_w \approx \frac{1}{2} d^2 G'' \left(\frac{v}{a} \right). \quad (\text{XVI.24})$$

Bei kleinen Frequenzen ist der Verlustmodul immer proportional zur Frequenz und kann daher in der Form

$$G''(\omega) = \bar{\eta} \omega \quad (\text{XVI.25})$$

geschrieben werden, wobei $\bar{\eta}$ die dynamische Viskosität bei kleinen Frequenzen ist.

Für die Widerstandskraft ergibt sich

$$F_w \approx \frac{1}{2} \bar{\eta} \left(\frac{a^2}{R} \right)^2 \left(\frac{v}{a} \right) = \frac{1}{2} \bar{\eta} \frac{a^3}{R^2} v. \quad (\text{XVI.26})$$

Mit dem Hertzschen Ergebnis (V.24), das wir mit den hier benutzten Bezeichnungen in der Form

$$a^3 = \frac{3RF_N}{16G_\infty} \quad (\text{XVI.27})$$

umschreiben, erhalten wir für die Widerstandskraft

$$F_w \approx F_N \frac{1}{10} \frac{\bar{\eta}}{G_\infty} \frac{v}{R} = F_N \frac{1}{10} \frac{v\tau}{R} \quad (\text{XVI.28})$$

und für den „Rollreibungskoeffizienten“

$$\mu_{\text{Rollen}} = \frac{F_w}{F_N} \approx \frac{1}{10} \frac{v\tau}{R}, \quad (\text{XVI.29})$$

wobei $\tau = \bar{\eta} / G_\infty$ die Relaxationszeit des Elastomers ist. Diese Gleichung ist bis zu einem dimensionslosen Koeffizienten der Größenordnung 1 gültig. Die Rollreibung ist demnach proportional zum Produkt aus der Rollgeschwindigkeit und der (größten) Relaxationszeit von Gummi und umgekehrt proportional zum Krümmungsradius der Kugel.

XVI.4 Adhäsiver Kontakt mit Elastomeren

Bisher haben wir angenommen, dass es keine adhäsiven Kräfte zwischen Elastomer und starrer Oberfläche gibt. Bei ausreichend glatten Oberflächen ist dies nicht der Fall. Betrachten wir nun einen adhäsiven Kontakt zwischen einer starren Kugel und einem Elastomer mit ebener Oberfläche (Abbildung XVI.7). Der Rand des Kontaktes kann als Rissspitze betrachtet und behandelt werden³. Im Gleichgewicht kann das Elastomer als ein elastischer Körper mit dem statischen Schubmodul G_∞ und einem effektiven Elastizitätsmodul

$$E^* = \frac{2G_\infty}{(1-\nu)} = 4G_\infty \quad (\text{XVI.30})$$

angenommen werden. Im Gleichgewicht gilt für den Zusammenhang zwischen der Normalkraft F_N und dem Kontaktradius a die JKR-Gleichung (VI.20), in der γ durch $\gamma^* / 2$ zu ersetzen ist:

³ Die ursprüngliche Theorie von Johnson, Kendall und Roberts basierte genau auf dieser Analogie.

$$F_N = E^* \left[\frac{4 a^3}{3 R} - \left(\frac{8 \gamma^* \pi a^3}{E^*} \right)^{1/2} \right]. \quad (\text{XVI.31})$$

γ^* ist hier die effektive Grenzflächenenergie, d.h. die zur Erzeugung einer Einheits-Grenzfläche erforderliche Energie. Die Bedingung (XVI.31) können wir in einer Form darstellen, in der es bequem ist, den Kontaktrand als eine Risspitze zu behandeln. Zu diesem Zwecke lösen wir zunächst die Gleichung (XVI.31) nach γ^* auf:

$$\gamma^* = 2\gamma = \left(F_N - \frac{4 E^* a^3}{3 R} \right)^2 \frac{1}{8 \pi a^3 E^*}. \quad (\text{XVI.32})$$

Da die effektive Oberflächenenergie γ^* gleich der Streckenlast ist, die versucht, „den Riss zu schließen“, d.h. die Grenze des Risses so zu verschieben, dass der Kontaktradius größer wird, können wir die Gleichung (XVI.32) als eine Gleichgewichtsbedingung für Linienkräfte an der Risspitze interpretieren. Auf der linken Seite steht die Linienkraft, die durch van-der-Waals-Kräfte zwischen den Oberflächen bedingt ist. Auf der rechten Seite soll sinngemäß die Linienkraft stehen, die sich aus den elastischen Deformationen des Kontinuums ergibt und in entgegengesetzter Richtung wirkt. Indem wir die rechte Seite der Gleichung (XVI.32) mit D bezeichnen

$$D = \left(F_N - \frac{4 E^* a^3}{3 R} \right)^2 \frac{1}{8 \pi a^3 E^*} \quad (\text{XVI.33})$$

können wir die Gleichgewichtsbedingung in der Form

$$\gamma^* = D \quad (\text{XVI.34})$$

schreiben.

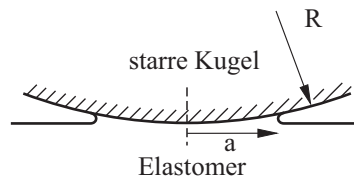


Abbildung XVI.7. Kontakt zwischen einer starren Kugel und einem Elastomer.
Die Kontaktgrenze kann als ein Riss betrachtet werden

Die Differenz $D - \gamma^*$ kann als „treibende Kraft“ für die Risspitze betrachtet werden. Im Gleichgewicht verschwindet sie. Ändert sich die Normalkraft, so ist die Risslinie nicht mehr im Gleichgewicht. In einem rein elastischen Körper würde sich der Riss unter Einwirkung einer konstanten „Kraft“ $D - \gamma^*$ beschleunigen bis er eine Geschwindigkeit von der Größenordnung der Geschwindigkeit von Oberflächenwellen im elastischen Kontinuum (*Rayleigh-Wellen*) erreicht hat. In einem viskoelastischen Körper wird er aufgrund der intensiven Dissipation eine endliche Geschwindigkeit erreichen. Bei einer langsamen Bewegung zeigt es sich, dass der größte Teil des Kontaktgebietes als rein elastisch betrachtet werden kann. Die gesamten Energieverluste sind dagegen nur einer relativ kleinen „Prozesszone“ an der Risspitze zu verdanken. Maugis und Barquins haben die folgende kinetische Gleichung vorgeschlagen, die die effektive Streckenlast $D - \gamma^*$ mit der Fortschrittsgeschwindigkeit v des Risses verbindet:

$$D - \gamma^* = \gamma^* \Phi(\tau(T)v), \quad (\text{XVI.35})$$

wobei $\tau(T)$ die Williams-Landel-Ferry-Funktion ist. Die dimensionslose Funktion $\Phi(\tau(T)v)$ hängt im mittleren Geschwindigkeitsbereich typischerweise nach einem Potenzgesetz von der Geschwindigkeit v ab:

$$\Phi(\tau(T)v) = \alpha(T)v^n, \quad (\text{XVI.36})$$

Die Potenz n liegt typischerweise zwischen 0,25 und 0,7. Als Beispiel ist in Abbildung XVI.8 die Funktion Φ für Glaskugeln auf Polyurethan gezeigt. Die Gleichungen (XVI.35) und (XVI.36) erlauben, die Kinetik der Adhäsionsprozesse unter verschiedenen Beanspruchungen zu untersuchen (s. z.B. Aufgabe 3 zu diesem Kapitel).

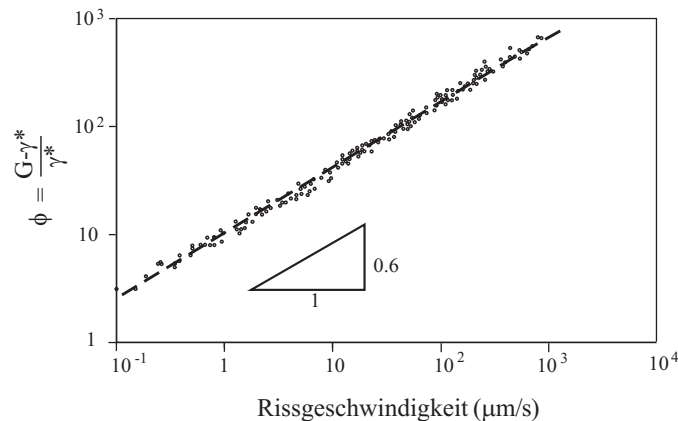


Abbildung XVI.8. „Dissipationsfunktion“ Φ als Funktion der Rissausbreitungsgeschwindigkeit für Glaskugeln auf Polyurethan für zwei Krümmungsradien und zwei Temperaturen. Die gleiche Masterkurve erhält man auch aus Peeling-Experimenten mit verschiedenen Stempeln. Aus: Barquins, M., „Adherence, Friction and Wear of Rubber-Like Materials“, Wear, v. 158 (1992) 87-117. Die gezeigte Abhängigkeit kann mit $\Phi \approx 10 \cdot (v / v_0)^{0.6}$ mit $v_0 = 1 \mu\text{m/s}$ approximiert werden

Aufgaben

Aufgabe 1: Eine starre Oberfläche sei eine Superposition von zwei Zufallsfunktionen, die eine mit einem charakteristischen Wellenvektor k_1 und dem quadratischen Mittelwert der Steigung ∇z_1 , die andere mit einem charakteristischen Wellenvektor $k_2 \gg k_1$ und dem quadratischen Mittelwert der Steigung ∇z_2 . Zu bestimmen ist der Reibungskoeffizient zwischen dieser Oberfläche und einem Elastomer.

Lösung: Im Kapitel X haben wir gesehen, dass die Beiträge zum Reibungskoeffizient von verschiedenen Skalen additiv sind – solange die Beiträge einzelner Skalen viel kleiner als 1 sind (praktisch kleiner 0,3).

Untersuchen wir zunächst eine raue Oberfläche mit einem charakteristischen Wellenvektor k_1 und der Streuung der Wellenvektoren von der gleichen Größenordnung. Die Rauigkeit und die Höhenstreuung l_1 bei einer Oberfläche mit solchen spektralen Eigenschaften haben die gleiche Größenordnung $l_1 \approx h_1$. Den Krümmungsradius der Maxima können wir abschätzen, indem wir die Fläche lokal als $z = h_1 \cos k_1 x \approx h_1 (1 - \frac{1}{2} k_1^2 x^2)$ darstellen. Die Krümmung in einem Maximum hat die Größenordnung $1/R = |z''(0)| \approx h_1 k_1^2$. Der charakteristische Durchmesser eines Mikrokontaktes wird mit

$$r \approx \sqrt{Rl} \approx \sqrt{\frac{h_1}{h_1 k_1^2}} = \frac{1}{k_1} \quad (\text{XVI.37})$$

abgeschätzt und ist demnach von derselben Größenordnung wie die charakteristische Längenskala der Welligkeit der Oberfläche ($\approx \lambda_1 / 2\pi$, wobei λ_1 die charakteristische Wellenlänge ist).

Gebe es nur eine Skala mit dem charakteristischen Wellenvektor k_1 , so könnte zur Berechnung des Reibungskoeffizienten die Gleichung (XVI.12) benutzt werden, die wir in der Form

$$\mu_1 \approx \nabla z_1 \cdot \frac{G''(k_1 v)}{|G(k_1 v)|} \quad (\text{XVI.38})$$

umschreiben. Sind Unebenheiten an zwei Skalen vorhanden, so summieren sich die Beiträge zum Reibungskoeffizienten (solange diese Beiträge einzeln viel kleiner als 1 sind) zu

$$\mu \approx \mu_1 + \mu_2 \approx \nabla z_1 \cdot \frac{G''(k_1 v)}{|G(k_1 v)|} + \nabla z_2 \cdot \frac{G''(k_2 v)}{|G(k_2 v)|}. \quad (\text{XVI.39})$$

Aufgabe 2: Zu bestimmen ist der Rollwiderstandskoeffizient eines starren Rades auf einer elastischen Schicht, die aus einer Reihe von gleichen Elementen besteht („Winklersche Bettung“, s. Abbildung XVI.9). Jedes Element soll aus parallel geschalteten Feder (Steifigkeit cdx) und Dämpfer (Dämpfungskonstante δdx) bestehen.

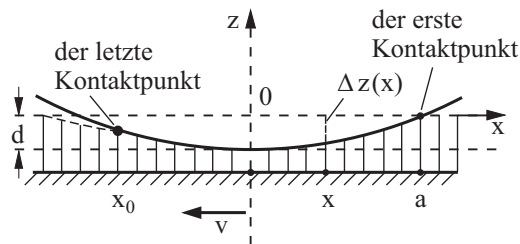


Abbildung XVI.9. Ein starres Rad wird unbeweglich gehalten. Eine starre Platte mit darauf geklebter viskoelastischer Schicht, die hier als Winklersche Bettung modelliert wird, wird nach links mit der Geschwindigkeit v bewegt. Die „Eindrucktiefe“ ist konstant und gleich d

Lösung: Die Form des Rades in der Nähe des Kontaktpunktes approximieren wir mit

$$z = -d + \frac{x^2}{2R},$$

wobei d die Eindrucktiefe ist. Für die Steigung im Punkt x ergibt sich $\tan \theta = z' = x/R$. Eine Bewegung der Unterlage in der negativen Richtung mit der Geschwindigkeit v führt zu einer Federbewegung in vertikaler Richtung mit der Geschwindigkeit $\dot{z} = -vz' = -vx/R$. Die auf die Scheibe seitens der Feder wirkende Kraft ist gleich

$$dF_z = (-cz - \delta \dot{z}) dx = (-cz + \delta v z') dx = \left(-c \left(-d + \frac{x^2}{2R} \right) + \delta \cdot v \frac{x}{R} \right) dx$$

Die z-Komponente der Gesamtkraft berechnet sich zu

$$F_N = \int_{x_0}^a \left(-c \left(-d + \frac{x^2}{2R} \right) + \delta \cdot v \frac{x}{R} \right) dx$$

und die x-Komponente der Gesamtkraft zu

$$F_w = \int_{x_0}^a \left(-c \left(-d + \frac{x^2}{2R} \right) + \delta \cdot v \frac{x}{R} \right) \frac{x}{R} dx$$

wobei mit a die Koordinate des ersten Kontaktpunktes rechts und mit x_0 die Koordinate des letzten Kontaktpunktes links bezeichnet wurde. Die Koordinate a berechnet sich aus der Bedingung $z = 0$, und x_0 aus der Bedingung $dF_z = 0$. Daraus folgt:

$$a = \sqrt{2Rd} \quad \text{und} \quad x_0 = -\sqrt{2Rd + \left(\frac{v\delta}{c}\right)^2} + \frac{v\delta}{c}.$$

Durch die Substitution $\xi = x / \sqrt{2Rd}$ bringen wir die Ausdrücke für F_N und F_w zu der folgenden Form

$$F_N = 2^{1/2} R^{1/2} d^{3/2} c \int_{\xi_0}^1 (1 - \xi^2 + \kappa \xi) d\xi,$$

$$F_w = 2d^2 c \int_{\xi_0}^1 (1 - \xi^2 + \kappa \xi) \xi d\xi,$$

mit den Bezeichnungen

$$\kappa = \frac{2^{1/2} \delta \cdot v}{cd^{1/2} R^{1/2}} = \frac{2\delta \cdot v}{ca}$$

und

$$\xi_0 = -\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2} + \frac{\kappa}{2}.$$

Der Widerstandskoeffizient berechnet sich zu

$$\mu = \frac{F_w}{F_N} = \left(\frac{2d}{R}\right)^{1/2} \cdot \frac{\int_{\xi_0}^1 (1 - \xi^2 + \kappa \xi) \xi d\xi}{\int_{\xi_0}^1 (1 - \xi^2 + \kappa \xi) d\xi}.$$

Betrachten wir zwei Grenzfälle.

(a) $\kappa \ll 1$: sehr kleine Geschwindigkeiten. In diesem Fall gelten die Näherungen

$$F_N = \frac{4}{3} 2^{1/2} R^{1/2} d^{3/2} c, \quad F_w = \frac{4}{3} d^2 c \kappa. \quad \text{Für den Widerstandskoeffizienten ergibt sich}$$

$$\mu = \frac{d^{1/2}}{2^{1/2} R^{1/2}} \kappa = \frac{\delta v}{cR} = \frac{\tau v}{R}$$

mit $\tau = \delta / c$. (Man vergleiche dieses Ergebnis mit der Abschätzung (XVI.29)).

(b) $\kappa \gg 1$: sehr große Geschwindigkeiten, bzw. Fahren auf einer flüssigen Schicht ($c = 0$). In diesem Fall gelten die Näherungen $F_N = \delta v d$, $F_w = \frac{2^{3/2}}{3} \frac{d^{3/2} \delta \cdot v}{R^{1/2}}$. Für den Widerstandskoeffizienten ergibt sich⁴

$$\mu = \frac{2^{3/2}}{3} \left(\frac{F_N}{\delta v R}\right)^{1/2}.$$

⁴ Beim Übergang zu einem dreidimensionalen System ist δ durch $4\bar{\eta}$ zu ersetzen: $\mu = \frac{1}{3} \left(\frac{2F_N}{\bar{\eta}vR}\right)^{1/2}$. Ausführliche

Erläuterung hierfür siehe Kapitel XIX.

Aufgabe 3: Zu bestimmen ist die Kinetik des „Abreißprozesses“ einer Kugel im Kontakt mit einem Elastomer, wenn die Kugel sich vor $t=0$ ohne Belastung im Gleichgewichtszustand befand und zum Zeitpunkt $t=0$ eine Kraft $F_N = -F_A = -\frac{3}{2}\gamma^* \pi R$, $F_N = -1,5 \cdot F_A$ oder $F_N = -2 \cdot F_A$ angelegt wird. Zu benutzen sind die folgenden Daten: $R = 2 \text{ mm}$, $E^* = 10 \text{ MPa}$, $\gamma^* = 0,05 \text{ J/m}^2$, $\Phi \approx 10 \cdot (v/v_0)^{0,5}$, $v_0 = 1 \mu\text{m/s}$.

Lösung: Die Aufgabe wird mit der Gleichung (XVI.35) gelöst, die wir in der folgenden Form schreiben:

$$D - \gamma^* = 10\gamma^* (v/v_0)^{0,5}.$$

Mit den Bezeichnungen

$$F_A = \frac{3}{2}\pi\gamma^* R \quad (\text{in unserem Fall} = 0,47 \cdot 10^{-3} \text{ N})$$

für die Adhäsionskraft und

$$a_0 = \left(9 \frac{\gamma^* \pi R^2}{2E^*}\right)^{1/3} \quad (\text{in unserem Fall} = 6,56 \cdot 10^{-5} \text{ m})$$

für den Gleichgewichtsradius ohne Belastung kann man die „Streckenlast“ D in der folgenden Form darstellen:

$$D = \gamma^* \left[\frac{1}{4} \frac{F_N}{F_A} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3/2} - \left(\frac{a}{a_0}\right)^{3/2} \right]^2.$$

Vor dem Zeitpunkt $t=0$ herrscht Gleichgewicht ohne Belastung und der Kontaktradius ist gleich a_0 . Ab dem Zeitpunkt $t=0$ gilt die Gleichung

$$\gamma^* \left[\frac{1}{4} \frac{F_N}{F_A} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3/2} - \left(\frac{a}{a_0}\right)^{3/2} \right]^2 - \gamma^* = 10\gamma^* \left(\frac{v}{v_0}\right)^{0,5}.$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit

$$v = -\frac{da}{dt} = \frac{v_0}{100} \left(\left[\frac{1}{4} \frac{F_N}{F_A} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3/2} - \left(\frac{a}{a_0}\right)^{3/2} \right]^2 - 1 \right).$$

In den dimensionslosen Variablen $\tilde{a} = a/a_0$ und $\tilde{t} = tv_0/100a_0$ erhalten wir die Gleichung

$$-\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = \left(\left[\frac{1}{4} \frac{F_N}{F_A} \tilde{a}^{-3/2} - \tilde{a}^{3/2} \right]^2 - 1 \right)$$

mit der Anfangsbedingung $\tilde{a} = 1$ für $\tilde{t} = 0$. Ergebnisse einer numerischen Integration dieser Gleichung für drei verschiedene Verhältnisse F_N/F_A sind in Abbildung XVI.10 dargestellt.

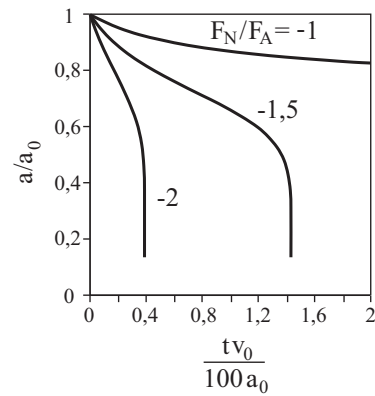
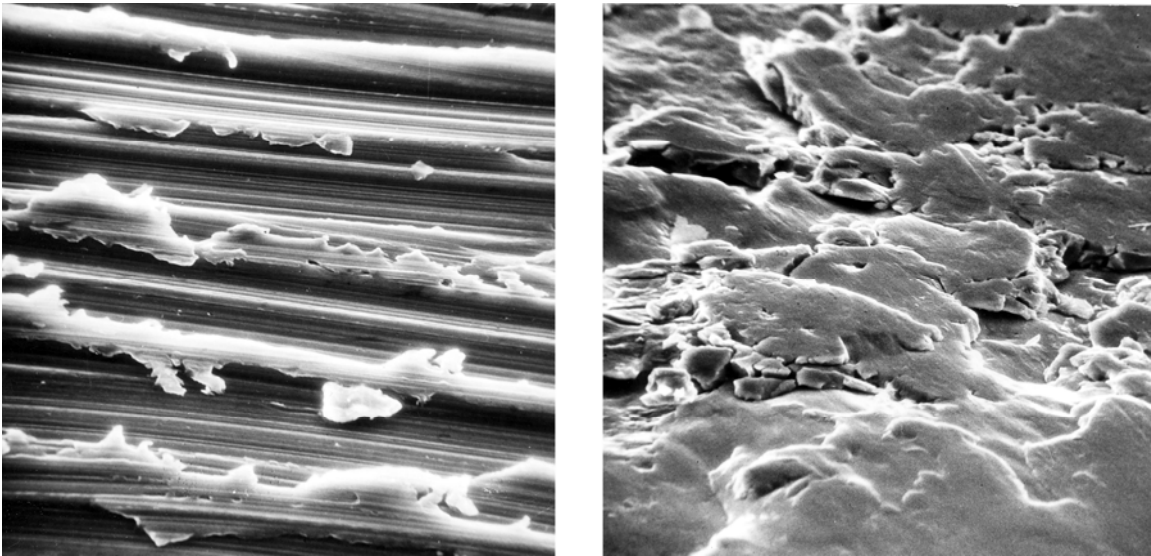


Abbildung XVI.10. Abhängigkeit des Kontaktradius' von der Zeit bei verschiedenen Normalkräften

Für $F_N = -F_A$ strebt das System für $t \rightarrow \infty$ zu einem Gleichgewichtszustand. Die Normalkraft $F_N = -1,5 \cdot F_A$ entspricht bereits einer überkritischen Abreißkraft. Die Kugel springt nach der Zeit $\sim 1,4 \cdot 100a_0 / v_0 \approx 9 \cdot 10^3$ s ab.

