

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Д.Г. Видяев

**ГИДРОГАЗОДИНАМИКА
РАЗДЕЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Учебное пособие

Издательство
Томского политехнического университета
2009

УДК 621.039.3

В42

Видяев Д.Г.

В42 Гидрогазодинамика разделительных процессов: учебное пособие / Д.Г. Видяев; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 108 с.

ISBN 978-5-98298-764-8

В пособии рассмотрены основные вопросы гидрогазодинамики, необходимые для проведения расчета параметров потока жидкости или газа в разделительных процессах. Описаны физические свойства жидкостей и газов, общие законы движения жидкости и газа, гидравлические сопротивления, движение жидкости и газа в трубах и разделительных колонных, и истечение их из отверстий, моделирование гидрогазодинамических явлений. Приведены примеры использования теории в технических задачах.

Пособие разработано в рамках реализации Инновационной образовательной программы ТПУ по направлению «Атомная энергетика, ядерный топливный цикл, безопасное обращение с радиоактивными отходами и отработанным ядерным топливом, обеспечение безопасности и противодействие терроризму» и предназначено для студентов, инженеров физико-технических специальностей и широкого круга читателей.

УДК 621.039.3

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор
директор НИИ ПММ ТГУ
А.А. Глазунов

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры прикладной аэромеханики ТГУ
В.Г. Бутов

ISBN 978-5-98298-764-8

© ГОУ ВПО «Томский политехнический университет», 2009
© Видяев Д.Г., 2009
© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2009

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы, связанные с получением чистых элементов и их изотопов всегда были актуальны, а наблюдавшиеся во второй половине XX века бурное развитие радиоэлектронной и химической промышленности, интенсивная разработка новых видов топлива, в том числе и ядерного, рост применения меченых атомов в различных областях человеческой деятельности, способствовали появлению большого числа разделительных предприятий.

Реализация процессов разделения в промышленных масштабах подразумевает переработку больших сырьевых потоков и создание разделительных каскадов, обеспечивающих требуемую степень разделения и производительность. Разделительный каскад представляет собой разделительные аппараты (колонны, центрифуги и т. д.) связанные в единую схему трубопроводами, которые обеспечивают транзит потока исходного сырья (полупродуктов и конечных продуктов), находящегося в газовой или жидкой фазе, между разделительными аппаратами и его регулирование. Параметры потоков газа и жидкости в трубопроводах и в самих разделительных аппаратах оказывают существенное влияние на стабильность и качество протекания процесса разделения. Поэтому при проектировании разделительного производства большое внимание уделяется гидрогазодинамическим расчетам.

Сложность задач, решаемых в гидрогазодинамике (ГГД), исторически предопределила параллельное развитие теоретического и экспериментального направлений этой науки. Теоретическая и экспериментальная ГГД (или прикладная гидравлика) развиваются, взаимно дополняя, обогащая и корректируя друг друга. Результаты экспериментальных исследований служат для апробации и корректировки теоретических моделей и методов расчета, а также побуждают к созданию новых моделей и построению новых гипотез.

Создание теоретических основ ГГД связано с именами членов Российской Академии наук Леонарда Эйлера (1707–1783) и Даниила Бернулли (1700–1782), которые являются разработчиками общего уравнения движения идеальной жидкости, а также Ломоносова М.В. (1711–1765), сформулировавшего принципы сохранения вещества и энергии. Необходимо отметить, что основополагающим исследованиям Эйлера, Бернулли и Ломоносова предшествовали работы Ньютона (1642–1727) по трению и по сопротивлению тел набегающему потоку.

Однако применение уравнений Эйлера и Бернулли (так же как и разработанных несколько позже уравнений движения вязкой жидкости) к практическим задачам привело к удовлетворительным результатам

лишь в немногих случаях. В связи с этим с конца XVIII в. многочисленные ученые и инженеры (Шези, Дарси, Базен, Вейсбах и др.) опытным путем изучали движение воды в различных частных случаях и получили значительное количество эмпирических формул гидравлики. Создававшаяся таким путем чисто практическая гидравлика все более отдалялась от теоретической ГГД. Сближение между ними наметилось лишь к концу XIX в. в результате вызванного развитием авиации формирования новых взглядов на движение жидкости, основанных на исследовании структуры потока. Тонкие экспериментальные исследования закона внутреннего трения в жидкостях при ламинарном течении (в работе Н.П. Петрова, 1836–1920) и условий перехода от ламинарного к турбулентному течению (в работах О. Рейнольдса, 1848–1912) позволили глубже проникнуть в физическую природу гидравлических сопротивлений и положили начало учению о турбулентном движении. К этому же периоду относятся блестящие исследования в различных областях ГГД, выполненные Н.Е. Жуковским (1847–1921) и С.А. Чаплыгиным (1869–1942).

Несколько позже работы Л. Прандтля (1875–1953) сильно продвинули вперед изучение турбулентных потоков, которое завершилось созданием полуэмпирических теорий турбулентности, получивших широкое практическое применение.

В настоящее время интенсивно развиваются теории размерности и подобия, а также много других разделов ГГД.

Главной задачей настоящего учебного пособия является единое комплексное изложение с учетом специфики организации разделительных процессов основных законов динамики капельной и газообразной жидкости, как с позиций теоретической ГГД, так и в соответствии с приемами и методами прикладной гидравлики.

Назначение пособия определило его содержание и расположение материала. Книга разбита на тематические три главы, состоящие из параграфов, параграфы – из пунктов.

Глава 1 (§1 – 4) посвящена основам теоретической ГГД и прикладной гидравлики. Прежде всего, в ней приводятся основные свойства жидкости, понятия и определения ГГД, классификация течений жидкости и методов решения основных вопросов ГГД (§1). В §2 дается вывод основных уравнений теоретической ГГД для идеальной и вязкой жидкостей. В §3 и §4 рассматриваются особенности описания течения несжимаемой жидкости и газа, соответственно, с позиции прикладной гидравлики, т.е. одномерного движения.

В главе 2 содержатся данные о методе анализа размерностей и о гидравлических потерях на трение (§5) и на местные сопротивления (§6).

В 3-ей главе, с опорой на сведения, приведенные в двух первых, рассматриваются особенности движения несжимаемой жидкости и газа в трубопроводах и насадочных колоннах, истечения их из отверстий и штуцеров, работы нагнетателей (§7), а также моделирования гидрогазодинамических процессов (§8).

В конце книги приведен список рекомендованной литературы.

Освоение пособия ориентировано на читателя с базовыми знаниями по таким дисциплинам как высшая математика, общая и математическая физика.

Практика педагогической работы показывает, что одним из основных затруднений студента, изучающего прошедшую длительный путь исторического развития дисциплину, является потеря основной логической схемы построения лекционного курса. Этим, видимо, объясняется и известный формализм в знаниях студента, проявляющийся нередко в том, что, изучив отдельные вопросы курса, он не осваивает существующей между ними взаимосвязи. Учитывая это, при подготовке настоящего учебного пособия автор стремился соответствующим образом расположить рассматриваемый материал. При этом, как правило, принят дедуктивный принцип: сначала дается анализ и решение вопроса в наиболее общей его постановке, а затем рассматриваются те частные случаи и решения, которые приводят к применимым в инженерных расчетах соотношениям.

Для удобства пользования учебным пособием и более эффективного освоения материала:

1. В тексте выделены наиболее важные формулировки и определения.

2. В начале книги вынесены основные условные обозначения, используемые в тексте. В условных обозначениях употребляются символы трех алфавитов (русского, латинского, греческого). Условные обозначения по возможности унифицированы. Каждому символу в книге ставится в соответствие один или несколько смыслов.

3. В конце книги имеется приложение, содержащее справки по соотношению единиц измерения в различных системах и основные физические свойства ряда веществ, и предметный указатель.

4. Нумерация формул, таблиц, рисунков в пределах параграфа используется двойная: "номер параграфа . порядковый номер формулы (таблицы, рисунка) в этом параграфе".

5. После каждого параграфа приводится его резюме, список вопросов для самоконтроля и задачи с ответами (наиболее сложные и с решениями) для самостоятельной работы.

Желаем успехов в освоении пособия!

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

p – давление	ξ – коэффициент местного сопротивления
ρ – плотность	$F_{\text{тр}}$ – сила трения
T – температура	τ – удельная сила трения
V – объем	Ne – число Ньютона
v – удельный объем	Re – число Рейнольдса
S – площадь сечения	Fr – число Фруда
u – скорость потока	Eu – число Эйлера
u_x, u_y, u_z – составляющие вектора скорости	M – число Маха
c – скорость ударной волны	E – модуль упругости
a – скорость звука	l – длина тела, трубы
ω – угловая скорость	d – внутренний диаметр трубопровода
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции угловой скорости на координатные оси	D – внешний диаметр трубопровода
X, Y, Z – проекции массовых сил на оси координат	d_3 – эквивалентный диаметр трубопровода
m – масса	r – радиус
G – весовой расход	K – коэффициент шероховатости
M – массовый расход	δ – толщина стенок трубы
Q – объемный расход	I – гидравлический уклон
s – путь	k – показатель адиабаты
t – время	c_v – теплоемкость при постоянном объеме
H – полный напор	c_p – теплоемкость при постоянном давлении
φ – коэффициент скорости истечения	ε – коэффициент сжатия струи
α – коэффициент Кориолиса,	i – энтальпия
γ – удельный вес	R – газовая постоянная данного газа
Φ – потенциал скорости	g – ускорение свободного падения
μ – динамическая вязкость	
ν – кинематическая вязкость	
h_u – потери напора	
λ – гидравлический коэффициент трения	

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТРЕХМЕРНОГО И ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

§1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ

1.1. Основные физические свойства жидкостей

Гидрогазодинамика (ГГД) – наука о движении жидкостей и газов и взаимодействии их с обтекаемыми твердыми телами или с твердыми поверхностями, ограничивающими движущуюся среду, – является разделом механики сплошных сред. В отличие от твердых тел, жидкости, и в особенности газы, обладают относительно слабыми межмолекулярными связями, что проявляется в легкой подвижности, т.е. *текучести* – малой сопротивляемости деформации сдвига: движение жидкостей и газов под действием внешних и внутренних сил сопровождается изменением формы, а в общем случае – и объема выделенной ее части.

В ГГД обычно абстрагируются от молекулярного строения жидкости и газа, *предполагается, что они заполняют пространство сплошь, без образования каких бы то ни было пустот*. В этом состоит *гипотеза о непрерывности* (сплошности), позволяющая рассматривать характеристики (параметры) жидкой и газовой сред, как непрерывные функции координат точки в среде и времени.

Гипотеза непрерывности объединяет жидкости и газы в единую категорию легко деформируемых сред. Вместе с тем между ними существует принципиальное различие.

Жидкости, как правило, считаются слабо сжимаемыми средами а, в пределе, несжимаемыми, поэтому их объем и плотность при умеренных перепадах давления являются постоянными величинами.

Характерной особенностью жидкостей следует считать также их капиллярные свойства. В результате проявления этих свойств на границах раздела жидкостей и газов образуются поверхности свободного уровня, мениски, капли.

Газы, в отличие от жидкостей, характеризуются проявлением сжимаемости: их плотность – величина переменная; поверхности свободного уровня они не образуют. Вместе с тем, при малых перепадах давления сжимаемость газов проявляется слабо. *Подчеркнем*, что при больших перепадах давления сжимаемость обнаруживается и в жидкостях, однако, она по сравнению с газами несоизмеримо мала. Отсюда следует, что сжимаемость свойственна и жидкостям и газам, а ее количественное проявление зависит от физических свойств среды. Это послужит

ло основанием объединить *сплошные среды, обладающие свойством текучести*, под общим названием *жидкости*, выделяя: *несжимаемые жидкости* – капельные жидкости или газы, зависимостью плотности которых от давления можно пренебречь, и *сжимаемые жидкости* – газы, зависимостью плотности которых от давления пренебречь нельзя.

Введем понятия плотности жидкости и давления.

Плотностью жидкости ρ , кг/м³, называется, как известно, ее масса m , заключенная в единице объема V :

$$\rho = m / V.$$

Для определения плотности в данной точке пользуются формулой

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} (\Delta m / \Delta V).$$

Величину, обратную плотности, $1/\rho = \upsilon$, называют *удельным объемом*.

В практических приложениях часто используется понятие *объемный вес*, Н/м³, – вес жидкости G , приходящийся на единицу объема V :

$$\gamma = G / V.$$

Объемный вес жидкости в данной точке определяют по формуле

$$\gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} (\Delta G / \Delta V).$$

Так как $G = mg$, то плотность и объемный вес связаны выражением

$$\gamma = \rho g. \quad (1.1)$$

В общем случае плотность и объемный вес жидкости являются функциями координат и времени, т.е. $\rho = \rho(x, y, z, t)$ и $\gamma = \gamma(x, y, z, t)$, и меняются с изменением давления и температуры.

Гидростатическим давлением p , Н/м² (Па), называется напряжение, обусловленное действием равномерно распределенной поверхностной силы F на поверхность S :

$$p = F / S,$$

откуда *сила гидростатического давления* (в Н) $F = pS$.

При неравномерном распределении силы F по поверхности S гидростатическое давление в точке будет:

$$p = dF/dS \quad \text{или} \quad p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} (\Delta F / \Delta S).$$

Гидростатическое давление в точке, будучи сжимающим, действует нормально к поверхности и поэтому не зависит от ориентации последней в пространстве. В самом деле, силу, действующую под любым углом к поверхности, можно разложить на две составляющие, из которых одна направлена вдоль этой поверхности, а вторая – по нормали к ней. Первая составляющая однако, не реализуется, поскольку жидкость в обычных условиях не сопротивляется растяжению, а вторая направлена внутрь объема жидкости, производя сжатие.

В целом, силы, действующие на жидкость, делятся на массовые (или объемные) и поверхностные. *Массовые силы* действуют на каждую частицу данного объема жидкости и пропорциональны массе; к их числу относятся силы тяжести, инерции, центробежная. *Поверхностные силы* (давления, трения) действуют на поверхностях, отделяющих данный объем жидкости от окружающей его среды; они пропорциональны размеру поверхности.

Рассмотрим действие на жидкость сил трения. Для этого представим себе, что жидкость течет вдоль плоской стенки и движется слоями, параллельными стенке. Эпюра скоростей в поперечном сечении прямолинейного параллельно-струйчатого потока реальной жидкости при этом имеют вид, показанный на рис. 1.1, где по оси ординат отложено расстояние от ограничивающей стенки по нормали к ней (n), а по оси абсцисс – скорость равноудаленных слоев жидкости (u). Частицы, соприкасающиеся с поверхностью стенки, «прилипают» к ней настолько, что скорость их равна нулю; по мере удаления от стенки скорость нарастает. Разность скоростей смежных слоев жидкости является следствием возникновения продольных касательных сил внутреннего трения, обусловленных *вязкостью жидкости* – ее способностью сопротивляться сдвигу. Опыт показывает, что неравномерный профиль скоростей (рис. 1.1) наблюдается также при движении жидкости в трубах с чрезвычайно гладкими стенками. Следовательно, рассматриваемое явление вызвано не трением о поверхность стенки, а внутренним трением в жидкости. По *закону Ньютона* (1686г.) силы внутреннего трения $F_{\text{тр}}$ пропорциональны градиенту скорости du/dn и площади поверхности соприкосновения данных слоев жидкости S :

$$F_{\text{тр}} = \mu S \left| \frac{du}{dn} \right|, \quad (1.2)$$

где коэффициент пропорциональности μ зависит от природы данной жидкости и внешних условий (температуры, давления) и называется *коэффициентом динамической вязкости* (или *динамической вязкостью*). В системе СИ он имеет размерность Н·с/м² (Па·с).

Чаще принято определять удельную силу трения τ , Па:

$$\tau = F_{\text{тр}}/S = \mu \left| \frac{du}{dn} \right|. \quad (1.2a)$$

Величины $F_{\text{тр}}$ и τ могут быть положительны или отрицательны в зависимости от выбранного направления отсчета n ; в формулах (1.2) и (1.2a) фигурирует абсолютное значение градиента du/dn .

Кроме динамической вязкости довольно часто используют *кинематическую вязкость* ν , м²/с, связанный с величиной μ соотношением:

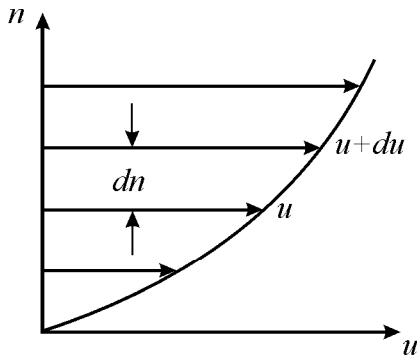


Рис. 1.1. Профиль скорости в поперечном сечении параллельно-струйчатого потока реальной жидкости

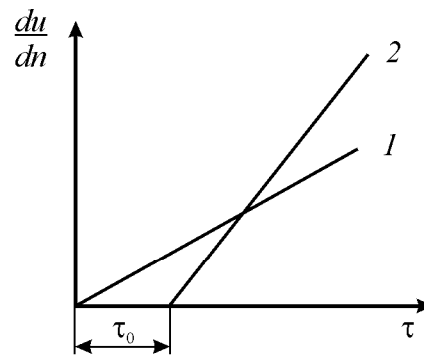


Рис. 1.2. Зависимость градиента скорости от удельной силы трения для жидкостей: 1 – "ньютоновской"; 2 – аномальной

$$\nu = \mu / \rho . \quad (1.3)$$

Название "кинематическая" вытекает из того, что в размерности этой величины отсутствуют единицы силы.

Величина μ не поддается теоретическому расчету, а определяется опытным путем на специальных приборах – вискозиметрах; таблицы значений μ для множества жидкостей приведены в справочниках [12].

Некоторые жидкости не подчиняются закону вязкости Ньютона (1.2) – это так называемые "неньютоновские" или аномальные жидкости (например: литой бетон, глинистый раствор, коллоиды и др.).

В аномальных жидкостях напряжение трения определяется по формуле Бингема

$$\tau = \tau_0 + \mu (du/dn),$$

где τ_0 – начальное напряжение сдвига, лишь после достижения которого аномальная жидкость приходит в движение (а до этого, испытывает только упругую деформацию).

Таким образом, в аномальных жидкостях сила трения возникает в еще покоящихся жидкостях, при стремлении прийти в движение.

На рис.1.2. показана зависимость между удельной силой трения и градиентом скорости для "ньютоновской" и аномальных жидкостей.

Влияние вязкости на характер течения жидкости неоднозначно. В некоторых задачах вязкость играет решающую роль, в других – ее влияние сказывается слабо и представление о характере течения можно получить без учета вязких сил. Пренебрежение вязкими силами существенно облегчает аналитическое исследование, и вместо реальной жидкости оказывается целесообразным рассматривать модель идеальной жидкости. *Идеальная жидкость* – это жидкость, лишенная внутренних сил трения. Указанную модель следует рассматривать как первое, но важное приближение к реальной модели течения.

1.2. Ламинарное и турбулентное течение жидкости. Число Рейнольдса

Наблюдения показывают, что в природе существует два различных вида течения жидкости: *ламинарное* (слоистое, упорядоченное), при котором отдельные слои жидкости скользят друг относительно друга, не смешиваясь между собой, и *турбулентное* (неупорядоченное), когда частицы жидкости движутся по сложным, все время изменяющимся траекториям, и в жидкости происходит интенсивное перемешивание. Ясность в вопрос о том, каким именно будет течение жидкости в тех или иных условиях, была внесена в 1883 г. опытами Рейнольдса. Используемая им установка (рис. 1.3) состоит из бака с водой 1, соединенного со стеклянной трубой 2. С помощью вентиля 3, можно заставить течь воду через трубу с различными скоростями. Из сосуда 4 по трубке 5 в устье трубы поступает краска. При малых скоростях течения воды в трубе окрашенная струйка не размывается окружающей ее водой, имея вид натянутой нити. Поток в этом случае – *ламинарный*. При увеличении скорости движения в трубе окрашенные струйки получают вначале волнистое очертание, а затем почти внезапно исчезают, размываясь по всему сечению трубы и окрашивая всю жидкость в трубе. Движение жидкости становится неупорядоченным, *турбулентным*. Основная особенность турбулентного течения заключается в наличии, помимо продольных, поперечных к направлению движения составляющих скорости.

Основываясь на результатах эксперимента, Рейнольдс установил,

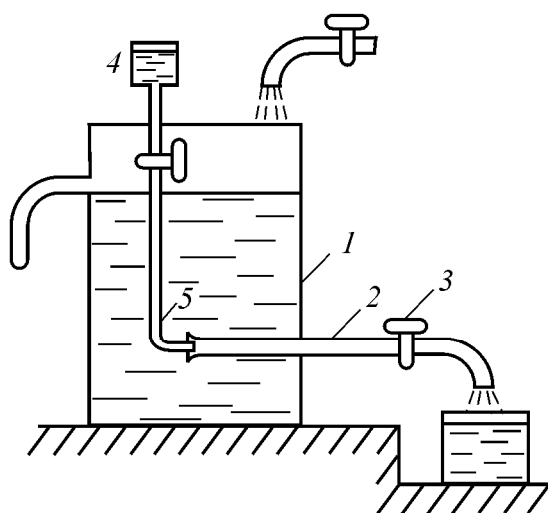


Рис. 1.3. Экспериментальная установка Рейнольдса для определения режимов движения жидкости (пояснения по тексту)

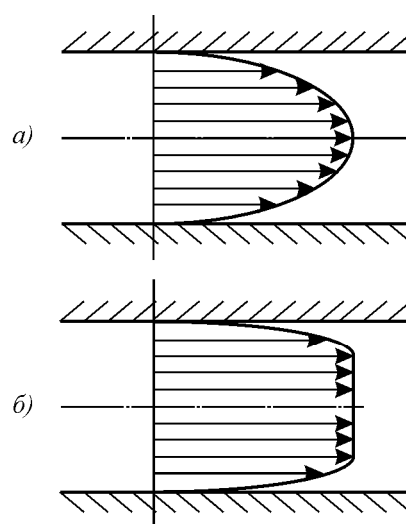


Рис. 1.4. Распределение скоростей по сечению трубы: а – ламинарное движение жидкости; б – турбулентное

что режим потока жидкости в трубе зависит от величины безразмерного числа, которое учитывает основные факторы, определяющие движение жидкости в трубе: среднюю скорость течения u , диаметр трубы d , плотность жидкости ρ и ее вязкость μ . Это число (позже названное числом Рейнольдса) имеет вид:

$$\text{Re} = \frac{ud\rho}{\mu} = \frac{ud}{\nu}. \quad (1.4)$$

Значение числа Рейнольдса $\text{Re}_{\text{кр}}$, при котором происходит переход от ламинарного течения к турбулентному, называется *критическим*. Наиболее часто принимают значение $\text{Re}_{\text{кр}} = 2300$.

Таким образом, при $\text{Re} > 2300$ режим течения будет турбулентным, при $\text{Re} < 2300$ – ламинарным.

По значению $\text{Re}_{\text{кр}}$ можно найти критическую скорость, т.е. скорость, ниже которой будет иметь место ламинарное движение жидкости:

$$u_{\text{кр}} = \text{Re}_{\text{кр}} \nu / d = 2300\nu / d.$$

В случае если жидкость движется по каналу сложной конфигурации, при расчете числа Рейнольдса вместо d используют *эквивалентный диаметр* d_3 :

$$d_3 = 4 S / \Pi, \quad (1.5)$$

где S – площадь сечения потока; Π – смоченный периметр канала.

Надо отметить, что одновременно с переходом ламинарного течения в турбулентное изменяется характер распределения скоростей по сечению трубы. При ламинарном течении распределение скоростей по сечению имеет параболический характер: скорости непосредственно на стенках равны нулю, а при удалении от стенок непрерывно и плавно возрастают, достигая максимума на оси трубы (рис. 1.4 а).

При турбулентном течении закон распределения скоростей сложнее: в пределах большей части сечения скорости лишь незначительно меньше максимальной скорости на оси, но зато вблизи стенок величина скорости резко падает (рис. 1.4 б).

Более равномерное распределение скоростей по сечению при турбулентном течении объясняется наличием перемешивания, осуществляемого поперечными составляющими скоростей. Благодаря этому перемешиванию частицы с большими скоростями в центре потока и с меньшими скоростями на его периферии, непрерывно сталкиваясь, выравнивают свои скорости. У стенки перемешивание парализуется наличием твердых границ, и поэтому там наблюдается быстрое падение скорости.

Таким образом, ламинарное и турбулентное течение – два различных вида течения жидкости, различающиеся и характером движения частиц, и особенностями распределения скоростей по сечению.

1.3. Методы изучения движения жидкости

Существует два метода математического описания движения жидкости – метод Лагранжа и метод Эйлера. В обоих методах жидкость рассматривается как непрерывная среда. В качестве мельчайшего элемента жидкости принимается "частица" бесконечно малых размеров, но не отождествляемая с молекулой или атомом; поэтому рассматриваемая схема неприменима к изучению молекулярных движений.

По Лагранжу в жидкости выделяется определенная фиксированная частица и задается ее траектория следующими тремя уравнениями:

$$\begin{aligned}x &= f_x(a, b, c, t); \\y &= f_y(a, b, c, t); \\z &= f_z(a, b, c, t),\end{aligned}\tag{1.6}$$

где a, b, c – параметры Лагранжа, характеризующие координаты выделенной частицы в начальный момент времени.

Таким образом, если система (1.6) известна, то движение потока жидкости вполне определено, так как легко найти составляющие скорости u_x, u_y, u_z выделенной частицы жидкости:

$$\begin{aligned}u_x &= dx/dt = df_x/dt; \\u_y &= dy/dt = df_y/dt; \\u_z &= dz/dt = df_z/dt.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Абсолютная скорость в любой момент времени может быть записана в виде векторной суммы составляющих $\mathbf{u} = i u_x + j u_y + k u_z$.

В отличие от метода Лагранжа метод Эйлера состоит в том, что задается не траектория выделенной частицы жидкости, а все поле скоростей в движущейся жидкости как функция координат и времени:

$$\begin{aligned}u_x &= dx/dt = F_x(x, y, z, t); \\u_y &= dy/dt = F_y(x, y, z, t); \\u_z &= dz/dt = F_z(x, y, z, t).\end{aligned}\tag{1.8}$$

Для нахождения скорости в любой фиксированной точке рассматриваемого пространства необходимо только дать координаты этой точки. Например, определим изменение скорости в точке с координатами $x = a, y = b, z = c$:

$$\begin{aligned}u_x &= F_x(a, b, c, t); \\u_y &= F_y(a, b, c, t); \\u_z &= F_z(a, b, c, t).\end{aligned}\tag{1.9}$$

Таким образом, составляющие скорости, являющиеся в общем случае функциями четырех переменных, в фиксированной точке пространства зависят только от времени.

Для нахождения траектории конкретной частицы необходимо проинтегрировать систему уравнений (1.8). В результате чего вновь прихо-

дим к системе уравнений (1.6). После исключения из приведенной системы времени t найдем уравнение траектории жидкой частицы.

Движение жидкости в рассматриваемом объеме может не зависеть от времени, т.е. в любой точке заданного объема скорость с течением времени не будет меняться. Такое движение называют *установившимся*. Если же скорость частицы с течением времени изменяется – движение *неустановившееся*.

В общем случае неустановившегося движения проекции скорости u_x , u_y , и u_z являются функциями координат и времени, поэтому полный дифференциал, например, скорости u_x равен сумме четырех частных:

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} dt + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz, \quad (1.10)$$

а ее производная по времени (ускорение)

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

или

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z. \quad (1.11)$$

Здесь частная производная $\partial u_x / \partial t$, представляющая собой интенсивность изменения скорости в данной точке (при неизменных координатах x, y, z), обусловленная неустановившимся характером движения жидкости, называется *локальной* производной, а сумма остальных трех слагаемых, определяющая ускорение в неравномерном движении в пространстве, называется *конвективной* производной.

При установившемся движении локальное ускорение равно нулю.

Аналогичные выражения можно составить также для производных du_y / dt и du_z / dt , в результате чего получаем

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z; \\ \frac{du_y}{dt} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z; \\ \frac{du_z}{dt} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Выделим в области, занятой потоком, некоторую точку 1 (рис. 1.5) и представим себе, что скорость в ней имеет в данный момент времени направление \mathbf{u}_1 . В точке 2 , находящейся на некотором расстоянии δs_1 от точки 1 в направлении скорости \mathbf{u}_1 , в тот же момент времени скорость \mathbf{u}_2 имеет другое направление. Направление скорости \mathbf{u}_3 в точке 3 ,

находящейся на некотором расстоянии δs_2 от точки 2 в направлении скорости \mathbf{u}_2 , уже иное, и так в каждой последующей точке. Уменьшая δs_1 , δs_2 , δs_3 и т.д. до бесконечно малой величины, получим вместо ломаной $1-2-3-4 \dots$ плавную кривую, в каждой точке которой вектор скорости в данный момент времени направлен к ней по касательной. Эта кривая называется *линией тока*.

Сделаем несколько замечаний в связи с введением этого понятия.

В общем случае *неустановившегося движения жидкости линия тока, проходящая через данную точку, не остается неизменной*, с течением времени она меняет свою форму. В самом деле, если в начальный момент вектор скорости в точке 1 (см. рис. 1.5) был \mathbf{u}_1 то, изменяясь с течением времени по величине и направлению, в следующий момент он займет положение \mathbf{u}_1' . В точке 2', находящейся на некотором расстоянии от точки 1 в направлении скорости \mathbf{u}_1' , в тот же новый момент времени вектор скорости будет иметь направление \mathbf{u}_2' и т. д. Линия тока в новый момент времени пойдет через точки $1'-2'-3' \dots$ и не будет совпадать с прежней линией тока $1-2-3 \dots$

Линия тока в общем случае не совпадает с траекторией движения жидкой частицы. Принципиально это различные понятия: *линия тока* определяет собой направления, скоростей в различных точках в один и тот же момент времени, а *траектория* есть геометрическое место точек, последовательно проходимых частицей в процессе ее движения, т.е. в различные моменты времени. Продвигаясь, например, вдоль вектора скорости \mathbf{u}_1 из точки 1 (см. рис. 1.5), частица жидкости попадает в точку 2, когда вектор скорости здесь уже не \mathbf{u}_2 , а \mathbf{u}_2'' и т.д.

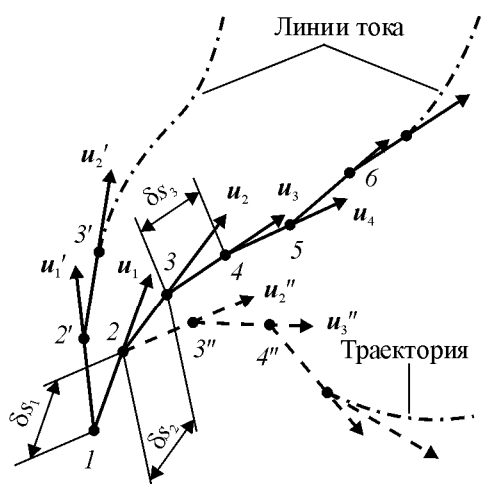


Рис. 1.5. Примеры линий тока и траектории движения жидкой частицы

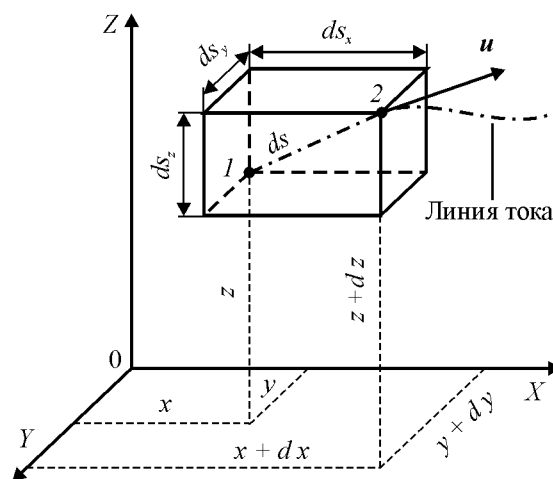


Рис. 1.6. К выводу уравнения линии тока

Пример. Наглядное представление о линии тока можно составить, наблюдая за развевающимся вымпелом или за легкой нитью, закрепленной одним концом в какой-либо точке потока. И тот, и другая стремятся занять в каждый момент такое положение, чтобы частицы жидкости обтекали их по касательным.

Свойства линии тока:

1. Две или несколько линий тока, проведенных в каком-либо потоке в один и тот же момент времени, не могут пересекаться. Иначе бы в точке пересечения одновременно существовало бы несколько направлений скорости.

2. При установившемся движении скорость в какой-либо точке постоянна во времени. Поэтому линия тока в этом случае не меняет своей формы и геометрически совпадает с траекторией движения частицы.

В теоретической гидродинамике большое значение имеет уравнение линии тока. Его легко получить, если учесть, что для двух бесконечно близких точек линии тока с координатами x, y, z и $x + dx, y + dy, z + dz$ (точки 1 и 2 на рис. 1.6) приращения координат будут в то же время соответствующими проекциями пути ds , пройденного вдоль линии тока со скоростью u за время dt , т. е.

$$\begin{aligned} dx &= ds_x = u_x dt; \\ dy &= ds_y = u_y dt; \\ dz &= ds_z = u_z dt. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что отношения

$$\begin{aligned} dx/u_x &= dt; \\ dy/u_y &= dt; \\ dz/u_z &= dt. \end{aligned}$$

должны быть одинаковыми, т. е.

$$dx/u_x = dy/u_y = dz/u_z, \quad (1.13)$$

или в развернутом виде

$$\frac{dx}{F_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{F_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{F_z(x, y, z, t)}. \quad (1.14)$$

Это и является *уравнением линии тока* в пространственной системе координат в дифференциальном виде. Проинтегрировав уравнения (1.14), возможно получить уравнение линии тока в конечном виде.

Отметим, что для установившегося движения уравнения линий тока являются одновременно уравнениями траекторий.

Метод Лагранжа и метод Эйлера математически связаны между собой, и возможен переход от уравнений (1.6) к уравнениям (1.8). В практическом применении метод Эйлера более прост; следуя этому методу, и производится дальнейшее изложение.

* * *

Таким образом, в §1:

- Даны определения идеальной, сжимаемой и несжимаемой жидкости, а также установившегося и неустановившегося движения.
- Рассмотрены основные свойства жидкости: плотность, динамическая и кинематическая вязкость, текучесть.
- Установлено, что в природе существуют два различных вида движения жидкости: ламинарное и турбулентное, причем вид движения можно определить с помощью числа Рейнольдса.
- Рассмотрены два метода математического описания движения жидкости – метод Лагранжа и метод Эйлера.
- Введено понятие линии тока, даны ее определения и основные свойства. Выведено уравнение линии тока.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Что понимают под гидрогазодинамикой? Сформулируйте гипотезу о непрерывности жидкой среды. Дайте понятие текучести жидкости.
2. Сформулируйте понятия идеальной, несжимаемой и сжимаемой жидкостей. Какие силы действуют на частицу жидкости?
3. Приведите выражения для плотности, удельного объема и объемного веса жидкости. Что представляет собой гидростатическое давление?
4. Сформулируйте закон внутреннего трения Ньютона. Дайте понятие вязкости жидкости. Какие виды вязкости вы знаете? Что такое аномальная жидкость?
5. Сформулируйте основные различия ламинарного и турбулентного течения. Изобразите эпюры скоростей при указанных видах течения жидкости в трубе. Приведите выражение для числа Рейнольдса. Что это число характеризует?
6. Когда используются понятия гидравлический радиус и эквивалентный диаметр?
7. Какие методы математического описания движения жидкости вы знаете? Дайте сравнение этих методов. Назовите виды движения жидкости.
8. Сформулируйте понятие линии тока. Приведите ее свойства и уравнение.

Задача 1. Для определения вязкости жидкости ($\rho = 900 \text{ кг/м}^3$) в нее брошена стальная дробинка диаметром 0,5 мм, которая под действием силы тяжести медленно опускается вниз с постоянной скоростью 0,5 см/с. Определить динамическую и кинематическую вязкость жидкости.

Ответ: 188 сПз, 209 сСт

Примечание: при решении задачи учесть, что на шар с диаметром d , медленно движущийся в вязкой несжимаемой жидкости со скоростью u , со стороны жидкости действует сила сопротивления Стокса $F = 3\pi\mu u d$.

Задача 2. Вода движется в трубе с диаметром 2,5 см со скоростью $u = 0,2 \text{ м/с}$. Определить число Рейнольдса и величину критической скорости, если температура воды равна 40°C.

Ответ: $Re = 7576$; $u_{кр} = 0,061 \text{ м/с}$

§2. ТРЕХМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

2.1 Вихревое и потенциальное движение жидкой частицы

Жидкость – легко деформируемая среда, поэтому частица жидкости вследствие неодинаковых скоростей в отдельных ее точках в общем случае может деформироваться и вращаться.

При неустановившемся пространственном движении жидкости вектор скорости в какой-либо точке потока, как было показано выше, является функцией времени и координат точки: $\mathbf{u} = f(x, y, z, t)$.

Функциями тех же независимых переменных будут и u_x , u_y , u_z – проекции вектора скорости на оси координат (уравнения (1.8)).

Выделим около точки $A(x, y, z)$, скорость в которой \mathbf{u} , частицу жидкости в виде бесконечно малого прямоугольного параллелепипеда с параллельными осям координат ребрами $ABCDNKLM$ (рис. 2.1). Проекции скорости в данный момент времени в вершинах параллелепипеда B , D и K имеют бесконечно малые приращения, определяемые соответствующими частными дифференциалами. В вершине M , лежащей на одной диагонали с точкой A , приращения проекций скорости определяются тремя частными дифференциалами:

$$\begin{aligned}u_{x_M} &= u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz; \\u_{y_M} &= u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz; \\u_{z_M} &= u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz.\end{aligned}$$

Вследствие этого при общем поступательном движении рассматриваемого жидкого элемента взаиморасположение его вершин в пространстве будет изменяться. Так, за счет частных приращений составляющих скорости по *одноименным* координатам

$$(\partial u_x / \partial x) dx; \quad (\partial u_y / \partial y) dy; \quad (\partial u_z / \partial z) dz$$

ребра параллелепипеда AK , AB , AD удлиняются или укорачиваются, т.е. происходит *линейная деформация* рассматриваемого жидкого элемента. За счет же остальных частных приращений, по *неодноименным* координатам, ребра должны наклониться. Например, за счет частного приращения $(\partial u_z / \partial y) dy$ точка B сместится в точку B' , а ребро AB повернется на некоторый угол $d\alpha$. При этом прямые углы $\angle BAD$, $\angle BAK$, $\angle KAD$ и т.д. исказятся, т.е. произойдет *угловая деформация*.

В общем случае угловая деформация может быть разной для разных

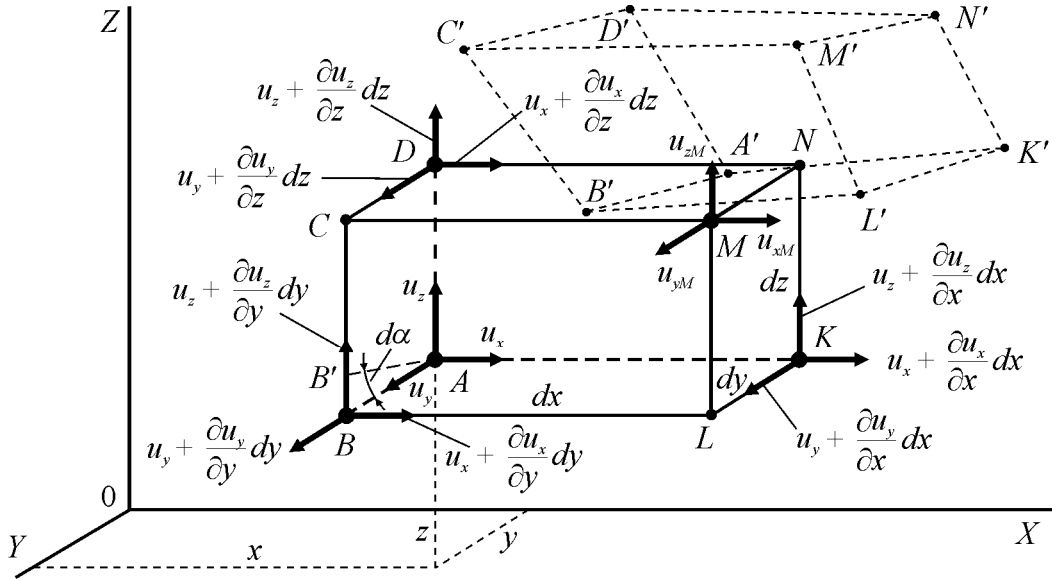


Рис. 2.1. Деформация и вращение элементарной жидкой частицы при общем ее поступательном движении: — начальное состояние; - - - конечное состояние

углов, значит, могут повернуться и биссектрисы углов $\angle BAD$, $\angle BAK$, $\angle KAD$ и т.д. и, следовательно, в этом случае частица жидкости в процессе перемещения будет еще и *вращаться*.

Исследуя чисто математически выражения для проекций вектор скорости в точке M (u_{xM} , u_{yM} , u_{zM}) и анализируя физический смысл полученных при этом сумм и разностей отдельных частных производных, можно доказать, что полный вектор скорости в точке A складывается из трех векторов: поступательного, деформационного и вращательного

$$\mathbf{u}_M = \mathbf{u}_{\text{пост}} + \mathbf{u}_{\text{деф}} + \mathbf{u}_{\text{вр}}. \quad (2.1)$$

Эта формулировка носит название *теоремы Гельмгольца – Коши*.

В результате деформаций и вращения прямоугольный параллелепипед $ABCDNKLM$ при перемещении его вершины из точки A в точку A' примет форму $A'B'C'D'N'K'L'M'$, как показано пунктиром на рис. 2.1.

При математическом анализе условий движения жидкости особый интерес представляет угловая скорость вращения жидкой частицы ω , являющаяся в общем случае произвольно направленным в пространстве вектором, величину которого можно выразить через его проекции:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \quad (2.2)$$

Выразим составляющие угловой скорости вращения жидкой частицы ω_x , ω_y , ω_z через частные производные *линейных* скоростей.

Для исследования составляющей ω_x проследим за перекосом ребер прямоугольного параллелепипеда $ABCDNKLM$ (см. рис. 2.1) в проекции на плоскость zOy , перпендикулярную оси Ox (рис. 2.2):

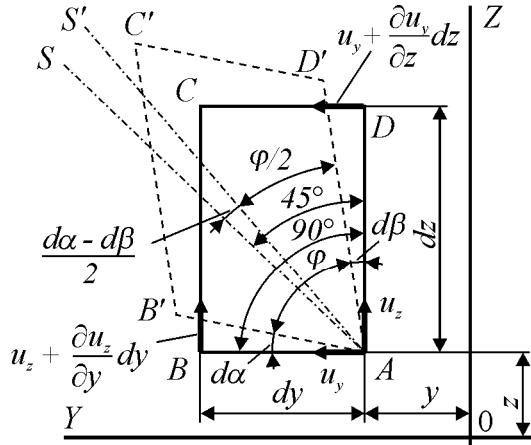


Рис. 2.2. К выводу выражения для угловой скорости вращения жидкой частицы

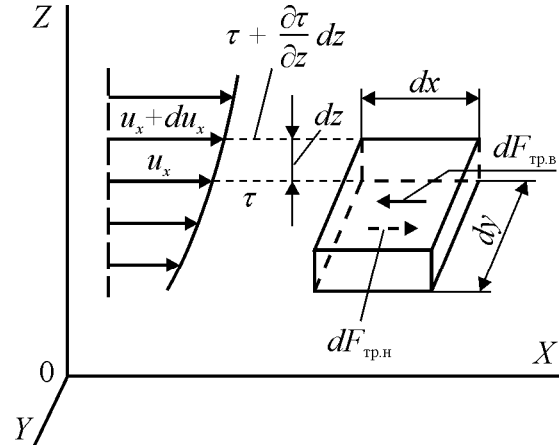


Рис. 2.3. Действие сил трения на элементарную жидкую частицу

1. За счет частного приращения линейной скорости $(\partial u_z / \partial y) dy$ ребро AB повернется по часовой стрелке на угол $d\alpha$ с угловой скоростью $d\alpha/dt$. Эту угловую скорость можно определить и как приращение составляющей скорости u_z на единице расстояния к ней по нормали, т.е.

$$d\alpha/dt = \partial u_z / \partial y.$$

2. За счет частного приращения $(\partial u_y / \partial z) dz$ ребро AD повернется против часовой стрелки на угол $d\beta$ с угловой скоростью

$$d\beta/dt = \partial u_y / \partial z.$$

Прямой угол $\angle BAD$ станет теперь острым углом $\varphi = 90^\circ - (d\alpha + d\beta)$.

Если бы углы $d\alpha$ и $d\beta$ были одинаковыми, то биссектриса угла BAD совпала бы с биссектрисой угла $\varphi = \angle B'AD'$, т.е. произошла бы только угловая деформация (без вращения) выбранного жидкого элемента.

Если же в общем случае $d\alpha \neq d\beta$, биссектриса AS' угла $B'AD'$ повернется относительно биссектрисы AS угла BAD по часовой стрелке на угол, равный $(d\alpha - d\beta)/2$. Угловая скорость поворота этой биссектрисы должна определять собой искомую составляющую ω_x :

$$\omega_x = (d\alpha - d\beta)/2/dt = (\partial u_z / \partial y - \partial u_y / \partial z)/2. \quad (2.2a)$$

Аналогично определяются две другие составляющие угловой скорости:

$$\omega_y = (\partial u_x / \partial z - \partial u_z / \partial x)/2; \quad (2.2б)$$

$$\omega_z = (\partial u_y / \partial x - \partial u_x / \partial y)/2. \quad (2.2в)$$

Движение жидкости, при котором любая ее частица не только деформируется, но и вращается, называется *вихревым*, а угловая скорость вращения жидкой частицы ω с проекциями ω_x , ω_y , ω_z – *вихрем*.

В частном случае, отдельные жидкие частицы при движении могут только деформироваться и не вращаться, тогда $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Из выражений (2.2a), (2.2б), (2.2в) очевидно, что это возможно при условиях:

$$\partial u_z / \partial y = \partial u_y / \partial z; \quad \partial u_x / \partial z = \partial u_z / \partial x; \quad \partial u_y / \partial x = \partial u_x / \partial y.$$

Из математики известно, что эти равенства свидетельствуют о наличии некоторой функции координат $\Phi(x, y, z)$, частные производные которой определяют соответственно величины u_x, u_y, u_z , т.е.

$$\partial \Phi / \partial x = u_x; \quad \partial \Phi / \partial y = u_y; \quad \partial \Phi / \partial z = u_z. \quad (2.3)$$

В самом деле, при этом

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z};$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x};$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

соответственно должны быть равны, так как результат не зависит от последовательности дифференцирования.

Таким образом, при безвихревом движении должна существовать функция координат, удовлетворяющая равенствам (2.3). В гидромеханике такая функция называется *потенциальной* или *потенциалом скорости*, а безвихревое движение поэтому называют *потенциальным*.

2.2. Дифференциальные уравнения движения идеальной и вязкой жидкости (уравнения Эйлера и Навье – Стокса)

Динамика движения идеальной жидкости описывается дифференциальными уравнениями Эйлера. Рассмотрим их вывод. Известно, что в условиях равновесия покоящейся жидкости справедливы уравнения Эйлера, первое из которых (для оси Ox) имеет вид:

$$X\rho - \partial p / \partial x = 0 \quad \text{или} \quad X - 1/\rho(\partial p / \partial x) = 0.$$

Его члены выражают собой ускорения действующих на жидкую частицу массовых сил (X , м/с^2) и сил давления ($1/\rho(\partial p / \partial x)$, м/с^2).

Чтобы записать условия равновесия *движущейся* частицы, к действующим силам следует приплюсовать силы инерции и силы сопротивления. При движении идеальной жидкости силы сопротивления отсутствуют, а силы инерции определяются линейным ускорением du/dt . Проекция на соответствующие координатные оси Ox, Oy, Oz этого ускорения $du_x/dt, du_y/dt, du_z/dt$ нужно ввести в уравнения Эйлера с обратным знаком (так как сила инерции направлена в сторону, обратную ускорению), чтобы применить эти уравнения к движущейся частице идеальной жидкости. Уравнение Эйлера в проекции на ось Ox для движущейся идеальной жидкости будет, таким образом, иметь вид

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{du_x}{dt} = 0.$$

Перенеся du_x/dt в правую часть равенства и, записав аналогично два других уравнения (в проекциях на оси Oy и Oz), получим окончательно

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{du_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{du_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Расписав левые части этих уравнений с помощью выражений (1.12), получим *уравнения Эйлера в развернутой форме*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.4a)$$

Динамика движения вязкой жидкости определяется уравнениями, в которые, помимо ускорений, учитываемых при движении идеальной жидкости, должны войти еще и ускорения сил трения. Посмотрим сначала, как их учитывают при плоскопараллельном движении жидкости вдоль оси Ox с градиентом скорости только в направлении оси Oz .

Представим себе, что в движущейся в этих условиях жидкости выделен бесконечно малый прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям (рис. 2.3).

При положительном градиенте скорости вдоль оси Oz верхние слои выделенного жидкого элемента движутся быстрее, вследствие чего на них будут действовать силы трения, стремящиеся их задержать, т. е. действующие в отрицательном направлении. Силы трения в нижних слоях элемента, наоборот, действуют в положительном направлении.

Полная сила трения на нижней площадке элемента находится как

$$|dF_{\text{тр.н}}| = \tau \, dx dy,$$

а на верхней, где τ получает приращение $(\partial\tau/\partial z) \, dz$, она равна

$$|dF_{\text{тр.в}}| = \left(\tau + \frac{\partial\tau}{\partial z} dz \right) dx dy.$$

Сила трения, действующая на жидкий элемент в направлении оси Ox , будет, очевидно, определяться разностью сил, действующих на нижней и верхней площадках элемента:

$$dF_x = dF_{\text{тр.н}} - dF_{\text{тр.в}} = -(\partial\tau_x/\partial z)dxdydz.$$

Согласно закону Ньютона $\tau_x = -\mu(du_x/dz)$, тогда $\partial\tau_x/\partial z = -\mu(\partial^2u_x/\partial z^2)$. Следовательно

$$dF_x = \mu(\partial^2u_x/\partial z^2)dxdydz.$$

Соответствующее ускорение, т.е. силу, приходящуюся на единицу массы ($dm = \rho dxdydz$) элемента можно выразить как

$$\frac{dF_x}{dm} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2u_x}{\partial z^2} = \nu \frac{\partial^2u_x}{\partial z^2}.$$

В трехмерном потоке, когда градиенты скорости могут существовать в направлении всех трех координатных осей ($\partial u/\partial x \neq 0$, $\partial u/\partial y \neq 0$, $\partial u/\partial z \neq 0$), соответствующее ускорение сил трения в проекции на ось Ox должно быть выражено следующим образом:

$$\frac{dF_x}{dm} = \nu \left(\frac{\partial^2u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2u_x}{\partial z^2} \right). \quad (2.5)$$

Эту проекцию ускорения сил трения и следует ввести в правую часть дифференциального уравнения движения вязкой жидкости для оси Ox помимо ускорений, действующих на частицу идеальной жидкости.

Уравнения, аналогичные (2.5), можно написать также и для других координатных осей. В результате получим *систему дифференциальных уравнений трехмерного движения вязкой жидкости*, или *уравнений Навье – Стокса*, имеющую следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2u_x}{\partial z^2} \right); \\ \frac{du_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2u_y}{\partial z^2} \right); \\ \frac{du_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2u_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Практическое использование уравнений движения вязкой жидкости, из-за сложности их интегрирования, весьма ограничено. Однако эти уравнения важны для обоснования ряда принципиальных выводов, например, основных выводов теории подобия в применении к движущейся жидкости, имеющих существенное практическое значение.

2.3. Уравнение неразрывности трехмерного потока

Для решения задач гидродинамики нужно уметь определять в любой точке потока направление и величину скорости движения жидкости или ее проекции (u_x, u_y, u_z) и давление p . Неизвестных, таким образом, получается четыре, и трех уравнений движения (Эйлера для идеальной жидкости или Навье – Стокса – для вязкой) недостаточно для решения этой задачи. Необходимое четвертое уравнение может быть выведено исходя из условия неразрывности потока.

Но прежде чем приступить к выводу данного уравнения, рассмотрим вспомогательный вопрос о вычислении расхода жидкости через произвольное бесконечно малое сечение потока.

Расходом называется количество жидкости, протекающее за единицу времени через рассматриваемое сечение потока. Он может измеряться в единицах массы – массовый расход (M , кг/с), веса – весовой расход (G , Н/с) или в единицах объема – объемный расход (Q , м³/с).

Пусть в некоторой точке A произвольного сечения потока жидкости, ограниченного поверхностью MN , вектор скорости имеет в данный момент времени величину u , а его направление определяет угол α к нормали, проведенной через рассматриваемую точку сечения (рис. 2.4). Если возле этой точки на поверхности сечения выделить элементарную площадку dS , то проходящие через нее в единицу времени частицы составят объем наклонного цилиндра, основанием которого является эта площадка, а длиной – вектор скорости (путь, пройденный каждой частицей в единицу времени).

Так как $dS_n = dS \cos \alpha$ – нормальное сечение цилиндра, то объем его можно выразить следующим образом:

$$dQ = u dS \cos \alpha, \text{ м}^3/\text{с}.$$

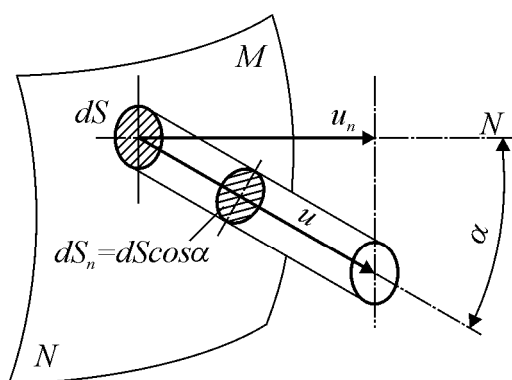


Рис. 2.4. К выводу выражений для расхода жидкости

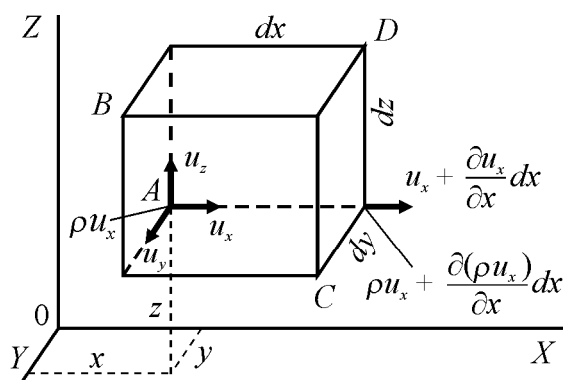


Рис. 2.5. К выводу уравнения неразрывности трехмерного потока

Но $u \cos \alpha = u_n$ – нормальная к плоскости сечения составляющая произвольно направленной скорости u в данной точке. Поэтому

$$dQ = u_n dS.$$

Масса жидкости, имеющей плотность ρ и проходящей через площадку dS в единицу времени, должна быть выражена как

$$dM = \rho u_n dS.$$

Эти выражения определяют расход жидкости (объемный dQ и массовый dM) через произвольное бесконечно малое сечение потока.

Чтобы установить зависимость, выражающую условие неразрывности в общем виде, выделим возле рассматриваемой точки $A(x, y, z)$ бесконечно малый прямоугольный параллелепипед $ABCD$, ребра которого параллельны координатным осям (рис. 2.5). Скорость в этой точке u , ее составляющие по осям – u_x, u_y, u_z . Через грань AB , площадь которой $dS_x = dydz$, в объем параллелепипеда за счет движения вдоль оси Ox за время dt втекает масса жидкости $dm = dMdt = \rho u_x dydzdt$. На расстоянии dx от точки A составляющая скорости u_x изменяется на $(\partial u_x / \partial x) dx$. В других вершинах рассматриваемого параллелепипеда составляющие скорости имеют соответствующие приращения.

Плотность жидкости в общем случае также переменная величина и на том же расстоянии dx может иметь приращение $(\partial \rho / \partial x) dx$. Изменение произведения ρu_x на длине dx следует, поэтому выразить как

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx.$$

В соответствии с этим масса жидкости, вытекающей за тот же отрезок времени dt через противоположную грань CD параллелепипеда за счет движения вдоль оси Ox , определяется выражением

$$\left(\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx \right) dydzdt.$$

Изменение массы жидкости в объеме параллелепипеда за счет движения вдоль оси Ox будет

$$\Delta m_x = - \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx dydzdt.$$

Так же выражаем изменение массы в объеме параллелепипеда за счет движения вдоль двух других координатных осей

$$\Delta m_y = - \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} dx dydzdt;$$

$$\Delta m_z = - \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} dx dydzdt.$$

Получаем общее *изменение массы жидкости* в объеме параллелепипеда за время dt за счет движения частиц жидкости со скоростью u :

$$\Delta m_u = \Delta m_x + \Delta m_y + \Delta m_z = - \left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt.$$

За тот же отрезок времени плотность жидкости в объеме параллелепипеда могла измениться на величину $-(\partial\rho/\partial t)dt$. Поэтому масса жидкости в объеме параллелепипеда $ABCD$ по истечении времени dt будет составлять величину

$$\left(\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t} dt \right) dx dy dz,$$

а *изменение массы жидкости* в этом объеме за данный отрезок времени вследствие изменения плотности будет

$$\Delta m_\rho = (\partial\rho/\partial t) dx dy dz dt.$$

Если поток неразрывен, то изменение массы в рассматриваемом объеме вследствие движения жидкости должно компенсироваться соответствующим изменением плотности, т. е. выполняться условие

$$\Delta m_u = \Delta m_\rho.$$

После подстановки и сокращения на $dx dy dz dt$ получим общее *выражение условия неразрывности для трехмерного потока* в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0. \quad (2.7)$$

В такой форме уравнение неразрывности справедливо как для несжимаемой, так и для сжимаемой жидкости (газа).

Для *несжимаемой жидкости*

$$\rho = const; \partial\rho/\partial t = 0$$

и уравнение неразрывности упрощается

$$\partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y + \partial u_z / \partial z = 0. \quad (2.7a)$$

* * *

Таким образом, в §2:

- Даны определения вихря, потенциала скорости, расхода жидкости.
- Приведена формулировка теоремы Гельмгольца – Коши
- Выведены уравнения для составляющих угловой скорости вращения жидкой частицы.
- Получено выражение, определяющее условие существования потенциального движения жидкости.
- Выведены дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (Эйлера) и вязкой (Навье–Стокса), а также уравнение неразрывности трехмерного потока.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Сформулируйте теорему Геймгольца–Коши.
2. Приведите выражения для составляющих угловой скорости вращения жидкой частицы. Сформулируйте понятия вихревого и потенциального движения жидкой частицы. Напишите выражение для потенциала скорости.
3. Приведите системы дифференциальных уравнений движения идеальной и вязкой жидкостей. Раскройте физический смысл членов этих уравнений.
4. Сформулируйте понятие расхода жидкости. Напишите выражения для объемного и массового расхода жидкости.
5. Приведите выражение условия неразрывности трехмерного потока сжимаемой жидкости. Какой вид оно приобретает в случае, если жидкость несжимаема?