XVII VERSCHLEIß



XVII.1 Einleitung

Verschleiß ist eine der Hauptursachen für Bauteilschädigung und den damit verbundenen Ausfall von Maschinen und Geräten. Seine Verringerung durch passende Materialwahl, Beschichtungen, Oberflächendesign oder Schmierung ist von hohem wirtschaftlichem Wert.

Auch wenn Reibung und Verschleiß in der Praxis immer gemeinsam auftreten, sind es qualitativ unterschiedliche Phänomene. Das sieht man bereits daran, dass man sich Reibung ohne Verschleiß vorstellen kann, zumindest in einem Modell. Z.B. gibt es im Prandtl-Tomlinson Modell Reibung aber keinen Verschleiß. Auch Verschleiß ohne Reibung ist vorstellbar: Verschleiß kann bereits durch einen Normalkontakt ohne Tangentialbewegung verursacht werden.

Die oft unterschiedlichen physikalischen Mechanismen für Reibung und Verschleiß finden ihren Ausdruck in der Tatsache, dass sich die Verschleißgeschwindigkeiten bei verschiedenen Reibpaarungen (bei sonst gleichen Bedingungen) um mehrere Größenordnungen unterscheiden können. Gleichzeitig ist zu bemerken, dass in bestimmten Situationen die Prozesse, die zur Reibung führen, gleichzeitig auch Verschleiß verursachen, wie z.B. plastische Deformation von Mikrokontakten. In diesen Fällen können die Reibung und der Verschleiß engere Korrelationen aufweisen.

In den meisten Fällen wird der Verschleiß als unerwünschte Erscheinung angesehen. Der Verschleiß kann aber auch die Grundlage für verschiedene technologische Prozesse wie Schleifen, Polieren oder Sandstrahlen sein.

Es ist üblich, die folgenden Grundarten von Verschleiß nach ihrem physikalischen Mechanismus zu unterscheiden:

- Abrasiver Verschleiß tritt auf, wenn zwei Körper mit wesentlich unterschiedlicher Härte im Kontakt sind, bzw. die Zwischenschicht harte Teilchen enthält.
- Adhäsiiver Verschleiß passiert auch in Kontakten zwischen den Körpern mit gleicher oder ähnlicher Härte.
- Korrosiver Verschleiß ist mit chemischer Modifizierung der Oberfläche und einer abschließenden Abtragung der Oberflächenschicht verbunden.
- Oberflächenermüdung wird durch mehrmalige Beanspruchung der Oberfläche entweder durch Gleiten oder Rollen verursacht, wobei bei jeder einzelnen Beanspruchung anscheinend keine bemerkbaren Änderungen der Oberfläche auftreten.

XVII.2 Abrasiver Verschleiß

Um die Verschleißrate beim abrasiven Verschleiß abzuschätzen, betrachten wir ein einfaches Modell, in dem alle Mikrokontakte an der harten Oberfläche eine Kegelform haben. Betrachten wir zunächst einen einzigen Mikrokontakt mit der Normalbelastung ΔF_N .

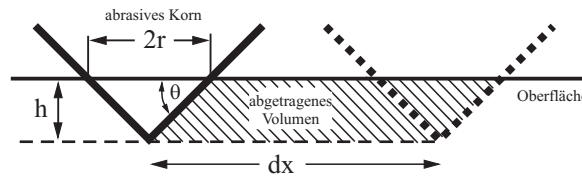


Abbildung XVII.1. Furchung des Materials durch einen starren Kegel

Unter Wirkung dieser Normalkraft dringt der Kegel in das weichere Material ein. Nach der Definition der Härte σ_0 (des weicheren Materials) gilt

$$\Delta F_N = \sigma_0 \cdot \pi r^2. \quad (\text{XVII.1})$$

Der Flächeninhalt der Projektion des Kegels auf die vertikale Ebene ist gleich rh . Bei einer Verschiebung um den Abstand dx würde der Kegel das Volumen dV ausschneiden, welches durch die folgende Gleichung gegeben wird

$$dV = rh \cdot dx = r^2 \tan \theta \cdot dx = \frac{\Delta F_N \tan \theta \cdot dx}{\pi \sigma_0}. \quad (\text{XVII.2})$$

In einer groben Abschätzung identifizieren wir dieses Volumen mit dem verschlissenen Volumen des Materials. Die Verschleißgeschwindigkeit – definiert als abgetragenes Volumen dividiert durch den zurückgelegten Weg – ist somit gleich

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\Delta F_N \tan \theta}{\pi \sigma_0}. \quad (\text{XVII.3})$$

Summieren über alle Mikrorauigkeiten ergibt für das verschlissene Volumen

$$V = \frac{F_N \overline{\tan \theta}}{\pi \sigma_0} x, \quad (\text{XVII.4})$$

wobei $\overline{\tan \theta}$ ein gewichtetes Mittel von $\tan \theta$ aller Mikrokontakte ist. Diese Gleichung wird gewöhnlich als folgende *Verschleißgleichung* geschrieben:

$$V = \frac{k_{abr} F_N}{\sigma_0} x. \quad (\text{XVII.5})$$

Das verschlissene Volumen ist proportional zur Normalkraft, zum zurückgelegten Weg und umgekehrt proportional zur Härte des Materials. Der Verschleißkoeffizient k_{abr} bildet die Einzelheiten der Geometrie der abrasiven Oberfläche ab.

Der Verschleiß zwischen einem weicheren Material und einem Abrasivkörper, bei dem die harten Teilchen in den Körper fest eingebettet sind, wird als *Zwei-Körper-Verschleiß* bezeichnet. Eine Sonderform des abrasiven Verschleißes ist der Verschleiß von Körpern in Anwesenheit von harten abrasiven Teilchen im Zwischenmedium. In diesem Fall spricht man vom *Drei-Körper-Verschleiß*.

Der Tabelle XVII.1 kann man entnehmen, dass die Verschleißkoeffizienten bei dem oben betrachteten Zwei-Körper-Verschleiß typischerweise zwischen $6 \cdot 10^{-2}$ und $6 \cdot 10^{-3}$ liegen, wobei sie bei Drei-Körper-Verschleiß um ca. eine Größenordnung kleiner sind.

Tabelle XVII.1. Abrasive Verschleißkoeffizienten

Autoren	Verschleißtyp	Korngröße (μ)	Werkstoff	k ($\times 10^{-3}$)
Spurr et al. (1975)	2-Körper	–	viele	60
Spurr et al. (1975)	2-Körper	110	viele	50
Avient et al. (1960)	2-Körper	40–150	viele	40
Lopa (1956)	2-Körper	260	Stahl	27
Kruschov and Babichev (1958)	2-Körper	80	viele	8
Samuels (1956)	2-Körper	70	Messing	5
Toporov (1958)	3-Körper	150	Stahl	2
Rabinowicz et al. (1961a)	3-Körper	80	Stahl	1,7
Rabinowicz et al. (1961a)	3-Körper	40	viele	0,7

Aus der Verschleißgleichung (XVII.5) folgt, dass das verschlissene Volumen proportional zum zurückgelegten Weg ist. Dies gilt nur, solange die Unebenheiten des härteren Materials nicht durch das weichere Material „gefüllt“ werden. Wenn das geschieht, nimmt die Verschleißgeschwindigkeit mit der Zeit ab (Abbildung XVII.2).

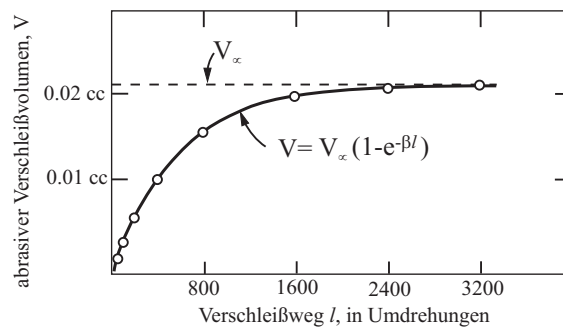


Abbildung XVII.2. Änderung des Verschleißkoeffizienten mit der Zeit. Daten aus: Mulhearn, T.O., and Samuels L.E., *The abrasion of metals: A model of the process*, *Wear*, 1962, v. 5, 478-498

Solange die Oberflächeneigenschaften der Partner nicht geändert werden (das kann durch regelmäßiges Reinigen der Oberfläche von Verschleißpartikeln erreicht werden), ist das verschlissene Volumen proportional zum Weg. Die Gleichung (XVII.5) besagt, dass die Verschleißgeschwindigkeit umgekehrt proportional zur Härte σ_0 ist oder der Kehrwert dx / dV , genannt *Verschleißbeständigkeit*, proportional zur Härte des weicheren Materials ist. Diese Abhängigkeit wurde in vielen Experimenten bestätigt (Abbildung XVII.3). Die Härte des Abrasivs dagegen beeinflusst die Verschleißgeschwindigkeit nur unwesentlich.

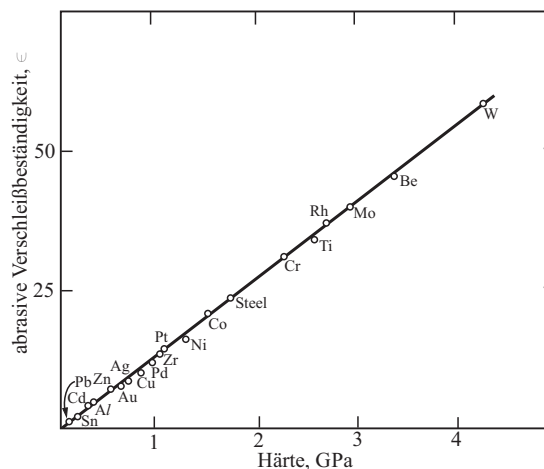


Abbildung XVII.3. Die Verschleißbeständigkeit von metallischen Materialien ist mit großer Genauigkeit proportional zur Härte. Experimentelle Daten aus: Хрущев М. М., Бабичев М. А., *Исследования изнашивания металлов*, М., 1960 (*Untersuchung von Verschleiß von Metallen*)

Bei der Wahl der abrasiven Materialien ist nicht nur deren Härte, sondern auch die Fähigkeit, scharfe, schneidende Kanten zu bilden, zu berücksichtigen. Daraus folgt, dass die brüchigen Materialien mit hoher Härte zu bevorzugen sind.

Die Gleichung (XVII.4) lässt sich auch auf eine andere Weise interpretieren. Da der durch Furchung bedingte Reibungskoeffizient μ gleich $\overline{\tan\theta}$ ist, kann (XVII.4) auch in der Form

$$V = \tilde{k} \frac{F_N \mu X}{\sigma_0} = \tilde{k} \frac{W}{\sigma_0} \quad (\text{XVII.6})$$

dargestellt werden, wobei W die Reibarbeit ist. Das Verschleißvolumen ist demnach proportional zur dissipierten Energie dividiert durch die Härte des Materials.

Die Proportionalität des Verschleißvolumens zum Energieeintrag gilt auch für den adhäsiven Verschleiß (s. nächster Abschnitt) und den erosiven Verschleiß (s. Aufgabe 1 zu diesem Kapitel) und wird oft als ein allgemeines „Verschleißgesetz“ auch für andere Verschleißarten angewendet.

XVII.3 Adhäsiver Verschleiß

Haben die Reibpartner vergleichbare Härte, so beginnt eine andere Verschleißart die Hauptrolle zu spielen: adhäsiver Verschleiß. Adhäsiver Verschleiß ist die wichtigste Verschleißart in tribologischen Anwendungen, in denen der Verschleiß minimiert werden soll und daher die Bedingungen, die beim abrasiven Verschleiß auftreten, vermieden werden sollen. Den Mechanismus des adhäsiven Verschleißes kann man sich als Zusammenschweißen von MikroRauigkeiten gefolgt vom Herauslösen von oberflächennaher Volumenelemente (Verschleißteilchen) vorstellen. Untersuchen wir die Bedingungen für das Zusammenschweißen und Herauslösen eines Teilchens gemäß diesem Mechanismus.

Die Grundeigenschaft metallischer Stoffe besteht darin, dass sie sich nach Überschreiten einer gewissen kritischen Spannung plastisch deformieren. Wird das Material dabei auf Zug belastet, so folgt nach einer kritischen Deformation der Bruch. Wird dagegen die plastische Grenze beim Druck überschritten, so verschweißen sich metallische Partner. Selbst wenn dieser Effekt wegen der Rauigkeit makroskopisch nicht bemerkbar ist (ähnlich wie im Fall von Adhäsion), gilt er für einzelne Mikrokontakte. Im dem für die Oberflächenschichten typischen stark verfestigten Zustand sind alle drei kritischen Spannungen: Fließgrenze, Bruchspannung und „Verschweißspannung“ von der selben Größenordnung.

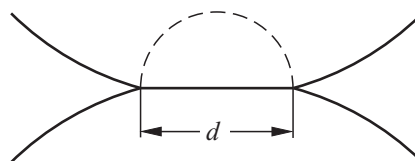


Abbildung XVII.4. Eine „Schweißbrücke“ zwischen zwei Mikrorauigkeiten

Betrachten wir nun eine Rauigkeit, die im Laufe der relativen Bewegung der Reibpartner in Kontakt mit einer anderen Rauigkeit kommt, einen Mikrokontakt mit einem Durchmesser d bildet und danach wieder wegläuft.

Die Spannung im Mikrokontakt erreicht beim Zusammenkommen der Rauigkeiten die Größenordnung der Eindringhärte σ_0 des Werkstoffes. Dabei verschweißen die Rauigkeiten. Gehen sie auseinander, so wird vor dem Bruch wieder etwa die gleiche Spannung σ_0 erreicht, nur mit dem anderen Vorzeichen. Die unmittelbar vor dem Bruch gespeicherte elastische Energie hat die Größenordnung $U_{el} \approx \frac{\sigma_0^2}{2G} d^3$. Sie reicht nur dann zum

Herauslösen eines Teilchens aus, wenn sie größer ist als die Adhäsionsenergie $U_{adh} \approx \gamma_{eff} d^2$, die zur Erzeugung von zwei freien Oberflächen geleistet werden muss. γ_{eff} ist hier die *effektive Oberflächenenergie* von inneren Grenzflächen im Material (auch Bruchzähigkeit genannt). Das Herauslösen eines Teilchens ist somit nur dann möglich, wenn $U_{el} > U_{adh}$ ist:

$$d > \frac{2G\gamma_{eff}}{\sigma_0^2}. \quad (XVII.7)$$

Für viele einfache Kristalle gilt $\sigma_0 \propto G$. Dann nimmt (XVII.7) die Form

$$d_c = const \frac{\gamma_{eff}}{\sigma_0} \quad (XVII.8)$$

an. Diese Gleichung gibt die Größenordnung des Durchmessers von Verschleißteilchen als Funktion der Härte und der effektiven Oberflächenenergien. Der experimentelle Wert für die Konstante in (XVII.8) liegt bei 60000^1 .

Da das Herauslösen eines Teilchens zum Entstehen einer Grube mit etwa der gleichen Tiefe wie der Durchmesser des herausgelösten Teilchens führt, liegt es nahe anzunehmen, dass die durch den Verschleiß erzeugte Rauheit von der gleichen Größenordnung ist wie (XVII.8).

In vielen Anwendungen wird gefordert, dass der Spielraum zwischen beweglichen Teilen möglichst klein ist. Die Praxis zeigt aber, dass das Spiel auch nicht zu klein sein darf. Andernfalls beginnt eine fortschreitende Beschädigung der Oberflächen, die man als "Fressen" bezeichnet. Es liegt nahe anzunehmen, dass das erforderliche minimale Spiel die gleiche Größenordnung hat, wie der charakteristische Durchmesser der Verschleißteilchen. Eine empirische Gleichung für das minimale Spiel h_{min} lautet

$$h_{min} = 180.000 \frac{\gamma_{eff}}{\sigma_y}. \quad (XVII.9)$$

Zur Abschätzung der Verschleißgeschwindigkeit beim adhäsiven Verschleiß betrachten wir zwei raue Oberflächen im Kontakt (Abbildung XVII.5).

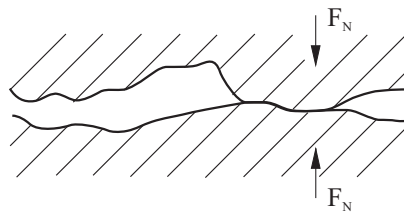


Abbildung XVII.5

Die Normalkraft F_N hängt mit der Kontaktfläche und der Härte der kontaktierenden Körper wie folgt zusammen:

$$F_N = \sigma_0 A. \quad (XVII.10)$$

Bezeichnen wir den Mittelwert des Durchmessers eines Kontaktes mit d und die Zahl der Mikrokontakte mit n . Offenbar gilt $A \approx \frac{\pi d^2}{4} \cdot n$. Daraus folgt

$$n = \frac{4A}{\pi d^2} = \frac{4F_N}{\pi d^2 \sigma_0}. \quad (XVII.11)$$

¹ Siehe hierzu das Buch von Rabinowicz: Friction and wear of materials.

Die „Existenzlänge“ eines Mikrokontaktes hat dieselbe Größenordnung wie der Durchmesser d des Kontaktes. Auf diesem Weg wird ein Kontakt gebildet und wieder zerstört. Die volle Zahl der Kontakte, die sich auf dem Weg x gebildet haben, ist gleich

$$N \approx n \frac{x}{d} \approx \frac{4F_N x}{\pi \sigma_0 d^3} \quad (\text{XVII.12})$$

Wenn wir annehmen, dass nicht jede Bildung und Zerstörung eines Mikrokontaktes zum Herauslösen eines Verschleißteilchens führt, sondern sich die Verschleißteilchen mit einer Wahrscheinlichkeit k^* bilden, dann ist das gesamte Volumen der gebildeten Verschleißteilchen gleich

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi d^3}{8} \cdot k^* N = \frac{\pi d^3}{12} \cdot k^* \cdot \frac{4F_N x}{\pi \sigma_0 d^3} = \frac{k^*}{3} \cdot \frac{F_N x}{\sigma_0}. \quad (\text{XVII.13})$$

Indem wir $k^*/3$ zu einem Koeffizienten k_{adh} zusammenfassen, erhalten wir das Gesetz für den adhäsiven Verschleiß:

$$V = k_{adh} \frac{F_N x}{\sigma_0}. \quad (\text{XVII.14})$$

Auch beim adhäsiven Verschleiß ist das verschlissene Volumen proportional zur Normalkraft, dem zurückgelegten Weg und umgekehrt proportional zur Härte. Diese Gleichung wird oft *Holm-Archard-Gleichung* genannt.

Wegen der ins Spiel gekommenen "Wahrscheinlichkeit der Bildung eines Verschleißteilchens", die zum Beispiel von der Verunreinigung der Oberflächen abhängen kann, variieren die adhäsiven Verschleißkoeffizienten zum Teil um einige Größenordnungen. Der typische Wert des Verschleißkoeffizienten für einen nicht geschmierten Kontakt zwischen zwei legierungsbildenden Metallen ist ca. $k_{adh} \sim 10^{-3}$, kann aber in Anwesenheit eines sehr guten Schmiermittels bzw. für nicht kompatible Metalle auch um drei bis vier Größenordnungen kleiner sein.

XVII.4 Bedingungen für verschleißarme Reibung

Die Bedingungen für verschleißarmes Gleiten hängen von vielen Parametern ab, und es ist schwer, einfache Regeln zu formulieren. Verschiedene Situationen ergeben sich in geschmierten und nicht geschmierten Systemen. Während in geschmierten Systemen Rauigkeit als Reservoir für Schmiermittel dient und auf diese Weise Verschleiß vermindern kann, ist es für trocken laufende Systeme in der Regel wünschenswert, möglichst glatte Oberflächen zu erzeugen. Wird in Mikrokontakten die Fließgrenze des Materials nicht erreicht, so finden nur rein elastische Deformationen der Oberflächen statt – vorausgesetzt, dass zwischen den Oberflächen keine chemischen Reaktionen verlaufen². Da die mittlere Spannung in Mikrorauigkeiten laut (VII.16) die Größenordnung $\frac{1}{2} E^* \nabla z$ hat und in einzelnen Mikrokontakten mit maximalen Spannungen bis ca. $E^* \nabla z$ zu rechnen ist, muss die Bedingung $E^* \nabla z < \sigma_0$ oder

$$\nabla z < \frac{\sigma_0}{E^*} \quad (\text{XVII.15})$$

erfüllt sein. Für viele metallische Stoffe korreliert die Härte mit dem Elastizitätsmodul und es gilt³

² Als einfaches Kriterium dafür kann die Forderung gelten, dass die kontaktierenden Werkstoffe keine Legierungen bilden.

³ Statistische Daten hierfür siehe: E. Rabinowicz, Friction and Wear of Materials.

$$\frac{\sigma_0}{E} \approx 0,01. \quad (\text{XVII.16})$$

Damit sich die Reibpartner nur elastisch deformieren, müssen die Oberflächen extrem glatt sein: Die mittlere Steigung der Oberflächen darf den Wert 0,01 nicht überschreiten. Zusätzlich ist es wünschenswert, die Wellenlänge der Rauigkeit so klein wie möglich zu halten, damit der Durchmesser der Mikrokontakte unter (XVII.8) liegt und die Bedingung für den adhäsiven Verschleiß nicht erfüllt ist.