Задача. Получить выражение для скорости слоистого плоскопараллельного стационарного течения жидкости в канале, ограниченном двумя параллельными плоскими стенками, если расстояние от оси канала до стенок равно b .

$$\text{Ответ: } u_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} b^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Решение. Отличительным признаком слоистого течения является отсутствие в уравнении Навье–Стокса инерционных членов, т.е. наличие только одной составляющей скорости. Если этой составляющей является скорость u_x (т.е. движение идет в направлении оси x), а составляющие u_y и u_z равны нулю, то из уравнения неразрывности следует, что $\partial u_x / \partial x = 0$ и, следовательно, u_x от координаты x не зависит. Таким образом, для слоистого течения имеем $u_x = u_x(y, z)$; $u_y = 0$; $u_z = 0$; $\partial p / \partial y = 0$, $\partial p / \partial z = 0$, и вместо полной системы (2.6) получим для стационарного течения линейное дифференциальное уравнение относительно скорости $u_x(y, z)$

$$dp/dx = \mu(\partial^2 u_x / \partial y^2 + \partial^2 u_x / \partial z^2). \quad (\text{a})$$

Заметим, что, поскольку в этом соотношении слева стоит функция координат x , а справа – функция координат y и z , то $dp/dx = \text{const}$.

Плоскопараллельное течение в канале, ограниченном двумя параллельными плоскими стенками скорость u_x , к тому же не зависит от координаты z и уравнение (a) принимает вид $dp/dx = \mu d^2 u_x / dy^2$. Его интегрирование дает

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2,$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, для определения которых имеются два условия: а) при $y = +b$ $u = 0$; б) при $y = -b$ $u = 0$.

В результате $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} b^2$ и искомое выражение для скорости примет вид

$$u_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} b^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

§3. ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

3.1. Элементарная струйка потока. Уравнение неразрывности для элементарной струйки при установившемся движении

Решение основных вопросов гидрогазодинамики упрощается, если рассматривать одномерное движение жидкости. Для исследования потока жидкости конечных размеров с позиций одномерного движения в *прикладной гидравлике* пользуются гипотезой о струйной модели движения жидкости. Считается, что поток состоит из бесконечно большого числа отдельных элементарных струек, поперечные сечения которых бесконечно малы. Поэтому все параметры движения в пределах какого-либо сечения элементарной струйки dS можно принять неизменными. Рассмотрим ее свойства.

Если в потоке жидкости выделить произвольный, бесконечно малый контур $d\sigma$ и через все его точки провести линии тока (рис. 3.1), они образуют собой трубчатую поверхность, называемую *трубкой тока*. Совокупность линий тока, проведенных через все точки сечения dS , ограниченного элементарным контуром $d\sigma$, или часть потока, ограниченная трубкой тока, называется *элементарной стружкой*. Под сечением элементарной струйки понимают при этом ограниченную ею часть поверхности, нормальную к направлению скорости.

Так как сечения элементарной струйки бесконечно малы, скорость во всех точках каждого из них считается одинаковой по величине и направлению, а сами сечения – плоскими. На протяжении элементарной струйки площади ее сечений могут изменяться ($dS_1 \neq dS_2 \neq dS_3$), так как форма линий тока, их ограничивающих, может быть произвольной. В каждом из таких сечений имеется своя скорость $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ и т. д.

Элементарная струйка обладает следующими свойствами:

- 1) При установившемся движении она не меняет своей формы.
- 2) Ни одна частица жидкости не может проникать через ее боковую поверхность, что вытекает из определения линии тока. В любой точке (например, в точке A на рис. 3.1) боковой поверхности струйки, скорость может быть направлена только по касательной к этой поверхности, нормальных к поверхности составляющих скорости не существует.

Элементарная струйка является, таким образом, вполне самостоятельным элементом потока, а ее боковая поверхность – непроницаемой.

Величины x, y, z, u, p, ρ , входящие в основные уравнения гидрогазодинамики, считаются, с точностью до бесконечно малой величины, одинаковыми во всех точках любого из сечений элементарной струйки.

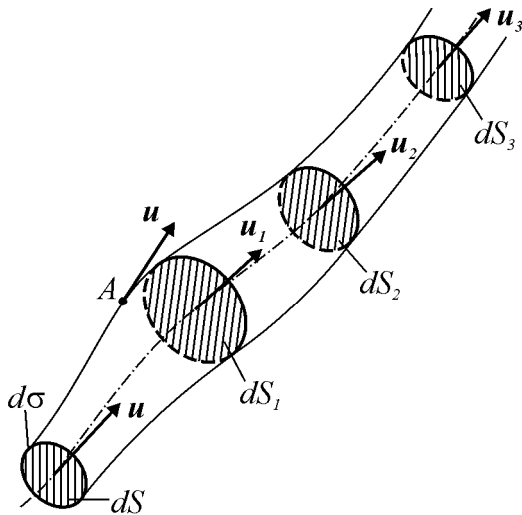


Рис. 3.1. Элементарная струйка

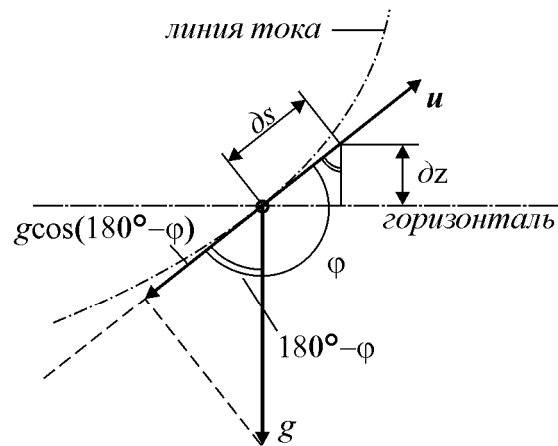


Рис. 3.2. К выводу уравнения движения идеальной жидкости под действием сил тяжести вдоль линии тока

Поэтому, рассматривая движение частицы жидкости вдоль какой-либо линии тока данной элементарной струйки, все законы ее движения можно распространять и на всю элементарную струйку.

Движение потока в целом можно рассматривать как совокупность движений отдельных струек. Но в сечении потока конечных размеров интересующие нас величины могут заметно изменяться при переходе из одной точки в другую, от одной элементарной струйки к другой. Элементарные струйки при этом как бы скользят друг по другу.

При одномерном установившемся движении частицы жидкости вдоль линии тока, ее положение, а, следовательно, скорость и давление в какой-либо точке пространства вполне определяются путем s , пройденным от некоторого начального положения, т. е.

$$u = f(s); \quad p = f(s).$$

При этом, как отмечалось выше, направление скорости в каждой точке определяется касательной к линии тока, и нас интересует, по сути дела, только ее величина (модуль вектора). Нет поэтому необходимости учитывать здесь отдельные составляющие вектора скорости по координатным осям.

Выведем уравнение неразрывности или расхода для элементарной струйки при установившемся движении.

Для этого рассмотрим отсек элементарной струйки между двумя произвольными сечениями dS_1 и dS_2 , скорости в которых соответственно u_1 и u_2 , а плотность жидкости ρ_1 и ρ_2 (рис. 3.1).

За время dt в рассматриваемый отсек струйки через сечение dS_1 втекает масса жидкости dm_1

$$dm_1 = \rho_1 u_1 dS_1 dt,$$

а через сечение dS_2 за то же время вытекает масса жидкости dm_2

$$dm_2 = \rho_2 u_2 dS_2 dt.$$

Так как при установившемся движении форма и объем рассматриваемого отсека не изменяются, плотность жидкости в каждой точке сечения, а, следовательно, и средняя плотность по всему отсеку также не изменяются. Притока и оттока жидкости через боковую поверхность струйки не существует. Поэтому из условия неразрывности следует, что масса втекающей жидкости dm_1 и вытекающая – dm_2 равны, т. е.

$$\rho_1 u_1 dS_1 dt = \rho_2 u_2 dS_2 dt.$$

Сокращая на dt и учитывая произвольность выбора сечения, получим

$$\rho_1 u_1 dS_1 = \rho_2 u_2 dS_2 = \rho u dS = dM = \text{const}, \quad (3.1)$$

т.е. *массовый расход жидкости при установившемся движении одинаков во всех сечениях элементарной струйки.*

Уравнение неразрывности (3.1), записанное в единицах массового расхода, пригодно как для несжимаемой жидкости, так и для газа.

Для газового потока удобнее записать уравнение неразрывности в весовых единицах. Такое уравнение получается, если умножить уравнение (3.1) на $g = \text{const}$. Так как $\rho g = \gamma$, то

$$\gamma_1 u_1 dS_1 = \gamma_2 u_2 dS_2 = \dots = \gamma u dS = dG = \text{const}. \quad (3.1 \text{ а})$$

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$; поэтому, учитывая, что $u dS = dQ$ – объемный расход, получим следующие уравнение неразрывности в объемных единицах для несжимаемой жидкости:

$$u_1 dS_1 = u_2 dS_2 = u dS = dQ = \text{const}. \quad (3.1 \text{ б})$$

Из этого уравнения следует, что $u_2/u_1 = dS_1/dS_2$, т.е. *площадь сечения струйки для несжимаемой жидкости обратно-пропорциональна скорости.*

3.2. Неустановившееся движение идеальной жидкости под действием сил тяжести вдоль линии тока

Если бесконечно малый отрезок пути, проходимого частицей за бесконечно малый отрезок времени вдоль линии тока, обозначить ds , а проекцию ускорения массовых сил, действующих на движущуюся жидкую частицу, на направление касательной к линии тока в рассматриваемой точке – X_s , то уравнение Эйлера запишется в виде:

$$\frac{du}{dt} = X_s - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial s}. \quad (3.2)$$

Математические трудности не позволяют проинтегрировать это дифференциальное уравнение в общей форме и найти тем самым функциональные зависимости:

$$u = f(t, s) \text{ и } p = \varphi(t, s),$$

т. е. решить основную задачу гидрогазодинамики для одномерного движения под действием массовых сил любой природы.

В случае, когда движение жидкости происходит под действием только сил тяжести, направленных всегда вертикально вниз, такая задача решается просто. Проекцию ускорения массовых сил g на направление движения в этом случае (рис. 3.2) можно выразить как

$$X_s = g \cos \varphi = -g \cos(180^\circ - \varphi) = -g \frac{\partial z}{\partial s}. \quad (3.3)$$

где ∂s и ∂z – частные приращения пути s и высоты z при неустановившемся движении по линии тока.

Полная производная du/dt в уравнение (3.2), с учетом того, что полный дифференциал u равен $du = (\partial u/\partial t)dt + (\partial u/\partial s)ds$, имеет вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right). \quad (3.4)$$

Подставляя выражения для X_s и du/dt из уравнений (3.3) и (3.4) в уравнение (3.2), получим

$$g \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (3.5)$$

Дифференциальное уравнение (3.5) является уравнением неустановившегося движения жидкости как несжимаемой, так и газообразной.

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$. Поэтому второй член уравнения можно представить как

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\rho} \right).$$

Интересующее нас уравнение неустановившегося движения для несжимаемой жидкости можно теперь записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (3.5 \text{ а})$$

Величины, входящие в трехчлен в квадратных скобках (называемый обычно трехчленом Бернулли) в системе СИ имеют размерность Дж/кг и несут в себе следующий энергетический смысл:

gz – потенциальная энергия единицы массы (удельная) частицы жидкости, находящейся на высоте z от плоскости сравнения;

p/ρ – удельная потенциальная энергия давлением на жидкую частицу;

$u^2/2$ – удельная кинетическая энергия частицы жидкости.

Проинтегрировав выражение (3.5 а) получим:

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \int \frac{\partial u}{\partial t} ds = f(t), \quad (3.5 \text{ б})$$

Величина $\int \frac{\partial u}{\partial t} ds$, в случае, если бы движение шло по линии тока (что возможно лишь при установившемся движении), *определяла бы удельную работу сил инерции на пути s* . Так как при неустановившемся движении частицы жидкости движутся по траектории, которая не совпадает с линией тока, то, строго говоря, так определять величину данного слагаемого нельзя, но приведенное разъяснение помогает понять ее физический смысл.

Чтобы проинтегрировать выражение $\int \frac{\partial u}{\partial t} ds$, надо знать $\frac{\partial u}{\partial t} = f(s)$.

Практически это редко известно. Поэтому в прикладной гидравлике рассматривают обычно установившееся движение, так как описывающие его уравнения имеют удобную для интегрирования форму.

3.3. Установившееся движение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли

При установившемся движении скорость и давление от времени не зависят и являются в случае одномерного движения функциями только одной переменной – пути s :

$$u = f(s); p = \varphi(s).$$

Поэтому дифференциальное уравнение (3.5) при установившемся движении идеальной жидкости для частицы, движущейся под действием сил тяжести вдоль линии тока, в общем виде может быть записано так:

$$g \frac{dz}{ds} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad (3.6)$$

Интегрирование этого уравнения удобнее рассмотреть для несжимаемой жидкости и для газа (см. п. 4.2) отдельно.

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$. Второй член уравнения (3.6) в этом случае можно представить как

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{p}{\rho} \right).$$

С учетом этого и после деления на g уравнение (3.6) принимает вид

$$\frac{d}{ds} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = 0$$

и, следовательно, легко интегрируется:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{const.} \quad (3.7)$$

Это уравнение называется *уравнением Бернулли*. Оно служит основой для практического решения подавляющего большинства задач прикладной гидравлики.

Так как в пределах любого из сечений элементарной струйки величины z , p и u с точностью до бесконечно малых могут считаться одинаковыми, уравнение Бернулли (3.7) может быть применено не только к частице жидкости, движущейся вдоль линии тока, но и для всей элементарной струйки в целом.

Члены уравнения (3.7) имеют линейную размерность (м), поэтому можно выявить их *геометрический смысл*.

Отнесем струйку к системе координат XYZ (рис.3.3 а), и напишем уравнение Бернулли для двух произвольных сечений струйки

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}. \quad (3.8)$$

Здесь z – геометрическая высота центра тяжести сечения над плоскостью XOY ;

p/γ – пьезометрическая высота (высота столба жидкости, создающая своим весом давление p);

$u^2/(2g)$ – скоростная высота или *скоростной напор*.

Сумма всех этих величин, обозначаемая через H , называется *полным напором* в данном сечении струйки.

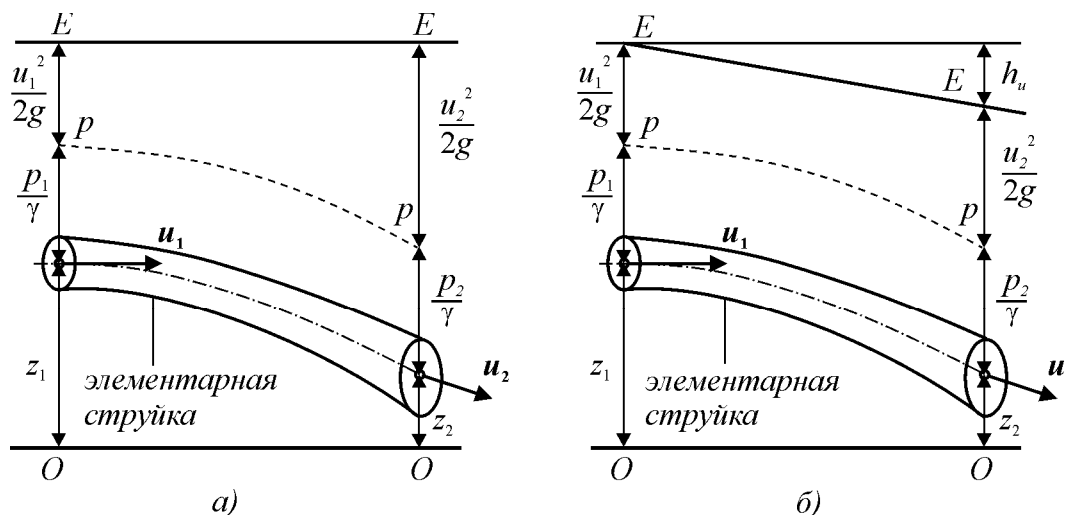


Рис. 3.3. Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли:
а – для идеальной жидкости; б – для реальной жидкости

Для поперечного сечения элементарной струйки величину H можно представить совокупность отрезков (z) , (p/γ) и $[u^2/(2g)]$, как на рис.3.3 а.

Соединив между собой концы отрезков H , получим кривую $E-E$, расположенную в горизонтальной плоскости; эта кривая называется *линией полного напора* или гидравлической линией.

Соединив кривой концы отрезков p/γ , получим линию $p-p$, которую называют *пьезометрической линией*.

Вернувшись к энергетической интерпретации (умножив уравнение (3.7) на g) легко увидеть, что уравнение Бернулли представляет собой закон сохранения полной удельной механической энергии при установившемся движении несжимаемой идеальной жидкости под действием сил тяжести, так как согласно нему сумма потенциальной энергии (положения и давления) и кинетической есть величина постоянная. Поэтому *уравнение Бернулли называют еще уравнением энергии*.

3.4. Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости

Применяя, уравнение Бернулли к струйке реальной жидкости, необходимо учесть, что полная механическая энергия, не остается постоянной вдоль струйки. Эту потерю механической энергии на участке струйки между двумя сечениями учитывают введением в правую часть уравнения Бернулли (3.8) слагаемого h_u – *потери напора* (потери удельной механической энергии).

Гидравлическая линия $E-E$ (рис. 3.3 б) в этом случае не горизонтальна и снижается вниз по течению; чем больше наклон, этой линии, тем интенсивнее расходуется энергия по пути.

Безразмерную величину I , определяющую уменьшение напора на единицу длины трубопровода, называют *гидравлическим уклоном*, т. е.

$$I = dh_u / dl, \quad (3.9)$$

где dl – длине рассматриваемого участка струйки; dh_u – потери напора на длине этого участка.

Переходя к потоку жидкости конечных размеров (такому, как в трубе или канале), естественно для расчета скоростного напора используют *среднюю скорость* u_{cp} . Для определения средней скорости по скоростям отдельных струек используется формула:

$$u_{cp} = \frac{Q}{S} = \frac{\int u dS}{S}.$$

Следовательно, объемный расход потока жидкости $Q = u_{cp} \cdot S$. В связи с этим, условие неразрывности для несжимаемой жидкости примет вид:

$$Q = u_{\text{cp}} S = \text{const},$$

а для сжимаемой жидкости:

$$M = \rho u_{\text{cp}} S = \text{const} \text{ или } G = \gamma u_{\text{cp}} S = \text{const}.$$

Однако, если скорости струек в сечении неодинаковы (например, замедляются у стенок трубы вследствие трения), то расчет кинетической энергии по средней скорости u_{cp} приведет к заниженным результатам по сравнению с расчетом суммарной кинетической энергии отдельных струек. Это происходит потому, что скорость входит в член уравнения, учитывающий кинетическую энергию, в степени выше первой. Такое затруднение преодолевают введением в кинетическую энергию, вычисленную по средней скорости, *поправочного коэффициента (коэффициента Кориолиса)* $\alpha > 1$. Очевидно, что α численно равен отношению суммарной кинетической энергии струек к энергии, вычисленной по средней скорости потока. В итоге уравнение Бернулли для вязкой жидкости приобретает вид:

$$\frac{\alpha u_{\text{cp}1}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha u_{\text{cp}2}^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_u. \quad (3.10)$$

В дальнейшем, в уравнениях для реальной жидкости, среднюю скорость будем обозначать через u без индекса.

Величина коэффициента α возрастает с ростом поперечной неравномерности скоростей в сечении трубы. Для *ламинарного течения* в круглой трубе $\alpha = 2$. Для *турбулентного течения*, в котором скорости мало меняются по сечению трубы, по опытным данным, $\alpha = 1,05 - 1,1$.

Рассмотрим вопрос о выборе сечений потока, к которым можно применять уравнение Бернулли. Очевидно, что эти сечения нельзя выбирать в местах резкого поворота потока, так как из-за действия центробежной силы инерции в таком сечении давления распределены неравномерно. Нельзя применять уравнение Бернулли и к сечениям, в которых резко возрастает поперечная неравномерность скоростей, например в зонах расширения потока после диафрагмы, где появляются противотоки и вихревые области. В таких сечениях невозможно достаточно точно определить коэффициент неравномерности скоростей α . Расчету таких сечений посвящен §7.

* * *

Таким образом, в §3:

- Рассмотрены основные понятия, позволяющие описать поток жидкости с позиции прикладной гидравлики: трубка тока, элементарная струйка потока, даны их определения и основные свойства.

- Получены различные формы уравнения неразрывности (расхода) для элементарной струйки при установившемся движении.
- Выведены уравнения Бернулли, описывающие одномерное движение идеальной и реальной жидкостей. Раскрыт энергетический и геометрический смысл величин, входящих в данные уравнения.
- Отмечено, что уравнения, используемые для описания движения газа, имеют свои особенности и будут описаны ниже.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Сформулируйте гипотезу о струйной модели движения жидкости, используемую в прикладной гидравлике. Приведите понятие и свойства элементарной струйки.
2. Какие виды расходов Вы знаете? Напишите уравнение неразрывности для элементарной струйки при установившемся движении в различных формах.
3. Приведите уравнение для неустановившегося движения идеальной сжимаемой жидкости под действием сил тяжести вдоль линии тока. Какой вид оно приобретает в случае, если жидкость несжимаема? Раскройте энергетический смысл величин, входящих в трехчлен Бернулли.
4. Напишите уравнение для установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости (уравнение Бернулли). Раскройте геометрический смысл величин, входящих в это уравнение.
5. Что такое потери напора? Сформулируйте понятие гидравлического уклона.
6. Что понимают под средней скоростью движения жидкости? Раскройте физический смысл коэффициента Кориолиса. Приведите его значения для ламинарного и турбулентного течения жидкости. Напишите уравнение Бернулли для потока реальной жидкости.

Задача 1. Средняя по сечению скорость u течения вязкой жидкости ($\rho = 900 \text{ кг/м}^3$) в трубопроводе с внешним диаметром $D = 1020 \text{ мм}$ и толщиной стенки $\delta = 10 \text{ мм}$, равна $1,0 \text{ м/с}$. Определить массовый расход трубопровода за год.

Ответ: 21,365млн. т/год

Примечание: Число рабочих дней принять равным 350.

Задача 2. Трубопровод состоит из двух последовательно соединенных участков: первого – с внешним диаметром $D_1 = 530 \text{ мм}$ и толщиной стенки $\delta = 8 \text{ мм}$, и второго с диаметром $D_2 = 377 \text{ мм}$ и толщиной стенки $\delta = 6 \text{ мм}$. Скорость стационарного течения несжимаемой жидкости в первом участке составляет $1,2 \text{ м/с}$. Какова скорость течения жидкости во втором?

Ответ: 2,38 м/с

Примечание: Потерями на стыке участков пренебречь.

§4. ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАЗА

4.1. Основные соотношения термодинамики. Скорость звука. Число Маха

Как известно из курса термодинамики, основные параметры состояния газа – давления p , плотность ρ и абсолютная температура T , связаны для идеальных газов *уравнением состояния*

$$pV = R_0 T m / \mu, \quad (4.1)$$

где V – объем газа; m – его масса; μ – молярная масса газа, (кг/моль); R_0 – универсальная газовая постоянная ($R_0 = 8,314$ Дж/(моль·К)).

Если учесть, что $V/m = v = 1/\rho$ (см. §1), а $R_0/\mu = R$ – газовая постоянная данного газа (Дж/(кг·К)), то уравнение состояния запишется в виде:

$$p v = RT \quad \text{или} \quad p = \rho RT. \quad (4.2)$$

В термодинамике обычно рассматривают следующие характерные процессы изменения состояния газа: *изобарный*, $p = \text{const}$; *изохорный*, $V = \text{const}$; *изотермический*, $pV = \text{const}$ или $p/\rho = \text{const}$; *адиабатический*, $pV^k = \text{const}$ ($k = c_p/c_V$ – показатель адиабаты, определяемый отношением теплоемкостей при постоянном давлении (c_p) и объеме (c_V); для воздуха и двухатомных газов $k = 1,4$, для перегретого водяного пара $k = 1,33$, для идеального газа $c_p - c_V = R$); *политропический*, $pV^n = \text{const}$ (n – некоторая постоянная величина).

При решении большинства задач газодинамики, процессы изменения состояния газа можно считать изотермическими, адиабатическими, или, в общем случае, – политропическими. Так, например, движение газа в длинной трубе без теплоизоляции стенок можно рассматривать как изотермическое (длительный контакт со стенками трубы приводит к тому, что температура газа не отличается от температуры стенки); истечение газа из отверстия в резервуаре можно (без существенной погрешности) считать происходящим без теплообмена между выходящим газом и внешней средой, т.е. адиабатическим.

При адиабатическом процессе давление и плотность связаны соотношением:

$$p/\rho^k = \text{const} \quad \text{или} \quad p/p_0 = (\rho/\rho_0)^k, \quad (4.3)$$

а, используя уравнение состояния (4.2), можно получить для данного процесса следующие соотношения:

$$T/T_0 = (\rho/\rho_0)^{k-1} = (p/p_0)^{\frac{k-1}{k}}. \quad (4.4)$$

Для политропического процесса k в выражениях (4.4) заменяется n .

Газовая динамика изучает течения газа с большими скоростями, сравнимыми со скоростью звука (a), изменение скорости при которых

приводит к изменению плотности. Процесс измерения параметров газа в звуковой волне, которая представляет собой распространяющиеся в газе слабые возмущения давления и плотности, считается адиабатическим.

Для определения скорости звука используют следующую формулу:

$$a = \sqrt{dp/d\rho}. \quad (4.5)$$

Из уравнения (4.3), обозначив константу как C , имеем:

$$p = C\rho^k; \quad dp = k \cdot C\rho^{k-1} d\rho; \quad dp/d\rho = k \cdot C\rho^{k-1} = k p/\rho. \quad (4.6)$$

Подставляя последнее равенство в формулу (4.4), получаем

$$a = \sqrt{k p/\rho}. \quad (4.7)$$

Используя уравнение (4.2), введем в формулу для a температуру T :

$$a = \sqrt{kRT}. \quad (4.7a)$$

В частности, для воздуха, подставляя величины k и R , имеем

$$a = 20,1 \cdot T^{1/2}.$$

При температуре 15°C последняя формула дает $a = 340$ м/с.

Скорость звука – одна из важнейших механических характеристик газа. Законы движения газа резко отличаются в зависимости от соотношения его скорости u и скорости звука a . Отношение

$$M = u/a \quad (4.8)$$

называют *числом Маха*. Течения, в которых $u < a$ и $M < 1$, называются *дозвуковыми*. Если $u > a$ и $M > 1$, течение – *сверхзвуковое*.

4.2. Уравнение Бернулли (энергии) для газа

Уравнение (3.6) после сокращения на ds имеет вид

$$gdz + dp/\rho + d(u^2/2) = 0. \quad (4.9)$$

Так как для сжимаемой жидкости $\rho \neq \text{const}$, то во втором члене этого уравнения появляется вторая переменная. Интегрируя уравнение (4.9) вдоль элементарной струйки от сечения 1 до сечения 2 (т.е. в пределах от z_1, p_1, u_1 , и ρ_1 до z_2, p_2, u_2 , и ρ_2), получим

$$(z_2 - z_1)g + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = 0, \quad (4.10)$$

что является *уравнением Бернулли для газа в механической форме*.

Величину интеграла, стоящего в левой части этого уравнения, можно найти, если плотность является функцией от давления. Вид этой функции зависит от термодинамического процесса, происходящего в том или другом случае движения газа.

Рассмотрим установившееся одномерное движение газа под действием силы тяжести.

Из-за малой плотности газа можно пренебречь в уравнении (4.10) членом $(z_2 - z_1)g$, так как для газа сила веса пренебрежимо мала по сравнению с силами инерции и давления. Тогда получаем уравнение:

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = 0. \quad (4.11)$$

Считая течение адиабатическим, выразим в последнем уравнении отношение dp/ρ с помощью выражений (4.6):

$$dp/\rho = kC\rho^{k-2}d\rho.$$

Подставляя найденное выражение в уравнение (4.11) и интегрируя, получим уравнение энергии в интегральной форме или *уравнение Бернулли – Сен-Венана* (1839):

$$\frac{k}{k-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (4.12)$$

Либо, разделив члены уравнения (4.12) на g , имеем:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{const}. \quad (4.12a)$$

Сравнивая выражение (4.12a) с уравнением Бернулли для идеальной несжимаемой жидкости (3.7), видим, что отличие состоит в множителе $k/(k-1)$ при пьезометрической высоте p/γ . Появление этого множителя связано с тем, что в потенциальную энергию газа входит еще и его внутренняя энергия.

Выражая в уравнении энергии (4.12) отношение p/ρ через уравнение состояния (4.2), получим

$$\frac{kRT}{k-1} + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (4.12б)$$

Последнее равенство показывает, что при отсутствии теплообмена с внешней средой увеличение скорости вдоль струйки приводит к падению температуры газа и наоборот.

Используя формулу для скорости звука (4.7a), уравнение энергии (4.12б) можно представить в виде:

$$\frac{a^2}{k-1} + \frac{u^2}{2} = \text{const}, \quad (4.12в)$$

откуда ясно, что скорость движения газа и скорость звука взаимосвязаны: увеличение скорости течения приводит к уменьшению скорости звука. Вследствие адиабатного охлаждения она меньше скорости звука, соответствующей начальному состоянию газа, когда скорость равна нулю и температура наибольшая.

Выражение (4.12в) позволяет выяснить смысл постоянной в правой части уравнения энергии. Действительно, в покоящейся газе $u = 0$ и скорость звука достигает своей наибольшей величины a_0 . Следовательно, $\text{const} = a_0^2/(k-1)$ и уравнение энергии можно представить в виде:

$$\frac{a^2}{k-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a_0^2}{k-1}, \quad (4.12г)$$

Наконец, если использовать понятие *энтальпии*, или теплосодержания газа i , рассматриваемое в термодинамике:

$$i = c_p T = k/(k-1)RT,$$

то уравнение энергии (4.12б) примет вид:

$$i + u^2/2 = \text{const}. \quad (4.12д)$$

Таким образом, потенциальная энергия газа выражается в различных формах уравнения энергии (3.25)–(3.25д) с помощью различных параметров – давления, температуры, скорости звука, энтальпии.

Отметим, что для реального газа, также как и для реальной несжимаемой жидкости, необходимо учесть потери энергии на сопротивление, добавив в левую часть уравнений энергии слагаемое h_u .

4.3. Связи скорости газа с сечением потока. Сопло Лавалья

Выясним зависимость скорости течения газа от площади поперечного сечения потока. Для газа уравнение неразрывности при установившемся течении, имеет вид:

$$\rho u S = \text{const}. \quad (4.13)$$

Логарифмируя и дифференцируя это равенство, получим

$$d\rho/\rho + du/u + dS/S = 0, \quad (4.13а)$$

откуда

$$\frac{dS}{S} = -\frac{du}{u} \left(1 + \frac{d\rho/\rho}{du/u} \right). \quad (4.13б)$$

Из уравнения (4.9), пренебрегая энергией положения ($gdz = 0$), имеем

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{u^2} \frac{dp}{\rho},$$

что дает после подставки в уравнение (4.13б)

$$\frac{dS}{S} = \frac{du}{u} \left(u^2 \frac{d\rho}{dp} - 1 \right).$$

Поскольку согласно формуле (4.5) $dp/d\rho = a^2$, имеем

$$\frac{dS}{S} = \frac{du}{u} \left(\frac{u^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{du}{u} (M^2 - 1). \quad (4.14)$$

Из уравнения (4.14) следует, что изменение скорости du при изменении сечения dS происходит по-разному для дозвукового и сверхзвукового течения.

В дозвуковом потоке ($u < a$, $M < 1$, рис. 4.1а) знаки du и dS в (4.14) противоположны: уменьшение сечения в *конфузорном* канале приводит к возрастанию скорости, а в *диффузорном* канале скорость по потоку уменьшается. При сверхзвуковом течении $u > a$, $M > 1$, (рис. 4.1б) в конфузорном канале поток замедляется, в диффузорном – ускоряется.

Чтобы пояснить результаты, полученные для сверхзвукового течения, сопоставим уравнения (4.14) и (4.13б). Имеем

$$M^2 = -\frac{d\rho/\rho}{du/u}. \quad (4.15)$$

Поскольку левая часть равенства (4.15) всегда положительна, ясно, что знаки $d\rho$ и du всегда противоположны: рост скорости приводит к уменьшению плотности. Но при дозвуковом течении ($M^2 < 1$) скорость изменяется более быстро, чем плотность:

$$du/u > d\rho/\rho.$$

При сверхзвуковом течении, наоборот, быстрее уменьшается плотность:

$$du/u < d\rho/\rho.$$

Для получения сверхзвуковых потоков газа в технике используется *сопло Лавала* (рис. 4.2), принцип действия которого ясен из приведенных рассуждений. В дозвуковом потоке, поступающем в суживающуюся часть сопла Лавала, скорость увеличивается. Если в наименьшем

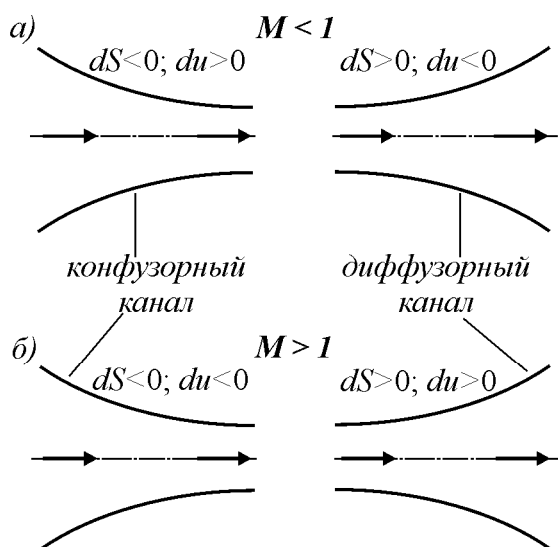


Рис. 4.1. Изменение скорости газа при его движении по конфузорному и диффузорному каналам: а – при дозвуковом течении; б – при сверхзвуковом течении

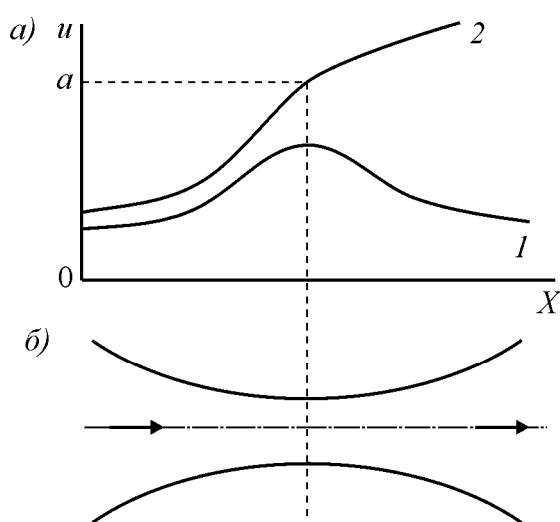


Рис. 4.2. К описанию работы сопла Лавала: а – графики изменения скорости по соплу при дозвуковом (1) и сверхзвуковом течении (2); б – схема сопла Лавала

сечении сопла не достигается скорость, равная скорости звука, то в расширяющейся части происходит ее уменьшение (кривая 1 на рис. 4.2). Если перепад давления достаточно велик, чтобы в наименьшем сечении скорость течения сравнялась со скоростью звука, то при дальнейшем расширении поток переходит в сверхзвуковой (кривая 2 на рис.4.2)

Сопло Лавалю имеет широкое применение, являясь составной частью реактивных двигателей, сопловых аппаратов некоторых турбин, сверхзвуковых аэродинамических труб и т. д.

* * *

Таким образом, в §4:

- Рассмотрены соотношения термодинамики, связывающие основные параметры состояния газа. Приведены выражения для скорости звука и числа Маха.
- Выведены основные уравнения, описывающие одномерное движение газа: уравнения Бернулли (энергии) в различных формах и уравнение неразрывности, связывающее скорость газа с сечением потока.
- Описаны устройство и принцип работы сопла Лавалю.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Что понимают под уравнением состояния идеального газа?
2. Какие характерные процессы изменения состояния газа обычно рассматривают в термодинамике? Напишите соотношения, связывающие давление, плотность и температуру при адиабатическом процессе.
3. Приведите выражения для скорости звука и числа Маха? Что это число характеризует? Какие виды течения газа Вы знаете?
4. Напишите уравнение Бернулли для газа в интегральной форме. Какие другие варианты записи этого уравнения Вы знаете? Раскройте их физический смысл.
5. Приведите выражение, отражающее связь скорости газа с сечением потока. Как влияет режим течения газа на эту взаимосвязь?
6. Опишите устройство и принцип работы сопла Лавалю. Где оно применяется?

Задача 1. Определить массу 100 тыс. нормальных (т.е. давление атмосферное, $t = 20^\circ\text{C}$) кубометров газа, если его молярная масса $\mu = 19,2$ кг/кмоль.

Ответ: 79,842 т.

Задача 2. Давление в газовом резервуаре составляет 0,12 МПа, температура $+15^\circ\text{C}$. На сколько повысится давление в этом резервуаре, если температура в нем возрастает на 15°C ?

Ответ: 6,3 кПа

Задача 3. При стационарной перекачке газа давление и температура в начале участка газопровода составляет 5,2 МПа и 35°C , а в его конце 3,5 МПа и 10°C , соответственно. Определить, пренебрегая сжимаемостью газа, во сколько раз скорость газа в конце участка превышает скорость газа в его начале.

Ответ: В 1,365 раза.

ГЛАВА 2. ОСНОВЫ РАСЧЕТА ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ НАПОРА

§5. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ НАПОРА ПРИ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

5.1. Виды гидравлических сопротивлений

Для определения величины давлений и скоростей в различных сечениях потока выше было получено два уравнения: уравнение сохранения энергии (уравнение Бернулли) и уравнение постоянства расхода, которые для несжимаемой жидкости записываются в виде

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} + h_u = \text{const}; \quad (5.1)$$

$$uS = Q = \text{const}. \quad (5.2)$$

Обычно при решении практических задач полный напор H и расход потока Q заданы или могут быть определены из известных величин в одном из сечений рассматриваемого потока. Положение центра тяжести сечения z , а также площадь его S обычно известны. Таким образом, в уравнениях (5.1) и (5.2) остается три неизвестных – u , p и h_u . Для их определения надо составить 3-е уравнение, связывающее неизвестные величины, например, уравнение, дающее зависимость h_u от u . С помощью двух уравнений гидравлики удастся решать некоторые практические задачи, лишь пренебрегая потерями напора (т.е. принимая $h_u = 0$).

Как отмечалось в §1, при движении жидкости в трубе между нею и стенками трубы возникают силы сопротивления, в результате чего частицы жидкости, прилегающие к поверхности трубы, тормозятся. Это торможение благодаря наличию вязкости передается следующим слоям. Равнодействующая сил сопротивления направлена в сторону, противоположную движению, и параллельна направлению движения. Это и есть силы (или сопротивление) гидравлического трения.

Для преодоления сопротивления трения и поддержания поступательного движения жидкости необходимо, чтобы на жидкость действовала сила, направленная в сторону ее движения и равная силе сопротивления, т.е. необходимо затрачивать энергию. *Энергия или напор, необходимые для преодоления сил сопротивления, называется потерянной энергией или потерянными напором.*

Потери напора, затрачиваемые на преодоление сопротивления трения, носят название *потерь напора на трение* или *потерь напора по длине потока* (линейные потери напора) и обозначаются через $h_{\text{тр}}$.

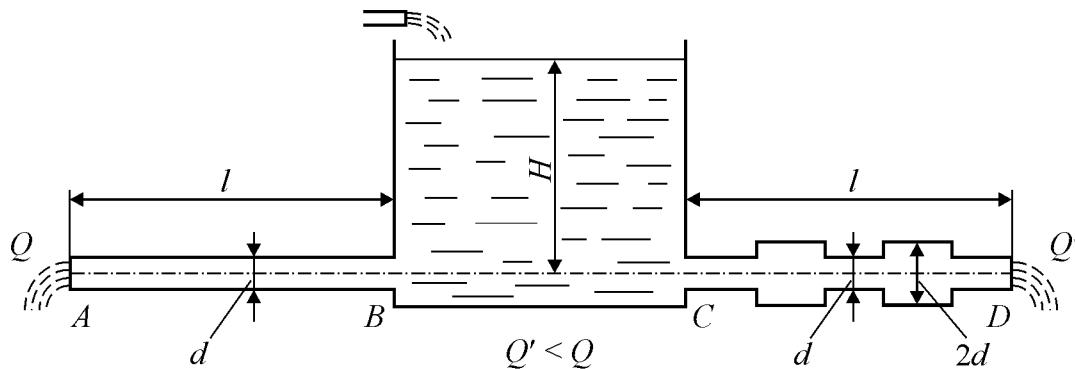


Рис. 5.1. Опытная установка для определения влияния местных сопротивлений

Однако потери напора, имеющие место при движении жидкости, зависят не только от трения. Рассмотрим следующий опыт (рис. 5.1).

Бак, наполненный водой при постоянном уровне H , питает горизонтальную трубу AB длины l одинакового на всей длине диаметра d ; пусть расход воды равен Q . Если трубу AB заменить трубой CD той же длины l , но образованной из последовательно расположенных участков диаметром d и $2d$, расход изменится; пусть новый расход равен Q' . Оказывается, что $Q' < Q$ (иногда $Q' = 0,5 Q$ и даже еще меньше).

Таким образом, резкие изменения сечения также оказывают сопротивление движению жидкости (так называемые сопротивления формы) и вызывают потери энергии; существуют и другие причины, вызывающие потери напора, например, внезапное изменение направления движения жидкости. Потери напора, вызываемые резким изменением конфигурации границ потока (затрачиваемые на преодоление сопротивления формы), называются *местными потерями напора* или *потерями напора на местные сопротивления* и обозначаются через h_m .

Таким образом, потери напора при движении жидкости складываются из потерь напора на трение и на местные сопротивления, т. е.

$$h_u = h_{\text{тр}} + h_m. \quad (5.3)$$

Определение величины потерь напора при движении жидкостей является одной из основных задач гидравлики. Некоторые сведения о зависимости потерь напора от основных влияющих на них факторов можно получить с помощью метода анализа размерностей.

5.2 Метод анализа размерностей, Пи-теорема

Анализ (или метод) размерностей используется во многих задачах физики, а особенно в механике жидкости как для проверки ранее предложенных зависимостей, так и для составления новых. Анализ размерностей основан на *ПИ-теореме*, которую формулируют следующим

образом: математическую зависимость между некоторыми физическими размерными величинами всегда можно преобразовать в уравнение, содержащее безразмерные комбинации тех же физических величин (так называемые числа ПИ), причем число этих безразмерных комбинаций всегда меньше, чем число исходных физических величин. Пусть $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ – n размерных физических величин, участвующих в каком-либо физическом явлении. Примером их могут служить скорость, вязкость, плотность и т. д. Пусть m – число всех первичных или основных единиц (например, длина, масса и время), с помощью которых можно представить размерность рассматриваемых физических величин. Функциональная зависимость между величинами A_i , можно представить в виде

$$f(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0. \quad (5.4)$$

Согласно ПИ-теореме это уравнение можно записать в виде

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m}) = 0. \quad (5.5)$$

где каждое число π – независимое безразмерное произведение нескольких A . Заметим, что число членов уравнения сократилось от n до $n - m$.

В задачах механики жидкости имеется три первичных размерности (масса, время, длина), т. е. $m = 3$. В этом случае максимальное число независимых комбинаций можно получить, выражая числа π в виде

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= A_1^{x_1} A_2^{y_1} A_3^{z_1} A_4; \\ \pi_2 &= A_1^{x_2} A_2^{y_2} A_3^{z_2} A_5; \\ &\dots\dots\dots \\ \pi_n &= A_1^{x_{n-m}} A_2^{y_{n-m}} A_3^{z_{n-m}} A_{n+3}. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

В каждом числе π имеется $m+1$ переменное (и только одно переменное меняется от числа к числу) и три неизвестных показателя x, y и z . Рассматривая три первичные размерности, например L, T, M , получим три независимых уравнения, одновременное решение которых дает численное значение для трех показателей. Таким образом, для нахождения чисел ПИ нужно:

- а) выбрать из числа переменных количество переменных, равное числу основных единиц и включающих все основные единицы;
- б) составить уравнения размерностей, объединяющие выбранные переменные с каждой из других переменных по очереди.

Найдем, используя метод размерностей, общую формулу для определения потерь напора на трение при равномерном напорном движении жидкости в трубах.

Опыты показывают, что величина потерь напора на трение $h_{тр}$ при движении жидкости в трубах может зависеть от диаметра трубы d и ее длины l , физических свойств жидкости (плотности ρ и вязкости μ),

средней скорости течения в трубе u , средней высоты выступов шероховатости K на стенках трубы. Таким образом, интересующую нас функциональную зависимость запишется в виде

$$\Delta p_{\text{тр}} = f(u, d, \mu, \rho, K, l), \quad (5.7)$$

где $\Delta p_{\text{тр}}$ – потери давления на длине потока, равной l , связанные с потерей напора формулой

$$\Delta p_{\text{тр}} = \gamma \cdot h_{\text{тр}}. \quad (5.8)$$

Вид функции f в уравнении (5.7) неизвестен. Некоторую помощь в установлении его может оказать применение ПИ-теоремы.

Учитывая, что потеря на трение всегда прямо пропорциональна длине рассматриваемого участка, перепишем уравнение (5.7) в виде

$$f_1(\Delta p_{\text{тр}}/l, u, d, \mu, \rho, K) = 0, \quad (5.9)$$

Для измерения входящих в формулу (5.9) $n = 6$ величин требуется $m = 3$ основные единицы: масса, время и длина.

В соответствии с ПИ-теоремой уравнение (5.9) может быть представлено в форме, содержащей $n - m = 3$ безразмерных отношений (чисел ПИ), т. е. вместо (5.9) можно записать

$$f_2(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0. \quad (5.10)$$

Для определения чисел π_1, π_2, π_3 выберем из всех переменных три (по числу основных единиц измерения), включающие все основные единицы измерения, например u, d и ρ . Составим теперь уравнения размерностей, объединяющие выбранные переменные с каждой из других переменных по очереди, т. е.

$$\pi_1 = d^{x_1} u^{y_1} \rho^{z_1} \mu; \quad \pi_2 = d^{x_2} u^{y_2} \rho^{z_2} \Delta p_{\text{тр}}/l; \quad \pi_3 = d^{x_3} u^{y_3} \rho^{z_3} K. \quad (5.11)$$

В выражениях для π_1, π_2, π_3 нужно подобрать показатели при d, u и ρ таким образом, чтобы числа π не имели размерности.

Так, например, для числа π_3 имеем

$$L^{x_3} (LT^{-1})^{y_3} (ML^{-3})^{z_3} L = L^0 T^0 M^0.$$

Отсюда вытекают следующие уравнения:

при L : $x_3 + y_3 - 3z_3 + 1 = 0$; при T : $-y_3 = 0$; при M : $z_3 = 0$, т.е. $x_3 = -1$ и

$$\pi_3 = K/d. \quad (5.12)$$

Нетрудно показать (проверив размерности), что

$$\pi_1 = u d \rho / \mu. \quad (5.13)$$

$$\pi_2 = \frac{d \cdot \Delta p_{\text{тр}} / l}{u^2 \rho}. \quad (5.14)$$

Подставляя (5.12), (5.13) и (5.14) в (5.10), имеем

$$f_2\left(\frac{u d \rho}{\mu}; \frac{d \cdot \Delta p_{\text{тр}} / l}{u^2 \rho}; \frac{K}{d}\right) = 0.$$

Так как нас интересует потеря напора, то разрешаем это уравнение относительно π_2

$$\frac{d \cdot \Delta p_{\text{тр}} / l}{u^2 \rho} = \varphi\left(\frac{ud\rho}{\mu}; \frac{K}{d}\right) \text{ или } \Delta p_{\text{тр}} = \frac{u^2 \rho l}{d} \varphi\left(\frac{ud\rho}{\mu}; \frac{K}{d}\right). \quad (5.15)$$

Учитывая формулу (5.8), имеем

$$h_{\text{тр}} = \frac{\Delta p_{\text{тр}}}{\gamma} = \frac{u^2 l}{gd} \varphi\left(\frac{ud\rho}{\mu}; \frac{K}{d}\right) \quad (5.16)$$

или, обозначая

$$\varphi\left(\frac{ud\rho}{\mu}; \frac{K}{d}\right) = \frac{\lambda}{2}, \quad (5.17)$$

где λ – безразмерное число, называемое *коэффициентом гидравлического трения*, получим *формулу Дарси – Вейсбаха*

$$h_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{u^2}{2g}. \quad (5.18)$$

Из формулы (5.18) следует, что потери напора на трение при движении жидкости в трубе возрастают с увеличением средней скорости потока и длины рассматриваемого участка трубы и обратно пропорциональны диаметру трубы.

Приведенный метод можно использовать и для определения вида формулы потерь напора на местные сопротивления. В этом случае, учитывая, что местные потери практически не зависят ни от длины участка трубы, ни от ее диаметра, нетрудно получить *формулу Вейсбаха*

$$h_{\text{м}} = \xi \frac{u_2^2}{2g}, \quad (5.19)$$

где ξ – безразмерный коэффициент, называемый *коэффициентом местных потерь*; u_2 – скорость после прохода через местное сопротивление.

Таким образом, хотя с помощью ПИ-теоремы не удастся получить полного решения вопроса о потерях напора (так как смысл коэффициентов λ , ξ остался невыясненным), можно ближе подойти к его выяснению. Дальнейшие сведения о коэффициентах λ , ξ будут рассмотрены в следующем пункте и §6.

5.3. Определение коэффициента гидравлического трения при ламинарном и турбулентном течении жидкости

С помощью анализа размерностей в п. 5.2 было установлено, что коэффициент гидравлического трения в формуле Дарси – Вейсбаха (5.18) зависит от двух безразмерных параметров: $ud\rho/\mu$ и K/d . Первый из

этих параметров представляет собой число Рейнольдса, а второй – относительную шероховатость, а, следовательно

$$\lambda = f(\text{Re}; K/d). \quad (5.20)$$

Число Рейнольдса определяет режим течения жидкости, поэтому рассмотрим по-отдельности ламинарное и турбулентное течения.

При *ламинарном течении* жидкости в трубе (число Рейнольдса меньше 2300) для вычисления λ используется *формула Стокса*:

$$\lambda = 64/\text{Re} = 64\nu/(ud). \quad (5.21)$$

Данная формула с большой точностью подтверждается многочисленными опытами над движением различных жидкостей в условиях ламинарного течения.

Формула (5.21) показывает, что λ при ламинарном движении не зависит от состояния поверхности стенки трубы, так как относительная шероховатость в нее не входит. Отсутствие влияния стенок на сопротивления можно объяснить тем, что жидкость прилипает к стенкам и имеет место трение жидкости о жидкость, а не жидкости о стенку.

При *турбулентном режиме течения* жидкости ($\text{Re} > 2300$) наиболее известной формулой для расчета λ является *формула Альтшуля*:

$$\lambda = 0,11 \cdot \left(\frac{K}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{1/4}, \quad (5.22)$$

справедливая в широком диапазоне чисел Рейнольдса, начиная от 10^4 до 10^6 и выше.

Если $10^4 < \text{Re} < 27/(K/d)^{1,143}$, то формула Альтшуля переходит в другую формулу – *формулу Блазиуса*:

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}}, \quad (5.23)$$

имеющую ту характерную особенность, что в нее так же, как и в формулу Стокса для ламинарного режима, не входит величина K/d относительной шероховатости внутренней поверхности трубы. Последнее означает, что в рассматриваемом диапазоне чисел Рейнольдса труба ведет себя как *гладкая*, поэтому течение жидкости в этом диапазоне называют даже *течением в гидравлически гладкой трубе*.

В области перехода течения от ламинарного к турбулентному, т.е. в диапазоне чисел Рейнольдса от 2320 до 10^4 , можно использовать аппроксимационную *формулу Гинзбурга*:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \cdot (1 - \gamma_*) + \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}} \cdot \gamma_*, \quad (5.24)$$

в которой $\gamma_* = 1 - e^{-0,002 \cdot (\text{Re} - 2320)}$ – *коэффициент перемежаемости*. Очевидно, что конструкция последней формулы обеспечивает непрерыв-

ность перехода от формулы Стокса для ламинарного режима течения к формуле Блазиуса для турбулентного режима в зоне гидравлически гладких труб.

Если же $Re > 500/(K/d)$, то вторым слагаемым в круглых скобках формулы Альтшуля можно пренебречь по сравнению с первым, откуда следует, что при "больших" скоростях трение жидкости определяется, главным образом, степенью гладкости внутренней поверхности трубы, т.е. параметром K/d . В этом случае можно использовать более простую формулу – формулу Шифринсона:

$$\lambda = 0,11 \cdot (K/d)^{0,25}. \quad (5.25)$$

Отсюда следует, что сопротивление трения пропорционально квадрату средней скорости жидкости, из-за чего *рассматриваемый режим течения* называют *квадратичным*.

Таким образом, установлено, что шероховатость стенок труб оказывает влияние на потери напора лишь при турбулентном течении жидкости. При этом надо отметить, что шероховатость сама определяется рядом факторов: материалом стенок; характером механической обработки внутренней поверхности трубы; наличием или отсутствием коррозии, отложения осадков и т.д. Кроме того, опыты показали, что при одной и той же величине *абсолютной шероховатости* K ее влияние на величину гидравлических сопротивлений различно в зависимости от диаметра трубы. Поэтому и используется понятие *относительной шероховатости*, т.е. величина K/d .

* * *

Таким образом, в §5:

- Установлено, что потери напора при движении жидкости складываются из потерь напора на трение и на местные сопротивления.
- Дано понятие о методе размерностей, основанном на ПИ-теореме. Рассмотрен пример использования ПИ-теоремы для нахождения формул расчета потерь напора на трение (формула Дарси–Вейсбаха) и на местные сопротивления (формулой Вейсбаха) при равномерном напорном движении жидкости в трубах.
- Приведены выражения для расчета коэффициента гидравлического трения при ламинарном и турбулентном режимах течения жидкости.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Раскройте энергетический смысл потерь напора. На какие виды их подразделяют?
2. На чем основан метод анализа размерностей? Сформулируйте ПИ–теорему. Приведите последовательность нахождения чисел ПИ.
3. Напишите функциональные зависимости для потерь напора на трение и на местные сопротивления. Приведите общий вид формул для расчета этих потерь.

4. От чего зависит коэффициент гидравлического трения? Приведите формулу для расчета данного коэффициента при ламинарном течении. Что она показывает?
5. Сформулируйте понятие гидравлически гладкой трубы. Напишите выражение для определения коэффициента гидравлического трения в данных трубах.
6. Сформулируйте понятие квадратичного режима течения. Приведите формулу для определения коэффициента гидравлического трения в этом режиме.
7. Раскройте понятия абсолютной и относительной шероховатости. Напишите формулу Альтшуля для расчета коэффициента гидравлического трения при турбулентном режиме течения.

Задача 1. Жидкость ($\rho = 840 \text{ кг/м}^3$; $\mu = 4,0 \text{ сПз}$) транспортируют по трубопроводу ($D = 530 \text{ мм}$, $\delta = 8 \text{ мм}$; $K = 0,15 \text{ мм}$) с расходом $700 \text{ м}^3/\text{ч}$. Определить режим течения и вычислить коэффициент гидравлического сопротивления.

Ответ: Турбулентный режим; $\lambda = 0,020$

Задача 2. Чему равен гидравлический уклон на участке трубопровода ($D = 377 \text{ мм}$, $\delta = 8 \text{ мм}$, $K = 0,15 \text{ мм}$), транспортирующего жидкость ($\nu = 5 \text{ сСт.}$) с расходом $250 \text{ м}^3/\text{ч}$?

Ответ: $1,37 \text{ м/км}$.

Задача 3. Транспорт жидкости ($\rho = 750 \text{ кг/м}^3$; $\mu = 0,5 \text{ сПз}$) ведется по трубопроводу ($D = 530 \text{ мм}$; $\delta = 8 \text{ мм}$; $K = 0,22 \text{ мм}$) с расходом $1100 \text{ м}^3/\text{ч}$. Определить режим течения и коэффициент гидравлического сопротивления.

Ответ: Турбулентный, в области квадратичного трения; $\lambda = 0,016$.

§6. МЕСТНЫЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

6.1. Общие сведения

Местные сопротивления, возникающие, как сказано в главе 5, в тех местах трубопровода, где происходит резкое изменение конфигурации границ потока, всегда вызывают появление дополнительных потерь напора. Величину потери напора, затраченной на преодоление местного сопротивления, принято оценивать в долях от скоростного напора, соответствующего скорости непосредственно за рассматриваемым местным сопротивлением, т.е. определять ее из формулы Вейсбаха (5.19).

Коэффициенты различных местных сопротивлений ξ находятся, как правило, опытным путем; таблицы значений этих коэффициентов (или эмпирические кривые и формулы для них) содержатся во всех справочниках и руководствах по гидравлике. Для некоторых практически важных случаев значения ξ удалось получить теоретически.

Иногда местные потери напора выражают в виде эквивалентной длины l_3 прямого участка трубопровод, сопротивление трения которого по величине равно рассматриваемым местным потерям напора, т.е.

$$\lambda \frac{l_3}{d} \frac{u_2^2}{2g} = \xi \frac{u_2^2}{2g},$$

или

$$l_3/d = \xi/\lambda. \quad (6.1)$$

Так как коэффициент гидравлического трения λ зависит от числа Re и относительной шероховатости, то одному и тому же значению ξ в общем случае соответствует различное значение эквивалентной длины. Лишь в квадратичной области сопротивления, когда $\lambda \neq f(\text{Re})$, эквивалентная длина заданного местного сопротивления постоянна.

Местные потери напора условно разделяются на следующие *группы*:

– потери, связанные с изменением сечения потока. Сюда относятся различные случаи внезапного расширения, сужения, а также постепенного расширения и сужения потока;

– потери, вызванные изменением направления потока. Сюда относятся различного рода колена, угольники, отводы, используемые на трубопроводах;

– потери, связанные с протеканием через арматуру различного типа (вентили, краны, клапаны, сетки, отборы и т.д.);

– потери, связанные с отделением одной части потока от другой или слиянием двух потоков в один общий. Сюда относятся, например, тройники и крестовины.