Ist die mittlere Steigung größer (XVII.15), so wird das weichere Material in Mikrokontaktgebieten plastisch deformiert. Welche Auswirkung dabei die plastische Deformation auf den Verschleiß hat, hängt wesentlich von den Eigenschaften der obersten Oberflächenschichten ab. Die im vorigen Abschnitt beschriebenen Modellvorstellungen über den adhäsiven Verschleiß setzen voraus, dass die Bildung der Schweißbrücken und deren Zerstörung an verschiedenen Stellen im Material stattfinden. Bildet das Material eine Oxidschicht oder ist die Oberfläche mit einem Schmiermittel versehen, so kann es passieren, dass die Trennung der in Kontakt gekommenen Unebenheiten an der gleichen Fläche stattfindet, an der sie in Kontakt gekommen sind.

Das Verhältnis der Festigkeit der Grenzfläche im Vergleich zur Volumenfestigkeit des Materials spielt somit für den adhäsiven Verschleiß eine sehr große Rolle, auch wenn sie nicht explizit in der Gleichung (XVII.14) abgebildet ist. Das hat Kragelski⁴ veranlasst, das „Prinzip des positiven Härtegradienten“ als ein grundlegendes Prinzip für verschleißarme Reibbedingungen zu formulieren. Nach diesem Prinzip soll die Festigkeit der obersten Oberflächenschichten des Materials mit der Tiefe steigen. Das kann durch Schmierung, chemische Modifizierung der Oberflächenschichten oder Materialerweichung durch lokale Temperaturerhöhungen erreicht werden, sowie durch eine kleine Oberflächenenergie der Grenzschicht. Für verschleißarme Kontakte ist es vorteilhaft, wenn die kontaktierenden Materialien keine Legierungen bilden, bzw. eine Legierung bilden, deren Festigkeit kleiner ist als die Festigkeiten beider Grundstoffe. Wird der Härtegradient aus irgendwelchen Gründen negativ, so steigt die Verschleißgeschwindigkeit schlagartig an. Prozesse der Oxidbildung und der Wechselwirkung mit molekularen Schmierschichten sind aus dem genannten Grund von sehr großer Bedeutung für den Verschleiß, lassen sich aber bisher nicht im Rahmen eines einfachen kontaktmechanischen Modells erfassen.

XVII.5 Verschleiß als Materialtransport aus der Reibzone

Für eine Analyse des Verschleißes reicht es nicht, die Bedingungen für das Herauslösen von Verschleißteilchen festzustellen. Solange Verschleißteilchen in der Reibzone bleiben, werden sie weiterhin einer intensiven tribologischen Beanspruchung ausgesetzt und wiederholt in die Oberflächen der Reibpartner integriert. Der Verschleiß macht sich auf die Funktion eines Reibkontaktes erst bemerkbar, wenn das Material die Reibzone verlassen hat. Der Verschleiß ist daher im weiten Sinne nicht nur ein Problem der Festigkeit sondern ein Problem des Massentransports aus der Reibzone.

Nach Kragelski soll es für die Verschleißbeständigkeit eines Materials vorteilhaft sein, wenn eine Oberflächenschicht des Materials eine kleinere Fließgrenze hat als der Grundstoff. Untersuchen wir den Verschleißwiderstand eines Materials mit einer solchen weicheren Schicht mit der Schubfestigkeit τ_c und Dicke h . Der Durchmesser der Reibzone sei L .

Die Verschleißgeschwindigkeit kann durch folgende qualitativen Überlegungen abgeschätzt werden. Unter Annahme eines ideal plastischen Verhaltens der Schicht bleibt die Tangentialspannung in der Schicht unabhängig von der Gleitgeschwindigkeit konstant und gleich τ_c . Man kann formal eine effektive Viskosität der Schicht η_{eff} so einführen, dass die Scherspannung in der Schicht nach der gleichen Regel berechnet wird wie in einer viskosen Flüssigkeit:

⁴ I.V. Kragelski. Friction and Wear, Butter Worth, London, 1965, 346 pp.

$$\tau_c = \eta_{\text{eff}} \frac{v}{h}. \quad (\text{XVII.17})$$

Daraus folgt

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{h\tau_c}{v}. \quad (\text{XVII.18})$$

Eine sich bereits im Zustand plastischen Fließens befindliche Schicht hat in Bezug auf andere Spannungskomponenten (z.B. Normalspannung) keine Fließgrenze und verhält sich in erster Näherung als Flüssigkeit mit der effektiven Viskosität (XVII.18). Sie wird daher ausgepresst mit einer Geschwindigkeit, die durch die Gleichung (XIV.27) abgeschätzt werden kann:

$$|\dot{h}| \approx \frac{2h^3}{3\pi\eta_{\text{eff}}R^4} F_N \approx \frac{2h^2v}{3\pi R^4 \tau_c} F_N. \quad (\text{XVII.19})$$

Das aus der Reibzone ausgedrückte – und somit endgültig verschlissene – Volumen bezogen auf den Gleitweg ist somit gleich $\frac{dV}{dx} = \frac{|\dot{h}| \pi R^2}{v} \approx \frac{8}{3} \frac{F_N}{\tau_c} \left(\frac{h}{2R}\right)^2$. Numerische Simulationen bestätigen diese Gleichung bis auf einen konstanten Koeffizienten. So lässt sich die Verschleißgleichung in der folgenden Form schreiben⁵:

$$V \approx \frac{F_N}{\sigma_0} \left(\frac{h}{L}\right)^2 x. \quad (\text{XVII.20})$$

Mit σ_0 wurde hier die Härte des Materials bezeichnet. Diese Beziehung hat die gleiche Form wie die Verschleißgleichung (XVII.14) jedoch mit einem geometrischen Faktor $(h/L)^2$, der bei kleinen h und großen L für extrem kleine Verschleißgeschwindigkeiten sorgen kann.

XVII.6 Verschleiß von Elastomeren

Der Verschleiß von Elastomeren ist ein sehr komplizierter Prozess, der bis heute noch nicht hinreichend verstanden wurde. Zu einer groben Abschätzung können wir die Verschleißgleichung (XVII.14) für den adhäsiven Verschleiß anwenden, wobei die Härte σ_0 durch die mittlere Spannung (XVI.10) in Mikrokontakten ersetzt werden muss:

$$V = k_{\text{adh}} \frac{F_N x}{\sigma_0} = k_{\text{adh}} \frac{\kappa F_N x}{4 |\hat{G}(vk)| \nabla z} \quad (\text{XVII.21})$$

mit $\kappa \approx 2$ und k - charakteristische Wellenzahl der Rauigkeit.

Zur Charakterisierung des Gummiverschleißes benutzt man oft die so genannte *Abreibbarkeit* γ (Englisch *abradability*) als Verhältnis des verschlissenen Volumens zur Verlustenergie. Für diese erhalten wir die Abschätzung

$$\gamma = \frac{V}{\mu F_N x} = \frac{\kappa k_{\text{adh}}}{\mu 4 |\hat{G}(vk)| \nabla z} = \frac{\kappa k_{\text{adh}}}{4 \nabla z^2 \text{Im}(\hat{G}(vk))}. \quad (\text{XVII.22})$$

⁵ Popov V.L., Smolin I.Yu., Gervé A. and Kehrwald B. Simulation of wear in combustion engines. – *Computational Materials Science*, 2000, v. 19, No.1-4, pp. 285-291.

Sie ist umgekehrt proportional zum Imaginärteil des komplexen Moduls und weist daher bei mittleren Geschwindigkeiten ein Minimum auf (Abbildung XVII.6).

Neben viskoelastischen Eigenschaften weist Gummi auch plastische Eigenschaften auf. Sie können in grober Näherung durch Angabe einer kritischen Spannung σ_c , der „Fließgrenze“, charakterisiert werden, wobei diese kritische Spannung bei Elastomeren noch ungenauer definiert ist als bei Metallen. Den dreifachen Wert davon nehmen wir als charakteristische Größe der Indentierungshärte von Gummi an: $\sigma_0 \approx 3\sigma_c$. Gemäß (XVI.10) hat die charakteristische Spannung in Mikrokontakten die Größenordnung

$$\sigma \approx 4\kappa^{-1} \left| \hat{G}(vk) \right| \nabla z. \quad (\text{XVII.23})$$

Erreicht diese Spannung die Härte des Materials, so wird Gummi plastisch deformiert und der Verschleiß steigt schnell an. Die kritische Geschwindigkeit, bei der dies geschieht, berechnet sich aus der Bedingung

$$\sigma_0 \approx 2 \left| \hat{G}(v_c k) \right| \nabla z. \quad (\text{XVII.24})$$

Eine ausführlichere Betrachtung der Reib- und Verschleißvorgänge sollte auch Änderungen der Temperatur in Mikrokontakten berücksichtigen, da der komplexe Modul temperaturabhängig ist.

Bei großen Reibungskoeffizienten entwickelt sich im Reibkontakt eine Instabilität, durch die ein Teil der Kontaktfläche in den Haftzustand übergeht. Eine weitere Bewegung des Körpers ist dann nur durch Fortpflanzung von Ablöswellen – den sogenannten Schallamach-Wellen – möglich. Für dieses Regime ist ein anderer Verschleißmechanismus charakteristisch – die Rollenbildung.

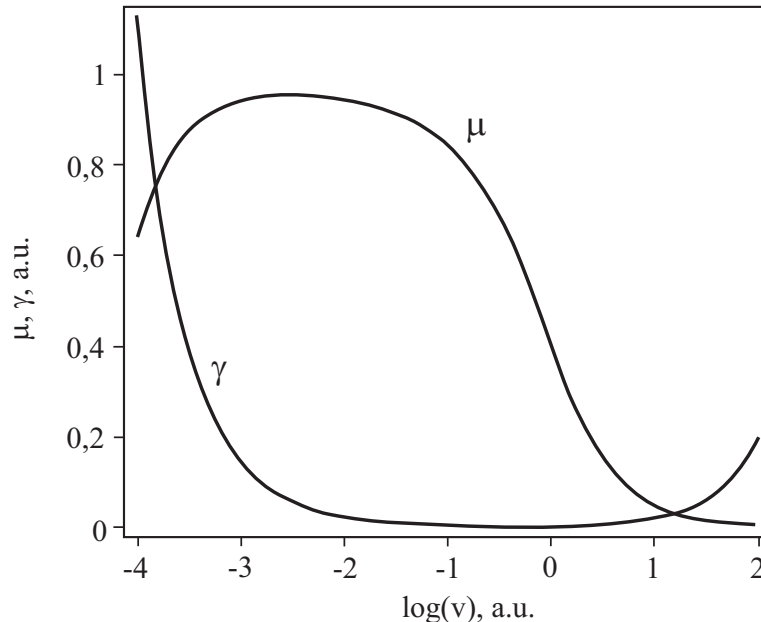


Abbildung XVII.6. Geschwindigkeitsabhängigkeit des Reibungskoeffizienten und Abreibbarkeit gemäß Gl. (XVII.22) für das rheologische Modell (XV.51) mit $G_0 = 1$, $G_1 = 1000$, $\tau_1 = 10^{-2}$, $\tau_2 = 10^2$,

$$g(\tau) = \tau_1 \tau^{-2}$$

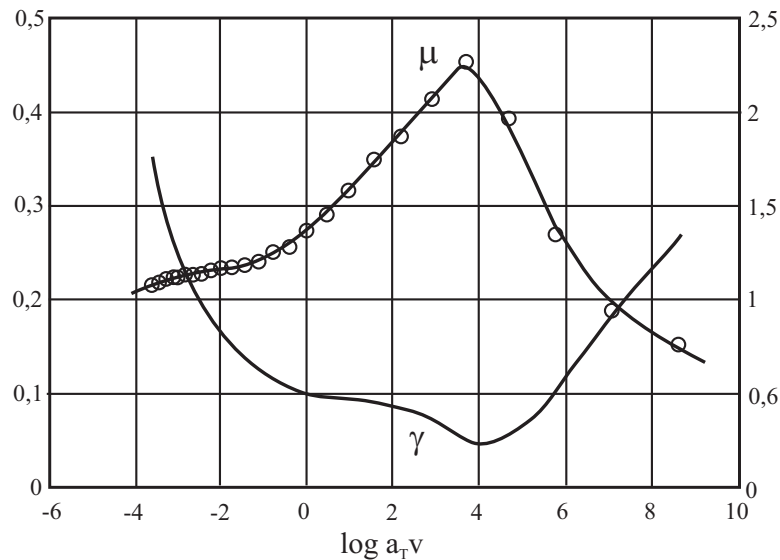


Abbildung XVII.7. Experimentelle Geschwindigkeitsabhängigkeit des Reibungskoeffizienten μ und der Abreibbarkeit γ für eine Gummimischung. Daten nach: K.A. Grosch, *The rolling resistance, wear and traction properties of tread compounds. Rubber Chemistry and Technology, 1996, v. 69, pp. 495-568*

Aufgaben

Aufgabe 1: Erosiver Verschleiß bei kleinen Geschwindigkeiten. Ein rundes, hartes Teilchen mit dem Radius R schlägt mit einer Geschwindigkeit v_0 senkrecht zur Oberfläche eines Festkörpers mit der Härte σ_0 auf. Zu bestimmen ist die Eindringtiefe, der Durchmesser des Eindrucks und das beim Aufschlag ausgedrückte Volumen.

Lösung: Die momentane Eindringtiefe $d(t)$ ist mit dem momentanen Kontaktradius $a(t)$ gemäß $a(t) \approx \sqrt{2Rd(t)}$ verbunden. Die Kontaktfläche berechnet sich zu

$$A(t) \approx 2\pi R d(t).$$

Die mittlere Spannung im Kontaktgebiet sei zu jedem Zeitpunkt konstant und gleich der Härte des Materials. Die auf die Kugel wirkende Kontaktkraft ist somit gleich $-\sigma_0 2\pi R d(t)$. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m \frac{\partial^2 d(t)}{\partial t^2} = -2\pi\sigma_0 R d(t).$$

Ihre Lösung mit den Anfangsbedingungen $d(0) = 0$, $\dot{d}(0) = v_0$ ist gegeben durch

$$d(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

mit $\omega = \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0 R}{m}}$. Die maximale Eindringtiefe ist gleich

$$d_{\max} = \frac{v_0}{\omega} = v_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi\sigma_0 R}}.$$

Indem wir die Masse des Teilchens durch die Dichte ρ und den Radius ausdrücken:

$$m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho, \text{ erhalten wir}$$

$$d_{\max} = R \sqrt{\frac{2 \rho v_0^2}{3 \sigma_0}}.$$

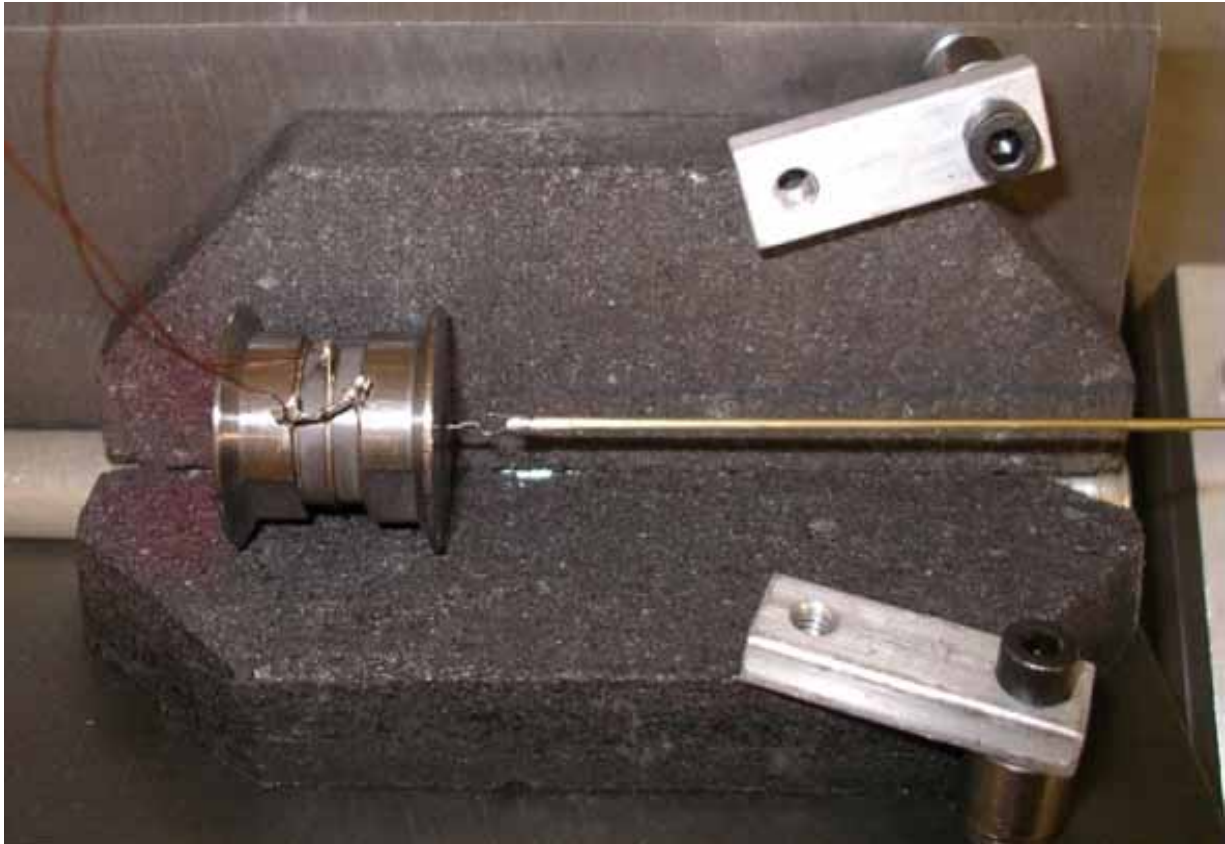
Das „eingedrückte Volumen“ ΔV ist gleich

$$\Delta V \approx \pi R d_{\max}^2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\rho v_0^2}{2 \sigma_0} = V \frac{\rho v_0^2}{2 \sigma_0} = \frac{m v_0^2}{2 \sigma_0}.$$

Das eingedrückte Volumen durch Teilchenaufschlag ist gleich der kinetischen Energie des Teilchens dividiert durch die Härte des Materials.

Das Verschleißvolumen hängt nicht nur von dem eingedrückten Volumen ab, sondern auch vom Mechanismus der Abtragung des dadurch verschobenen Materials. Das Verschleißvolumen ist jedoch in der Regel proportional zum eingedrückten Volumen.

XVIII REIBUNG UNTER EINWIRKUNG VON ULTRASCHALL



XVIII.1 Einführung

Vibrationen mit verschiedenen Frequenzen und Amplituden werden in vielen technischen Bereichen zur Beeinflussung der Reibungskraft eingesetzt. Die bekanntesten niederfrequenten Anwendungen sind Vibrationsstampfer und -platten. Hochfrequente Schwingungen werden zur Beeinflussung der Reibkräfte bei Umformung, Fügen oder Tiefziehen eingesetzt. Auch in nanotribologischen Geräten werden hochfrequente Schwingungen zur Vermeidung von Kontaktinstabilitäten benutzt (z.B. in der Atomkraftmikroskopie). Eine Reihe von Methoden zur Induzierung eines gerichteten Transports beruht auf Ausnutzung der Wechselwirkung zwischen Vibrationen und Reibung. Dazu gehören viele bekannte Methoden für Vibrationstransport und –separation. Auf Ultraschallschwingungen beruht das Wirkungsprinzip von Wanderwellenmotoren, die in Fotokameras bzw. Objektiven eingesetzt werden. Schwingungen führen meistens zur Verminderung der Reibkraft. Unter bestimmten Bedingungen können sie auch eine Steigerung der Reibkraft verursachen oder zum Verschweißen der Reibpartner führen. Darauf beruhen Ultraschallschweißen oder Ultraschallbonding in der Mikrochiptechnik.

XVIII.2 Einfluss von Ultraschall auf die Reibungskraft aus makroskopischer Sicht

Einfluss von Schwingungen auf die statische Reibungskraft

Untersuchen wir einen Körper, der auf einer Unterlage in zwei Punkten gestützt wird, (Abbildung XVIII.1). Der Reibungskoeffizient zwischen der Unterlage und der Probe sei μ . Die Probe soll in erster Näherung als ein starrer Körper betrachtet werden, dessen Länge durch die eingebauten Piezoelemente periodisch geändert werden kann.

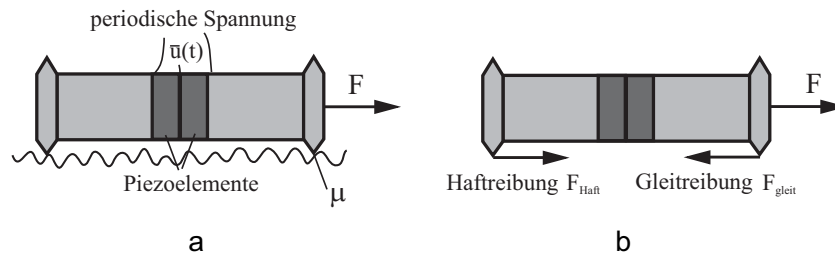


Abbildung XVIII.1. (a) Eine in Gleitrichtung schwingende Probe. (b) Die auf die Probe in horizontaler Richtung wirkenden Kräfte

In Abwesenheit von Schwingungen muss an die Probe eine kritische Kraft $F_s = \mu F_N$ angelegt werden, um sie in Bewegung zu setzen, wobei F_N die Normalkraft ist, die in unserem Fall dem Gewicht der Probe gleich ist. Wird dagegen die Probenlänge geändert, so dass eine relative Bewegung zwischen den Kontaktpunkten und der Unterlage entsteht, so setzt sich die Probe bereits bei einer beliebig kleinen Kraft F in Bewegung. Der Freischnitt einer Probe, deren Länge mit der Zeit steigt, ist in *Abbildung XVIII.1b* gezeigt. Bei langsamer Längenänderung ist der Prozess quasistatisch, und alle Kräfte müssen zu jedem Zeitpunkt im Gleichgewicht sein. Da die Gleitreibungskraft in jedem Kontaktpunkt betragsmäßig konstant ist

$$F_{\text{Gleit}} = \frac{1}{2} \mu F_N, \quad (\text{XVIII.1})$$

können die Reibungskräfte mit der äußeren Kraft nur dann im Gleichgewicht bleiben, wenn ein Ende der Probe gleitet und das andere haftet. In der Phase des Zusammenziehens wird der hintere Kontakt gleiten und der vordere haften. Auf diese Weise wird die Probe eine raupenartige Bewegung ausführen und sich in einer Periode um Δl bewegen, wobei Δl die Amplitude der Längenänderung ist. Das bedeutet, dass *unter der Annahme der Gültigkeit des Coulombschen Reibungsgesetzes* eine beliebig kleine Schwingungsamplitude und eine beliebig kleine äußere Kraft reicht, um die Probe in makroskopische Bewegung zu versetzen: Die statische Reibungskraft verschwindet. Experimente zeigen jedoch, dass diese Schlussfolgerung erst ab einer gewissen Schwingungsamplitude gültig ist (s. unten experimentelle Messungen der statischen Reibungskraft als Funktion der Schwingungsamplitude).