6.2. Потери напора, связанные с изменением сечения потока

Внезапное расширение трубопровода. Рассмотрим случай, когда трубопровод внезапно расширяется от диаметра d_1 до диаметра d_2 (рис. 6.1). Как показывают наблюдения, поток, выходящий из узкой трубы, не сразу заполняет все поперечное сечение широкой трубы; жидкость в месте расширения отрывается от стенок и дальше движется в виде свободной струи. На поверхности струи возникают вихри, в результате чего происходит ее перемешивание с окружающей жидкостью. Струя постепенно расширяется, пока, наконец, на некотором расстоянии l от начала расширения не заполняет все сечение широкой трубы.

В кольцевом пространстве между струей и стенками трубы жидкость находится в вихревом движении: жидкость из этой зоны вовлекается в центральную струю; с другой стороны жидкость из центральной струи попадает в вихревую зону. Благодаря отрыву потока и связанному с ним вихреобразованию на участке трубы между сечениями 1 и 2 происходят значительные потери напора.

Найдем величину этих потерь. Обозначим средние скорости течения в сечениях 1–1 и 2–2 через u_1 и u_2 , а давление через p_1 и p_2 . Давление на торцевой стенке AB , как показывает опыт, практически равно давлению на выходе из узкой части трубы, т.е. равняется p_1 .

По уравнению Бернулли потери напора между сечениями 1–1 и 2–2, если положить $\alpha_1 = \alpha_2 \approx 1$, равны

$$h_{\text{вн.п}}^{1-2} = \left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} \right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} \right) = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g}. \quad (6.2)$$

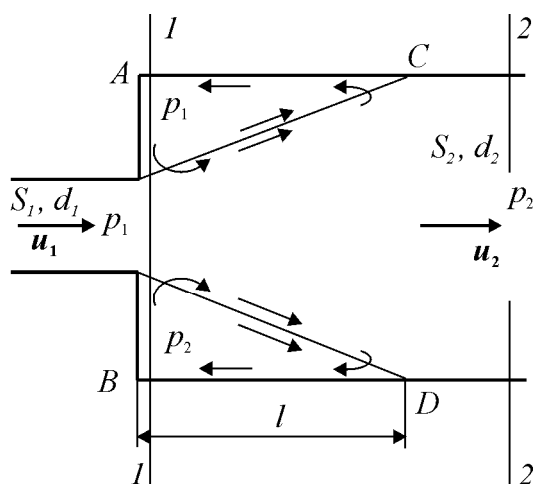


Рис. 6.1. Внезапное расширение потока

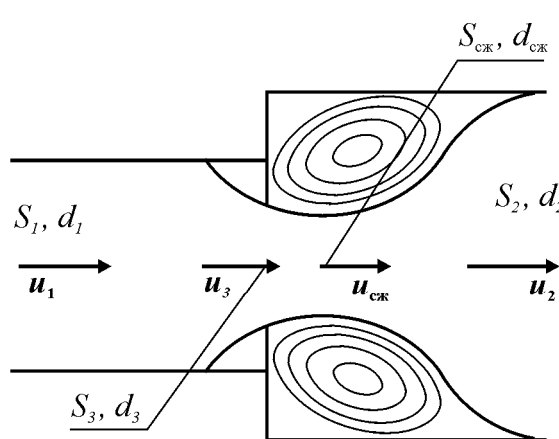


Рис. 6.2. Течение через диафрагму

Выразим разность $p_1 - p_2$ с помощью уравнения импульсов, которое (как известно из механики) в проекции на некоторую ось x имеет вид

$$m(u_2 - u_1) = F_x \Delta t,$$

где F_x – проекция приложенных сил.

Тогда, поделив обе части данного уравнения на Δt и учитывая, что участок растекания потока 1–2 имеет малую длину и, следовательно, силами трения можно пренебречь, для наших двух сечений получим

$$M(u_2 - u_1) = \Delta p S_2 = (p_1 - p_2) S_2. \quad (6.3)$$

Разделив обе части уравнения (6.3) на γ , будем иметь

$$\frac{u_2 S_2}{g} (u_2 - u_1) = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} S_2$$

или

$$(p_1 - p_2)/\gamma = (u_2^2 - u_1 u_2)/g. \quad (6.4)$$

Подставляя (6.4) в уравнение Бернулли (6.2), найдем

$$h_{\text{вн.п}}^{1-2} = \frac{u_2^2}{g} - \frac{u_1 u_2}{g} + \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g} = \frac{u_2^2}{2g} - \frac{2u_1 u_2}{2g} + \frac{u_1^2}{2g}$$

или

$$h_{\text{вн.п}}^{1-2} = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g}. \quad (6.5)$$

Отсюда следует, что потери напора при внезапном расширении равны скоростному напору от потерянной скорости. Этот результат называется теоремой или *формулой Борда*.

Формулу (6.5) можно привести к виду

$$h_{\text{вн.п}} = \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)^2 \cdot \frac{u_1^2}{2g} = \xi_1 \frac{u_1^2}{2g}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\xi_1 = (1 - u_2/u_1)^2 = (1 - S_1/S_2)^2. \quad (6.6)$$

Если отнести коэффициент сопротивления к скорости в широкой трубе, то будем иметь

$$h_{\text{вн.п}} = \left(\frac{S_2}{S_1} - 1\right)^2 \frac{u_2^2}{2g}.$$

Внезапное сужение трубопровода. Пусть в сечении перехода трубы диаметра d_1 в трубу диаметра d_2 установлена диафрагма с отверстием (рис. 6.2). Обозначим через S_1 и u_1 – площадь сечения и скорости в первой трубе; через S_2 и u_2 – во второй трубе и через S_3 и u_3 – в отверстии диафрагмы. При проходе через отверстие струя жидкости, как показывают многочисленные опыты, сжимается и на некотором

расстоянии от диафрагмы приобретает наименьшую площадь сечения – $S_{сж}$ (при диаметре – $d_{сж}$). Сжатие струи объясняется тем, что частицы жидкости, двигаясь вдоль диафрагмы, достигнув края отверстия, продолжают и дальше двигаться сначала в прежнем направлении, лишь постепенно отклоняясь от него. Достигнув сечения $S_{сж}$, струя начинает постепенно расширяться до тех пор, пока площадь ее не станет равна площади сечения S_2 . Происходящие при этом потери напора связаны, главным образом, с увеличением сечения струи на участке расширения (потери на участке сжатия при турбулентном течении, как показывает опыт, незначительны) и могут быть найдены по формуле Борда, т.е.

$$h = \frac{(u_{сж} - u_2)^2}{2g}. \quad (6.7)$$

Из уравнения неразрывности имеем

$$u_{сж} S_{сж} = u_2 S_2 = u_3 S_3, \quad (6.8)$$

откуда

$$u_{сж} = u_3 S_3 / S_{сж}. \quad (6.9)$$

Отношение площади сжатого сечения $S_{сж}$ к площади сечения отверстия S_3 называется *коэффициентом сжатия* струи

$$\varepsilon = S_{сж} / S_3. \quad (6.10)$$

Учитывая (6.10), уравнение (6.9) можно представить в виде

$$u_{сж} = \frac{u_3}{\varepsilon} = \frac{u_2 S_2}{S_3 \varepsilon}. \quad (6.11)$$

Подставив найденное выражение для $u_{сж}$ в уравнение (6.7), получим

$$h = \left(\frac{S_2}{S_3 \varepsilon} - 1 \right)^2 \cdot \frac{u_2^2}{2g},$$

где

$$\xi = \left((S_2 / S_3) / \varepsilon - 1 \right)^2 = (m / \varepsilon - 1)^2, \quad (6.12)$$

есть коэффициент рассматриваемого местного сопротивления ($m = S_2 / S_3$ – *степень расширения* потока).

Таким образом, коэффициент местного сопротивления ξ в этом случае зависит от коэффициента сжатия струи ε и отношения площадей сечения S_2 и S_3 .

Величина коэффициента сжатия струи в свою очередь зависит от соотношения площадей сечений S_1 и S_3 , т. е.

$$\varepsilon = f(S_3 / S_1). \quad (6.13)$$

где $n = S_3 / S_1$ – *степень сжатия* потока.

С увеличением n , коэффициент ε возрастает, т. е. само сжатие уменьшается; при $n = 1$ $\varepsilon = 1$ сжатие отсутствует.

Для потока жидкости малой вязкости (т.е. при больших числах Рейнольдса) величину коэффициента сжатия струи ε при истечении из отверстий можно найти по теоретической формуле Н. Е. Жуковского:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{\pi + 2(2\theta/\operatorname{tg}2\theta)}, \quad (6.14)$$

где θ определяется из выражения

$$\operatorname{tg}\theta[1 + 2(2\theta/\operatorname{tg}2\theta)/\pi] = n. \quad (6.15)$$

Формула Жуковского выведена для случая истечения из плоской щели, но, как видно из таблице 6.1, найденные по ней значения коэффициента сжатия (при $n < 0,6$) хорошо согласуются с опытными данными, полученными для круглых отверстий. Таким образом, форма отверстия оказывает слабое влияние на величину коэффициента сжатия струи.

Вместо формул (6.14) и (6.15) можно пользоваться также приближенной зависимостью Альтшуля

$$\varepsilon = 0,57 + \frac{0,043}{1,1 - n}. \quad (6.16)$$

Подставив значения ε , найденные по этим формулам в уравнение (6.12), можно найти теоретические значения величины коэффициента сопротивления ξ для разных величин отношения S_3/S_2

Рассмотрим несколько следующих частных случаев.

В случае диафрагмы в трубе постоянного диаметра $S_1 = S_2$ и формула (6.12) приводится к виду

$$\xi = \left(\frac{S_1}{S_3\varepsilon} - 1 \right)^2 = \left(\frac{1}{n\varepsilon} - 1 \right)^2. \quad (6.17)$$

При входе в трубу через диафрагму из резервуара значительных размеров $S_2/S_1 = 0$ и в соответствии с формулой (6.14) $\varepsilon = 0,611$. Уравнение (6.12) можно записать так:

$$\xi = \left(\frac{S_2}{0,611S_3} - 1 \right)^2. \quad (6.18)$$

В случае резкого уменьшения диаметра трубы (рис. 6.3) формула (6.12) приобретает вид

Таблица 6.1.

Значения коэффициента сжатия струи ε от степени сжатия

n	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
ε по формуле (6.14)	0,611	0,612	0,616	0,622	0,633	0,664	0,687
ε для круглых отверстий (опыт)	0,604	0,609	0,616	0,624	0,635	0,644	0,677

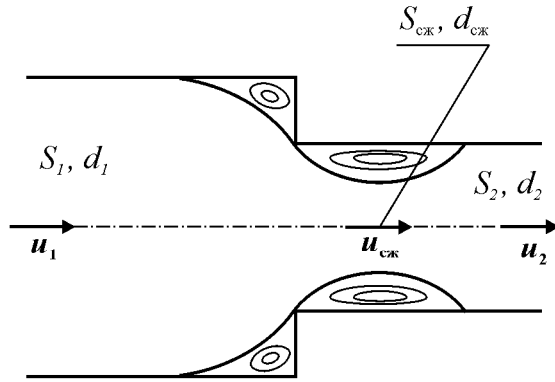


Рис. 6.3. Внезапное сужение потока

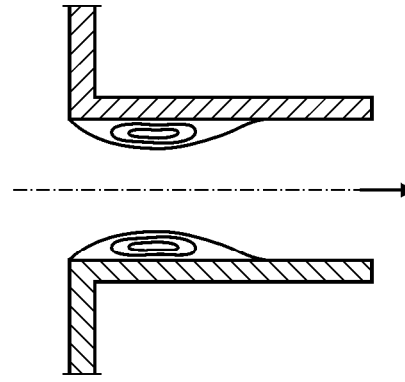


Рис. 6.4. Резкий выход из резервуара в трубу

$$\xi_{\text{вн.с}} = (1/\varepsilon - 1)^2, \quad (6.19)$$

где индекс вн. с – внезапное сужение.

В таблице 6.2 дается сравнение значений $\xi_{\text{вн.с}}$, подсчитанных по формуле (6.19) для различных ε (n определялось по формуле (6.14)).

Для входа в трубу из резервуара (рис. 6.4) имеем $S_2/S_1 = 0$; $S_2 = S_3$ и, следовательно, вместо формулы (6.18) будем иметь

$$\xi = (1/0,611 - 1)^2 \approx 0,41. \quad (6.20)$$

Полученные формулы дают значения коэффициентов сопротивления, хорошо согласующиеся с опытными данными при $n < 0,6$.

Следует, однако, иметь в виду, что если переход сглажен закруглениями, то коэффициенты ξ будут значительно меньше; например, для случая, показанного на рис. 6.5, из опытов следует значение $\xi \approx 0,2$.

Постепенное расширение трубопровода. Если расширение потока происходит постепенно, то потери напора значительно уменьшаются. Плавно расширяющийся участок трубы (см. рис. 6.6) называется *диффузором*. При течении жидкости в диффузоре происходит постепенное уменьшение скорости и увеличение давления. Кинетическая энергия частиц движущейся жидкости уменьшается как вдоль диффузора, так и в направлении от оси к стенкам. Слои жидкости у стенок имеют столь малую кинетическую энергию, что не могут преодолевать нарастающее давление, останавливаются и начинают двигаться обратно. При столкновении основного потока с этими обратными потоками возникает

Таблица 6.2.
Значения коэффициента сопротивления для случая внезапного уменьшения сечения трубы

n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\xi_{\text{вн.с}}$	0,40	0,38	0,36	0,34	0,20	0,27	0,20	0,16

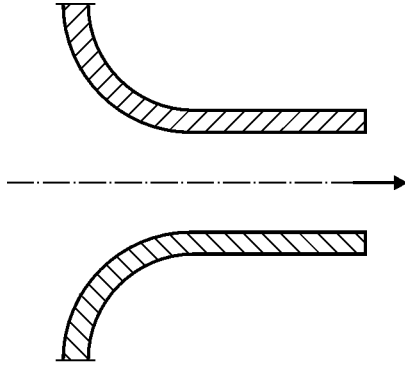


Рис. 6.5. Сглаженный выход из резервуара в трубу

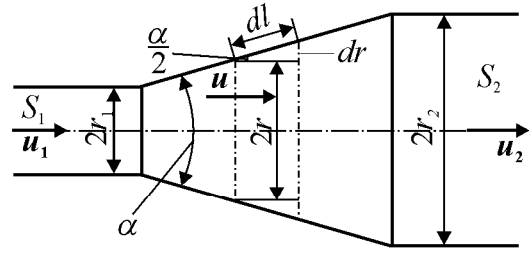


Рис. 6.6. Постепенное расширение потока

отрыв потока от стены и вихреобразование, т.е. имеют место потери напора, которые возрастают с увеличением угла расширения диффузора.

Диффузор характеризуется двумя параметрами: углом конусности α и степенью расширения n , определяемой отношением:

$$n = S_2/S_1 . \quad (6.21)$$

Потерю напора в диффузоре можно условно рассматривать как сумму потерь на трение и на расширение

$$h_{\text{диф}} = h_{\text{тр}} + h_{\text{расш}} . \quad (6.22)$$

Потеря напора на постепенное расширение может быть найдена по формуле Борда, но с введением в нее поправочного коэффициента $K_{\text{п.р}}$ (индекс п.р – постепенное расширение), называемого *коэффициентом смягчения*, зависящего от угла конусности α , т.е.

$$h_{\text{п.р}} = K_{\text{п.р}} \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g} \quad (6.23)$$

или

$$\xi_{\text{п.р}} = K_{\text{п.р}} \xi_{\text{вн.р}} = K_{\text{п.р}} (1 - S_1/S_2)^2 = K_{\text{п.р}} (1 - 1/n)^2 . \quad (6.24)$$

Значение $K_{\text{п.р}}$ при турбулентном течении в диффузоре можно найти из таблице 6.3 или при $\alpha < 20^\circ$ по формуле

$$K_{\text{п.р}} \approx \sin \alpha . \quad (6.25)$$

Потери на трение на бесконечно малом участке длины диффузора кругового сечения равны

$$dh_{\text{тр}} = \lambda \frac{dl}{2r} \cdot \frac{u^2}{2g} . \quad (6.26)$$

Таблица 6.3

Значения коэффициента смягчения $K_{\text{п.р}}$ при постепенном расширении трубопровода

$\alpha, ^\circ$	4	8	15	30	60
$K_{\text{п.р}}$	0,08	0,16	0,35	0,80	0,95

С учетом того, что

$$dl = dr/\sin(\alpha/2),$$

а на основании уравнения расхода

$$u = u_1(r_1/r)^2,$$

выражение (6.26) примет вид

$$dh_{\text{тр}} = \frac{\lambda}{2r \sin(\alpha/2)} \cdot \frac{u_1^2}{2g} \left(\frac{r_1}{r}\right)^4 dr. \quad (6.27)$$

Пренебрегая изменением коэффициента λ по длине диффузора и интегрируя в пределах от r_1 до r_2 , т. е. вдоль всего диффузора, после простых преобразований получим

$$h_{\text{тр}} = \frac{\lambda}{8 \sin(\alpha/2)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{u_1^2}{2g}. \quad (6.28)$$

Суммарный коэффициент сопротивления диффузора получается равным

$$\xi_{\text{диф}} = \frac{\lambda}{8 \sin(\alpha/2)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + K_{\text{п.р}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2. \quad (6.29)$$

Таким образом

$$\xi_{\text{диф}} = f(\lambda, \alpha, n)$$

Постепенное сужение трубы. Постепенно суживающая труба называется *конфузором* (рис. 6.7). При течении жидкости в конфузоре скорость вдоль трубы возрастает, а давление уменьшается. Так как жидкость движется от большего давления к меньшему, то причин для срыва потока в конфузоре меньше, чем в диффузоре. Отрыв потока от стенки с небольшим сжатием имеет место на выходе из конфузора, поэтому сопротивление конфузора всегда меньше сопротивления диффузора с теми же геометрическими размерами. Потери в конфузоре также складываются из потерь на постепенное сужение и потерь на трение, т.е.

$$h_{\text{конф}} = h_{\text{тр}} + h_{\text{п.с.}} \quad (6.30)$$

Потери напора на трение в конфузоре определяются аналогично тому, как это сделано для диффузора; они равны

$$h_{\text{тр}} = \frac{\lambda}{8 \sin(\alpha/2)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{u_2^2}{2g}, \quad (6.31)$$

где $n = S_1/S_2$ – степень сужения конфузора.

Потери напора на сужение приобретают значение при $\alpha > 50^\circ$. Их можно найти также по формуле

$$h_{\text{п.с.}} = \xi_{\text{п.с.}} \frac{u_1^2}{2g} = K_{\text{п.с.}} \cdot \xi_{\text{вн.с.}} \frac{u_1^2}{2g}, \quad (6.32)$$

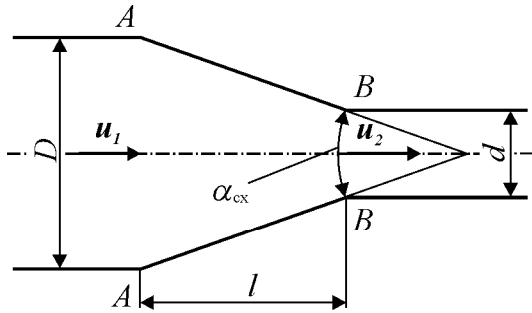


Рис. 6.7. Постепенное сужение потока

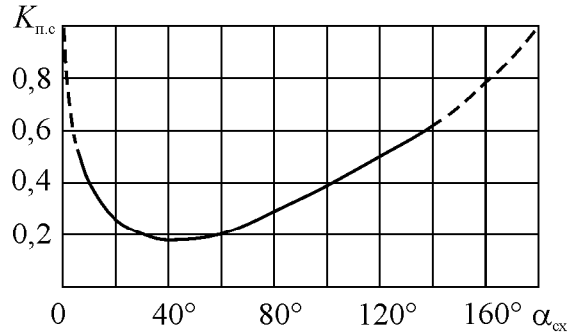


Рис. 6.8. Зависимость коэффициента смягчения от угла сходимости при постепенном сужении потока

где $\xi_{\text{вн.с}}$ – коэффициент местного сопротивления при внезапном сужении трубопровода; $K_{\text{п.с}}$ – коэффициент смягчения, учитывающий уменьшение коэффициента $\xi_{\text{п.с}}$ по сравнению с коэффициентом $\xi_{\text{вн.с}}$.

Коэффициент смягчения $K_{\text{п.с}}$ как показывают исследования, зависит главным образом от угла сходимости. Зависимость $K_{\text{п.с}}$ от угла сходимости $\alpha_{\text{сх}}$ представлена на рис. 6.8.

Учитывая уравнение (6.19), выражению для $\xi_{\text{п.с}}$ можно придать вид

$$\xi_{\text{п.с}} = K_{\text{п.с}} \xi_{\text{вн.с}} = K_{\text{п.с}} (1/\varepsilon - 1)^2. \quad (6.33)$$

При выводе формулы (6.19) предполагалось, что потери напора при внезапном сужении трубы происходят вследствие того, что струя при входе в трубу отрывается от ее стенок, сжимается, а ее последующее расширение вызывает потери. Если уменьшить сжатие струи, например, путем плавного сопряжения конической части с цилиндрической или замены конической части криволинейной, то потери можно значительно уменьшить. Коэффициент сопротивления такого плавного сужения (его иногда называют соплом) принимается равным $\xi = 0,01-0,1$ в зависимости от степени сужения, его плавности и числа Рейнольдса.

6.3. Потери напора, связанные с изменением направления потока

Рассмотрим течение жидкости на повороте трубопровода (рис. 6.9).

В результате искривления потока на вогнутой стороне внутренней поверхности трубы давление больше, чем на выпуклой. Поэтому создаются различия в скорости в направлении по течению, способствующие отрыву потока от стенок, что приводит сначала к сужению струи, а далее – к ее расширению, при этом возникают большие потери напора.

При резком повороте трубы (рис. 6.10), который называется также простым или острым коленом (незакругленное колено), потери напора особенно велики. Их можно оценить, применяя формулу Борда

$$h = \frac{(u_{\text{сж}} - u)^2}{2g} = \frac{(u/\varepsilon - u)^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2. \quad (6.34)$$

Таким образом, коэффициент местного сопротивления колена равен

$$\xi_{\text{кол}} = (1/\varepsilon - 1)^2. \quad (6.35)$$

Коэффициент сжатия струи ε зависит от величины угла поворота α . Например, при $\alpha = 0$ $\varepsilon = 1$, а при $\alpha = 90^\circ$ (прямоугольное колено) $\varepsilon = 0,5$, т.е. ширина вихря составляет около половины ширины трубы. Для последнего случая имеем

$$\xi_{90^\circ} = (1/0,5 - 1)^2 = 1, \quad (6.36)$$

что хорошо согласуется с опытами. Имеются также формулы, связывающие $\xi_{\text{кол}}$ непосредственно с α , например формула Вейсбаха:

$$\xi_{\text{кол}} = 0,946 \sin^2(\alpha/2) + 2,047 \sin^4(\alpha/2), \quad (6.37)$$

из которой следует, что при $\alpha = 90^\circ$ $\xi_{\text{кол}} = 0,984$.

При плавном повороте трубы (закругленное колено, отвод) вихреобразования уменьшаются (рис. 6.9) и потери напора будут значительно меньше. Коэффициент сопротивления отвода зависит от угла поворота, а также от отношения радиуса закругления к диаметру трубы R/d и от величины коэффициента гидравлического трения λ , т.е.

$$\xi_{\text{пов}} = f(\alpha, R/d, \lambda).$$

Для отводов кругового сечения с углом $\alpha = 90^\circ$ значение $\xi_{\text{пов}}$ дается формулой

$$\xi_{90^\circ} = 2000\lambda^{2,5} + 0,106 (d/R)^{2,5} \quad (6.38)$$

или при больших Re формулой Б. Б. Некрасова

$$\xi_{90^\circ} = 0,05 + 0,19 d/R. \quad (6.39)$$

При $d/R = 1$ из последней формулы имеем $\xi_{\text{пов}} = 0,24$, т. е. значение меньше в четыре раза, чем при резком повороте.

При повороте на любой угол α можно приближенно принимать

$$\xi_\alpha = \xi_{90^\circ} (\alpha/90^\circ). \quad (6.40)$$

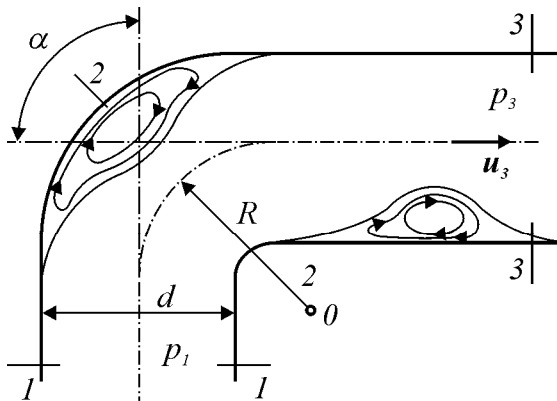


Рис. 6.9. Плавный поворот трубы

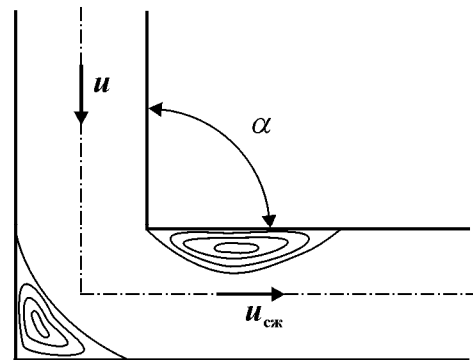


Рис. 6.10. Резкий поворот трубы

6.4. Потери напора в арматуре трубопроводов, тройниках и крестовинах

Потери напора в арматуре. В трубопроводах в ряде случаев ставятся различные приспособления для искусственного создания сопротивления: задвижки, клапаны, затворы и пр. В этих устройствах имеет место сужение потока с его последующим расширением, а иногда и повороты.

С гидравлической точки зрения подобные устройства действуют аналогично диафрагме, и поэтому в первом приближении коэффициент местного сопротивления в этих случаях может быть найден по формуле (6.17). В таблице 6.4 приведены значения ξ , подсчитанные по формуле (6.17) при разных n . Эти значения удовлетворительно согласуются с опытными данными для запорных устройств типа задвижек. Таким образом, местное сопротивление подобных запорных устройств зависит главным образом от степени их прикрывания и меньше от конструкции.

Потери напора в дросселе (рис. 6.11) и кране (рис. 6.12) зависят от угла поворота δ . При $\delta = 0^\circ$ сопротивление, как дросселя, так и крана наименьшее, с увеличением δ оно растет и при $\delta = 90^\circ$ становится бесконечно большим. Численные значения коэффициента ξ для дросселя и крана, установленных в круглой трубе, приведены в таблице 6.5.

Как правило, коэффициенты местных сопротивлений арматуры можно найти из таблиц, составленных на основании опытных данных.

Таблица 6.4

Значения коэффициента местного сопротивления для диафрагмы и запорных устройств на трубопроводах

n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
ξ по формуле (6.17)	284	50,3	19,9	9,8	4,4	2,4

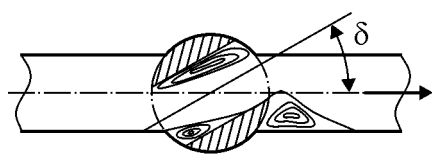


Рис. 6.11. Схема дросселя

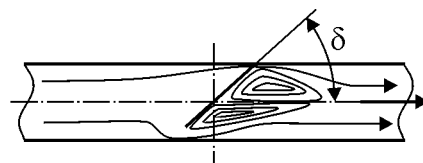


Рис. 6.12. Схема крана

Таблица 6.5

Значения коэффициента местного сопротивления для дросселя и крана, установленных в круглой трубе

Угол δ	5	10	20	30	40	50	60	65	70
ξ дросселя	0,24	0,52	1,54	3,91	10,8	32,6	118	356	751
ξ крана	0,05	0,29	1,56	5,47	17,3	52,6	216	486	—

Потери напора в стыках. Важным вопросом гидравлического расчета трубопроводов является учет потерь напора, вызываемых стыками. Последние можно рассматривать как местные сопротивления, естественно, что с уменьшением диаметра трубы влияние стыков на сопротивление увеличивается.

Сопротивления, вызванные стыками, можно найти по формуле

$$K = 1 + (\xi_{ст}/\lambda) \cdot (d/l), \quad (6.41)$$

где $K = \lambda_1/\lambda$ – относительное увеличение сопротивления трубопровода (отношение сопротивления трубопровода со стыками к сопротивлению трубопровода без стыков); l – расстояние между стыками (длина труб); d – диаметр труб; λ – коэффициент гидравлического трения трубопровода без стыков.

Значение коэффициента $\xi_{ст}$ в этой формуле можно принимать в зависимости от технологии сварки по таблице 6.6.

Потери напора в тройниках и крестовинах. *Тройником* называется деталь трубопровода, в которой происходит слияние или разделение потока. Тройники делятся на *приточные* (нагнетательные), когда жидкость из магистрали течет в ответвление (рис. 6.13), и *вытяжные* (всасывающие), когда жидкость поступает из ответвления в магистраль (рис. 6.14). Потери напора в тройниках возникают в результате отрыва потока от стенки с последующим расширением.

Введем следующие обозначения: M – массовый расход жидкости в трубе; d – диаметр трубы; u – скорость течения в ней; эти величины,

Таблица 6.6

Значения коэффициента $\xi_{ст}$ для различных видов сварных стыков

Вид стыка	Диаметр труб d , мм						
	200	300	400	500	600	700	800
С подкладными кольцами $\delta = 5$ мм	0,06	0,03	0,018	0,013	0,009	0,007	0,006
Электродуговые и контактные	0,026	0,014	0,009	0,006	0,004	0,003	0,002

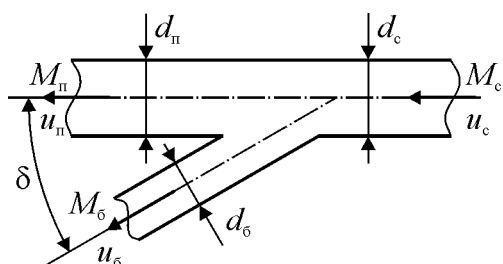


Рис. 6.13. Тройник приточный

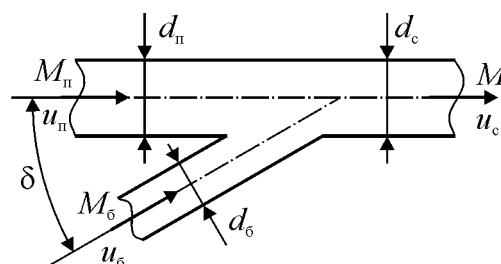


Рис. 6.14. Тройник вытяжной

относящиеся к боковому ответвлению, прямому проходу и сборному рукаву тройника, будем обозначать индексами б, п, и с, соответственно; через δ обозначим угол ответвления. Потери напора у потоков, идущих из бокового ответвления или обратно $h_{с.б}$ и прямого прохода тройника $h_{с.п}$, будем относить к скорости потока в сборном рукаве тройника и записывать их в виде

$$h_{с.б} = \xi_{с.б} u_c^2 / (2g), \quad h_{с.п} = \xi_{с.п} u_c^2 / (2g).$$

где $\xi_{с.б}$ и $\xi_{с.п}$ – коэффициенты сопротивления бокового ответвления и прямого прохода тройника, приведенные к скорости в сборном рукаве тройника.

Величина $\xi_{с.б}$ и $\xi_{с.п}$ зависит от угла δ , от соотношений площадей сечений ответвлений (боковых и прямого), от соотношения расходов жидкости в ответвлениях, а также от направления течения.

Несмотря на наличие ряда работ, посвященных расчету течения в тройниках, этот вопрос с теоретической точки зрения изучен еще недостаточно. Поэтому, обычно коэффициенты местных сопротивлений различного вида тройников находят по полуэмпирическим формулам, таблицам и графикам, полученных на основе экспериментов.

Так для *вытяжного* тройника (рис. 6.14), в наиболее простом и часто встречающемся на практике случае ($d_c = d_n$; $\delta = 90^\circ$), величины коэффициентов сопротивления прохода $\xi_{с.п}$ и бокового ответвления $\xi_{с.б}$ можно найти по формулам

$$\xi_{с.п}^{т.в} = 1,55 \frac{M_b}{M_c} - \left(\frac{M_b}{M_c} \right)^2, \quad (6.42)$$

$$\xi_{с.б}^{т.в} = A \left[1 + \left(\frac{M_b S_c}{M_c S_b} \right)^2 - 2 \left(1 - \frac{M_b}{M_c} \right)^2 \right], \quad (6.43)$$

где индекс т. в – тройник вытяжной; A – некоторый коэффициент, значение которого можно найти по таблице 6.7.

Например, при $S_c = S_b$, и $M_b/M_c = 0,1$, значение коэффициента бокового ответвления $\xi_{с.б}^{т.в}$, рассчитанное по формуле (6.43), равно

$$\xi_{с.б}^{т.в} = A \cdot (-0,61) = 0,9(1 - 0,1) \cdot (-0,61) \approx -0,5,$$

Таблица 6.7

Значение коэффициента A			
S_b/S_c	$\leq 0,35$	$> 0,35$	
M_b/M_c	$\leq 1,0$	$\leq 0,4$	$> 0,4$
A	1,0	$0,9(1 - M_b/M_c)$	0,55

т. е. коэффициент сопротивления получается отрицательным, что означает увеличение энергии жидкости в соответствующем направлении течения. Действительно, при $M_6 = 0,1M_c$ скорость течения $u_{\Pi} > u_c$; поэтому при слиянии струя прямого прохода (первая) увлекает за собой трением струю из ответвления (вторую) и передает ей часть своей энергии. В результате первая струя имеет большие потери напора, в то время как вторая не только их не имеет, но даже приобретает некоторый напор, и коэффициент ξ у нее становится отрицательным. С возрастанием величины отношения M_6/M_c коэффициент сопротивления увеличивается и приобретает постепенно положительное значение.

При изменении направления течения в боковом ответвлении, т. е. в случае, когда тройник является *приточным* (рис. 6.13), при $d_c = d_{\Pi}$ и $\delta = 90^\circ$, величины коэффициентов сопротивления бокового ответвления $\xi_{c.6}$ и прохода $\xi_{c.\Pi}$ определяются по формулам

$$\xi_{c.6}^{т.п} = 1 + \left(\frac{M_6 S_c}{M_c S_6} \right)^2, \quad (6.44)$$

$$\xi_{c.\Pi}^{т.п} = \tau_{\Pi} (M_6/M_c)^2, \quad (6.45)$$

где индекс т. п – тройник приточный; τ_{Π} – некоторый коэффициент, значение которого можно найти по таблице 6.8.

И еще один, часто встречающийся в практике тройник – это тройник симметричной формы (равносторонний) с резким углом поворота на 90° (рис. 6.15), который также может работать в режимах слияния и разделения потоков. Формулы для расчета коэффициента сопротивления бокового ответвления в симметричном тройнике при слиянии и разделении потоков, соответственно, имеют вид:

$$\xi_{1c.6}^{т.с} = A \left\{ 1 + (S_c/S_6)^2 + 3(S_c/S_6)^2 \left[(M_{16}/M_c)^2 - M_{16}/M_c \right] \right\}, \quad (6.46)$$

$$\xi_{1c.6}^{т.с} = 1 + 0,3 \left(\frac{M_{16} S_c}{M_c S_6} \right)^2. \quad (6.47)$$

Для другого бокового ответвления вместо индекса 1 применяется индекс 2. Коэффициент A находится по таблице 6.7.

Таблица 6.8

Значение коэффициента τ_{Π}			
S_6/S_c	$\leq 0,4$	$> 0,4$	
M_6/M_c	$\leq 1,0$	$\leq 0,5$	$> 0,5$
τ_{Π}	0,4	$2(2M_6/M_c - 1)$	$0,3(2M_6/M_c - 1)$

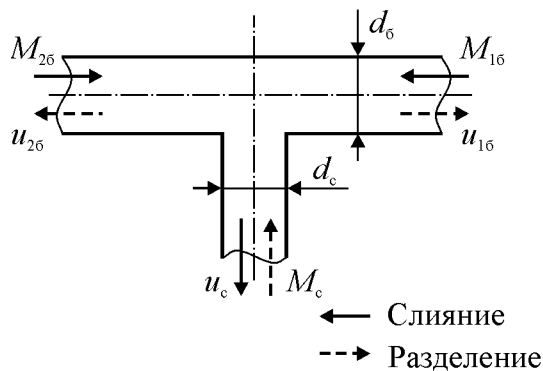


Рис. 6.15. Тройник симметричный

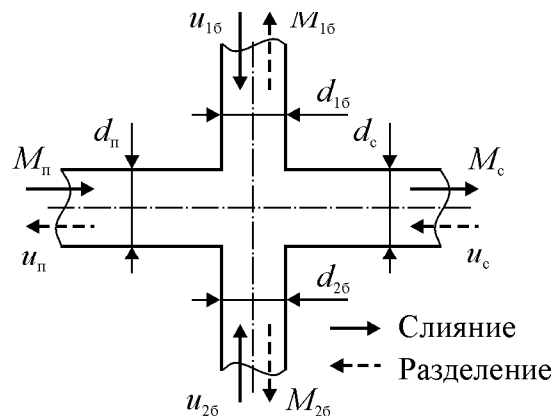


Рис. 6.16. Крестовина

Крестовины (рис. 6.16), как и тройники, подразделяются на *вытяжные*, когда в них происходит слияние потоков, и *приточные*, когда потоки в них разделяются.

Характер потока в крестовинах в основном аналогичен потоку в тройниках. Так коэффициенты сопротивления крестовин при делении потока (приточные крестовины) определяются ориентировочно как для приточных тройников, т. е. по формулам (6.44) и (6.45).

Информацию для расчета потерь напора в других, нерассмотренных в данном параграфе, видах соединительных устройств и арматуры можно найти в специализированных справочниках по гидравлическим сопротивлениям, например [7].

* * *

Таким образом, в § 6:

- Рассмотрены такие понятия, как степень сжатия и расширения потока, коэффициент сжатия струи, конфузор, диффузор и тройник.
- Приведены формулы расчета местных потерь напора в случае внезапного расширения (формула Борда), сужения, а также постепенного расширения и сужения потока. Даны выражения Жуковского и Альтшуля для расчета коэффициента сжатия струи.
- Рассмотрены особенности расчета потерь напора при изменении направления потока, т.е. в различного рода коленах, отводах.
- Приведены выражения для расчета потерь напора в арматуре (дросселях и кранах) трубопровода, на стыках труб, а также в тройниках и крестовинах.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Сформулируйте понятие эквивалентной длины. Приведите выражение, связывающее ее с коэффициентами сопротивлений. Какие группы местных потерь Вы знаете?

2. Раскройте понятия коэффициента сжатия струи, степени сжатия и расширения потока, конфузора и диффузора. Приведите выражение для приближенного определения степени сжатия струи.
3. Напишите формулы для расчета потерь напора при внезапном расширении и сужении потока. Как изменятся эти формулы, если расширение и сужение потока будет постепенным.
4. Чем обусловлены потери напора при изменении направления потока? Приведите формулу для определения коэффициент местного сопротивления колена.
5. Как с гидравлической точки зрения действуют краны, клапаны, дроссели? Напишите формулу для оценки местного сопротивления, вызванного стыками.
6. Сформулируйте понятие тройника. Чем отличаются приточные и вытяжные тройники и крестовины? Какие параметры влияют на величину коэффициентов местных сопротивлений тройников и крестовин?

Задача 1. В качестве нагревательных приборов системы отопления цеха использованы стальные трубы $d_1 = 100$ мм. Стояк, подводящий нагретую воду, и соединительные линии, выполнены из труб $d_2 = 25$ мм и приварены к торцу труб d_1 . Определить потери давления при внезапном расширении трубопроводов, если скорость движения горячей воды в подводящих линиях $u = 0,3$ м/с, а температура воды $t = 80^\circ\text{C}$. Как изменятся потери давления, если трубы соединить диффузором с углом конусности $\alpha = 15^\circ$ и шероховатостью $K = 0,15$ мм?

Ответ: $\Delta p \approx 38$ Па; уменьшатся примерно в 2,5 раза.

Задача 2. В трубопроводе по перекачке воды для деления потока установлена приточная крестовина. Определить величину потери давления потока в прямом проходе и в боковых ответвлениях относительно сборного рукава крестовины, если известно: угол боковых ответвлений $\delta = 90^\circ$; $d_{61} = d_{62} = d_6 = 10$ см; $d_c = d_{\text{п}} = 15$ см, $M_c = 100$ т/ч, $M_6/M_c = 0,35$, температура воды $t = 20^\circ\text{C}$.

Ответ: $\Delta p_{c,6} \approx 2$ кПа; $\Delta p_{c,\text{п}} \approx -0,18$ кПа

Задача 3. Для повышения избыточного давления на трубопроводе диаметром $d = 0,1$ м установлена дроссельная шайба (диафрагма) $d_0 = 0,05$ м. Определить величину потери давления в шайбе, если скорость воздуха в трубопроводе составляет $u = 20$ м/с, а температура $t = 20^\circ\text{C}$.

Ответ: $\Delta p \approx 7,2$ кПа

ГЛАВА 3. ОРГАНИЗАЦИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В РАЗДЕЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССАХ

§7. ОРГАНИЗАЦИЯ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В РАЗДЕЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССАХ

7.1. Расчет трубопроводов для несжимаемой жидкости

Одной из распространенных операций при организации процессов разделения является транспорт разнообразных жидкостей из одного разделительного аппарата в другой, а в рамках предприятия – из цеха в цех, между цехами и хранилищами (сырья и готовой продукции). Транспорт жидкости осуществляется обычно по закрытым трубопроводам, протяженность которых варьируется в широких пределах: от метров до километров. Объем транспортируемых жидкостей зависит от масштабов производства. Во всех случаях нужно знать или рассчитать основные параметры трубопровода – объемный расход, напор и диаметр.

Для удобства рассмотрения вопроса о способах расчета трубопровода делят на две основные группы: простые и сложные.

Простой трубопровод. *Простым* называется трубопровод, состоящий из одной линии труб, хотя бы и различного диаметра, но с одинаковым расходом по пути; все другие трубопроводы – *сложные*. Простой трубопровод, пространственно распложенный часто во всех трех измерениях, обычно состоит из ряда прямолинейных участков разной длины, соединенных для изменения направления потока коленами, и содержит запорные и регулирующие устройства (задвижки, вентили и т. п.).

Гидравлические расчеты простого трубопровода сводятся к трем основным задачам:

В первой для заданных расположения трубопровода, длины труб, диаметра требуется определить перепад напора H , необходимый для пропускания заданного расхода Q .

Во второй при тех же прочих условиях требуется определить расход Q , если задан перепад напора H .

В третьей ставится задача об определении диаметра d , если все остальные параметры трубопровода известны.

Пусть трубопровод состоит из труб одного диаметра; при этом могут иметь место два случая: истечение в атмосферу и истечение под уровень (рис. 7.1 а и б). Напишем уравнение Бернулли для обеих схем.

При истечении в атмосферу уравнение Бернулли, записываемое для сечений на поверхности воды в резервуаре и на выходе из трубы, имеет вид

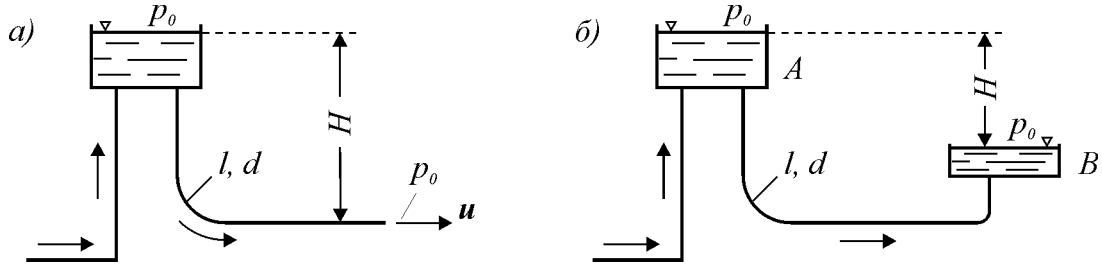


Рис. 7.1. К расчету простого трубопровода:
 а – истечение в атмосферу; б – истечение под уровень

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2g} = z + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{u^2}{2g} + \sum \xi \frac{u^2}{2g}.$$

Пренебрегая здесь слагаемым с u_0 (считая, что уровень жидкости в баке практически не меняется) и, обозначая $z_0 - z = H$, получим

$$H = \frac{u^2}{2g} \left(1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \xi \right). \quad (7.1)$$

При истечении под уровень имеем аналогично

$$z_A + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_B^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{u^2}{2g} + \sum \xi \frac{u^2}{2g} + \frac{(u - u_B)^2}{2g}$$

В этом уравнении в отличие от предыдущего местные сопротивления оценены двумя слагаемыми $\sum \xi \cdot u^2 / (2g)$ и $(u - u_B)^2 / (2g)$; первое слагаемое так же, как и в предыдущем случае, учитывает потери напора на протяжении трубопровода, начиная от потерь при входе из резервуара A в трубу и до конца трубы, за исключением потерь напора при входе в резервуар B . Эти последние потери оценены вторым слагаемым.

Пренебрегая, как и в первом случае, величиной u_A и u_B , получим

$$z_A - z_B = H = \frac{u^2}{2g} \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \xi + 1 \right). \quad (7.1a)$$

Сравнивая формулы (7.1) и (7.1a), видим, что они тождественны по написанию, поэтому гидравлические расчеты для обеих схем трубопровода будут одинаковыми. Различие между этими формулами только в том, что при истечении под уровень «единица», стоящая в скобках в правой части, представляет собой коэффициент сопротивления «на выходе», а при истечении в атмосферу она учитывает кинетическую энергию, оставшуюся в потоке при выходе из трубопровода. Таким образом, напор H при истечении под уровень равен сумме всех сопротивлений

$$H = \sum h_u,$$

при истечении же в атмосферу он делится на две части: кинетическую энергию, уносимую потоком из трубы, и сумму потерь напора

$$H = u^2/(2g) + \Sigma h_u.$$

Перейдем к решению трех основных задач. В первой из них требуется определить напор в начальном сечении трубопровода при известных длине трубопровода l , диаметре d и расходе Q . Он определяется путем прямого вычисления по формуле (7.1), вычисляя предварительно скорость u из уравнения расхода $Q = uS = u\pi d^2/4$.

Тогда искомый напор равняется

$$H = \frac{16Q^2}{2g\pi^2 d^4} \left(1 + \lambda \frac{l}{d} + \Sigma \xi \right). \quad (7.2)$$

Определение коэффициентов λ и ξ производится, следуя указаниям главы 2, и в данной задаче не вызывает затруднений, так как число Рейнольдса заранее известно.

Вторая задача – об определении пропускной способности трубопровода, т. е. расхода Q при условии, что известны напор H , длина трубы l и диаметр трубопровода d , – решается при посредстве формулы (7.2), согласно которой получаем

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gH}{1 + \lambda \frac{l}{d} + \Sigma \xi}}. \quad (7.3)$$

Однако прямое вычисление здесь затруднено, так как коэффициенты λ и ξ являются функциями числа Рейнольдса, которое связано с неизвестным (искомым) в данной задаче расходом Q .

Решение находится путем итераций, полагая в первом приближении квадратичный закон сопротивления, при котором коэффициенты λ и ξ не зависят от числа Re. Кроме того, для облегчения расчета коэффициенты местные потери напора часто выражают через эквивалентную длину l_ξ , в соответствии с формулой (6.1).

Решение третьей задачи, когда требуется определить диаметр трубопровода при заданных расходе Q , длине трубопровода l и напоре H , производится при посредстве формулы (7.3).

Здесь также имеются трудности с вычислениями и значительные, так как не только число Re неизвестно, но по отношению к искомому диаметру d уравнение оказывается уравнением высших степеней, не приводимым к логарифмическому виду или даже трансцендентному.

Поэтому решение задачи осуществляем путем итераций, полагая в первом приближении, как и ранее, квадратичный закон сопротивлений.

При квадратичном законе коэффициенты λ и ξ являются функциями диаметра (шероховатость стенок трубы предполагается известной).

Имея это в виду, уравнение (7.3) можно привести к виду

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gH}{1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \xi}} = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gH}{1 + f_1(d) \frac{l}{d} + \sum f_2(d)}} = F(d). \quad (7.4)$$

Задача решается наиболее просто графическим способом, заключающимся в следующем: задаваясь рядом значений диаметра d_1, d_2, \dots, d_n и вычисляя по (7.4) соответственно ряд значений расхода Q_1, Q_2, \dots, Q_n , строим график $Q = f(d)$ (рис. 7.2), из которого определяется диаметр, отвечающий заданному расходу.

Отметим, что если найденное значение диаметра окажется не совпадающим ни с одним из принятых по стандарту, то принимается диаметр по стандарту, ближайший к расчетному.

Рассмотрим теперь простой трубопровод, составленный из труб разного диаметра (рис. 7.3), уложенных в одну линию одна вслед за другой (последовательное соединение труб). Уравнение Бернулли для этого случая можно написать в виде

$$z_A - z_B = H = h_{u1} + h_{u2} + \dots + h_{un},$$

где $h_{u1}, h_{u2}, \dots, h_{un}$ – потери напора на 1-м, 2-м и т.д. участках трубопровода.

Потери напора h_{u1} на 1-м участке с диаметром трубы d_1 равняются

$$h_{u1} = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{u_1^2}{2g} + \sum \xi \frac{u_1^2}{2g} = \frac{u_1^2}{2g} \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \sum \xi \right) = \frac{8Q^2}{g\pi^2} \cdot \frac{1}{d_1^4} \left(\frac{\lambda_1 l_1}{d_1} + \sum \xi \right).$$

Аналогично для последующих участков

$$h_{u2} = \frac{8Q^2}{g\pi^2} \cdot \frac{1}{d_2^4} \left[\frac{\lambda_2 l_2}{d_2} + \sum \xi \right]; \quad h_{un} = \frac{8Q^2}{g\pi^2} \cdot \frac{1}{d_n^4} \left[\frac{\lambda_n l_n}{d_n} + \sum \xi + 1 \right].$$

В последнем равенстве в скобках добавлено третье слагаемое, единица учитывает потери напора на выход (как об этом сказано выше).

Таким образом, расчетным уравнением является

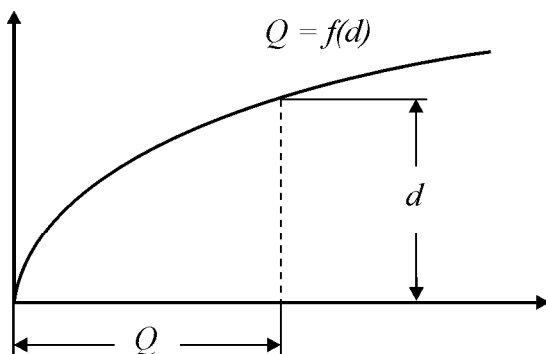


Рис. 7.2. График зависимости расхода в трубопроводе от его диаметра

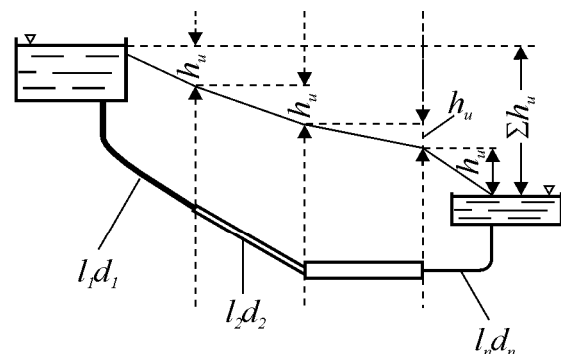


Рис. 7.3. Простой трубопровод из труб разного диаметра

$$H = \frac{8Q^2}{g\pi^2} \left[\frac{1}{d_1^4} \left(\frac{\lambda_1 l_1}{d_1} + \sum \xi \right) + \frac{1}{d_2^4} \left(\frac{\lambda_2 l_2}{d_2} + \sum \xi \right) + \dots + \frac{1}{d_n^4} \left(\frac{\lambda_n l_n}{d_n} + \sum \xi + 1 \right) \right]. \quad (7.5)$$

Уравнение (7.5) показывает, что решение первой и второй задач будет таким же, как для трубопровода постоянного диаметра. Третья же задача, если в ней потребовать определения всех диаметров для всех участков, становится неопределенной, так как в этом случае уравнение (7.5) содержало бы n неизвестных. Очевидно, что для определенности решения надо задавать диаметры труб для всех участков, кроме одного.

Во многих случаях можно пренебрегать местными сопротивлениями и скоростным напором на выходе; тогда в случае квадратичного закона сопротивлений расчеты существенно упрощаются.

Действительно, в этих условиях уравнения (7.1) и (7.1а) имеют вид

$$H = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{u^2}{2g},$$

уравнения (7.2) и (7.3) вид

$$H = \frac{16\lambda}{2g\pi^2 d^5} Q^2 l \quad \text{и} \quad Q = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gHd}{\lambda}}$$

или

$$H = A Q^2 l, \quad (7.6)$$

$$Q = \sqrt{\frac{H}{Al}}, \quad (7.7)$$

где введено обозначение

$$A = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5}. \quad (7.8)$$

Уравнение же (7.5) получает вид

$$H = Q^2 \left[\frac{8\lambda_1}{g\pi^2 d_1^5} l_1 + \frac{\lambda_2}{g\pi^2 d_2^5} l_2 + \dots + \frac{8\lambda_n}{g\pi^2 d_n^5} l_n \right] = Q^2 [A_1 l_1 + A_2 l_2 + \dots + A_n l_n] \quad (7.9)$$

или

$$Q = \sqrt{\frac{H}{A_1 l_1 + A_2 l_2 + \dots + A_n l_n}}. \quad (7.10)$$

Для данной шероховатости стенок трубы коэффициент A , называемый *удельным сопротивлением*, является функцией диаметра, а потому

может быть заранее вычислен для каждого диаметра d , входящего в установленный стандарт. В результате можно составить таблицу значений коэффициента A для всех стандартных значений диаметра труб. Наличие такой таблицы (например, таблица 7.1) существенно облегчает расчет для всех рассмотренных случаев простого водопровода.

Метод расчета, основанный на использовании понятия «удельного сопротивления», предложенный проф. Лобачевым, применяется далее при расчетах сложного трубопровода.

Сложный трубопровод. Сложные трубопроводы могут представлять собой разомкнутые или замкнутые сети. Гидравлический расчет таких сетей с учетом переменного во времени расхода в соответствии с производственными требованиями эксплуатации той или иной системы представляет очень сложную задачу. Такие расчеты рассматриваются в специальных курсах. Здесь будем рассматривать только простейшие схемы, являющиеся элементами сложных систем.

Из множества возможных схем сложного трубопровода рассмотрим основные: параллельное соединение, течение с непрерывной раздачей расхода по пути и разветвленный трубопровод (именуемый иногда тупиковым); эти схемы можно рассматривать, в качестве элементов более сложных сетей, встречающихся в практике.

Рассмотрим эти задачи в условиях, когда удельное сопротивление трубопровода A является функцией только диаметра трубы.

Параллельное соединение (рис. 7.4) – это случай, когда трубопровод в некоторой точке A разветвляется на несколько труб, которые затем вновь объединяются в точке B ; расход Q основного трубопровода до деления и после объединения труб, очевидно, один и тот же.

Основной задачей при расчете трубопровода с параллельным соединением является определение расходов Q_1, Q_2, \dots, Q_n параллельных труб

Таблица 7.1
Значения удельного сопротивления A
при $\lambda = 0,11(K/d)^{1/4}$, где $K = 0,1$ мм

d , м	$S, \pi d^2/4, \text{м}^2$	λ	A
0,1	0,0079	0,0192	158,6
0,15	0,0177	0,0177	19,15
0,2	0,0314	0,0164	4,21
0,25	0,0491	0,0155	1,32
0,3	0,0707	0,0148	0,504
0,4	0,1257	0,0138	0,111
0,5	0,196	0,013	0,0346

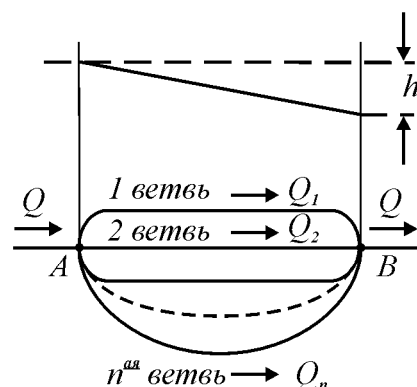


Рис. 7.4. Трубопровод с параллельным соединением

и в определении перепада напора между точками A и B , если известны общий расход Q , диаметры и длины параллельных труб (d_1, d_2, \dots, d_n и l_1, l_2, \dots, l_n).

Поскольку величина потерь напора для каждой параллельной ветви одна и та же, равная $h_u = H_1 - H_2$, то для первой ветви можно написать

$$h_u = \lambda_1 \frac{l_1 u_1^2}{d_1 2g} + \sum \xi_1 \frac{u_1^2}{2g} = Q_1^2 \left[\lambda_1 \frac{l_1}{d_1 2g S_1^2} + \sum \xi_1 \frac{1}{2g S_1^2} \right]$$

или, обозначая выражение, стоящее в скобках, буквой B_1 :

$$h_u = B_1 Q_1^2.$$

Аналогично для других ветвей

$$\begin{aligned} h_u &= B_2 Q_2^2; \\ &\dots\dots\dots \\ h_u &= B_n Q_n^2. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Так получаются n уравнений (по числу веток трубопровода). Но в этих уравнениях число неизвестных равняется $(n + 1)$: это искомые расходы и потерянный напор h_u . Следовательно, система (7.11) должна быть дополнена еще одним уравнением.

Таким недостающим уравнением является

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n. \tag{7.12}$$

Решение производится в следующем порядке. Из системы (7.11) определяем все расходы выраженными через один из них, например, через расход Q_1 , получая систему

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q_1 \sqrt{B_1/B_2}; \\ &\dots\dots\dots \\ Q_n &= Q_1 \sqrt{B_1/B_n}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Делая подстановку в уравнение (7.12), получим

$$Q = Q_1 + Q_1 \sqrt{B_1/B_2} + \dots + Q_1 \sqrt{B_1/B_n}, \tag{7.14}$$

откуда определяется расход первой ветви Q_1 , как

$$Q_1 = \frac{Q}{1 + \sum_{i=2}^n \sqrt{B_1/B_i}}, \tag{7.15}$$

После этого можно определить последовательно

$$Q_2 = Q_1 \sqrt{B_1/B_2}, \dots, Q_n.$$

Потерянный напор H найдем по одному из уравнений системы (7.11), например

$$H = Q_1^2 B_1.$$

Приведенное решение предполагает квадратичный закон сопротивлений.