Der Einfluss von Schwingungen auf die Gleitreibung

Als nächstes untersuchen wir den Einfluss von Schwingungen auf die Gleitreibungskraft. Die Schwingungsfrequenz soll jetzt so hoch sein, dass die Schwingungen die gleichförmige Bewegung der Probe nicht beeinflussen. Das bedeutet, dass die Bewegung der Probe als Superposition einer Bewegung mit einer konstanten Geschwindigkeit v_0 und einer oszillierenden Geschwindigkeit angenommen werden kann.

I. Schwingung in der Gleitrichtung.

Oszilliert die Länge der Probe nach einem harmonischen Gesetz

$$l = \tilde{l} + l_0 \sin \omega t, \quad (\text{XVIII.2})$$

so gilt für die Koordinaten der Kontaktpunkte

$$x_1 = v_0 t + \frac{1}{2} \tilde{l} + \frac{1}{2} l_0 \sin \omega t, \quad x_2 = v_0 t - \frac{1}{2} \tilde{l} - \frac{1}{2} l_0 \sin \omega t. \quad (\text{XVIII.3})$$

Ihre Geschwindigkeiten relativ zur Unterlage sind

$$\dot{x}_1 = v_0 + \frac{1}{2} l_0 \omega \cos \omega t, \quad \dot{x}_2 = v_0 - \frac{1}{2} l_0 \omega \cos \omega t \quad (\text{XVIII.4})$$

oder

$$\dot{x}_1 = v_0 + \hat{v} \cos \omega t, \quad \dot{x}_2 = v_0 - \hat{v} \cos \omega t \quad (\text{XVIII.5})$$

mit $\hat{v} = \frac{1}{2} l_0 \omega$. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass die Normalkraft zwischen beiden Kontaktpunkten zu je $F_N / 2$ verteilt ist und sich mit der Zeit nicht ändert. Unter dieser Annahme ergibt sich für die gesamte auf die Probe wirkende Reibungskraft:

$$F_R = \frac{\mu F_N}{2} \left[\text{sgn}(v_0 + \hat{v} \cos \omega t) + \text{sgn}(v_0 - \hat{v} \cos \omega t) \right]. \quad (\text{XVIII.6})$$

Die makroskopische Reibungskraft erhalten wir durch Mittelung dieser Kraft über eine Schwingungsperiode:

$$\langle F_R \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F_R(t) dt = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu F_N}{2} \int_0^{2\pi} \left[\text{sgn}(v_0 + \hat{v} \cos \xi) + \text{sgn}(v_0 - \hat{v} \cos \xi) \right] d\xi. \quad (\text{XVIII.7})$$

Bei Mittelung über eine Periode sind die Beiträge beider Summanden gleich, so dass die Integration eines Summanden und Multiplikation mit 2 reicht:

$$\langle F_R \rangle = \frac{\mu F_N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sgn}(v_0 - \hat{v} \cos \xi) d\xi. \quad (\text{XVIII.8})$$

Betrachten wir zwei Fälle:

(a) $v_0 > \hat{v}$. In diesem Fall bleibt die Geschwindigkeit immer positiv und die Reibungskraft sowohl im Betrag als auch in der Richtung konstant. Die mittlere Reibungskraft ist in diesem Fall gleich $\langle F_R \rangle = \mu F_N$.

(b) $v_0 < \hat{v}$. In diesem Fall ist die Geschwindigkeit in einem Teil der Periode positiv und im anderen Teil negativ (diese Zeiträume sind in *Abbildung XVIII.2* mit +1 bzw. -1 gekennzeichnet). Die Reibungskraft im positiven Bereich ist μF_N und im negativen Bereich $-\mu F_N$. Der Zeitpunkt der Änderung des Vorzeichens der Geschwindigkeit bestimmt sich aus der Bedingung $v_0 - \hat{v} \cos \xi^* = 0$. Daraus folgt

$$\xi^* = \arccos(v_0 / \hat{v}). \quad (\text{XVIII.9})$$

Mit Hilfe der *Abbildung XVIII.2* kann man leicht sehen, dass das Integral (XVIII.8) sich zu

$$\langle F_R \rangle = \mu \frac{F_N}{2\pi} \left((2\pi - 2\xi^*) - 2\xi^* \right) = \mu \frac{2F_N}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \xi^* \right) = \mu \frac{2F_N}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{v_0}{\hat{v}} \right) \right)$$

berechnet oder

$$\langle F_R \rangle = \begin{cases} \frac{2\mu F_N}{\pi} \arcsin \left(\frac{v_0}{\hat{v}} \right), & \text{für } v_0 < \hat{v} \\ \mu F_N, & \text{für } v_0 > \hat{v} \end{cases} \quad (\text{XVIII.10})$$

Diese Abhängigkeit ist in *Abbildung XVIII.3* im Vergleich zu experimentellen Daten dargestellt.

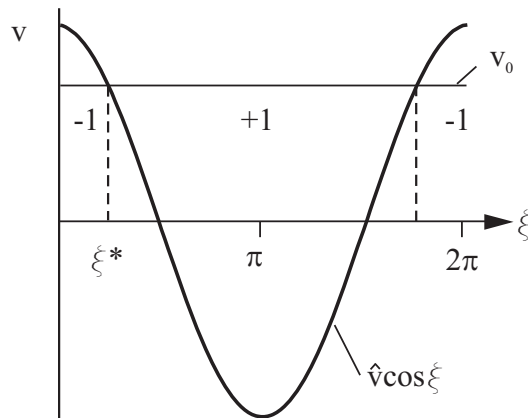


Abbildung XVIII.2. Zur Berechnung des Integrals (XVIII.8)

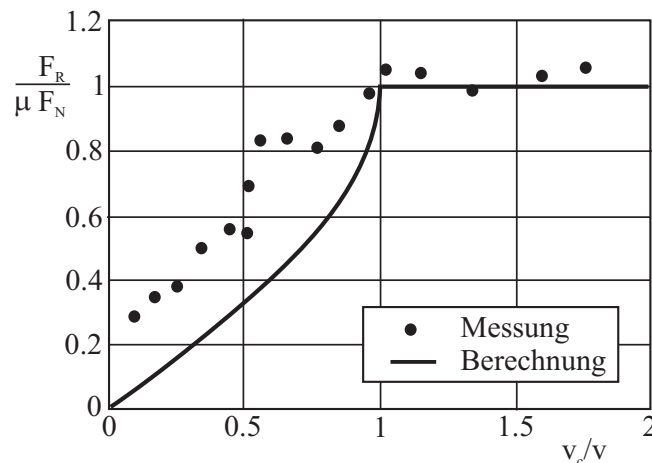


Abbildung XVIII.3. Theoretisch und experimentell ermittelte Reibungskraftreduktion durch Vibrationen parallel zur Bewegungsrichtung. Daten aus: Storck H., Littmann W., Wallaschek J., Mracek M.: *The effect of friction reduction in presence of ultrasonic vibrations and its relevance to traveling wave ultrasonic motors. Ultrasonics, 2002, Vol. 40, p. 379-383*

II. Schwingung senkrecht zur Gleitrichtung.

In diesem Fall ist die Oszillationsgeschwindigkeit

$$v_1 = \hat{v} \cos \omega t \quad (\text{XVIII.11})$$

stets senkrecht zur Gleitrichtung gerichtet. Der Momentanwert der Reibungskraft kann mit Hilfe des Kraftdiagramms in *Abbildung XVIII.4* zu

$$F_R = \mu F_N \cos \varphi \quad (\text{XVIII.12})$$

berechnet werden. Unter Berücksichtigung der Beziehung $\tan \varphi = v_1 / v_0$ ergibt sich für die Reibungskraft

$$F_R = \frac{\mu F_N}{\sqrt{1 + \left(\frac{\hat{v}}{v_0} \cos \omega t\right)^2}}. \quad (\text{XVIII.13})$$

Die makroskopische Reibungskraft als Mittelwert der mikroskopischen Tangentialkraft berechnet sich zu

$$F_R = \frac{\mu F_N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \left(\frac{\hat{v}}{v_0} \cos \xi\right)^2}}. \quad (\text{XVIII.14})$$

Diese Abhängigkeit ist zusammen mit experimentellen Daten zum Vergleich in *Abbildung XVIII.3 b* dargestellt. Anders als im Fall von Schwingungen parallel zur Gleitrichtung bleibt in diesem Fall der Reibungskoeffizient immer kleiner als ohne Ultraschall.

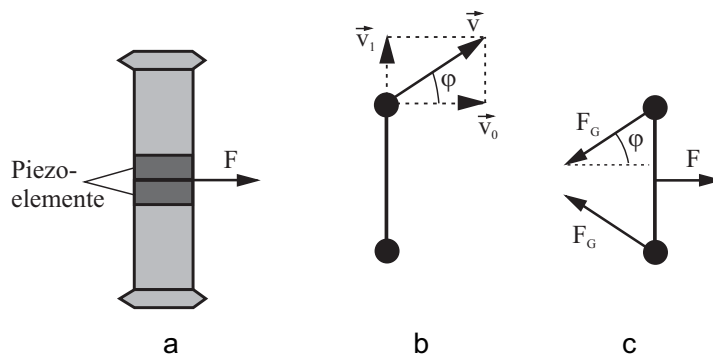


Abbildung XVIII.4. Schwingungen senkrecht zur Gleitrichtung: (a) Schematische Darstellung des Experimentes, (b) Geschwindigkeitsdiagramm, (c) Kraftdiagramm

Ein wesentlicher Unterschied zwischen theoretischen und experimentellen Ergebnissen ist, dass der experimentell ermittelte Reibungskoeffizient bei sehr kleinen Gleitgeschwindigkeiten nicht gegen Null strebt, wie es die Theorie vorhersagt. Dies ist ein Zeichen dafür, dass das makroskopische Coulombsche Reibungsgesetz bei kleinen Schwingungsamplituden nicht mehr gültig ist.

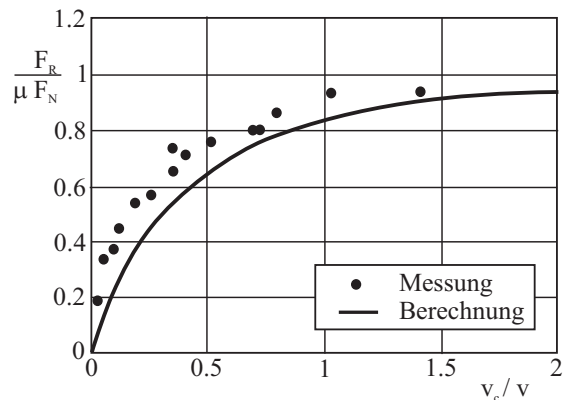


Abbildung XVIII.5. Theoretisch und experimentell ermittelte Reibungskraftreduktion durch Vibrationen senkrecht zur Bewegungsrichtung. Daten aus: Storck H., Littmann W., Wallaschek J., Mracek M.: *The effect of friction reduction in presence of ultrasonic vibrations and its relevance to traveling wave ultrasonic motors.* *Ultrasonics*, 2002, Vol. 40, p. 379-383

XVIII.3 Einfluss von Ultraschall auf die Reibungskraft aus mikroskopischer Sicht

Die makroskopische Gleitreibungskraft ist nichts anderes als der zeitliche Mittelwert, der zwischen dem Körper und der Unterlage wirkenden Tangentialkraft. Der Begriff „makroskopische Reibungskraft“ kann daher streng genommen nur zusammen mit der Angabe des Mittelungsintervalls benutzt werden. Auf ausreichend kleinen räumlichen und zeitlichen Skalen bricht das makroskopische Reibungsgesetz zusammen. Es kann daher auch bei der Untersuchung des Einflusses von Vibrationen auf die Reibung nicht für beliebig kleine Schwingungsamplituden angewendet werden. Dass das makroskopische Reibungsgesetz auf kleinen Skalen zusammenbricht und präzisiert werden muss, illustrieren wir mit dem Prandtl-Tomlinson-Modell (Kapitel XI), das wir in Anlehnung auf das oben behandelte Zwei-Körper-System modifizieren. Betrachten wir zwei Massenpunkte mit der Gesamtmasse m , dessen Abstand sich nach dem Gesetz

$$l(t) = l_0 + \Delta l \sin(\omega t) \quad (\text{XVIII.15})$$

ändert. Beide Körper befinden sich in einem räumlich periodischen Potential. Die Gleichung (XI.1) wird modifiziert zu

$$m\ddot{x} = F - \eta\dot{x} - \frac{F_0}{2} \left[\text{sink} \left(\frac{x - l(t)}{2} \right) + \text{sink} \left(\frac{x + l(t)}{2} \right) \right]. \quad (\text{XVIII.16})$$

Ohne Schwingung muss an das System die Kraft

$$F_{s,0} = F_0 \left| \cos \left(\frac{1}{2} k l_0 \right) \right| \quad (\text{XVIII.17})$$

angelegt werden, um es in Bewegung zu setzen. $F_{s,0}$ hat somit den physikalischen Sinn der statischen Reibungskraft ohne Ultraschall.

Nun lassen wir die Länge l nach dem Gesetz (XVIII.15) oszillieren und mitteln die Gleichung (XVIII.16) über eine Periode $T = 2\pi / \omega$; Die Mittelung über die Zeit bezeichnen wir mit einer eckigen Klammer.

$$m\langle\ddot{x}\rangle = F - \eta\langle\dot{x}\rangle - \frac{F_0}{2}\langle\text{sink}(x - l(t)/2) + \text{sink}(x + l(t)/2)\rangle. \quad (\text{XVIII.18})$$

Solange es keine makroskopische Bewegung des Systems gibt (d.h. es befindet sich makroskopisch gesehen im Haftzustand), sind die Mittelwerte $\langle\ddot{x}\rangle$ und $\langle\dot{x}\rangle$ gleich Null, und für die Haftreibung ergibt sich

$$\begin{aligned} F &= \frac{F_0}{2}\langle\text{sink}(x_0 - (l_0 + \Delta l \sin(\omega t))/2) + \text{sink}(x_0 + (l_0 + \Delta l \sin(\omega t))/2)\rangle \\ &= F_0 \sin kx_0 \cdot \langle\cos k(l_0 + \Delta l \sin(\omega t))/2\rangle \\ &= F_0 \sin kx_0 \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{2}kl_0\right)\langle\cos\left(\frac{1}{2}k\Delta l \sin \omega t\right)\rangle - \sin\left(\frac{1}{2}kl_0\right)\langle\sin\left(\frac{1}{2}k\Delta l \sin \omega t\right)\rangle\right). \end{aligned} \quad (\text{XVIII.19})$$

Der Mittelwert des zweiten Gliedes ist gleich Null (da eine ungerade Funktion gemittelt wird). Der Mittelwert des ersten Gliedes kann mit Hilfe der Entwicklung

$$\cos(\zeta \sin \varphi) = J_0(\zeta) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\zeta) \cos(2n\varphi) \quad (\text{XVIII.20})$$

berechnet werden, wobei J_n die Bessel-Funktion n-ter Ordnung ist. Für die Reibkraft ergibt sich somit

$$F = F_0 \sin kx_0 \cos\left(\frac{1}{2}kl_0\right) J_0\left(\frac{1}{2}k\Delta l\right). \quad (\text{XVIII.21})$$

Diese Kraft ist eine Funktion der Koordinate x_0 . Ihr maximal möglicher Wert

$$F_s = F_0 \left| \cos\left(\frac{1}{2}kl_0\right) J_0\left(\frac{1}{2}k\Delta l\right) \right| = F_{s,0} \left| J_0\left(\frac{1}{2}k\Delta l\right) \right| \quad (\text{XVIII.22})$$

ist die statische Reibungskraft. Die statische Reibungskraft hängt demnach von der Schwingungsamplitude ab. Diese Abhängigkeit ist in *Abbildung XVIII.6* dargestellt.

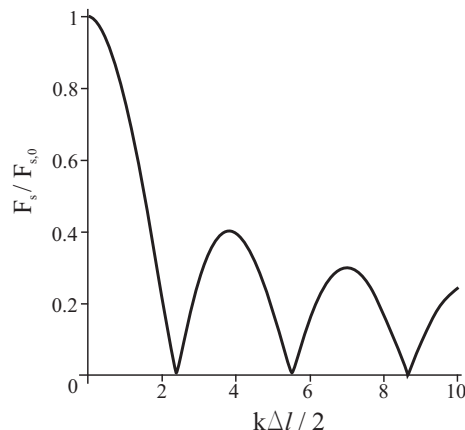


Abbildung XVIII.6. Abhängigkeit der statischen Reibungskraft von der Schwingungsamplitude für ein Zwei-Körper-System in einem räumlich periodischen Potential

Die Reibungskraft nimmt mit der Amplitude ab und verschwindet für $k\Delta l / 2 = 2.4048$, d.h. wenn $\Delta l \approx 0,77\Lambda$, wobei Λ die Wellenlänge des Potentials ist. Enthält das Wechselwirkungspotential mehrere Fourier-Komponenten, so werden die Oszillationen der statischen Reibungskraft verschwimmen, und es ergibt sich eine kontinuierlich abfallende

Funktion. An diesem Beispiel können wir den allmählichen Übergang von der statischen Kraft ohne Ultraschall zum makroskopischen Ergebnis in Anwesenheit von Ultraschall ($F_s = 0$) erkennen.

Wir sehen, dass die Schwingungsamplitude, bei der die statische Kraft wesentlich abnimmt, Information über die charakteristische Wellenlänge des Wechselwirkungspotentials liefert. Diese Tatsache wird in der *Tribospektroskopie* zur Untersuchung von Reibungsmechanismen benutzt¹.

XVIII.4 Experimentelle Untersuchungen der statischen Reibungskraft als Funktion der Schwingungsamplitude

Das in Abbildung XVIII.1 gezeigte System wurde experimentell realisiert und die statische Reibungskraft als Funktion der Amplitude gemessen¹. Messungen wurden bei Frequenzen von ca. 60–70 kHz mit Schwingungsamplituden bis ca. 1 μm durchgeführt. Die Schwingungsamplitude wurde mit einem Laser-Vibrometer gemessen. Ergebnisse für Paarungen von verschiedenen Materialien mit einer stählernen Probe sind in *Abbildung XVIII.8* dargestellt.

Für die meisten Paarungen nimmt der Reibungskoeffizient mit der Schwingungsamplitude ab. Die Länge, auf der die Reibungskraft wesentlich abfällt, bestimmt die räumliche Skala, die für Reibungsprozesse in der gegebenen Reibpaarung und unter den gegebenen Bedingungen charakteristisch sind. Die charakteristische räumliche Skala bei Reibungsprozessen ist für verschiedene Materialien unterschiedlich. In der Tabelle 5.1 sind die Ergebnisse für 9 untersuchte Werkstoffe zusammengefasst. Es wird dabei unterschieden, ob es sich um das erste Experiment handelt oder Experimente nach dem Einlaufen.

Bei den meisten Werkstoffen ist die Länge der charakteristischen Skala nach dem Einlaufen kleiner als im ursprünglichen Zustand. Die Ausnahmen sind Messing und Glas. Der Tabelle 5.2 entnehmen wir, dass die charakteristische Skala bei allen untersuchten Materialien zwischen ca. 15 und 100 nm liegt. Bei Metallen variiert sie zwischen 20 und 60 nm.

Die physikalische Herkunft dieser Skala ist noch nicht abschließend geklärt; vermutlich hängt sie mit der Dicke der Grenzschicht zusammen. Bei größeren Ultraschallamplituden erwärmt sich die Probe, und die Grenzschicht verliert ihre Wirksamkeit. Eine typische Erscheinung ist daher, dass bei ausreichend großen Ultraschallamplituden der Reibungskoeffizient wieder steigt. Bei noch größeren Amplituden hätten wir es mit einer starken metallischen Adhäsion und *Reibschweißen* zu tun.

¹ Popov V.L., Starcevic Ya. Tribospectroscopic Study of a Steel-Steel Friction Couple. - Tech. Phys. Lett., 2005, v. 31, No. 4, pp. 309-311.

Eine ausführlichere Darstellung findet sich in: J. Starcevic, Tribospektroskopie als neue Methode zur Untersuchung von Reibungsmechanismen: Theoretische Grundlagen und Experiment, Dissertation, TU Berlin, 2008.

Ein qualitativ abweichendes Verhalten weisen Gummi und Aluminium auf (*Abbildung XVIII.8*). Bei Gummi haben wir es mit einem Fall zu tun, wo die Skala grundsätzlich nicht durch die Wechselwirkungen auf der Nanometerskala bestimmt wird. Aluminium ist durch sein von anderen Metallen abweichendes tribologisches Verhalten bekannt, das vermutlich mit dem leichten Durchbruch seiner Oxidschicht zusammenhängt, wodurch der Reibvorgang den Bereich der Grenzschichtreibung verlässt.

Bei Teflon ist der Reibungskoeffizient in *Abbildung XVIII.8 a* nicht nur klein, sondern wird mit der steigenden Schwingungsamplitude *negativ*. Das ist möglich, wenn die Oberfläche eine nicht symmetrische Struktur aufweist, so dass sich ein „Ratchet“² bildet und ein gerichteter Transport auch in Abwesenheit einer äußeren Kraft stattfindet.

Tribospektroskopische Untersuchungen zeigen, dass unter den Grezschichtreibungsbedingungen das makroskopische Reibungsgesetz bereits bei Verschiebungen von ca. 100 Nanometer anwendbar ist. Eine starke Abnahme des Reibungskoeffizienten findet bei sehr kleinen Verschiebungen von der Größenordnung 20-60 Nanometer statt. Solche Amplituden reichen aus, um den Reibungskoeffizienten zu steuern.

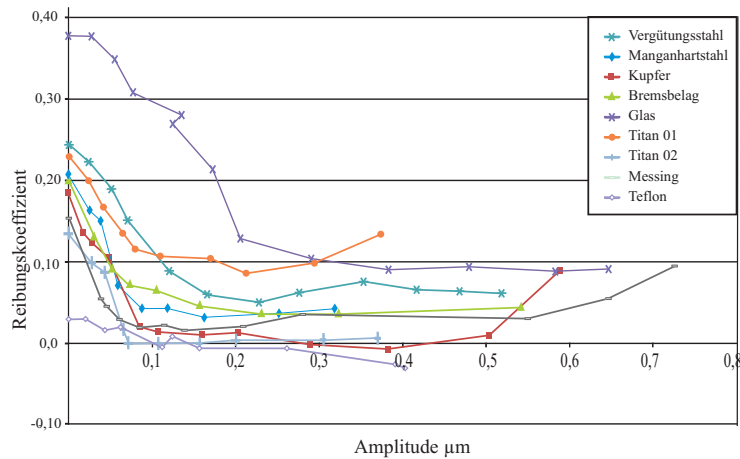


Abbildung XVIII.7. Abhängigkeiten des statischen Reibungskoeffizienten von der Schwingungsamplitude für eine Reihe von Werkstoffen gegen Stahl C45

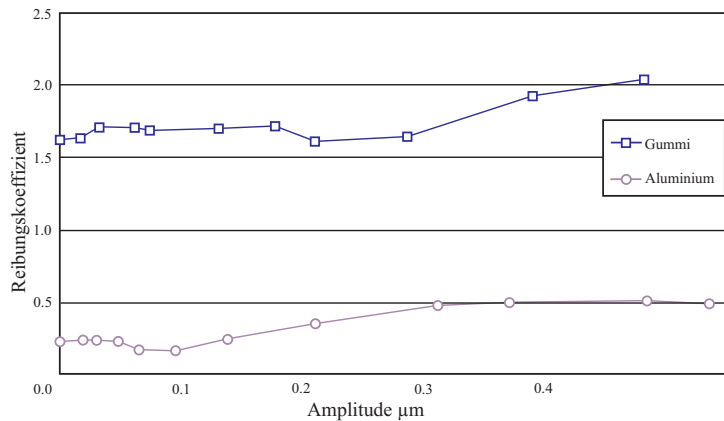


Abbildung XVIII.8. Abhängigkeiten des statischen Reibungskoeffizienten von der Schwingungsamplitude für Gummi und Al

² Ausführlichere Kommentare zu Ratchets siehe Abschnitt XI.5.

Tabelle 5.1. Die charakteristischen Reibungsskalen von verschiedenen Werkstoffen, berechnet für das 1. Experiment und als Mittelwert für die Experimente nach dem Einlaufen

Reibplattenwerkstoff	$\frac{1}{k_0}$ [nm] 1. Experiment	$\frac{1}{k_0}$ [nm] nach Einlaufen
Vergütungsstahl C 45	61	41
Manganhartstahl X120Mn12	39	24
Titan Ti01	34	27
Titan Ti02	25	22
Titan Ti03	50	–
Kupfer	42	37
Messing	17	29
Bremsbelag	31	29
Glas	104	111

Aufgaben

Aufgabe 1: Zu bestimmen ist die Abhängigkeit der statischen Reibungskraft von der Schwingungsamplitude in einem „stochastischen Prandtl-Tomlinson-Modell“. Wie hängt sie von der Schwingungsamplitude im Grenzfall großer Amplituden ab?

Lösung: Nehmen wir an, dass die Wechselwirkungskraft zwischen einem Massenpunkt und der Unterlage im Prandtl-Tomlinson-Modell (XVIII.16) jetzt keine periodische Funktion ist, sondern eine stochastische Funktion, die in Form eines Fourier-Integrals

$$F(x) = \int_0^{\infty} f(k) \sin(kx + \varphi_k) dk$$

dargestellt werden kann. Die Phasen φ_k nehmen wir als δ -korreliert an:

$$\langle \sin \varphi_k \sin \varphi_{k'} \rangle = \langle \cos \varphi_k \cos \varphi_{k'} \rangle = \Phi \delta(k - k').$$

$\delta(\xi)$ ist hier die Diracksche δ -Funktion und Φ eine Konstante, die den quadratischen Mittelwert der stochastischen Kraft bestimmt. Die auf das Gesamtsystem wirkende horizontale Kraft seitens der Unterlage ist gleich

$$\begin{aligned} F &= F(x - l(t)/2) + F(x + l(t)/2) \\ &= \int_0^{\infty} f(k) \sin(k(x_0 - l(t)/2) + \varphi_k) dk + \int_0^{\infty} f(k) \sin(k(x_0 + l(t)/2) + \varphi_k) dk. \end{aligned}$$

Ihr zeitlicher Mittelwert berechnet sich genauso wie dies in den Gleichungen (XVIII.19)-(XVIII.21) gemacht wurde:

$$F(x_0) = 2 \int_0^{\infty} f(k) \sin(kx_0 + \varphi_k) \cos\left(\frac{1}{2}kl_0\right) J_0\left(\frac{1}{2}k\Delta l\right) dk.$$

Zur Berechnung der maximalen Haftreibung für das oszillierende Körperpaar bemerken wir, dass diese Kraft eine stochastische Funktion der Koordinate x_0 ist: Es gibt eine Verteilungsfunktion der statischen Reibungskräfte. Diese Verteilungsfunktion kann nur

numerisch gefunden werden. Andererseits ist der mittlere Wert der statischen Reibungskraft offenbar von der gleichen Größenordnung wie das quadratische Mittel der Kraft³. Die wesentlichen Besonderheiten der Abhängigkeit der statischen Reibungskraft von der Amplitude der Oszillationen kann man deshalb ermitteln, indem man das quadratische Mittel der Kraft berechnet:

$$\langle \overline{F(x)^2} \rangle = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty f(k) f(k') \langle \sin(kx + \varphi_k) \sin(k'x + \varphi_{k'}) \rangle \cos \frac{kl_0}{2} \cos \frac{k'l_0}{2} J_0 \left(\frac{k\Delta l}{2} \right) J_0 \left(\frac{k'\Delta l}{2} \right) dk dk'.$$

Die eckigen Klammern bedeuten hier eine *Mittelung über ein statistisches Ensemble*. Unter Berücksichtigung der Korrelationsbedingung gilt $\langle \sin(kx + \varphi_k) \sin(k'x + \varphi_{k'}) \rangle = \Phi \delta(k - k')$.

Die Integration der δ -Funktion ergibt eine 1: $\int_{-\infty}^\infty \delta(k - k') dk' = 1$. Für das mittlere Quadrat der Kraft erhalten wir

$$\langle \overline{F(x)^2} \rangle = 4\Phi \int_0^\infty f^2(k) \cos^2 \frac{kl_0}{2} J_0^2 \left(\frac{k\Delta l}{2} \right) dk.$$

Ist die Länge l_0 „makroskopisch groß“ in dem Sinne, dass sie viel größer als eine beliebige charakteristische Skala des Wechselwirkungspotentials ist, so ändert sich die Funktion $\cos^2 \frac{kl_0}{2}$ im Integral bei beliebigen zufälligen Schwankungen von l_0 viel schneller als die anderen Faktoren und kann durch ihren Mittelwert $1/2$ ersetzt werden:

$$\langle \overline{F(x)^2} \rangle = 2\Phi \int_0^\infty f^2(k) J_0^2 \left(\frac{k\Delta l}{2} \right) dk.$$

Die Reibungskraft hängt in diesem Fall nicht von der mittleren Bindungslänge ab. Es gehen lediglich die Wellenzahlverteilung $f(k)$ und die Oszillationsamplitude Δl ein.

Bei großen Schwingungsamplituden kann die Besselfunktion durch ihren asymptotischen Ausdruck

$$J_0^2(\zeta) = \frac{2}{\pi\zeta} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \zeta \right)$$

ersetzt werden. Der quadratische Mittelwert der Kraft

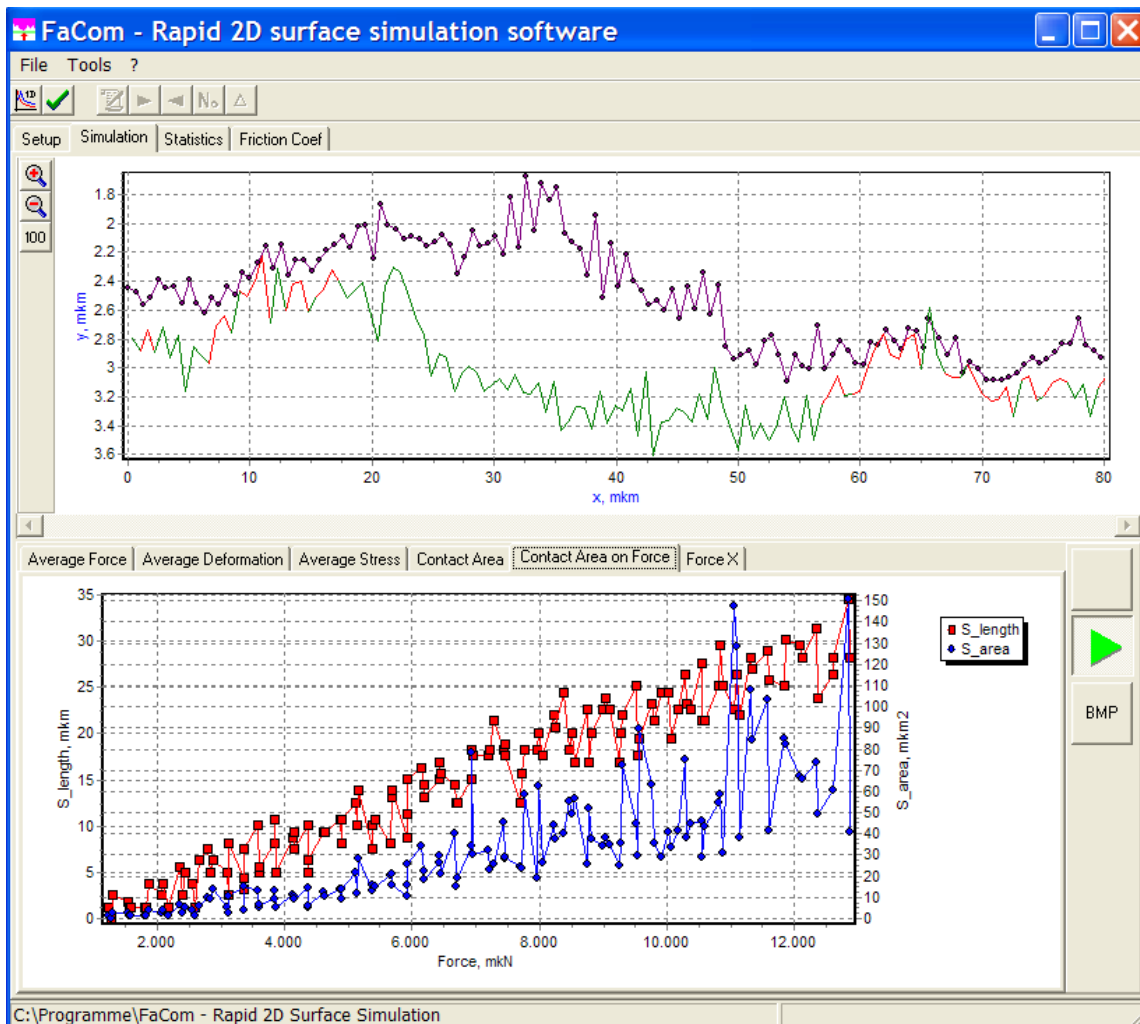
$$\langle \overline{F(x)^2} \rangle \approx \frac{1}{\Delta l} \cdot \frac{8\Phi}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(k)^2}{k} \sin \left(\frac{k\Delta l}{2} \right) dk = \frac{1}{\Delta l} \cdot \frac{8\Phi}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(\xi)^2}{\xi} \sin(\xi) d\xi$$

ist demnach umgekehrt proportional zur Schwingungsamplitude und die Kraft selbst umgekehrt proportional zur Quadratwurzel der Amplitude:

$$F_s \propto \frac{1}{\sqrt{\Delta l}}.$$

³ Die Tatsache, dass die mittlere statische Reibungskraft und das quadratische Mittel der Kraft zueinander fast proportional sind, wird durch direkte numerische Berechnung der mittleren statischen Reibungskraft bestätigt, siehe: Dudko O.K., Popov V.L., Putzar G. Tribospectroscopy of Randomly Rough Surfaces. - Tribology International, 2006, v.39, No. 5, pp.456-460.

XIX NUMERISCHE SIMULATIONSMETHODEN IN DER REIBUNGSPHYSIK



XIX.1 Einführung

Die in den vorangegangenen Kapiteln untersuchten Kontakt- und Reibungsaufgaben bezogen sich auf einfache Modellsysteme. Auch wenn diese Modelle eine allgemeine Übersicht über kompliziertere tribologische Systeme geben, ist eine Vielzahl konkreter tribologischer Fragestellungen – besonders wenn es um eine feine Optimierung von tribologischen Systemen geht – in analytischer Form nicht berechenbar. Forscher und Ingenieure müssen in diesen Fällen auf numerische Methoden zurückgreifen. Dabei muss man daran denken, dass die Effizienz von numerischen Methoden zum großen Teil vom Umfang und von der Qualität der vorangegangenen analytischen Vorbereitung abhängt.

In diesem Kapitel geben wir zunächst eine kurze Übersicht der wichtigsten in der Kontaktmechanik eingesetzten Methoden, beschreiben diese aber nicht ausführlich, sondern verweisen auf existierende Literatur. Ausführlich werden nur die Grundlagen einer Simulationsmethode beschrieben, die zur Simulation von makroskopischen tribologischen

Systemen - vor allen Dingen der Reibungskraft in solchen Systemen – unter Berücksichtigung ihrer „Mehrskaligkeit“ eingesetzt werden kann. Es handelt sich dabei um die so genannte „Dimensionsreduktionsmethode“.

XIX.2 Kontakt- und Reibungsproblematik in verschiedenen Simulationsmethoden: Eine Übersicht

XIX.2.1 Mehrkörpersysteme

Computersimulationen von Mehrkörpersystemen (MKS) sind aus dem industriellen Entwicklungsprozess heute nicht mehr wegzudenken. Mit zunehmenden Anforderungen an die Genauigkeit wächst auch das Interesse, Kontakt- und Reibungsphänomene möglichst gut abzubilden. Ein erheblicher Teil der Forschung in diesem Bereich konzentriert sich auf das Finden von Methoden zur Implementierung von einfachen Kontaktbedingungen und Coulombscher Reibung. Im Vordergrund steht dabei die Suche nach möglichst effizienten Algorithmen (hinsichtlich Rechenzeit und Implementierungsaufwand).

Kontakte werden üblicherweise als einseitige starre Bindung angesehen. Die Reibungscharakteristik wird als gegeben vorausgesetzt und über eine maximale Haftkraft und eine Abhängigkeit der Gleitkraft von der Gleitgeschwindigkeit definiert. Häufig wird die Gleitkraft als konstant und gleich der maximalen Haftkraft angenommen.

Die einfachste Methode, Reibung in MKS-Programme zu integrieren, ist die Approximation des Reibgesetzes durch eine stetige Reibkraftfunktion. Die Reibungskraft wird als eingeprägte Kraft behandelt, deren Geschwindigkeitsabhängigkeit bekannt ist. Typischerweise wird eine Kraft der Form

$$F_R = \frac{2}{\pi} \mu F_N \arctan(v / \tilde{v}) \quad (\text{XIX.1})$$

benutzt (*Abbildung XIX.1*). Bei dieser Form braucht man sich bei der Simulation nicht um die Unterscheidung zwischen Haften und Gleiten zu kümmern. Die charakteristische Geschwindigkeit \tilde{v} muss dabei so gewählt werden, dass sie wesentlich kleiner als charakteristische Gleitgeschwindigkeiten in dem zu simulierenden System ist. In diesem Fall gibt das Reibungsgesetz (XIX.1) die Kraftverhältnisse sowohl im Gleit- als auch im Haftbereich¹ wieder.

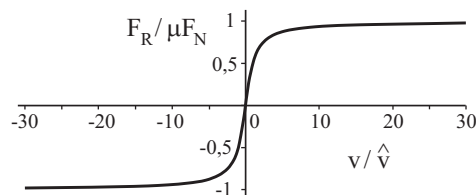


Abbildung XIX.1

¹ „Haften“ ist in diesem Fall einfach Gleiten mit einer sehr kleinen Geschwindigkeit; die Reibkraft stellt sich „automatisch“ gleich der richtigen Haftkraft zwischen $-\mu F_N$ und $+\mu F_N$ ein. Bei vielen tribologischen Systemen entspricht dieser „Trick“ sogar den tatsächlichen Eigenschaften der Reibkraft.

XIX.2.2 Finite Elemente Methode

Bei vielen Anwendungen sind die Druckverteilung und die Deformation der Kontaktflächen von Bedeutung. Zur Berechnung von elastischen und plastischen Deformationen - und damit prinzipiell auch zur Untersuchung von adhäsiven Kontakten und Reibungsphänomenen - stehen verschiedene Simulationsmethoden zur Verfügung. Weithin bekannt sind Verfahren, die auf der Diskretisierung von Kontinuumsleichungen beruhen, insbesondere die Methoden der finiten Elemente (FEM) und der Randelemente.

Kontaktformulierungen im Rahmen der FEM werden seit der Mitte der 70er Jahre entwickelt. Heute benutzen kommerzielle FE-Programme die so genannte *node-to-surface-Formulierung*, bei der die Knoten einer Oberfläche in Relation zu Elementen der anderen Oberfläche betrachtet werden.

In vielen praktischen Anwendungen (Dichtungen, Umformprozesse, Eindrucktests) treten große Deformationen, nichtlineares Materialverhalten und große Relativbewegungen zwischen den beteiligten Kontaktpartnern auf. In diesen Fällen scheitern kommerzielle FE-Programme häufig. Deutlich robuster und genauer können Kontaktprobleme mit *surface-to-surface-Formulierungen* (Mortar Methode) simuliert werden².

Rollkontaktprobleme (Rad-Schiene, Reifen-Straße) werden ebenfalls mit der FE-Methode untersucht. Die *Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) Methode*³ ist eine effiziente Methode zur Berechnung solcher Kontaktprobleme. Die räumlich feste Diskretisierung erlaubt eine Netzverfeinerung an den Kontaktstellen. Besonders elegant lassen sich mit der Methode stationäre Rollprobleme lösen, da in diesem Fall die Lösung zeitunabhängig ist. Die Berücksichtigung inelastischen Materialverhaltens ist hingegen mit Schwierigkeiten verbunden, da das Netz nicht an die materiellen Punkte geknüpft ist.

Vorteile eines 3D-FE-Modells sind (1) die Verwendung der korrekten Geometrie (Dimension, Oberflächentopographie, Freiheitsgrade) und (2) die Möglichkeit, Spannungen und Deformationen im gesamten Körper berechnen zu können.

Wegen der sehr feinen Netze, die bei rauen Kontakten nötig sind, erfordern 3D-FE-Modelle allerdings hohe Rechenzeiten. Das ist insbesondere im Hinblick auf ausgiebige Variantenrechnungen und Optimierung ein klarer Nachteil. Hinzu kommt, dass selbst bei Annahme glatter Oberflächen bei der Verwendung von Kontaktformulierungen in kommerziellen FE-Programmen äußerste Vorsicht angesagt ist. Die Finite-Elemente und die Rand-Elemente-Methoden sind daher schlecht zur Berechnung der Reibungskräfte zwischen rauen Oberflächen geeignet.

XIX.2.3 Teilchenmethoden

Eine andere Herangehensweise an die Simulation von Kontakt- und Reibungsproblemen weisen Teilchenmethoden auf, bei denen diskrete Teilchen die Objekte der Berechnung sind. Diese Teilchen sind keine realen (physikalischen) Objekte sondern reine „Berechnungseinheiten“. Die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen müssen so gewählt werden, dass makroskopisch das elastische und plastische Verhalten richtig beschrieben wird. Es werden also weder die makroskopischen Kontinuumsleichungen noch die mikroskopischen Gleichungen der

² Puso, M. A. und T. A. Laursen: A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:601-629, 2004

³ Nackenhorst, U.: The ALE-formulation of bodies in rolling contact: theoretical foundations and finite element approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:4299-4322, 2004.

Molekulardynamik gelöst, sondern die mikroskopischen Gleichungen eines geeigneten Ersatzsystems. Die Größe der Teilchen kann dem zu lösenden Problem angepasst werden. Bei der Untersuchung von Erdbeben kann die Teilchengröße durchaus im Meterbereich liegen.

Die Reibungskraft ist durch Prozesse wie elastische und plastische Deformation, Bruch, Herauslösen und Wiedereinbauen von Teilchen sowie Mischungsprozesse bestimmt. Diese Prozesse finden in den Mikrokontakten statt. Die *Methode der beweglichen zellulären Automaten* (movable cellular automata, MCA) stellt eine Teilchenmethode dar, mit der die Prozesse in den Mikrokontakten erfolgreich simuliert werden⁴.

XIX.3 Reduktion von dreidimensionalen Kontaktaufgaben auf eindimensionale

Wir diskutieren nun eine Simulationsmethode, die besonders für die Reibungssimulation von rauen Oberflächen geeignet ist. Die mit dieser Methode gewonnenen Reibungsgesetze können anschließend in makroskopischen systemdynamischen Simulationen benutzt werden. Wir beschränken uns auf „typische tribologische Systeme“, die dadurch gekennzeichnet sind, dass in ihnen die Gesetze der trockenen Reibung annähernd erfüllt sind, insbesondere ist die Reibungskraft annähernd proportional zur Normalkraft. Das impliziert, dass die reale Kontaktfläche viel kleiner bleibt als die scheinbare Fläche.

Bei den „typischen tribologischen Systemen“ gibt es eine Reihe von Eigenschaften, die eine gewaltige Vereinfachung des Kontaktproblems ermöglichen und auf diese Weise eine schnelle Berechnung auch von mehrskaligen Systemen gestatten. Diese vereinfachenden Eigenschaften, von denen in der Reduktionsmethode Gebrauch gemacht wird, sind die folgenden:

(a) Für Geschwindigkeiten viel kleiner als die Schallgeschwindigkeit⁵ können Deformationen als quasistatisch behandelt werden;

(b) Die potentielle Energie und somit die Kraft-Verschiebungsverhältnisse sind *lokale* Eigenschaften, die nur von der Konfiguration von Mikrokontakten, nicht aber von der Form und Größe des Körpers abhängen;

(c) Die kinetische Energie dagegen ist eine „globale Eigenschaft“, die nur von der Form und Größe des Körpers als Ganzes, nicht aber von der Konfiguration der Mikrokontakte abhängt;

(d) Viele wesentliche kontaktmechanische Eigenschaften von dreidimensionalen Kontinua lassen sich in guter Näherung durch eindimensionale Systeme abbilden, was eine entscheidende Rechenzeitreduzierung ermöglicht.