Для проверки этого предположения определяем число Re для каждой из ветви в отдельности (по найденным расходам $Q_1, Q_2 \dots$). Для первой ветви получаем

$$Re = \frac{u_1 d_1}{\nu} = \frac{Q_1 d_1^4}{\pi d_1^2 \nu} = \frac{4Q_1}{\pi d_1 \nu};$$

для второй

$$Re = \frac{4Q_2}{\pi d_2 \nu} \quad \text{и т. д.}$$

По найденным числам Re можно уточнить все коэффициенты сопротивлений по длине λ и коэффициенты местных сопротивлений ξ и затем уточнить значения коэффициентов B_1, B_2, \dots, B_n . Повторяя расчет аналогично тому, как уже указано, но при уточненных коэффициентах B_1, B_2, \dots, B_n , найдем уточненные расходы:

$$Q'_1 = \frac{Q}{1 + \sum \sqrt{\frac{B'_i(Re_i)}{B'_1(Re_1)}}}, \quad \text{затем } Q'_2 = Q'_1 \sqrt{\frac{B'_1(Re_1)}{B'_2(Re_2)}} \quad \text{и т. д.}$$

для всех ветвей. При необходимости можно внести дальнейшие уточнения повторным аналогичным расчетом.

Непрерывная раздача по пути – случай, когда на некотором участке трубопровода производится непрерывный отвод жидкости из трубы. Очевидно, что при этом расход вдоль трубы непрерывно уменьшается и движение жидкости происходит с переменным расходом $Q \neq \text{const}$. Поэтому основным вопросом является определение величины потерянного напора.

Пусть на участке $A - B$ трубопровода (рис. 7.5) происходит непрерывный отток, так что расход в трубе уменьшается на величину q на единице длины трубы. Если расход трубопровода в точке A равен Q_0 , а длина участка трубопровода, на котором происходит раздача расхода, равна l , то отток воды на длине l – сбросной расход – равняется $Q_{\text{сбр}} = ql$, а расход, остающийся в трубопроводе ниже точки B , равняется $Q_{\text{тр}} = Q_0 - ql$; этот расход называют *транзитным*.

Определим величину потерянного напора на участке от A до B .

На расстоянии x от узла A расход Q_x равняется

$$Q_x = Q_0 - qx.$$

На элементарном пути dx потеря напора равна

$$dh_u = A Q_x^2 dx,$$

где A – удельное сопротивление трубопровода.

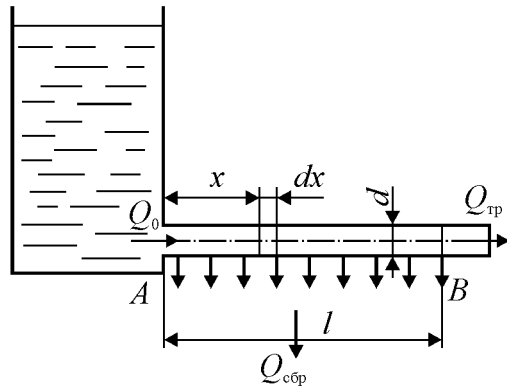


Рис. 7.5. Трубопровод с непрерывной раздачей по пути

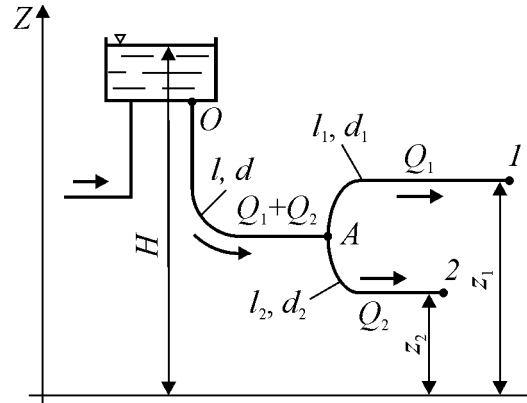


Рис. 7.6. Трубопровод с разветвлением в одной точке

Подставляя вместо Q_x его значение $(Q_0 - qx)$, получим

$$dh_u = A(Q_0 - qx)^2 dx = A(Q_0^2 - 2Q_0 qx + q^2 x^2) dx.$$

Интегрируя от $x = 0$ до $x = l$ (т. е. для участка трубы $A - B$), находим

$$h_u = A(Q_0^2 l - Q_0 ql^2 + q^2 l^3/3),$$

а так как $ql = Q_{сбр}$, то

$$h_u = A(Q_0^2 - Q_0 Q_{сбр} + Q_{сбр}^2/3) l. \quad (7.16)$$

В частном случае, когда на данном участке сбрасывается весь расход, т. е. транзитный расход $Q_{тр} = 0$, потерянный напор будет равен:

$$h_u = A(Q_0^2 - Q_0 Q_0 + Q_0^2/3) l = A Q_0^2 l/3. \quad (7.17)$$

Эта формула показывает, что в случае непрерывной раздачи расхода из трубопровода потерянный напор в три раза меньше того, который имел бы место в случае отсутствия раздачи.

Разветвленным называется трубопровод, обеспечивающий одновременную подачу жидкости в несколько точек. Схема простого такого трубопровода приведена на рис. 7.6.

Основными задачами являются: определение конечных расходов Q_1 и Q_2 при заданном напоре в начальном сечении или определение напора при заданных конечных расходах Q_1 и Q_2 . Для примера возьмем первую задачу. Уравнение Бернулли для потоков по линии от начального сечения магистральной трубы до выходного сечения первой ветви вдоль линии $O-A-1$ и до выходного сечения второй ветви вдоль линии $O-A-2$ можно записать:

$$H = z_1 + h_{u0} + h_{u1}, \quad (7.18)$$

$$H = z_2 + h_{u0} + h_{u2}, \quad (7.19)$$

где h_{u0} – потери напора на участке $O-A$ (магистраль); h_{u1} и h_{u2} – потери напора на первой и второй ветви, соответственно.

Так как расход на магистрали равен $(Q_1 + Q_2)$, то потери напора на магистрали равняются

$$h_{u0} = \frac{u^2}{2g} \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \xi \right) = \frac{8(Q_1 + Q_2)^2}{g\pi^2 d^4} \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \xi \right) \text{ или } h_{u0} = B(Q_1 + Q_2)^2,$$

где $B = \frac{8}{g\pi^2 d^4} \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \xi \right) = Al + \frac{8}{g\pi^2 d^4} \sum \xi$; A – удельное сопротивление трубопровода, определяемое по формуле (7.8).

Аналогично

$$h_{u1} = \frac{8Q_1^2}{g\pi^2 d_1^4} \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \sum \xi \right) = A_1 l_1 + \frac{8}{g\pi^2 d_1^4} \sum \xi = B_1 Q_1^2;$$

$$h_{u2} = \frac{8Q_2^2}{g\pi^2 d_2^4} \left(\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \sum \xi \right) = A_2 l_2 + \frac{8}{g\pi^2 d_2^4} \sum \xi = B_2 Q_2^2.$$

При отсутствии же местных сопротивлений или пренебрежении ими в сравнении с потерями по длине

$$B = Al; \quad B_1 = A_1 l_1; \quad B_2 = A_2 l_2.$$

Тогда уравнения (7.18) и (7.19) примут вид:

$$H = z_1 + Al(Q_1 + Q_2)^2 + A_1 l_1 Q_1^2, \quad (7.20)$$

$$H = z_2 + Al(Q_1 + Q_2)^2 + A_2 l_2 Q_2^2. \quad (7.21)$$

Решая эту систему, находим концевые расходы Q_1 и Q_2 .

7.2. Гидравлический удар в трубах

При неустановившемся движении жидкости в трубах изменение во время скорости течения приводит к колебаниям давления, которое называется *гидравлическим ударом*. Теория этого явления разработана Н. Е. Жуковским. Простейшим случаем гидравлического удара является *прямой удар*, наблюдаемый при мгновенном перекрытии трубы.

Рассмотрим трубопровод длиной l и сечением S , по которому со скоростью u_0 течет жидкость, находящаяся под давлением p_0 (рис. 7.7 а). При резком (мгновенном) закрытии задвижки ближайшие в ней частицы останавливаются. Их *кинетическая энергия переходит в работу сжатия жидкости и деформации стенок трубы*. Граница раздела сжатого остановившегося объема жидкости – *ударная волна* – распространяется навстречу втекающей невозмущенной жидкости.

Пусть за время Δt ударная волна проходит путь Δl . Скорость и давление по длине трубы в момент времени, отделенный интервалом Δt от момента закрытия задвижки, представлены графически на рис. 7.7 б, в. Из рисунка ясно, что ударная волна является поверхностью разрыва для скорости и давления в трубе.

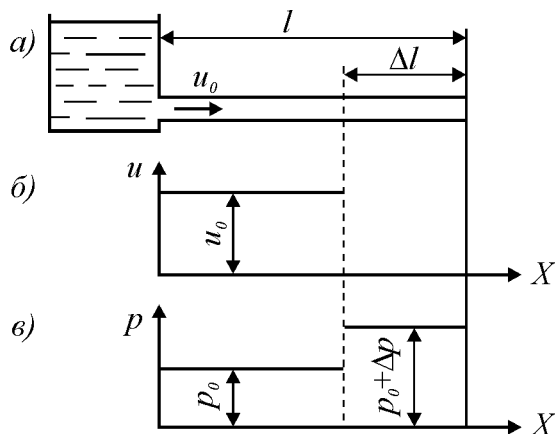


Рис. 7.7. К расчету скорости ударной волны: а – схема трубопровода; б, в – графики изменения скорости и давления, соответственно

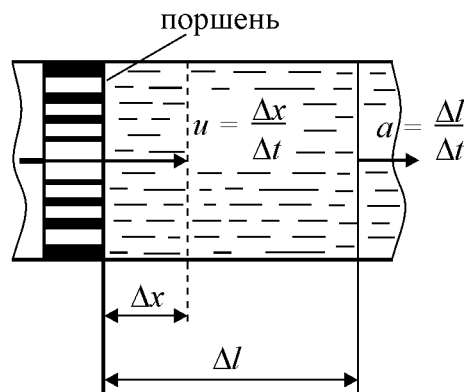


Рис. 7.8. Схема формирования поршнем возмущения сжатия в трубе с жидкостью

Определим величину ударного давления Δp , т.е. превышение давления в сжатом объеме над начальным давлением p_0 . Для этого применим к объему остановленной жидкости $S\Delta l$ теорему об изменении импульса:

$$\Delta(mu)/\Delta t = f. \quad (7.22)$$

Вследствие малой сжимаемости капельных жидкостей и большой жесткости стенок трубы можно считать, что масса жидкости за время Δt внутри остановившегося объема не изменялась; она равна $m = \rho S\Delta l$. Изменение скорости составляет $\Delta u = u_0 - 0 = u_0$. Сила f , вызванная изменением импульса, есть разность давлений на торцевых поверхностях выбранного объема:

$$f = (p_0 + \Delta p) S - p_0 S = \Delta p S.$$

Подставляя эти величины в уравнение (7.22), имеем

$$\rho u_0 \Delta l / \Delta t = \Delta p. \quad (7.23)$$

Учитывая, что $\Delta l / \Delta t = c$ есть скорость распространения ударной волны, получаем формулу Жуковского:

$$\Delta p = \rho u_0 c. \quad (7.24)$$

Отметим, что величина ударного давления при прямом ударе не зависит от длины трубы l .

В тоже время скорость c зависит от упругих свойств жидкости и трубопровода. В трубе с абсолютно жесткими стенками скорость ударной волны равна скорости распространения упругих колебаний (звука). Выведем ее величину.

Представим себе, что в жидкость, заполняющую трубу (рис. 7.8) и имеющую модуль объемной упругости E , вносится возмущение сжатия за счет движения поршня. Пусть за время Δt после начала движения поршень проходит путь Δx . За то же время волна сжатия, которая

отделяет невозмущенную, покоящуюся жидкость от начавшей двигаться со скоростью поршня, проходит расстояние Δl . Мы предполагаем, что возмущение слабое, т. е. $\Delta x \ll \Delta l$.

Сила, с которой поршень сжимает возмущенный объем, пропорциональна его относительному сжатию

$$f = E S \Delta x / \Delta l. \quad (7.25)$$

С другой стороны, эту силу можно определить по изменению импульса в объеме $S \Delta l$, применяя уравнение (7.22). Поскольку возмущение слабое, плотность можно считать неизменной и $m = \rho S \Delta l$.

Изменение скорости:

$$\Delta u = \frac{\Delta x}{\Delta t} - 0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Следовательно,

$$f = \frac{\Delta(mu)}{\Delta t} = \frac{\rho S \Delta l \Delta x}{\Delta t},$$

что совместно с (7.25) дает

$$\frac{E}{\rho} = \left(\frac{\Delta l}{\Delta t} \right)^2.$$

Но $\Delta l / \Delta t$ есть скорость распространения волны возмущения в неподвижной жидкости a . Следовательно,

$$a = \sqrt{E/\rho}. \quad (7.26)$$

Исключим из уравнения (7.26) модуль объемной упругости жидкости E . По закону Гука, изменение объема $V = S \Delta l$ связано с изменением давления Δp соотношением:

$$\Delta V = -\frac{1}{E} \Delta p V,$$

или

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{E}. \quad (7.27)$$

Поскольку масса жидкости внутри возмущенного объема не меняется при прохождении волны сжатия (уменьшение объема компенсируется увеличением плотности), очевидно, что $\rho V = \text{const}$. Логарифмируя и дифференцируя это равенство, получаем:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}.$$

Сравнивая с выражением (7.27), имеем:

$$\frac{E}{\rho} = \frac{dp}{d\rho}. \quad (7.28)$$

С учетом (7.28), формула (7.26) для скорости звука примет вид:

$$a = \sqrt{dp/d\rho}. \quad (7.29)$$

Как видим, скорость звука зависит от отношения возмущений давления и плотности. Она определяется физическими свойствами жидкости (формула (7.26)). Для воды, например, скорость звука равна примерно 1420 м/с, для нефти – около 1200 м/с.

В случае трубы с деформируемыми стенками скорость ударной волны несколько меньше скорости звука. Она определяется формулой

$$c = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{Ed}{E_{ст}\delta}}} = \sqrt{\frac{E/\rho}{1 + \frac{Ed}{E_{ст}\delta}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{E} + \frac{\rho d}{E_{ст}\delta}}}, \quad (7.30)$$

где $E_{ст}$ – модуль объемной упругости (модуль Юнга) для материала стенки трубы, d – диаметр, δ – толщина стенки.

7.3. Расчет трубопроводов для газов

Продукты, участвующие в процессе разделения, могут находиться как жидкой, так в газовой фазах, поэтому рассмотрим особенности расчета трубопроводов, используемых для транспортировки газов.

Под углом зрения гидравлических расчетов различают два случая течения газа: течение при малых относительных перепадах давления и течение при больших перепадах (имеется в виду перепад Δp между начальным и конечным сечениями труб, отнесенный к среднему давлению). В первом случае, возможно, пренебрегать сжимаемостью газов, т. е. считать объемный вес транспортируемого газа неизменным по всей длине трубопровода; тогда расчеты газопроводов принципиально не отличаются от расчетов для несжимаемых жидкостей. При больших относительных перепадах (примерно, если $\Delta p/p > 5\%$) пренебрегать сжимаемостью газа нельзя и нужно учитывать непрерывный характер изменения объемного веса газа в зависимости от давления.

Течение газа при малых перепадах давления. При расчете течения газа в трубах обычно рассматривают потери не напора, а давления.

Формулы для определения потерь на трение и местных потерь в этом случае примут вид

$$\Delta p_{тр} = \gamma \cdot h_{тр} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{u^2}{2g} \gamma = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{u^2}{2} \rho, \quad (7.31)$$

$$\Delta p_{м} = \gamma \cdot h_{м} = \xi \cdot \frac{u^2}{2g} \gamma = \xi \cdot \frac{u^2}{2} \rho, \quad (7.32)$$

здесь Δp – потерянное давление; γ – средний объемный вес газа

$$\gamma = \frac{P_{\text{ср}}}{RT} = \frac{p_1 + p_2}{2RT},$$

где p_1 и p_2 – значения давления в концевых сечениях трубопровода.

Тогда уравнение Бернулли при расчете трубопроводов для газов при малых перепадах давления запишется в виде

$$p_1 + \rho \frac{u_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{u_2^2}{2} + \Delta p_{\text{пот}}. \quad (7.33)$$

Если трубы имеют некруговое сечение, то вместо диаметра вводится эквивалентный диаметр.

При расчетах вентиляции потери на местные сопротивления имеют, как правило, большую величину, чем потери на трение. В длинных газопроводах, наоборот, потери давления на местные сопротивления невелики по сравнению с потерями давления на трение, и можно полагать

$$\Delta p_{\text{пот}} \cong \Delta p_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{u^2}{2g} \gamma. \quad (7.34)$$

Коэффициент гидравлического трения λ , входящий в эту формулу, определяется по тем же формулам, что и для несжимаемых жидкостей.

Расчет газопровода при больших перепадах давления. В этом случае нельзя без больших погрешностей полагать объемный вес газа постоянным по длине трубопровода; кроме того, даже при сохранении постоянства диаметра по длине газопровода движение газа в таких трубопроводах является неравномерным. Действительно, в соответствии с уравнением неразрывности

$$\rho S u = \text{const} \quad \text{или, при } S = \text{const}, \rho u = \text{const}.$$

Но давление газа по длине газопровода уменьшается, т.е. уменьшается его плотность, следовательно, возрастает скорость течения газа, которая в конце газопровода всегда выше, чем в его начале.

При расчетах таких газопроводов можно пренебрегать не только изменениями удельной энергии положения в уравнении Бернулли, но также изменениями удельной кинетической энергии газа.

Поэтому при расчетах движения газов с большими перепадами давления уравнение Бернулли сводится к зависимости (для бесконечно малого участка трубопровода, на котором объемный вес газа и скорость его течения можно считать постоянными)

$$-dp = dp_{\text{тр}}. \quad (7.35)$$

С учетом формулы Дарси-Вейсбаха формула (7.35) получает вид

$$-dp = \lambda \frac{dl}{D} \cdot \frac{u^2}{2g} \gamma. \quad (7.36)$$

Для интегрирования этого уравнения нужно знать зависимости $\gamma = f(l)$, $u = f_1(l)$ и $\lambda = f_2(l)$, которые определяются термодинамическими процессами, имеющими место при движении газа по трубопроводу.

Для коэффициента гидравлического трения λ , как известно, имеет место зависимость

$$\lambda = f(\text{Re}; K/d).$$

Относительная шероховатость по длине газопровода не меняется. Число Рейнольдса можно выразить через весовой расход G в виде

$$\text{Re} = \rho u d / \mu = 4G / (g \mu \pi d).$$

При изотермическом течении $\mu = \text{const}$ по длине трубопровода, следовательно, неизменно и число Рейнольдса. Таким образом, несмотря на изменение средней скорости течения газа и его объемного веса, величина λ вдоль газопровода не меняется. При $S = \text{const}$, скорость u и плотность ρ в любом сечении газопровода связаны со скоростью и плотностью в начальном сечении u_1 и ρ_1 уравнением неразрывности: $u = u_1 \rho_1 / \rho$. Подставляя это выражение в (7.36), получим

$$dp = \lambda \frac{dl}{D} \cdot \frac{\rho_1^2}{\rho} \cdot \frac{u_1^2}{2}. \quad (7.37)$$

С другой стороны из уравнения состояния газа

$$\rho = p / (gRT), \quad (7.38)$$

имеем

$$\frac{\rho_1^2}{\rho} = \frac{p_1^2}{pgRT},$$

в соответствии с чем (7.37) можно привести к виду

$$-pdp = \left(\frac{\lambda}{D} \cdot \frac{u_1^2}{2} \cdot \frac{p_1^2}{gRT} \right) dl.$$

Интегрируя это уравнение от p_1 до p_2 , получим

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{u_1^2}{2g} \cdot \frac{p_1^2}{RT}.$$

Тогда, используя (7.38), имеем

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{u_1^2}{2g} p_1 \gamma_1 = \lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{G^2}{2gS^2} \cdot \frac{p_1}{\gamma_1}. \quad (7.39)$$

С учетом формулы (7.39), для участка газопровода длиной L , давления в начале участка $-p_n$ и в конце $-p_k$, можно связать соотношением:

$$p_n^2 - p_k^2 = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{G^2}{gS^2} \cdot \frac{p_1}{\gamma_1},$$

а распределение давления $p(l)$ на этом участке, представить в виде

$$p^2(l) = p_n^2 - (p_n^2 - p_k^2)l/L. \quad (7.39a)$$

Уравнение (7.39) можно переписать также в виде

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2p_1} = \lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{u_1^2}{2g} \gamma_1. \quad (7.39б)$$

Левая часть последнего уравнения может быть преобразована:

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2p_1} = \frac{(p_1 - p_2)(p_1 + p_2)}{2p_1} = \frac{1}{2}(p_1 - p_2) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{p_1}\right),$$

поэтому (7.39б) примет вид

$$p_1 - p_2 = \frac{2}{1 + \frac{p_2}{p_1}} \lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{u_1^2}{2g} \gamma_1.$$

Но $p_2/p_1 = (p_1 - \Delta p)/p_1 = 1 - \Delta p/p_1$,
следовательно, окончательно получим

$$p_1 - p_2 = \frac{2}{2 - \frac{\Delta p}{p_1}} \lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{u_1^2}{2g} \gamma_1. \quad (7.39в)$$

Уравнение (7.39в) отличается от формулы Дарси–Вейсбаха для определения потерь давления при движении несжимаемой жидкости лишь множителем, зависящим от величины отношения $\Delta p/p_1$. До тех пор, пока сохраняется условие $\Delta p/p_1 < 5\%$, пренебрежение этим множителем дает ошибку около 2,5%, что допустимо в большинстве инженерных расчетов.

Формула для определения расхода газа имеет вид

$$G = S \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{\lambda l} \cdot \frac{gD\gamma_1}{p_1}} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{\lambda l} \cdot \frac{g^2 D^5}{RT}}. \quad (7.40)$$

Коэффициент λ , входящий в эту формулу, определяется по тем же формулам, что и при движении несжимаемых жидкостей по трубам.

7.4. Истечение жидкости и газа через отверстия и насадки

Истечение (выход) жидкостей (газов) из аппаратов и резервуаров происходит через отверстия или насадки (штуцеры), расположенные в днищах или боковых стенках. При этом необходимо знать расход жидкости (газа) в единицу времени при непрерывном истечении из отверстия. Данная задача, как показано ниже, решается с помощью уравнения Бернулли.

Истечение жидкости через отверстия и насадки. Рассмотрим истечение жидкости из бака через небольшое отверстие с острыми кромками (рис. 7.9 а).

Опыт показывает, что струя имеет меньший диаметр, чем отверстие. Это сжатие струи происходит главным образом вследствие действия центробежных сил на частицы, движущиеся из бака к отверстию по криволинейным траекториям. На расстоянии от выходной кромки порядка $d_0/2$ (d_0 – диаметр отверстия) сжатие струйки можно считать неизменным и коэффициент сжатия струи будет равен:

$$\varepsilon = S_c / S. \quad (7.41)$$

Определим скорость струи в сжатом сечении $C - C$. Для этого применим к струйке, начинающейся от поверхности жидкости в баке (сечения $O - O$), уравнение Бернулли

$$\frac{p_0}{\gamma} + H = \frac{u_c^2}{2g} + \frac{p}{\gamma}.$$

Мы пренебрегли скоростным напором $u_0^2/(2g)$ ввиду малой скорости падения уровня в баке в сравнении со скоростью истечения; жидкость считаем идеальной.

Если $p = p_0$, то $u_c^2/(2g) = H$, откуда скорость струи определяется формулой Торичелли:

$$u_c = \sqrt{2gH}. \quad (7.42)$$

Как видим, скорость истечения идеальной жидкости равна скорости свободного падения тела в пустоте с высоты H .

Если давление над поверхностью в баке и в пространстве, в которое вытекает струя, неодинаково, то из уравнения следует:

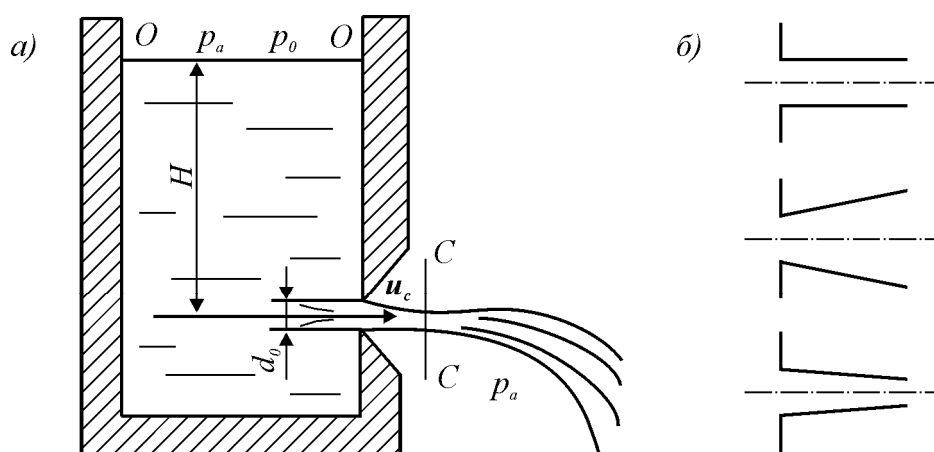


Рис. 7.9. К расчету истечения жидкости из бака:
а – истечение из отверстия в стенке; б – формы насадков (штуцеров)

$$\frac{u_c^2}{2g} = \frac{(p_o + \gamma H) - p}{\gamma} = \frac{\Delta p}{\gamma},$$

откуда

$$u_c = \sqrt{2\Delta p/\rho}, \quad (7.43)$$

где Δp – разность давлений на уровне оси отверстия.

Для реальной жидкости из-за вязкого трения скорость струи оказывается несколько меньше теоретической. Влияние трения учитывают введением в формулу (7.42) (для формулы (7.43) дальнейшие изменения аналогичны) *коэффициента скорости истечения* $\varphi < 1$, так что

$$u_c = \varphi \sqrt{2gH}, \quad (7.42a)$$

По опытным данным, при истечении воды и воздуха $\varphi \approx 0,97-0,98$, т.е. вязкое трение снижает скорость истечения на 2–3% [1].

Тогда, действительный объемный расход жидкости при истечении из отверстия, с учетом формулы (7.41) выразится так:

$$Q = S_c u_c = \varepsilon \varphi S \sqrt{2gH} = \mu_p S \sqrt{2gH}. \quad (7.44)$$

Величина $\mu_p = \varepsilon \varphi$, называемая *коэффициентом расхода*, зависит от формы отверстия, отношения площадей S_c/S и числа Re и определяется опытным путем; для круглых отверстий в среднем $\mu_p = 0,62$ [7].

Коэффициент расхода μ_p значительно возрастает при истечении жидкости через насадок (штуцер), представляющий собой короткую трубку, приставленную к отверстию (рис. 7.9 б), длина которой в 3,5–4 раза больше диаметра отверстия. Струя при выходе из отверстия в насадок сжимается, но приказанной его длине успевает расширяться и вытекает полным сечением. Однако и в данном случае $\mu_p < 1$ вследствие потери напора при входе в насадок и последующем расширении струи. Например, при истечении воды для цилиндрического насадка $\mu_p = 0,82$; для расширяющегося конического $\mu_p = 0,45$; для сходящегося конического (с углом при вершине $\approx 13^\circ$) $\mu_p = 0,963$ [4].

При малых перепадах давления Δp (порядка нескольких процентов от исходного давления p_o) формулы для расчета скорости истечения несжимаемой жидкости применимы и для газов. В этом случае не учет сжимаемости газов не приводит к существенным ошибкам. При значительных перепадах давления скорость истечения газа определяют по формулам газодинамики, которые рассмотрены далее.

Истечение сжимаемого газа. При истечении газа (пара, воздуха) в окружающую среду под высоким давлением резко изменяется его объем. Поэтому необходимо учитывать сжимаемость газа.

Исследуем адиабатическое истечение идеального газа из резервуара, где он находился под давлением p_0 , в среду с давлением p .

Применяя к сечению струйки газа в резервуаре, где скорость близка к нулю, и в сжатом сечении уравнение энергии в форме (4.12), получим

$$\frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0},$$

откуда

$$u = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 - \frac{p}{p_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} \right)}.$$

Выражая ρ_0/ρ через p/p_0 с помощью уравнения адиабаты (4.3) и используя уравнение состояния (4.2), получим формулу Сен-Венана и Венцеля для скорости адиабатного истечения газа:

$$u = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (7.45)$$

С уменьшением p/p_0 скорость истечения u возрастает до тех пор, пока не достигнет критического значения. *Критической* называется скорость течения, равная местной скорости звука. Величину критической скорости легко определить из уравнения энергии в форме (4.12в) или (4.12г), если принять $u = a = a_{кр}$:

$$u_{кр} = a_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_0} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}}, \quad (7.46)$$

при этом критическое отношение давлений равно:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)_{кр} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (7.46a)$$

В частности, для воздуха, при температуре 15°C , $a_{кр} = 0,91a_0 = 310$ м/с. При дальнейшем уменьшении внешнего давления p скорость истечения остается неизменной и равной $a_{кр}$.