Die vier aufgezählten Eigenschaften sind in vielen makroskopischen tribologischen Systemen vorhanden. Der Anwendungsbereich der nachfolgenden Methoden ist entsprechend sehr breit. Man darf jedoch nicht vergessen, dass man bei der Anwendung auf die Erfüllung der oben genannten Voraussetzungen achten muss.

Im Weiteren diskutieren wir ausführlicher die angesprochenen vereinfachenden Annahmen.

⁴ Popov, V. L. und S. G. Psakhie: Numerical simulation methods in tribology. Tribology International, 40(6):916(923, 2007.

⁵ Diese Bedingung ist für die meisten realen tribologischen Kontakte gut erfüllt.

XIX.4 Kontakt in einem makroskopischen tribologischen System

(a) Quasistationarität

In den meisten tribologischen Systemen haben wir es mit Bewegungen von Bauteilen zu tun, deren Relativgeschwindigkeit (höchstens ca. 30 m/s) um viele Größenordnungen kleiner ist als die Schallgeschwindigkeit (einige Tausend m/s). Unter diesen Bedingungen kann man das Kontaktproblem als *quasistatisch* betrachten. Selbst bei instationären Vorgängen, bei denen das Gesamtsystem nicht mehr stationär betrachtet werden kann, sind die Bedingungen der Quasistationarität für einzelne Mikrokontakte in der Regel noch sehr gut erfüllt. Bei der Berechnung der Kontaktdeformationen können wir daher in der überwältigenden Mehrzahl von realen Anwendungen zur Berechnung von Deformationen Gleichgewichtsbedingungen anwenden und somit alle Ergebnisse der statischen Kontaktmechanik aus den vorangegangenen Kapiteln benutzen.

(b) Elastische Energie als lokale Eigenschaft

Wie wir im Kapitel VII gesehen haben, kommen Kontaktpartner unter den für den Betrieb von tribologischen Systemen gewöhnlichen Bedingungen in der Regel in mehreren kleinen Mikrobereichen in Kontakt, deren Gesamtfläche viel kleiner ist als die scheinbare Kontaktfläche. Unter bestimmten Bedingungen können einzelne Kontaktstellen als unabhängig von einander betrachtet werden, so dass das Mehrkontaktproblem durch statistische Betrachtung von einzelnen Mikrokontakten ersetzt werden kann.

Untersuchen wir diese Eigenschaft etwas näher indem wir die potentielle Energie eines deformierten Kontaktgebietes berechnen. Betrachten wir einen zylindrischen Stempel, der in den Körper um d eingedrückt wurde (Abbildung XIX.2).

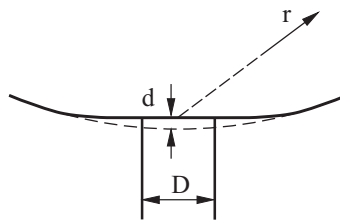


Abbildung XIX.2

Für die Verschiebung im elastischen Körper in großer Entfernung r vom Punkt der Indentierung gilt

$$u \approx \frac{D \cdot d}{r}. \quad (\text{XIX.2})$$

Die Deformation kann abgeschätzt werden zu $\varepsilon \approx \frac{du}{dr} \approx \frac{D \cdot d}{r^2}$ und die Energiedichte zu $E \approx G\varepsilon^2 \approx G \frac{D^2 \cdot d^2}{r^4}$. Für die elastische Energie ergibt sich durch Integration

$$U \approx \int G \frac{D^2 \cdot d^2}{r^4} 2\pi r^2 dr = 2\pi G D^2 \cdot d^2 \int \frac{dr}{r^2}. \quad (\text{XIX.3})$$

Dieses Integral konvergiert auf der oberen Grenze (auch wenn diese zu unendlich gewählt wird). Da die Asymptote (XIX.2) nur für $r > D$ gilt, muss die untere Grenze von der

Größenordnung D sein. (Für die untere Grenze 0 würde das Integral divergieren). Die elastische Energie ist somit in einem Volumen mit der linearen Abmessung von der Größenordnung D konzentriert – ein Ergebnis, dass wir bei allen Abschätzungen der früheren Kapitel bereits benutzt haben. Mit anderen Worten:

Die elastische Energie ist eine lokale Größe, die nur von der Konfiguration und Deformation in der Nähe des Mikrokontaktes abhängt. Die Größe und Form des makroskopischen Körpers ist für die Kontaktmechanik dieses Problems bedeutungslos.

Ist der Abstand zwischen den Kontaktgebieten viel kleiner als ihr Durchmesser, so können sie als unabhängig betrachtet werden.

(c) Kinetische Energie als globale Eigenschaft

Genau umgekehrt steht es mit der kinetischen Energie des Körpers. Stößt ein Körper auf einen Stempel mit dem Durchmesser D mit einer Geschwindigkeit v_0 viel kleiner als die Schallgeschwindigkeit, und führt so zu einer Indentierung mit der Geschwindigkeit v_0 , so hat das Geschwindigkeitsfeld im Bezugssystem, das sich mit der Geschwindigkeit v_0 bewegt, die Größenordnung

$$v(r) = \frac{D \cdot \dot{d}}{r} = \frac{Dv_0}{r}. \quad (\text{XIX.4})$$

Im Laborsystem berechnet sich somit die gesamte kinetische Energie des Körpers zu

$$K \approx \int \rho \left(v_0 - \frac{v_0 D}{r} \right)^2 \pi r^2 dr \approx \frac{mv_0^2}{2} \left(1 - \frac{D}{R} \right). \quad (\text{XIX.5})$$

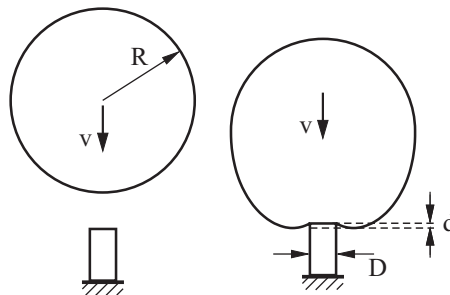


Abbildung XIX.3

Ist der Durchmesser des Kontaktgebietes viel größer als die Ausmaße des Körpers, so ist die Energie bis auf Glieder der Ordnung D/R gleich $mv_0^2/2$.

Kinetische Energie ist eine „nichtlokale“ Eigenschaft, die in erster Näherung von der Kontaktkonfiguration nicht abhängt und gleich der Energie einer „starrten Bewegung“ des Körpers als Ganzes angenommen werden kann.

Auch diese Eigenschaft haben wir bereits früher stillschweigend benutzt, z.B. bei der Berechnung der Stoßdauer von zwei Kugeln.

Wir kommen zum Schluss, dass die Trägheitseigenschaften eines makroskopischen Systems unter „typischen Bedingungen“ durch Behandlung des Körpers als eine starre Masse m korrekt beschrieben werden. Seine elastischen Eigenschaften dagegen werden vollständig

durch die Steifigkeiten seiner Mikrokontakte bestimmt. Diese Betrachtungsweise ist schematisch in *Abbildung XIX.4* dargestellt.

Die durchgeführte Analyse zeigt, dass die Trägheitseigenschaften von dreidimensionalen Systemen unter den meist vorhandenen Bedingungen völlig entkoppelt von deren Kontakteigenschaften sind. Die ersten sind völlig *makroskopisch* während die zweiten völlig *mikroskopisch* sind. *Es ist diese Entkopplung, die es für uns möglich macht, die Reibungskräfte als **Oberflächenkräfte** in die makroskopische Systemdynamik einzubringen.*

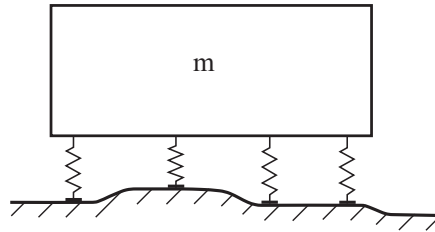


Abbildung XIX.4. Die Trägheitseigenschaften eines makroskopischen Systems unter „typischen Bedingungen“ können durch die einer starren Masse m korrekt beschrieben werden. Seine elastischen Eigenschaften dagegen werden vollständig durch die (nicht linearen) Steifigkeiten seiner Mikrokontakte bestimmt

Diese Eigenschaft ist übrigens nicht selbstverständlich und würde zum Beispiel in zwei-dimensionalen Systemen nicht gelten. Im zweidimensionalen Fall hätten wir statt (XIX.3) das Integral $\int dr / r$, welches an beiden Grenzen logarithmisch divergiert. Die elastische Kontaktenergie hängt daher im zweidimensionalen Fall sowohl von der Kontaktkonfiguration als auch von der Größe und Form des Körpers ab. Dasselbe gilt auch für die kinetische Energie.

Wir wollen nun den Vorteil benutzen, dass wir in einem *dreidimensionalen* Raum leben und setzen daher die Skalenseparation für die kinetische und potentielle Energie für Mehrkontaktprobleme voraus.

(d) Reduktion der Dimensionalität von Kontaktproblemen

Eine weitere entscheidende Eigenschaft von Kontakten zwischen dreidimensionalen Körpern ist eine enge Analogie zwischen diesen Kontakten und bestimmten eindimensionalen Problemen. Die Grundideen dieser Analogie sind die folgenden.

Wird ein runder Stempel auf die Oberfläche eines elastischen Kontinuums gedrückt, so ist die Steifigkeit des Kontaktes *proportional zu seinem Durchmesser D* (Gleichung V.11):

$$c = DE^* \quad (\text{XIX.6})$$

Diese Eigenschaft kann sehr einfach durch eine eindimensionale *Winklersche Bettung* (Englisch: *elastic foundation*) wiedergegeben werden (*Abbildung XIX.5a*). Damit die Gleichung (XIX.6) erfüllt ist, muss die Steifigkeit pro Längeneinheit gleich E^* gewählt werden. Jede einzelne Feder muss eine Steifigkeit

$$\Delta c = E^* \Delta x \quad (\text{XIX.7})$$

haben.

Wird nun eine „Kugel“ mit dem Radius R_1 in Kontakt mit der Winklerschen Bettung gebracht (Eindrucktiefe d), so ergeben sich die folgenden Kontaktgrößen: Der Kontaktradius ist gleich

$$a = \sqrt{2R_1 d} \quad (\text{XIX.8})$$

und für die Normalkraft ergibt sich

$$F_N(d) = \frac{4\sqrt{2}E^*}{3} \sqrt{R_1 d^3} . \quad (\text{XIX.9})$$

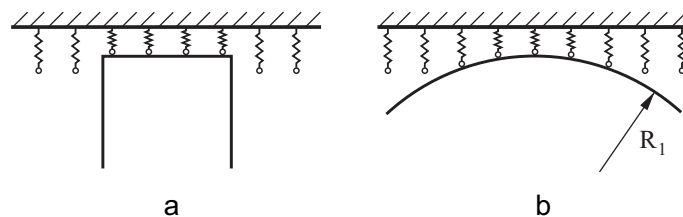


Abbildung XIX.5. Eindimensionale Winklersche Bettung in Kontakt mit einem „Stempel“ und einer „Kugel“

Wenn wir für den Radius

$$R_1 = R / 2 \quad (\text{XIX.10})$$

wählen, so stimmen die Gleichungen (XIX.8) und (XIX.9) exakt überein mit den Ergebnissen der Hertzschen Theorie.

Der Kontakt eines rotationssymmetrischen dreidimensionalen starren Körpers mit einem elastischen Kontinuum kann durch einen Kontakt eines entsprechenden eindimensionalen Schnittes mit zwei Mal kleinerem Krümmungsradius mit einer Winklerschen Bettung mit der Steifigkeit pro Längeneinheit gleich E^* abgebildet werden.

Diese Regel ist *exakt* richtig für *jeden* zylindrischen Stempel und für *jeden* parabolischen Körper mit einem *beliebigen* Krümmungsradius.

Da ein Kontakt zwischen einem Ellipsoid und einer starren Ebene in guter Näherung äquivalent zum Kontakt mit einer Kugel ist (unter Benutzung des Gausschen Radius $\sqrt{R^{(1)}R^{(2)}}$, siehe (V.30)), ist auch die Abbildung von nicht rotationssymmetrischen Kontakten auf eindimensionale Systeme möglich. Dabei bleibt auch die Hertzsche Relation zwischen der Normalkraft und der Kontaktfläche erhalten. Die Steifigkeiten der Stempel mit nicht rundem Querschnitt (Gl. V.13) zeigen, dass die eindimensionale Abbildung auch für Körper mit quadratischem oder dreieckigem Querschnitt mit einem Fehler nicht größer als 3% funktioniert. Der „eindimensionale Durchmesser“ des Kontaktes ist dabei nach der Regel $D = 4A / \pi$ zu berechnen.

Auch die *tangentiale Steifigkeit* eines dreidimensionalen Kontaktes ist proportional zum Durchmesser des Kontaktes

$$c_{\perp} \approx \frac{4G}{2-\nu} \cdot 2a \quad (\text{XIX.11})$$

und kann daher aus denselben Gründen mit einer eindimensionalen Winklerschen Bettung nachgebildet werden. Die Quersteifigkeit einzelner Federn der Winklerschen Bettung muss gemäß

$$\Delta c_{\perp} = \frac{4G}{2-\nu} \Delta x \quad (\text{XIX.12})$$

gewählt werden.

Die Tatsache, dass die Kraft-Eindrucktiefe und die Kraft-Kontaktfläche Relationen für sehr unterschiedliche rotationssymmetrische und nicht rotationssymmetrische Einzelkontakte unabhängig von deren Skalierung gültig ist, erlaubt uns eine Hypothese aufzustellen, dass dies auch für zufällig raue Oberflächen der Fall sein wird.

XIX.5 Reduktionsmethode für ein Mehrkontaktproblem

Um zu einem Kontakt zwischen Körpern mit rauen Oberflächen überzugehen, muss eine Regel zur Erzeugung eines eindimensionalen Profils formuliert werden, welches im kontaktmechanischen Sinne äquivalent zum dreidimensionalen Körper ist (*Abbildung XIX.6*). Bei der Motivation dieser Umrechnung benutzen wir einige Ideen aus dem Modell von Greenwood und Williamson. Die Ergebnisse und die Qualität des Ersatzsystems erweisen sich aber als viel besser als das Greenwood - Williamson Modell selbst.

Im Modell von Greenwood und Williamson werden einzelne Mikrokontakte als unabhängig betrachtet. Unter diesen Bedingungen spielen nur die *Verteilungen* der Höhen von Asperiten und ν ihrer *Krümmungsradien* eine Rolle. Unser Ziel ist es daher, zunächst ein eindimensionales System zu generieren, welches die erforderlichen Statistiken von Höhen und Krümmungsradien hat.

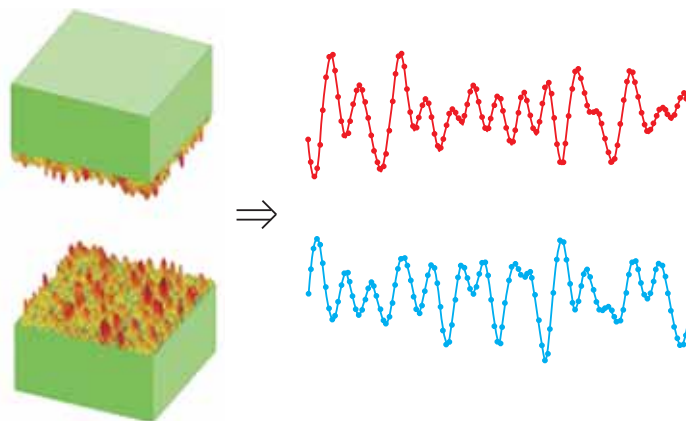


Abbildung XIX.6. Ersetzen von zwei dreidimensionalen Körpern durch zwei äquivalente eindimensionale „raue Linien“

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Topographie der zweidimensionalen Oberfläche (eines dreidimensionalen Körpers) eindeutig durch ihr *Leistungsspektrum* $C_{2D}(q)$ charakterisiert werden kann, welches gemäß

$$C_{2D}(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \langle h(\vec{x}) h(0) \rangle e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} d^2x, \quad (\text{XIX.13})$$

definiert ist, wobei $h(\bar{\mathbf{x}})$ das Höhenprofil (gemessen von dem Mittelwert) ist, so dass $\langle h \rangle = 0$; $\langle \cdot \rangle$ bedeutet Mittelung über ein statistisches Ensemble. Wir nehmen weiterhin an, dass die Oberflächentopographie statistisch homogen und isotrop ist. Unter diesen Bedingungen hängt das Leistungsspektrum $C_{2D}(q)$ nur von dem Betrag q des Wellenvektors $\bar{\mathbf{q}}$ ab.

Auf ähnliche Weise wird das Leistungsspektrum $C_{1D}(q)$ einer eindimensionalen „Fläche“ – einer „rauen Linie“ – eingeführt:

$$C_{1D}(q) = \frac{1}{2\pi} \int \langle h(x)h(0) \rangle e^{-iqx} dx. \quad (\text{XIX.14})$$

Die Oberflächentopographie wird im zweidimensionalen Fall mit Hilfe des Leistungsspektrums gemäß

$$h(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{\mathbf{q}} B_{2D}(\mathbf{q}) \exp(i(\bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{x}} + \phi(\bar{\mathbf{q}}))) \quad (\text{XIX.15})$$

mit

$$B_{2D}(\mathbf{q}) = \frac{2\pi}{L} \sqrt{C_{2D}(\mathbf{q})} = \bar{B}_{2D}(-\mathbf{q}) \quad (\text{XIX.16})$$

und zufällig auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ verteilten Phasen $\phi(\bar{\mathbf{q}}) = -\phi(-\bar{\mathbf{q}})$ wiederhergestellt.

Im eindimensionalen Fall gilt

$$h(x) = \sum_q B_{1D}(q) \exp(i(qx + \phi(q))) \quad (\text{XIX.17})$$

mit

$$B_{1D}(q) = \sqrt{\frac{2\pi}{L} C_{1D}(q)} = \bar{B}_{1D}(-q). \quad (\text{XIX.18})$$

Schnelle numerische Verfahren basieren auf der *schnellen Fouriertransformation* (FFT) anstatt der direkten Berechnung der Summen (XIX.15) oder (XIX.17).

Theoretische Überlegungen und numerische Studien führen zu der folgenden Umrechnungsregel vom zweidimensionalen zum eindimensionalen Leistungsspektrum:

Um ein eindimensionales System mit den gleichen Kontakteigenschaften wie das dreidimensionale System zu erzeugen, muss die eindimensionale Leistungsdichte nach der Regel

$$C_{1D}(q) = \pi q C_{2D}(q) \quad (\text{XIX.19})$$

gesetzt werden.

Qualitative Argumente für diese Regel sind die folgenden: Die Höhenverteilung von Maxima und die Krümmungsradien der Maxima haben dieselbe Größenordnung wie das quadratische Mittel der Höhenverteilung bzw. der Krümmungen im gesamten Profil. Für die Mittelwerte der Quadrate der Höhen gilt im zwei- bzw. eindimensionalen Fall

$$\langle h^2 \rangle_{2D} = 2\pi \int_0^\infty q C_{2D}(q) dq, \quad (\text{XIX.20})$$

$$\langle h^2 \rangle_{1D} = 2 \int_0^\infty C_{1D}(q) dq. \quad (\text{XIX.21})$$

Sie werden gleich, wenn $C_{1D}(q) = \pi q C_{2D}(q)$. Die quadratischen Mittelwerte der Krümmung $\langle \kappa^2 \rangle$ fallen dabei auch zusammen⁶. In der Arbeit⁷ wurde gezeigt, dass die so generierte Linie in Hinsicht auf ihre kontaktmechanischen Eigenschaften tatsächlich dem dreidimensionalen Körper äquivalent ist. Unter anderem stimmen die Höhenverteilungen der ein- und der zweidimensionalen „Flächen“ mit den Leistungsspektren (XIX.19) überein, während die mittleren Krümmungsradien der Kappen sich im Durchschnitt um das 2fache unterscheiden – und somit genau das Verhältnis (XIX.10) aufweisen, welches zu einer perfekten Übereinstimmung der Kontakteigenschaften erforderlich ist! Es ergeben sich sowohl die richtigen Kraft-Verschiebungs- als auch Kraft-Kontaktflächen-Beziehungen.

Als Beispiel wurde ein Kontakt zwischen zwei dreidimensionalen Körpern mit generierten zufällig rauen Oberflächen untersucht. Zur Berechnung wurden Oberflächen mit 64×64 Punkten generiert. Der Zusammenhang zwischen der Normalkraft und der realen Kontaktfläche wurde mit der Randelemente-Methode berechnet (*Abbildung XIX.7*).

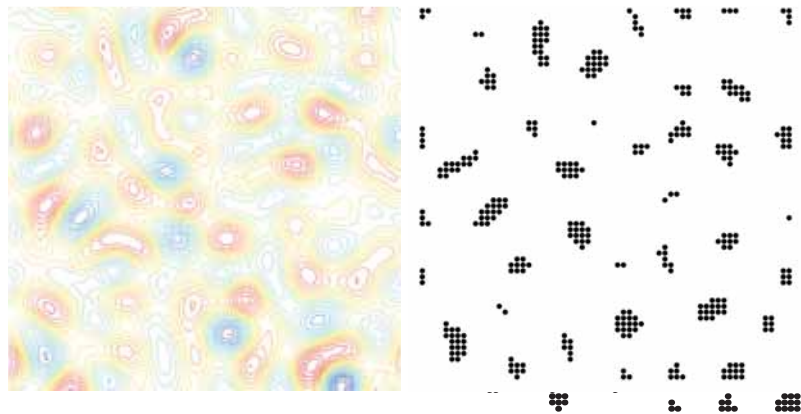


Abbildung XIX.7. Zweidimensionale Oberflächentopographie (links) und für einen Wert der Normalkraft resultierende Mikrokontakte (rechts) – Ergebnisse einer numerischen Rechnung mit der Randelemente-Methode

Mit dem gemäß (XIX.19) berechneten eindimensionalen Leistungsspektrum wurde dann die eindimensionale „raue Linie“ generiert. Diese raue Linie wurde an eine starre Linie gedrückt und die Längen l_i der *zusammenhängenden* Kontaktgebiete wurden bestimmt. Daraus wurde die Kontaktfläche nach der Regel

⁶ Für zweidimensionale Flächen definieren wir $\kappa^2 = \kappa^{(1)}\kappa^{(2)}$, wobei $\kappa^{(1)}$ und $\kappa^{(2)}$ die Hauptkrümmungen der Oberfläche sind.

⁷ Geike T. and V.L. Popov, Mapping of three-dimensional contact problems into one dimension. - *Phys. Rev. E.*, 2007, v. 76, 036710 (5 pp.).

$$A_{c,1D} = \frac{\pi}{4} \sum_j J_j^2 \quad (\text{XIX.22})$$

berechnet. Alle Ergebnisse wurden über 450 zufällige Realisationen der Oberflächen gemittelt. Die Abhängigkeiten der gesamten realen Kontaktfläche von der Normalkraft berechnet für drei- und eindimensionale Systeme werden in *Abbildung XIX.8* verglichen. Die ein- und dreidimensionalen Ergebnisse stimmen auch für raue Oberflächen hervorragend überein.

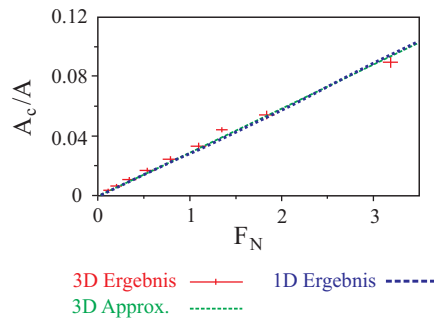


Abbildung XIX.8. Beziehung zwischen Normalkraft F_N und Kontaktfläche A_c . Vergleich 1D (blau, gepunktet) und 3D (rot, Fehlerbalken - Standardabweichung aus 450 Werten), grün, gestrichelt: lineare Approximation der Mittelwerte). Die Kurven für die 1D-Simulation und die lineare Approximation der 3D-Simulation sind kaum voneinander zu unterscheiden, weil sie nahezu übereinstimmen

Aus dem gesagten folgt:

Sowohl einzelne Kontakte von rotationssymmetrischen und nicht rotationssymmetrischen dreidimensionalen starren Körpern als auch von zufällig rauen Oberflächen mit einem elastischen Kontinuum lassen sich durch einen Kontakt eines entsprechend berechneten eindimensionalen Profils mit einer Winklerschen Bettung mit der Steifigkeit pro Längeneinheit gleich E^* abbilden. Das gilt sowohl im Hinblick auf Kraft-Verschiebungs- als auch Kraft-Kontaktflächen- und Kraft-Kontaktlängen-Beziehungen.

Es sei bemerkt, dass die Winklersche Bettung von vielen Forschern „aus Not“ auch früher benutzt wurde. Der Erfolg dieses Modells beruht auf der oben beschriebenen tiefgehenden Analogie zwischen dreidimensionalen Kontakten und Kontakten mit der Winklerschen Bettung.

XIX.6 Dimensionsreduktion und viskoelastische Eigenschaften

Bei viskoelastischen Körpern wie Gummi kann der Kontakt nur solange als quasistatisch angesehen werden, wenn die Eindruck- bzw. Gleitgeschwindigkeiten kleiner als die kleinste Schallgeschwindigkeit (welche dem kleinsten relevanten elastischen Modul entspricht) sind. Ist diese Bedingung erfüllt und wird ein Bereich eines Elastomers mit einer Kreisfrequenz ω angeregt, so gilt ein linearer Zusammenhang zwischen der Kraft und der Verschiebung mit einer linear vom Kontaktdurchmesser abhängenden Steifigkeit. Auch dieses System kann daher durch ein eindimensionales System abgebildet werden, wobei die Steifigkeiten einzelner Federn gemäß (XIX.7) gewählt werden müssen. Gummi kann als ein inkompressibles Medium betrachtet werden, dementsprechend ist $\nu = 1/2$ und

$$\Delta c \approx E^*(\omega) \Delta x = \frac{E(\omega)}{1-\nu^2} \Delta x = \frac{2G(\omega)}{1-\nu} \Delta x = 4G(\omega) \Delta x. \quad (\text{XIX.23})$$

Die Steifigkeit einzelner „Federn“ der Winklerschen Bettung ist im Fall von Gummi gleich dem 4fachen Schubmodul mal Diskretisierungsschritt.

Das Spannungs-Dehnungs-Gesetz (XV.2) muss in einem eindimensionalen Modell durch

$$\tilde{F}_i(t) = 4\Delta x \int_{-\infty}^t G(t-t')\dot{\delta}(t')dt' \quad (\text{XIX.24})$$

ersetzt werden.

XIX.7 Abbildung von Spannungen im Reduktionsmodell

Solange die Körper nur elastisch oder viskoelastisch deformiert werden, braucht man keine Information über die in den Kontaktgebieten auftretenden Spannungen. Werden aber die Körper aufgrund der Spannungsspitzen plastisch deformiert oder verschlissen, so ist für die Simulation auch eine Information über die in Kontakten auftretenden Spannungen erforderlich.

Im eindimensionalen Modell sind unmittelbar nur die *Federkräfte* definiert, nicht die Spannungen. Im Folgenden wird gezeigt, dass auch im 1D-Modell eine Spannung definiert werden kann, die im Fall elastischer Deformationen mit der Hertzschen Spannungsverteilung übereinstimmt.

Für die Kraft in einer Feder gilt

$$\tilde{F}_i = \Delta x E^* \delta_i = \Delta x E^* \left(d - \frac{x_i^2}{2R_1} \right), \quad (\text{XIX.25})$$

wobei δ_i die Verschiebung der Feder i und Δx der Teilchenabstand sind. Nun wird die Spannung als

$$\sigma_i = \frac{\tilde{F}_i}{b\sqrt{\delta_i R_1}} \quad (\text{XIX.26})$$

eingeführt, b ist hier eine noch zu bestimmende Konstante. Die Spannung hängt vom Krümmungsradius ab und ist somit eine nicht lokale Größe⁸.

Aus (XIX.26) und (XIX.25) ergibt sich durch Einsetzen und Umformen der Ausdruck

$$\sigma_i = \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{F_N}{a^2} \frac{\Delta x}{b} \sqrt{1 - \frac{x_i^2}{a^2}}. \quad (\text{XIX.27})$$

⁸ Als Motivation für diese Form der Spannung können folgende Argumente angeführt werden: Der Kontaktradius für einen einzelnen Kontakt ist gleich $a = \sqrt{2\delta R}$, wobei δ die Eindringtiefe ist. Für die mittlere Spannung hätten wir die Abschätzung $\sigma \propto \frac{F_N}{a^2} \propto \frac{F_N / a}{a} \propto \frac{\langle \tilde{F}_i \rangle}{\sqrt{R\delta}}$, wobei $\langle \tilde{F}_i \rangle$ die mittlere Federkraft im Kontaktgebiet ist. Das ist genau die Form (XIX.26). Dass darüber hinaus die Benutzung der *Koordinatenabhängigen Eindringtiefe* δ_i genau zu der Hertzschen Druckverteilung führt, kann als eine empirische Tatsache betrachtet werden.

Beim Hertzschen Kugelkontakt ist die Spannungsverteilung gleich

$$\sigma = \frac{3F_N}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (\text{XIX.28})$$

Die Spannungsverteilungen sind dann gleich, wenn

$$b = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \Delta x \quad (\text{XIX.29})$$

gesetzt wird. Somit wird die Spannung aus lokaler Federkraft F_i und lokaler Deformation δ_i dann gemäß

$$\sigma_i = \frac{\tilde{F}_i \sqrt{2}}{\pi \Delta x \sqrt{\delta_i R_1}} \quad (\text{XIX.30})$$

berechnet.

Fazit: Für ein Fließkriterium sollte nicht die lokale Kraft F_i herangezogen werden, sondern die nichtlokale Größe σ_i gemäß der Gleichung (XIX.30).

XIX.8 Das Berechnungsverfahren in der Reduktionsmethode

Das Berechnungsverfahren der Reduktionsmethode besteht aus folgenden Schritten:

1. Die Reiboberflächen werden gemessen (z.B. durch Weißlichtinterferenzmikroskop oder Atomkraftmikroskop).
2. Mit der schnellen Fourier-Transformation wird das zweidimensionale Leistungsspektrum der Oberfläche ermittelt.
3. Dieses wird nach der Regel (XIX.19) in das eindimensionale Leistungsspektrum umgerechnet.
4. Mit diesem Leistungsspektrum wird eine eindimensionale „raue Linie“ generiert, die dieselben Kontakteigenschaften aufweist, wie das ursprüngliche dreidimensionale System.
5. Die elastischen Eigenschaften werden nach der Regel (XIX.7) festgelegt
6. Die Körper werden nun aneinander gedrückt und gegeneinander in tangentialer Richtung bewegt. Das Verhältnis des Mittelwertes der Tangentialkraft zum Mittelwert der Normalkraft ist der gesuchte Reibungskoeffizient.
7. Neben dem Reibungskoeffizienten können gemäß (XIX.22) die gesamte reale Kontaktfläche, die gesamte Kontaktlänge (einfach als Summe $L = \sum_j l_j$), sowie ihre Verteilungen, die mittlere Spannung und die Spannungsverteilung im Kontakt berechnet werden.

Adhäsion, Schmierung, Kavitation und plastische Deformation bei der Reduktionsmethode

Die Reduktionsmethode kann erweitert werden, um Adhäsion, Schmierung und Kavitation in geschmierten Kontakten zu berücksichtigen. Einzelheiten zu diesen Methoden können in der zu diesem Kapitel empfohlenen Literatur gefunden werden.

Aufgaben

Aufgabe 1: Zu formulieren ist der Algorithmus zur Berechnung des Reibungskoeffizienten zwischen einer starren Oberfläche mit gegebener Oberflächentopographie und einem glatten viskoelastischen Körper, der durch ein rheologisches Modell bestehend aus parallel geschalteten elastischer Feder und geschwindigkeitsproportionalen Dämpfer modelliert werden kann.

Lösung:

1. Das Profil der starren Oberfläche $h(x,y)$ gehört zu den Eingangsdaten und muss zunächst vermessen werden (*Abbildung XIX.9*) und in Form eines zweidimensionalen Arrays gespeichert.

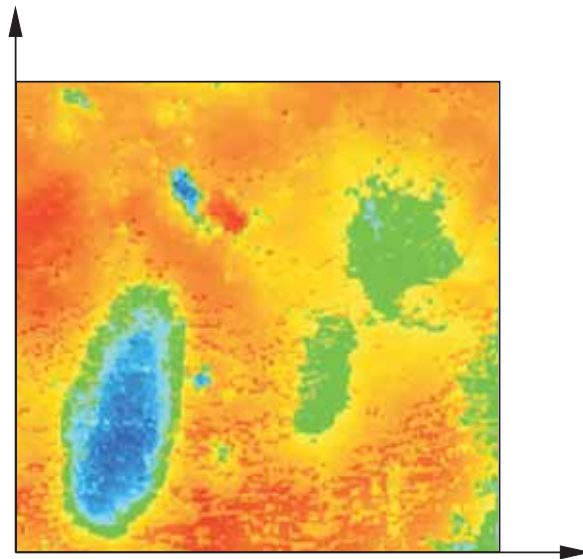


Abbildung XIX.9. Beispiel einer vermessenen Oberflächentopographie

2. Mithilfe der FFT wird die Fourier-Transformierte $B(q_x, q_y)$ des Oberflächenprofils berechnet (*Abbildung XIX.10*) und danach das Leistungsspektrum als Betrag der Fourier-Transformierten: $C_{2D}(q_x, q_y) = |B_{2D}(q_x, q_y)|^2$.

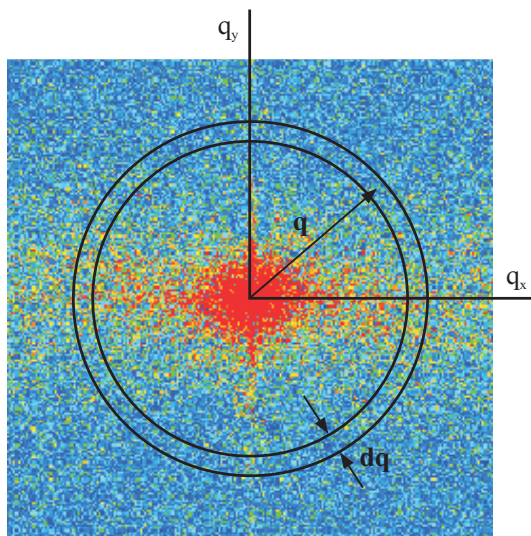


Abbildung XIX.10. Leistungsspektrum des in Abbildung XIX.9 gezeigten Profils

3. Das Spektrum wird nun über Kreisringe mit dem Radius q und dem gleichen Diskretisierungs-Intervall dq gemittelt (Abbildung XIX.10). Das Ergebnis ist das winkelunabhängige Leistungsspektrum $C_{2D}(q)$.

4. Es wird ein äquivalentes eindimensionales Leistungsspektrum nach der Regel (XIX.19) berechnet: $C_{1D}(q) = \pi q C_{2D}(q)$.

5. Mit diesem Leistungsspektrum wird nach der Gleichung (XIX.17) ein eindimensionales Profil generiert. Dieses repräsentiert in weiterer Rechnung die in der Aufgabenstellung erwähnte „starre Oberfläche mit gegebener Oberflächentopographie“.

6. Zur Überprüfung der Richtigkeit werden quadratische Mittelwerte Δh_{2D} der ursprünglichen zweidimensionalen Fläche und Δh_{1D} des erzeugten eindimensionalen Systems berechnet. Ihre über mehrere Realisationen gemittelten Werte müssen zusammenfallen.

7. Jetzt geht es zur dynamischen Simulation. Das Null-Niveau der starren rauhen Linie nehmen wir als Null-Niveau der z -Achse an (Abbildung XIX.11). Die starre Linie ist von Anfang an mit einem Schritt Δx diskretisiert, mit dem sie erzeugt wurde. Ihr Profil in den Diskretisierungspunkten wird durch h_i angegeben. Das Niveau der ungestörten Oberfläche des viskoelastischen Stoffes bezeichnen wir durch Z_0 . Die das viskoelastische Material repräsentierende Linie wird mit dem gleichen Schritt diskretisiert Δx , mit welchem die starre raue Linie generiert wurde.

8. Der raue Profil bewege sich nach links mit der Geschwindigkeit v : $h(x,t) = h(x + vt)$. Die Werte in diskreten Punkten sind: $h_i(t_n) = h(i\Delta x + vn\Delta t)$, wobei n die Nummer des Zeitschrittes ist.

9. Es wird das Wechselwirkungsgesetz zwischen der rauhen Oberfläche und dem viskoelastischen Material definiert: (a) Die starre Oberfläche ist für das viskoelastische Material undurchdringlich; (b) Wird ein Punkt des viskoelastischen Materials um Δz_i verschoben und ist seine Geschwindigkeit gleich $\Delta \dot{z}_i$, so wirkt auf diesen Punkt die Kraft gemäß (XIX.23):

$$f_i = 4G\Delta x\Delta z_i + 4\eta\Delta x\Delta \dot{z}_i,$$

wobei G der Schubmodul und η die Viskosität des (dreidimensionalen) viskoelastischen Materials ist; (c) Diese Kraft kann nicht negativ werden (keine Adhäsion).

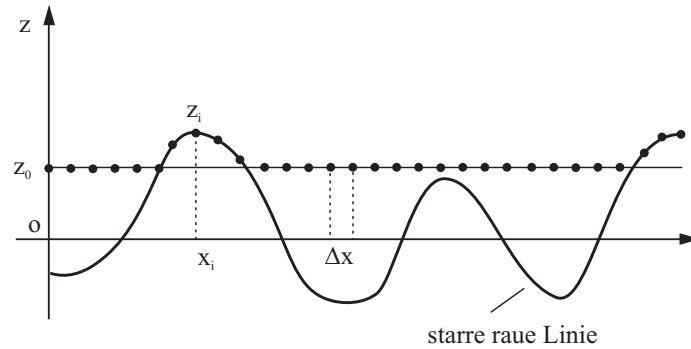


Abbildung XIX.11

10. Das System wird „initialisiert“ indem das viskoelastische Material „in der Nähe“ der starren Linie platziert wird: Das bedeutet im Abstand von ca. $3\Delta h_{1D}$ von der Nulllinie. Dabei kommen diejenigen Punkte des Körpers in Kontakt mit der rauhen Unterlage, für die die Bedingung $h_i \geq Z_0$ erfüllt ist. Die auf das System wirkenden Kräfte legen wir zunächst gleich $f_i = 4G(h_i - Z_0)$. Die gesamte auf das viskoelastische Material wirkende Kraft ist gleich

$$F = \sum_{\substack{\text{Punkte} \\ \text{im} \\ \text{Kontakt}}} f_i = 4G\Delta x \sum_{\substack{\text{Punkte} \\ \text{im} \\ \text{Kontakt}}} (h_i - Z_0).$$

In vertikaler Richtung wird eine Normalkraft $-F_N$ angelegt.

11. Wahl des Zeitschritts: In der Zeit Δt wird der obere Körper immer um einen Diskretisierungsschritt Δx verschoben. Daher ergibt sich für den Zeitschritt die Bedingung

$$\Delta t = \Delta x / v.$$

12. Zeitschleife: In dem um Δx verschobenen Zustand wird die Bedingung $h_i(t_{n+1}) \geq z_i$ geprüft und auf diese Weise die *neu in Kontakt gekommenen Punkte* bestimmt. Die auf diese Punkte wirkende Kraft wird gemäß

$$f_i(t_{n+1}) = 4G\Delta x(h_i(t_{n+1}) - Z_0) + 4\eta\Delta x(h_i(t_{n+1}) - z_i(t_n)) / \Delta t$$

berechnet. Für die Punkte, die im vorigen Schritt im Kontakt waren, wird zunächst angenommen, dass sie auf der Oberfläche bleiben: somit ändert sich ihre Koordinate von $z_i(t_n) = h_i(t_n)$ zu $z_i(t_{n+1}) = h_i(t_{n+1})$. Die Kraft wird nach der gleichen Formel berechnet. Ist diese Kraft positiv, so bleibt der Punkt im Kontakt. Ist sie negativ, so wird erklärt, dass dieser Punkt den Kontakt verloren hat und die auf ihn wirkende Kraft wird zu Null gesetzt.

Für alle Punkte, die nicht im Kontakt sind, bestimmt sich die neue Position aus der Bedingung

$$G \cdot (z_i - Z_0) + \eta \frac{z_i(t_{n+1}) - z_i(t_n)}{\Delta t} = 0.$$

Daraus folgt

$$z_i(t_{n+1}) = z_i(t_n) - \frac{G}{\eta} \cdot \Delta t (z_i(t_n) - Z_0).$$

Die gesamte auf das viskoelastische Material wirkende Kraft wäre dabei gleich

$$F = \sum_i f_i(t_{n+1}) = \sum_i 4G\Delta x (h_i(t_{n+1}) - Z_0) + 4\eta\Delta x (h_i(t_{n+1}) - z_i(t_n)) / \Delta t,$$

wobei über alle sich im Kontakt befindlichen Punkte summiert wird.

Da die Normalkraft konstant bleiben soll, wird die Lage des oberen Körpers Z_0 so geändert, dass die gesamte vertikale Kraft F_N ist. Dafür wird der Körper um ΔZ verschoben. Die sich durch diese Bewegung ergebende Kraft ist gleich

$$\Delta F = -\Delta Z \sum_i (4G\Delta x + 4\eta\Delta x / \Delta t) = -\Delta Z N (4G\Delta x + 4\eta\Delta x / \Delta t).$$

N ist hier die Zahl der Punkte im Kontakt. Zusammen mit der im vorigen Schritt berechneten Kraft muss sie genau F_N ergeben:

$$\Delta F = -\Delta Z N (4G\Delta x + 4\eta\Delta x / \Delta t) + F = F_N.$$

Daraus folgt

$$\Delta Z = \frac{F - F_N}{N(4G\Delta x + 4\eta\Delta x / \Delta t)}, \quad Z_0(t_{n+1}) = Z_0(t_n) + \Delta Z.$$

13. Zur Berechnung der Tangentialkraft wird die auf den Punkt i wirkende Normalkraft mit dem Tangens des Neigungswinkels der Oberfläche multipliziert:

$$f_{x,i} = f_i \frac{h_{j+1} - h_{j-1}}{2\Delta x}$$

und über *alle* Kontaktpunkte summiert:

$$F_x = \sum_{\substack{\text{alle} \\ \text{Punkte} \\ \text{im} \\ \text{Kontakt}}} f_i \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x}.$$

14. Das Verhältnis $|F_x / F_N|$ ist der momentane Wert des Reibungskoeffizienten. Gemittelt über die gesamte Zeit wird sie den mittleren Reibungskoeffizienten geben.

A. Anhang

Berechnung von Verschiebungen unter ausgewählten Spannungsverteilungen

In diesem Anhang werden Verschiebungen unter einigen Spannungsverteilungen berechnet, die für die Kontaktmechanik von Interesse sind.

a. Normalspannungen in einem Kreis mit dem Radius a nach dem Gesetz

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1/2}, \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (\text{A.1})$$

Wir beschränken uns hier auf die Berechnung von Verschiebungen der Oberfläche in der Normalrichtung. Sie wird durch die Gleichung (V.7) gegeben, die wir hier noch einmal wiederholen:

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} \iint P_z(x', y') \frac{dx' dy'}{r}, \quad r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (\text{A.2})$$

mit

$$E^* = \frac{E}{(1 - \nu^2)}. \quad (\text{A.3})$$

Das benutzte Koordinatensystem ist in *Abbildung A.1* gezeigt. Wegen der Rotationssymmetrie der Spannungsverteilung wird die vertikale Verschiebung in einem Punkt der Oberfläche nur vom Abstand r dieses Punktes vom Koordinatenursprung O abhängen. Es reicht deshalb aus, die Verschiebung in den Punkten der x -Achse zu bestimmen. Im Weiteren berechnen wir die Vertikalverschiebung im Punkt A . Dazu muss die Verschiebung im Punkt A , verursacht durch die Spannung im "laufenden" Punkt B , bestimmt werden und anschließend über alle möglichen Lagen des Punktes B im Wirkungsgebiet der Spannung integriert werden. Die Spannung im Punkt B hängt wegen der Rotationssymmetrie ebenfalls nur vom Abstand t des Punktes vom Koordinatenursprung O ab. Für diesen Abstand gilt: $t^2 = r^2 + s^2 + 2rs \cos \varphi$.

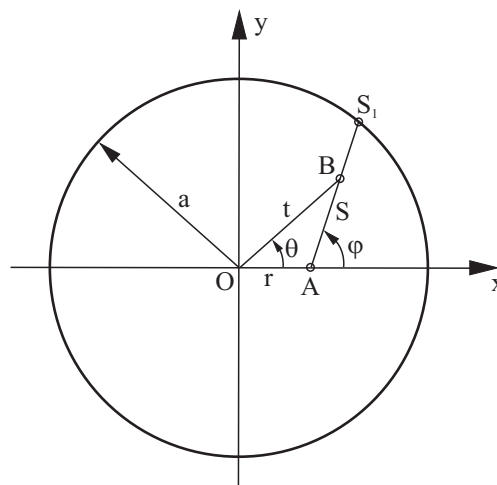


Abbildung A.1

Somit ist die Druckverteilung

$$p(s, \varphi) = p_0 \left(1 - \frac{r^2 + s^2 + 2rs \cos \varphi}{a^2} \right)^{-1/2}, \quad (\text{A.4})$$

$$= p_0 a (a^2 - r^2 - s^2 - 2rs \cos \varphi)^{-1/2} = p_0 a (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-1/2}$$

wobei gilt: $\alpha^2 = a^2 - r^2$, $\beta = r \cos \varphi$.

Für die z-Komponente der Verschiebung erhalten wir

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} p_0 a \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-1/2} ds \right) d\varphi. \quad (\text{A.5})$$

s_1 ist hier die positive Wurzel der Gleichung $\alpha^2 - 2\beta s - s^2 = 0$. Das Integral über ds berechnet sich zu

$$\int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-1/2} ds = \frac{\pi}{2} - \arctan(\beta / \alpha) \quad (\text{A.6})$$

Offenbar gilt: $\arctan(\beta(\varphi) / \alpha) = -\arctan(\beta(\varphi + \pi) / \alpha)$. Bei der Integration über φ fällt deshalb der Term mit \arctan heraus. Somit gilt

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} p_0 a \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2} d\varphi = \frac{\pi(1-\nu^2) p_0 a}{E} = \text{const}. \quad (\text{A.7})$$

Aus dem Ergebnis folgt unmittelbar, wie man die angenommene Druckverteilung erzeugen kann: sie entsteht bei einem Eindruck mit einem harten zylindrischen Stempel.

Die gesamte im Druckgebiet wirkende Kraft ist gleich

$$F = \int_0^a p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1/2} 2\pi r dr = 2\pi p_0 a^2. \quad (\text{A.8})$$

Die Steifigkeit des Kontaktes wird definiert als das Verhältnis der Kraft zur Verschiebung:

$$c = 2aE^*. \quad (\text{A.9})$$

b. Hertzsche Druckverteilung

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{1/2} \quad (\text{A.10})$$

Für die vertikale Verschiebung erhalten wir

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} \frac{p_0}{a} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{1/2} ds \right) d\varphi \quad (\text{A.11})$$

Das hier stehende Integral über ds berechnet sich zu

$$\int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{1/2} ds = -\frac{1}{2}\alpha\beta + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\beta/\alpha)\right) \quad (\text{A.12})$$

Bei der Integration über $d\varphi$ fallen Glieder mit $\alpha\beta$ und \arctan aus. Die restlichen Glieder ergeben

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} \frac{p_0}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\pi}{4} (\alpha^2 + \beta^2) = \frac{1-\nu^2}{4E} \frac{p_0}{a} \int_0^{2\pi} (a^2 - r^2 + r^2 \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{1}{E^*} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2). \quad (\text{A.13})$$

Die Verschiebung der gesamten Oberfläche – innerhalb und außerhalb des Druckgebietes – ist in *Abbildung A.2* dargestellt.

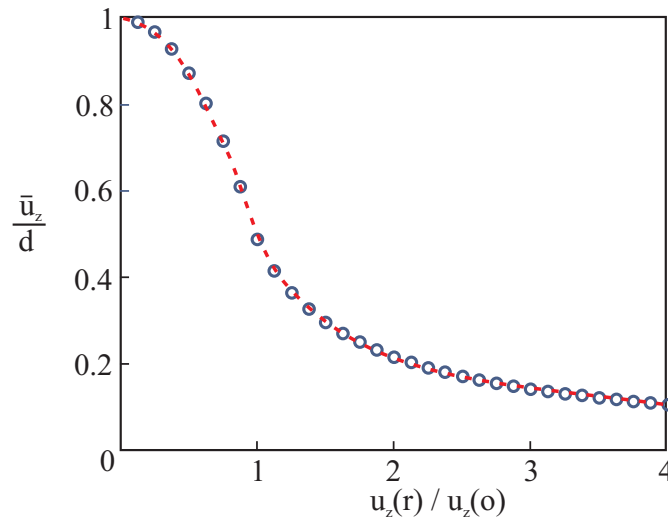


Abbildung A.2. Verschiebung innerhalb und außerhalb des Druckgebietes für die Hertzsche Druckverteilung (A.10)

c. Gleichmäßige Druckverteilung in einem dünnen Kreisring

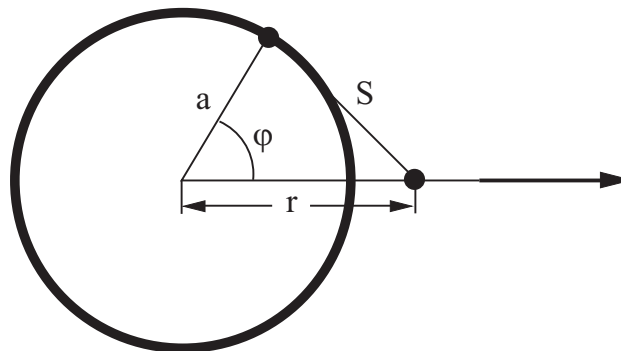


Abbildung A.3

Verschiebung im Punkt r berechnet sich zu

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} \int_0^{2\pi} \frac{F_N}{2\pi} \frac{d\varphi}{s} = \frac{1}{\pi E^*} \int_0^{2\pi} \frac{F_N}{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi}} = \frac{F_N}{2aE^*} \frac{4}{\pi^2(1+r/a)} K\left(2 \frac{\sqrt{r/a}}{1+r/a}\right), \quad (\text{A.14})$$

(*Abbildung A.4*), wobei F_N die Normalkraft ist und $K(\kappa)$ das vollständige elliptische Integral erster Art:

$$K(\kappa) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (\text{A.15})$$

Bei $r \approx a$ hat die Verschiebung eine logarithmische Singularität:

$$u_z = \frac{F_N}{2aE^*} \frac{2}{\pi^2} \ln \frac{8}{|r/a - 1|}, \quad |r/a - 1| \ll 1. \quad (\text{A.16})$$

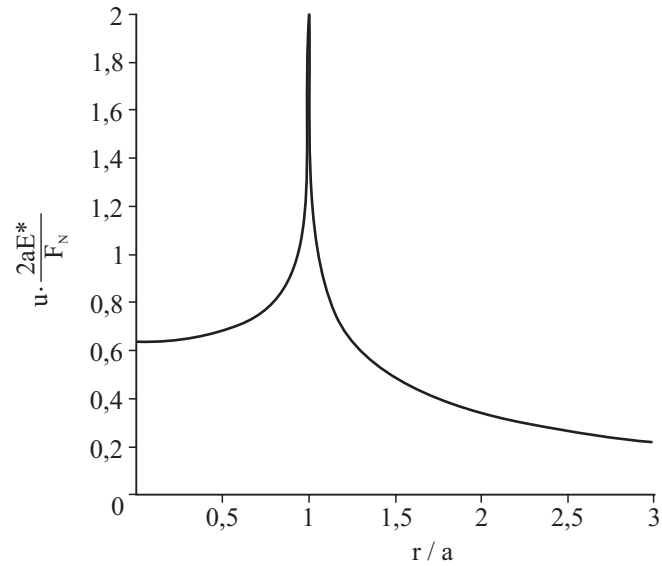


Abbildung A.4. Verschiebung der Oberfläche durch einen engen Kreisring

WEITERFÜHRENDE LITERATUR

Diese Literaturliste hat keinen Anspruch auf Vollständigkeit und dient nur als Leitfaden für weiterführendes Studium oder Nachschlagen.

Kapitel I

1. D. Dowson, History of Tribology, Longman Group Limited, London, 1979. 678 pp.
2. E. Rabinowicz, Friction and wear of materials. Second Edition. John Wiley & Sons, inc., 1995.
3. F.P. Bowden, D. Tabor, The Friction and Lubrication of Solids. Clarendon Press, Oxford, 2001.
4. B.N.J. Persson, Sliding Friction. Physical Principles and Applications. Springer, 2002.
5. D.F. Moore, The friction and lubrication of elastomers, Pergamon Press, Oxford, 1972, 288 pp.
6. I.L. Singer and H.M. Pollock (Eds), Fundamentals of Friction: Macroscopic and Microscopic Processes. (Proceedings of the NATO Advanced Study Institute), Kluwer Academic Publishers, 1992.
7. B.N.J. Persson, E. Tosatti (eds): Physics of Sliding friction (Kluwer, Dordrecht 1996).
8. G. Vogelpohl, Geschichte der Reibung, VDI-Verl., 1981, 87 S.
9. H. Czichos, K.-H.Habig: Tribologie-Handbuch: Reibung und Verschleiß. 2., überarb. und erw. Aufl. – Wiesbaden : Vieweg, 2003. – IX, 666 S.

Kapitel II

1. E. Rabinowicz, Friction and wear of materials. Second Edition. John Wiley & Sons, inc., 1995.

Kapitel III

1. J. Israelachvili, Intermolecular and Surface Forces, Academic Press (1985-2004).
2. A.J. Kinloch, Adhesion and Adhesives: Science and Technology, Chapman and Hall, London, 1987, 441 S.
3. B.V. Deryagin, N. A. Krotova and V. P. Smilga: Adhesion of solids – New York, Consultants Bureau, 1978. – 457 S.
4. K. Kendall, Molecular Adhesion and its Applications, Kluwer Academic, 2001.
5. I.E. Dzyaloshinskii, E.M. Lifshitz und L.P. Pitaevskii.: General Theory of van der Waals' Forces, – Sov. Phys. Usp. 1961, v. 4. – 153–176.

Kapitel IV

1. F.M. Fowkes, (Ed.), Contact Angle, Wettability and Adhesion, American Chemical Society, 1964.

Kapitel V

1. K.L. Johnson, Contact mechanics. Cambridge University Press, 6. Nachdruck der 1. Auflage, 2001
2. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Elastizitätstheorie, (Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band VII), 7, überarb. Auflage, Akademie Verlag, Berlin 1991, §§ 8, 9.

Kapitel VI

1. K.L. Johnson, Contact mechanics. Cambridge University Press, 6. Nachdruck der 1. Auflage, 2001
2. B.V. Deryagin, N.A. Krotova and V.P. Smilga: Adhesion of solids – New York, Consultants Bureau, 1978. – 457 S.

Kapitel VII

1. B.N.J. Persson, Contact mechanics for randomly rough surfaces. Surface Science Reports, 2006, v. 61, pp. 201–227.
2. R. Holm: Electric contacts: theory and application / by Ragnar Holm. – 4, completely rewritten ed. – Berlin: Springer, 1967. – XV, 482 S.

Kapitel VIII

1. K. L. Johnson, Contact mechanics. Cambridge University Press, 6. Nachdruck der 1. Auflage, 2001

Kapitel IX

1. K.L. Johnson, Contact mechanics. Cambridge University Press, 6. Nachdruck der 1. Auflage, 2001
2. J.J. Kalker, Three-dimensional elastic bodies in rolling contact, 1990, Kluwer, Dordrecht, 314 S.
- A. Böhmer, Auswirkung des Werkstoffverhaltens auf die rechnerisch ermittelte Belastbarkeit der Schiene. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2004.

Kapitel X

1. F.P. Bowden, D. Tabor: The Friction and Lubrication of Solids. Clarendon Press, Oxford, 2001.
2. E. Rabinowicz, Friction and wear of materials. Second Edition. John Wiley & Sons, inc., 1995.
3. M. Köhler. Beitrag zur Bestimmung des Coulombschen Haftreibungskoeffizienten zwischen zwei metallischen Festkörpern. Cuvillier Verlag Göttingen, 2005.

Kapitel XI

1. E. Meyer, R.M. Overney, K. Dransfeld, T. Gyalog, Nanoscience: Friction and Rheology on the Nanometer Scale, Singapore: World Scientific, 1998, 373 S.
2. M.H. Müsert, M. Urbakh, M.O. Robbins, Statistical mechanics of static and low-velocity kinetic friction. Advances in Chemical Physics, Ed. by I. Prigogine and S.A. Rice, 2003, v. 126, pp. 187–272.
3. E. Filippov and V.L. Popov. Fractal Tomlinson model for mesoscopic friction: From microscopic velocity-dependent damping to macroscopic Coulomb friction. – Physical Review E, 2007, v. 75, 027103.
4. P. Reimann, Brownian motors: noisy transport far from equilibrium, Physics reports, 2002, 361, 57–265.

Kapitel XII

1. K. Magnus, K. Popp, Schwingungen : eine Einführung in physikalische Grundlagen und die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen. Stuttgart: Teubner, 2005. – 400 S.
Kinkaid, O.M. O'Reilly, P. Papacopoulos, Automotive disc brake squeal. Journal of sound and vibration, 2003, v. 267, Issue: 1, pp. 105–166.
2. K. Werner, Auf Rad und Schiene: Millimeterstrukturen, Weiße Flecken, Riffeln und Risse, Furchen und Grübchen, projekte verlag 188, Halle, 2004, 147 S.
3. M. Schargott, V. Popov. Mechanismen von Stick-Slip- und Losbrech-Instabilitäten. Tribologie und Schmierungstechnik, 2004, Heft 5, S. 9–15.

Kapitel XIII

1. N.J. Persson, Sliding Friction. Physical Principles and Applications. Springer, 2002.
2. Vogelpohl, Georg: Betriebssichere Gleitlager: Berechnungsverfahren für Konstruktion u. Betrieb. – Berlin : Springer, 1958. – XI, 315 S.

Kapitel XIV

1. D.F. Moore, The friction and lubrication of elastomers, Pergamon Press, Oxford, 1972, 288 p.
2. G. Vogelpohl, Betriebssichere Gleitlager: Berechnungsverfahren für Konstruktion und Betrieb, Springer-Verlag, Berlin, 1958, 315 S.
3. O.R. Lang, Geschichte des Gleitlagers, Daimler-Benz AG, Stuttgart, 1982.

Kapitel XV

1. G. Saccomandi und R.W. Ogden, Mechanics and Thermomechanics of Rubberlike Solids (Cism International Centre for Mechanical Sciences Courses and Lectures), Springer, Wien 2004.

Kapitel XVI

1. K. A. Grosch, The Relation between the Friction and Visco-Elastic Properties of Rubber. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 274, No. 1356, pp. 21–39
2. K. A. Grosch, The rolling resistance, wear and traction properties of tread compounds, Rubber Chemistry and technology, 1996, v. 69, pp. 495–568.

Kapitel XVII

1. E. Rabinowicz, Friction and wear of materials. Second Edition. John Wiley & Sons, inc., 1995.
2. Kleis and P. Kulu, Solid Particle Erosion. Springer-Verlag London, 2008, 206 pp.
3. K.-H. zum Gahr, Microstructure and wear of materials, Elsevier, Amsterdam, 1987, 560 S.

Kapitel XVIII

1. J. Starcevic, Tribospectroscopie als neue Methode zur Untersuchung von Reibungsmechanismen: Theoretische Grundlagen und Experiment. Dissertation an der Technischen Universität Berlin, 2008.
2. J. Wallaschek, Contact mechanics of piezoelectric ultrasonic motors, Smart Materials and Structures, 1998, v. 7, pp. 369-381.
3. T. Sashida, T. Kenio, An Introduction to Ultrasonic Motors, Oxford Science Publications, 1994.

Kapitel XIX

1. P. Wriggers, Computational Contact Mechanics Springer, 2006, 518 p.
2. P. Wriggers and Udo Nackenhorst (eds): Analysis and Simulation of Contact Problems: (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics), Springer, Berlin, 2006.

Literatur zur Dimensionsreduktionsmethode:

1. Geike T. and V.L. Popov, Mapping of three-dimensional contact problems into one dimension. – Phys. Rev. E., 2007, v. 76, 036710 (5 pp.).
2. T. Geike, Valentin L. Popov, Reduzierte Beschreibung des 3D adhäsiven Kontaktes zwischen rauen Oberflächen. Tribologie und Schmierungstechnik 2006, v. 53 (3), pp. 5-9. Hierfür siehe auch: Geike T. and V.L. Popov, Reduction of three-dimensional contact problems to one-dimensional ones. – Tribology International, 2007, v. 40, 924–929.
3. T. Geike. and V.L. Popov, Reduced description of mixed lubrication. – Tribology International, 2008, v. 41, pp. 542–548.
4. T. Geike. and V.L. Popov, Cavitation within the framework of reduced description of mixed lubrication. – Tribology International, 2008.05.002
5. T. Geike, Theoretische Grundlagen eines schnellen Berechnungsverfahrens für den Kontakt rauer Oberflächen. Dissertation an der Technischen Universität Berlin, 2007. (URL: <http://opus.kobv.de/tuberlin/volltexte/2008/1748/>)

BILDERNACHWEIS

Kapitel 1 (Einführung): Transport eines ägyptischen Kolosses: vom Grabstein von Tehuti-Hetep, El-Bersheh (c. 1880 B.C.).

Kapitel 2: Lager einer Brücke

Kapitel 3: Gecko auf einer Glasplatte (S. Gorb, Max-Planck-Institut für Metallforschung, Stuttgart).

Kapitel 4: Wassertropfen auf einer Gartenpflanze (V. Popov, Institut für Mechanik, TU Berlin).

Kapitel 5: Spannungsverteilung in einem Kontakt zwischen einer spannungsoptisch aktiven Platte und einem Zylinder (J. Thaten, Institut für Mechanik, TU Berlin).

Kapitel 6: Adhäsiver Kontakt zwischen einem Gelatine-Körper und einem stählernen Zylinder (J. Thaten, Institut für Mechanik, TU Berlin).

Kapitel 7: Dehnspannungsverteilung in einem Kontakt zwischen einer spannungsoptisch aktiven Platte und einer rauen Oberfläche (J. Thaten, Institut für Mechanik, TU Berlin).

Kapitel 8: Gleitzonen und ringförmiger Verschleiß (Fretting) in einem Kontakt zwischen Platte und Kugel bei Belastung unter verschiedenen Winkeln zur Normale (mit freundlicher Genehmigung von K.L. Johnson).

Kapitel 9: Rad-Schiene-Kontakt (V. Popov, Institut für Mechanik, TU Berlin).

Kapitel 10: Ein Stift-Scheibe-Tribometer am Institut für Mechanik der technischen Universität Berlin (J. Thaten, Institut für Mechanik, TU Berlin).

Kapitel 11: Spitze eines Atomkraftmikroskopes über einer „atomar glatten“ Ebene (schematisch).

Kapitel 12: Eine Schwingungseigenform einer Scheibenbremse gemessen mit einem scanning Laser-Vibrometer (U. von Wagner, Institut für Mechanik, TU Berlin).

Kapitel 13: Thermographie von rollenden Reifen bei verschiedenen Schlupfwinkeln (F. Böhm: SFB 181 Hochfrequenter Rollkontakt der Fahrzeugräder, Forschungsbericht 2. Halbjahr 1988-1. Halbjahr 1991, TU Berlin, S. A1-68).

Kapitel 14: Schleichende Strömung über einer gewellten Oberfläche – experimentell gemessene Stromlinien und Vergleich mit analytischer Rechnung (mit freundlicher Genehmigung von M. Scholle, Universität Bayreuth). Quelle: Habilitationsschrift von M. Scholle sowie: Scholle, M.; Wierschem, A.; Aksel, N.: Creeping films with vortices over strongly undulated bottoms, Acta Mech., 168, 167-193 (2004).

Kapitel 15: O-Ringe (Verdichtungsdringe)

Kapitel 16: Reifenreibung.

Kapitel 17: Typische Erscheinungsbilder vom abrasiven und adhäsiven Verschleiß. Links: abrasiver Verschleiß Eisen gegen Aluminium, rechts: adhäsiv bedingtes Fressen, C45 gehärtet und angelassen. Quelle: Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, Berlin, Frau Binkowski, freundlich überreicht durch Herrn Dr. H. Klotz.

Kapitel 18: Probekörper in einem Tribospektrometer am Institut für Mechanik der Technischen Universität Berlin (J. Starcevic, Institut für Mechanik, TU Berlin).

Kapitel 19: Ein Fenster der Benutzerschnittstelle einer Software zur schnellen Berechnung von Kontakteigenschaften und Reibung zwischen rauen Oberflächen (FaCom – Fast Computation of rough surfaces, V. Popov, T. Geike, Institut für Mechanik, TU Berlin, S. Korostelev, A. Dimaki, Institut für Festigkeitsphysik und Werkstoffkunde, Russische Akademie der Wissenschaften, Tomsk).

Unterrichtsmittel

Томский политехнический университет

ПОПОВ Валентин Леонидович

КОНТАКТНАЯ МЕХАНИКА И ФИЗИКА ТРЕНИЯ

Учебное пособие

Издательство Томского политехнического университета, 2009

На немецком языке

Design


O.Ju. Arschinowa

Redaktionsschluss 05.05.2009. Ausgabeformat 60×84/8. Papier "Snegurotschka".
Bedruckung XEROX. Bezugsdruckbogen 14,66. Verlagsbogen 13,26.
Auftrag 453-09. Auflage 200 Exempl.



Polytechnische Universität Tomsk
Das Qualitätsmanagementsystem
der Polytechnischen Universität Tomsk ist
von NATIONAL QUALITY ASSURANCE nach dem Standard
ISO 9001:2008 zertifiziert worden



VERLAG  TPU Russland, 634050 Tomsk, Lenin-Strasse 30.