Массовый расход M газа при истечении из отверстия с учетом потерь в насадке ($\mu_p = 1/\sqrt{\xi}$ [7]) для случая, когда $p/p_0 \geq (p/p_0)_{кр}$, равен:

$$M = \mu_p S u \rho = \mu_p S \sqrt{\frac{2k}{k-1} \rho_0 p_0 \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{2/k} - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}. \quad (7.47)$$

При $p/p_0 < (p/p_0)_{кр}$ выражение для M имеет вид

$$M = \mu_p S u_{кр} \rho = \mu_p S \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{2k}{k+1}} \rho_0 p_0. \quad (7.47a)$$

Массовый расход в этом случае от внешнего давления p не зависит, а определяется давлением p_0 в резервуаре, возрастая с его увеличением.

7.5. Работа нагнетателей в трубопроводе

Транспортировка жидкости и газа по трубопроводам осуществляется с помощью перекачивающих агрегатов (насосов, компрессоров, вентиляторов), состоящих из *привода*, в качестве которого могут использоваться, например, электродвигатели, и *нагнетателя*. Задача привода состоит в том, чтобы вращать вал нагнетателя; задача нагнетателя – принудительно перемещать жидкость или газ из линии низкого давления (линии всасывания) в линию высокого давления (линию нагнетания). Рассмотрим работу нагнетателя в трубопроводе на примере несжимаемой жидкости, при этом систему нагнетателя с линиями всасывания и нагнетания будем называть *сетью*.

Введем вначале несколько понятий. Для этого запишем уравнение Бернулли в размерности давления (в Па), т.е.:

$$\gamma_1 z_1 + p_1 + \rho_1 u_1^2 / 2 = \gamma_2 z_2 + p_2 + \rho_2 u_2^2 / 2 + \Delta p_{пот}.$$

Члены данного уравнения носят название: $\gamma_1 z_1, \gamma_2 z_2$ – *геометрическое давление*; p_1, p_2 – *статическое давление*; $\rho_1 u_1^2 / 2, \rho_2 u_2^2 / 2$ – *динамическое давление*; $\Delta p_{пот} = \gamma_2 h_u$ – суммарные потери давления на преодоление гидравлического сопротивления участка 1–2 трубопровода.

С учетом введенных понятий, давление, развиваемое нагнетателем, в самом общем случае должно расходоваться:

а) на преодоление разности давлений в линии всасывания и нагнетания; б) на преодоление избыточного геометрического давления (отрицательной самотяги), т.е. на подъем жидкости или газа, который тяжелее воздуха, на высоту z от начального сечения сети до конечного сечения (при положительной самотяге ее вычитают из давления нагнетателя); в) на создание динамического давления на выходе жидкости (газа) из сети (не из нагнетателя), т.е. полное давление p_n , развиваемое нагнетателем,

$$p_n = (p_{нагн} - p_{вс}) \pm p_c + (\Delta p_{вс} + \Delta p_{нагн}) + \frac{\rho u_{вых}^2}{2}, \quad (7.48)$$

где $p_{вс}$ – избыточное давление в линии всасывания; $p_{нагн}$ – избыточное давление в линии нагнетания; p_c – избыточное геометрическое давление (самотяга); $\Delta p_{вс}$ и $\Delta p_{нагн}$ – потери давления на участках всасывания и нагнетания, соответственно; $u_{вых}$ – скорость выхода потока из сети.

Для случая, когда давление в линиях всасывания и нагнетания равны между собой ($p_{\text{вс}} = p_{\text{нагн}}$),

$$p_{\text{н}} = \Delta p_{\text{вс}} + \Delta p_{\text{нагн}} + \frac{\rho u_{\text{вых}}^2}{2} \pm p_{\text{с}} = \Delta p_{\text{сети}}, \quad (7.49)$$

где $\Delta p_{\text{сети}}$ вычисляют для всей сети как сумму потерь во всасывающем и нагнетательном участках сети (включая динамическое давление на выходе из сети) и самотяги $p_{\text{с}}$, определяемой по формуле

$$p_{\text{с}} = g(z_2 - z_1)(\rho_a - \rho),$$

где ρ_a – средняя по высоте $z = z_2 - z_1$ плотность воздуха.

Так как при $p_{\text{с}} = 0$ сумма всех потерь в сети равна разности полных давлений перед и за нагнетателем, то

$$p_{\text{н}} = \left(p_{\text{ст.нагн}} + \frac{\rho u_{\text{нагн}}^2}{2} \right) - \left(p_{\text{ст.вс}} + \frac{\rho u_{\text{вс}}^2}{2} \right) = p_{\text{нагн}}^* - p_{\text{вс}}^*, \quad (7.50)$$

где $p_{\text{вс}}^*$ и $p_{\text{нагн}}^*$ – избыточное полное давление соответственно перед нагнетателем и за ним; $p_{\text{ст.вс}}$ и $p_{\text{ст.нагн}}$ – избыточное статическое давление соответственно перед нагнетателем и за ним; $u_{\text{вс}}$ и $u_{\text{нагн}}$ – средняя скорость потока соответственно перед нагнетателем и за ним.

При нормальных условиях работы нагнетателя величина $p_{\text{н}}$ больше нуля, в то время как статическое и динамическое давление после нагнетателя могут быть ниже соответствующих величин до нагнетателя.

В частном случае, когда площади сечений всасывающего и нагнетательного отверстий нагнетателя одинаковы,

$$\rho u_{\text{вс}}^2 / 2 = \rho u_{\text{нагн}}^2 / 2,$$

и, тогда, давление, создаваемое нагнетателем (согласно формуле (7.50))

$$p_{\text{н}} = p_{\text{ст.нагн}} - p_{\text{ст.вс}}, \quad (7.51)$$

т.е. давление, создаваемое нагнетателем, равно разности статических давлений непосредственно за нагнетателем и перед ним.

Полезная мощность нагнетателя определяется формулой

$$N_{\text{н}} = Q p_{\text{н}} = Q \Delta p_{\text{сети}}, \quad (7.52)$$

где Q – объемный расход перемещаемой среды; его определяют для того сечения, к которому приведены все потери полного давления, по формулам для расчета местных потерь (см. главу 2); $p_{\text{н}}$ – давление, создаваемое нагнетателем, равное общим потерям полного давления $\Delta p_{\text{сети}}$, приведенным к данному объемному расходу.

Мощность на валу нагнетателя

$$N_{\text{в}} = \frac{Q p_{\text{н}}}{\eta_{\text{н}}} = \frac{Q \Delta p_{\text{сети}}}{\eta_{\text{н}}}, \quad (7.53)$$

где $\eta_{\text{н}}$ – КПД нагнетателя.

Объемный расход перемещаемой среды обычно задан. Давление, создаваемое нагнетателем, вычисляют по формулам (7.48)–(7.51) для заданных условий сети, т. е. для разности давлений в линиях всасывания и нагнетания ($p_{\text{нагн}} - p_{\text{вс}}$) и избыточного геометрического давления ($\pm p_c$). Коэффициенты сопротивления $\lambda_{\text{тр}}$ и ξ , скорость потока в каждом элементе, а, следовательно, и величина $\Delta p_{\text{сети}}$ зависят от формы и размеров сети.

Часто характеристику перекачивающего агрегата задают в виде зависимости *дифференциального напора* H , создаваемого его нагнетателем, от расхода Q , т.е. как $H = f(Q)$, при этом

$$H = H_{\text{н}} - H_{\text{в}} = p_{\text{н}}/\gamma, \quad (7.54)$$

где $H_{\text{н}}$, $H_{\text{в}}$ – значение напора в линии нагнетания и всасывания, соответственно, γ – удельный вес перекачиваемых жидкости или газа.

Например, для центробежных насосов характеристики обычно представляют двучленной зависимостью $H = a - bQ^2$, в которой a и b – коэффициенты аппроксимации. Из этой зависимости видно, что, чем больше напор H , который должен создать такой насос, тем меньше расход Q , который он может обеспечить.

Отметим, что при работе с большими потоками жидкости или газа, перекачивающие агрегаты соединяют между собой в системы, при этом для увеличения напора их соединяют последовательно, а для увеличения расхода – параллельно. Таким образом, *при последовательном соединении*, например двух перекачивающих агрегатов, расход жидкости в каждом из них один и тот же, а напоры суммируются: $Q_1 = Q_2 = Q$; $H = H_1 + H_2$; *при параллельном соединении* наоборот, расходы суммируются, а напор, создаваемый каждым агрегатом, один и тот же: $Q = Q_1 + Q_2$; $H = H_1 = H_2$.

7.6. Гидродинамика противоточных двухфазных потоков газ–жидкость в насадочных колоннах

Как уже было сказано выше, для проведения процессов разделения используются различные разделительные аппараты (установки), одним из которых являются колонны.

Разделительные колонны имеют, как правило, цилиндрическую форму и различаются главным образом видом контактных устройств, заполняющих их внутренний объем. Контактные устройства необходимы для увеличения площади контакта обменивающихся фаз, от которой напрямую зависит скорость протекания процесса разделения.

Наибольшее практическое применение для многоступенчатых процессов разделения стабильных изотопов и индивидуальных элементов, осуществляемых в противотоке двух фаз – газа (пара) с жидкостью, получили *насадочные колонны*, внутренний объем которых заполнен *насадками*. Насадки имеют различную форму и размер, и изготавливаются из металла, силикатных или полимерных материалов. Поверхность контакта фаз создается при стекании жидкости по поверхности твердых насадочных тел. Газ (пар) движется противотоком (снизу вверх) в свободном пространстве между элементами насадки, представляющим собой, чаще всего, каналы неправильной формы [2].

Противоточное движение двух фаз в насадочной колонне при сохранении пленочного характера контакта между ними (считается, что жидкость течет по насадке в виде пленки) возможно только в некотором интервале нагрузок. По мере изменения нагрузки (скорости потоков) гидродинамический режим в противоточной двухфазной колонне меняется, что внешне проявляется в характере зависимости гидравлического сопротивления насадки от скорости потока. При небольших нагрузках по газу и жидкости взаимодействие фаз незначительно. Этот режим сменяется режимом, характеризующимся торможением жидкости потоком газа и увеличением количества жидкости, удерживаемой на насадке, что ведет к уменьшению свободного объема и более быстрому возрастанию гидравлического сопротивления. Переход первого режима во второй называют «точкой начала подвисания». Накопление жидкости на насадке продолжается до тех пор, пока весь свободный объем не начнет заполняться жидкостью и когда наступает режим затопления, называемый также «режимом инверсии фаз». В этом режиме газ перестает быть сплошной фазой и начинает двигаться путем барботаж через слой заполняющей насадку жидкости. В этом режиме гидравлическое сопротивление возрастает ещё более резко. При дальнейшем увеличении нагрузки режим затопления переходит в обращенное движение жидкой фазы, которая захватывается и уносится потоком газа, т.е. происходит нарушение противотока, а, следовательно, и разделительного процесса.

Таким образом, определение параметров движения потоков жидкости и газа в колонне является неотъемлемой задачей, поэтому рассмотрим особенности их расчета.

Скорость потоков в слое насадки. Газ движется в свободном объеме между элементами насадки по каналам переменного сечения с изменяющейся скоростью. Поэтому при расчете насадочных колонн пользуются условной величиной скорости газа, отнесенной к общему сечению колонны $u_0 = Q/S$ (где Q – объемный расход газа, м³/с) и

средней скоростью в насадке u_{Γ} . Объем пустот (каналов) V_{κ} в колонне с площадью поперечного сечения S и высотой слоя насадки H равен

$$V_{\kappa} = SHV_{\text{св}}, \quad (7.55)$$

где $V_{\text{св}} = 1 - m_{\text{н}}/\rho_{\text{н}}$ – доля свободного объема насадки; $\rho_{\text{н}}$ – плотность материала насадки, $m_{\text{н}}$ – масса единицы объема (насыпная масса) насадки, $\text{кг}/\text{м}^3$.

Обычно коэффициент извилистости каналов принимают равным единице. Тогда среднее сечение каналов будет равно

$$S_{\kappa} = V_{\kappa}/H = SV_{\text{св}}. \quad (7.56)$$

Средняя скорость газа равна:

$$u_{\Gamma} = Q/S_{\kappa} = Q/(SV_{\text{св}}) = u_0/V_{\text{св}}. \quad (7.57)$$

Каналы в слое насадки имеют не строго круглое сечение, поэтому используется понятие эквивалентного диаметра, который, считая, что вся поверхность насадки орошается жидкостью, находится по формуле

$$d_{\text{э}} = \frac{4S_{\kappa}}{\Pi} = \frac{4SV_{\text{св}}}{Sa} = \frac{4V_{\text{св}}}{a}, \quad (7.58)$$

где Π – суммарный периметр всех каналов ($\Pi = Sa$); a – суммарная геометрическая поверхность всех элементов, заполняющих единицу объема (удельная поверхность насадки), $\text{м}^2/\text{м}^3$.

Величину a определяют экспериментально для конкретного, используемого в рассматриваемом случае, типа насадки. Значения геометрической удельной поверхности насадки a , доли свободного объема колонны $V_{\text{св}}$ и насыпной массы $m_{\text{н}}$ для некоторых видов мелкой насадки приведены в таблице 7.2 [2, 8].

Таблица 7.2

Характеристики мелких эффективных насадок

Наименование	Материал	Размер элемента, мм	Доля свободного объема, $V_{\text{св}}$	Удельная поверхность, a , $\text{м}^2/\text{м}^3$	Насыпная масса, $m_{\text{н}}$, $\text{кг}/\text{м}^3$
Кольца Рашига	Стекло	4,1x4,1x0,5	0,71	1300	710
	Полихлорвинил	5x5x0,5	0,74	1150	350
Спирально-призматические насадки	Проволока из нержавеющей стали	3x3x0,2*	0,86	2580	1114
		4x4x0,2	0,89	2140	855
	Капрон	5x5x0,22	0,90	1450	110
Кольца с перегородкой из латунной сетки**	400 отв/см ²	3,4x3,1x0,3	0,82	2500	1530
		5,1x5,1x0,3	0,89	1100	970
	100 отв/см ²	5,2x5,2x0,3	0,93	1050	600

* Диаметр проволоки.

** Поверхность элемента определена как поверхность кольца с перегородкой.

При вычислении критерия Рейнольдса газовой фазы ($Re = ul\rho/\mu$) принимают в качестве линейного размера l эквивалентный диаметр. Выражая u_r из уравнения (7.57) получим, что

$$Re_r = \frac{4M_{уд}}{a\mu_r}, \quad (7.59)$$

где $M_{уд}$ – удельный массовый расход газа ($M_{уд} = M/S$); μ_r – коэффициент динамической вязкости газа.

Если сечение потока жидкости выразить как произведение смоченного периметра Π на среднюю толщину пленки жидкости $\delta_{пл}$, то средняя скорость течения жидкости по насадке будет равна

$$u_{ж} = \frac{G}{\Pi\delta_{пл}\rho_{ж}}, \quad (7.60)$$

где G – весовой расход жидкости; $\rho_{ж}$ – плотность жидкости.

Критерий Рейнольдса жидкой фазы с учетом того, что $d_3 = 4\delta_{пл}$ и $\Pi = Sa$, будет равен

$$Re_{ж} = \frac{4G_{уд}}{a\mu_{ж}}, \quad (7.61)$$

где: $G_{уд}$ – удельный весовой расход жидкости ($G_{уд} = G/S$).

Гидравлическое сопротивление. Гидравлическое сопротивление контактных устройств определяет потерю давления газового потока и, следовательно, изменение давления по колонне. Изменению давления в ряде случаев может соответствовать изменение температуры. В свою очередь изменения параметров p и T влияют на кинетику процессов разделения, а также на расход энергии.

Из сказанного ясно большое значение учета гидравлического сопротивления при выборе типа контактных устройств и в технологических расчетах колонн.

Гидравлическое сопротивление сухой (неорошаемой) насадки газовому потоку, как один из случаев сопротивления зернистого слоя, может быть вычислено по уравнению:

$$\left(\frac{\Delta p}{H}\right)_r = \xi \frac{u_0^2 \cdot a \cdot \rho_r}{8 \cdot V_{св}^3}. \quad (7.62)$$

Здесь $\Delta p/H$ – сопротивление слоя насадки высотой 1 м. Для промышленных кольцевых насадок коэффициент сопротивления $\xi = 140/Re_r$ при $Re_r < 40$ и $\xi = 16/Re_r^{0,2}$ при $Re_r > 40$. Для мелких насадок в интервале значений $Re_r = 10-200$ лучше принимать $\xi = 80/Re_r^{0,64}$ [3, 8].

Гидравлическое сопротивление мелких и регулярных насадок в условиях противотока газа и жидкости можно рассчитывать по формуле

$$\left(\frac{\Delta p}{H}\right)_{\text{ГЖ}} = \xi \frac{u_0^2 \cdot a \cdot \rho_{\Gamma}}{8(V_{\text{св}} - \Delta H)^3}, \quad (7.63)$$

В данной формуле величина ΔH ($\text{м}^3/\text{м}^3$) называется удерживающей способностью – количество жидкости на насадке приходящейся на единицу объема. Удерживающая способность зависит от режима течения и физических свойств жидкости, вида насадки и определяется по полуэмпирическим формулам, некоторые из которых приведены в [8].

Коэффициент сопротивления орошаемой насадки на основе опытных данных обычно выражается уравнением вида

$$\xi = A/\text{Re}^B, \quad (7.64)$$

Здесь A и B – эмпирические коэффициенты, зависящие от рабочего давления в колонне и вида насадки. Например, для кольцевой насадки из сетки при $p = 0,1-1,0$ МПа, $A = 16$, $B = 0,2$ [3].

Предельной нагрузкой. Как отмечалось выше, при расчете колонн необходимо учитывается приходящуюся на нее нагрузку (скорость потоков). Нагрузку (линейную или весовую скорость газа и жидкости), незначительное увеличение которой приводит к началу затопления насадки ("захлебыванию" колонны), называют *предельной нагрузкой* или *пропускной способностью насадки*.

Величина условной скорости газа (пара), отвечающая точке инверсии u_0^* по данным ряда авторов может быть найдена по уравнению:

$$\lg \left[\frac{(u_0^*)^2 a \rho_{\Gamma}}{g V_{\text{св}}^3 \rho_{\text{ж}}} \right] = A - 1,75 \left(\frac{\rho_{\Gamma}}{\rho_{\text{ж}}} \right)^{\frac{1}{8}} \left(\frac{G}{gM} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (7.65)$$

Предельная массовая нагрузка в $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ равна: $M_{\text{вд}}^* = u_0^* \cdot \rho_{\Gamma}$.

Для промышленных кольцевых насадок в случае газо-жидкостных систем коэффициент $A = 0,022$, для мелких насадок $A = -0,4$ [3].

Поверхность контакта фаз. Скорость процесса разделения, как уже отмечалось, прямо пропорциональна поверхности контакта фаз, поэтому знание этой величины имеет важное значение. В насадочных колоннах участвующая в разделительном процессе активная поверхность контакта фаз $a_{\text{к}}$, $\text{м}^2/\text{м}^3$, как правило, отличается от геометрической поверхности насадки a . Отношение $a_{\text{к}}/a = \psi$ характеризует степень использования геометрической поверхности насадки. В обычных режимах работы противоточных колонн $\psi < 1$, в барботажном режиме с затопленной насадкой возможно $\psi > 1$. В связи с тем, что величина ψ зависит от многих факторов, надежное её определение затруднительно.

Для промышленных насадок степень использования поверхности ψ не превышает 0,6–0,7. Для мелких насадок ψ практически не зависит от нагрузки по жидкости и составляет 0,8–0,9 [3].

* * *

Таким образом, в §7:

- Даны определения простого и сложного трубопроводов и рассмотрена последовательность расчета основных их вариантов.
- Выведены формулы для определения величины: ударного давления при прямом гидравлическом ударе (Жуковского) и скорости ударной волны в трубе с абсолютно жесткими и деформируемыми стенками.
- Рассмотрены особенности расчета трубопроводов для газов при малых и больших перепадах давления.
- Даны понятия коэффициента скорости истечения и коэффициента расхода и выведены формулы для расчета объемного расхода жидкости и массового расхода газа при истечении их из небольших отверстий и насадков (штуцеров).
- Описана работа нагнетателей перекачивающих агрегатов в трубопроводе. Приведены формулы для определения ряда их характеристик.
- Рассмотрены особенности расчета основных гидравлических параметров потоков жидкости и газа при их противоточного движения в насадочных колоннах.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Сформулируйте понятие простого и сложного трубопровода. Какие виды задач решаются при расчете простого трубопровода? Приведите пример решения одной из них.
2. Какие виды схем сложного трубопровода Вы рассмотрели? Опишите последовательности расчета одной из приведенных схем.
3. Раскройте понятие гидравлического удара. Приведите формулы для определения величины ударного давления при прямом гидравлическом ударе и скорости ударной волны в трубе с абсолютно жесткими и деформируемыми стенками.
4. В чем состоят особенности расчета трубопроводов для газов при малых и больших перепадах давления? Напишите формулу для определения весового расхода газа при больших перепадах давления при изотермическом течении.
5. Сформулируйте понятия коэффициентов скорости истечения и расхода. Приведите выражения для расчета объемного расхода жидкости и массового расхода газа при истечении их из отверстий и насадков.
6. Раскройте понятия дифференциального напора, привода и нагнетателя перекачивающих агрегатов. Напишите формулы для расчета давления развиваемого нагнетателем, мощности на валу нагнетателя и дифференциального напора.
7. Опишите устройство насадочной колонны. Приведете выражения для определения скорости движения жидкости и газа в слое насадки. Раскройте физические смысл величин, входящих в эти выражения.
8. Сформулируйте понятие предельной нагрузки. Напишите формулу для расчета предельной массовой нагрузки по газу.

Задача 1. По горизонтальному участку трубопровода ($D = 820$ мм, $\delta = 10$ мм, $L = 120$ км) перекачивают жидкость ($\nu = 25\text{сСт}$) с расходом 2000 м³/ч. Для увеличения пропускной способности участка Q на 20%, решено параллельно основному трубопроводу проложить дополнительный трубопровод с диаметром, равным диаметру основного. Определить длину дополнительного трубопровода.

Ответ: 46,228 км.

Задача 2. В трубопроводе ($D = 720$ мм, $\delta = 10$ мм, $E_{\text{ст}} = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па) произошло мгновенное (аварийное) перекрытие магистрали. Рассчитать повышение давления перед задвижкой и понижение давления после нее в первую секунду после закрытия, если вязкая жидкость, которую перекачивают по трубопроводу с расходом 2200 м³/ч, имеет следующие параметры: $\rho = 875$ кг/м³, $E = 1350$ МПа.

Ответ: $\pm 1,435$ МПа

Задача 3. Перекачка газа по 100-км участку газопровода постоянного диаметра ведется в стационарном изотермическом режиме. Известны давления в начале и конце участка, а также скорость в начале участка. Заполнить пустующие ячейки нижеследующей таблицы.

Координата, км	0	20	40	60	80	100
Давление, МПа	5,50					3,50
Скорость газа, м/с	5,00					

Коэффициенты сжимаемости газа принять постоянными.

Ответ: Давления: 5,16; 4,80; 4,41; 3,98 МПа. Скорости: 5,33; 5,73; 6,24; 6,91; 7,86 м/с.

Примечание: При решении воспользоваться выражением (7.39а).

Задача 4. Уровень жидкости ($\rho = 735$ кг/м³) в вертикальном цилиндрическом резервуаре ($D = 15$ м) составляет 8 м, считая от его дна. В боковой поверхности резервуара на высоте 1 м от дна образовалось круглое коррозионное отверстие с диаметром $d = 0,5$ см, через которое жидкость вытекала в течение 28 ч до тех пор, пока течь не устранили. Определить, пренебрегая изменением уровня жидкости в резервуаре, сколько тонн жидкости потеряно.

Ответ: 10,57 т.

Задача 5. Два центробежных насоса, один с характеристикой $H = 330 - 0,415 \cdot 10^{-4} \cdot Q^2$, другой с характеристикой $H = 280 - 0,315 \cdot 10^{-4} \cdot Q^2$ (H – в м, Q – в м³/ч), соединенные параллельно, перекачивают вместе 2000 м³/ч. Определить напор, развиваемый системой этих двух насосов.

Ответ: 263,2 м.

Задача 6. Для разделения изотопов кислорода углекислотным способом, осуществляемом в противотоке двух фаз – углекислого газа и воды, использована колонна, заполненная мелкими спирально-призматическими насадками из стальной поволоки, размерами $3 \times 3 \times 0,2$ мм. Определить предельную массовую нагрузку газа $M_{\text{уд}}^*$ и гидравлическое сопротивление газовому потоку $\Delta p/H$ слоя сухой насадки высотой в 1 м, если известно, что давление $p = 0,1$ МПа, температура $t = 20^\circ\text{C}$, $\rho(\text{CO}_2) = 1,9$ кг/м³, $\mu(\text{CO}_2) = 1,5 \cdot 10^{-5}$ Па·с, удельный массовый расход газа $M_{\text{уд}} = 0,1$ кг/(м²·с), удельный весовой расход воды $G_{\text{уд}} = 2$ Н/(м²·с).

Ответ: $M_{\text{уд}}^* = 0,2$ кг/(м²·с); $\Delta p/H \approx 48$ Па/м.

Примечание: При решении использовать данные таблицы 7.2 и приложение.

§8. МОДЕЛИРОВАНИЕ В ГИДРОГАЗОДИНАМИКЕ

8.1. Общие принципы моделирования

Выше уже отмечалось, что дифференциальные уравнения движения жидкости интегрируются лишь для небольшого числа простейших случаев. Поэтому для решения большинства сложных технических задач в гидрогазодинамике прибегают к экспериментальным исследованиям.

Натуральные объекты, с которыми имеют дело при проведении процессов разделения – обменные колонны, центрифуги, трубопроводы для жидкости и газа, насосы и т. д. – слишком велики по размерам, сложны и дороги, поэтому экспериментальные исследования обычно проводятся в лабораторной обстановке на моделях, выполняемых, как правило, в меньшем масштабе, чем натурные сооружения. Эти исследования дают возможность выявить на модели гидравлическую картину работы сооружения, установить на опыте такие важные параметры, как потери напора, распределение скоростей и др., а, используя правила перехода от модели к натуре, удастся со значительной степенью точности предусмотреть условия работы будущих сооружений.

Поэтому большое значение приобретает *теория моделирования*, разрабатывающая правила и условия проведения экспериментов и переноса результатов эксперимента с модели на натуру.

Движением жидкости управляют силы тяжести, инерции, давления и трения. Они различны по своему происхождению и природе, и каждая из них изменяется при изменении параметров потока по своим особым законам. Однако во многих задачах рассматривается совместное действие этих сил и определяется величина их соотношения. Исследованием этих вопросов занимается *теория механического подобия* потоков.

Для того чтобы модель была механически подобна натуре, между ними должно, прежде всего, соблюдаться *геометрическое подобие*; для этого все соответственные размеры модели должны быть в одинаковое число раз уменьшены по сравнению с натурой, т. е.

$$L_n / L_m = \alpha_L, \quad (8.1)$$

где L_n – некоторый линейный размер натурального потока; L_m – соответствующий размер потока в модели; α_L – коэффициент пропорциональности или линейный масштаб модели.

Из формулы (8.1) следуют также условия для отношения площадей и объемов в натуре и на модели:

$$S_n / S_m = \alpha_L^2, \quad (8.2)$$

$$V_n / V_m = \alpha_L^3, \quad (8.3)$$

Однако одно геометрическое подобие недостаточно для того, чтобы модель правильно отражала работу натурального объекта. Так, движение жидкости в двух геометрически подобных трубах может иметь различный характер, так как в одной трубе поток может быть ламинарным, а в другой турбулентным. При этом будут иметь место разные закономерности для определения потерь напора и т.д. Таким образом, кроме геометрического подобия, нужно соблюдать еще дополнительные условия, обеспечивающие подобие между моделью и натурой, так называемые *условия динамического подобия*.

Основные требования динамического подобия таковы:

1. В натурном и модельном потоках должны действовать силы одинаковой физической природе.

2. В сходственных точках натурального и модельного потока действующие силы должны находиться в постоянном соотношении. Так, если на некоторой поверхности натурального объекта действует сила давления $F_{p,n}$ и сила трения $F_{тр,n}$, а на модели эти же силы равны соотношению $F_{p,m}$ и $F_{тр,m}$, то условия динамического подобия для этих сил записывается в виде:

$$F_{p,n} / F_{тр,n} = F_{p,m} / F_{тр,m} \text{ или } F_{p,n} / F_{p,m} = F_{тр,n} / F_{тр,m} = \text{const.}$$

3. Граничные и начальные условия для натурального и модельного потоков совпадают.

Подобие называется *полным*, если в натурном и модельном потоках одинаковы отношения любых действующих сил, например: сил трения к силам инерции, сил давления к силам инерции. Вследствие разной природы этих сил они по-разному зависят от скорости и размеров потока, поэтому на модели часто не удается добиться полного подобия. В этом случае довольствуются соблюдением *частичного подобия*, т. е. тождественности для природы и модели лишь отношений каких-то двух сил, которые предполагаются определяющими для данного потока. По остальным силам в этом случае подобие не соблюдается, и поэтому данные модельного эксперимента при частичном подобии не в точности соответствуют натуре. Но в ряде случаев действие этих сил пренебрежимо мало либо может быть рассчитано теоретически; поэтому моделирование при частичном подобии получило широкое распространение.

8.2. Критерии динамического подобия

Рассмотрим два динамически подобных потока, обтекающих геометрически подобные объекты: модель и натуру. Будем обозначать величины, относящиеся к модельному потоку, индексом "м", а относящиеся к натурному потоку – индексом "н".

Поскольку размерностью силы является произведение размерностей массы $M = \rho L^3$ и ускорения $j = LT^{-2}$, т. е.

$$F = \rho L^3 LT^{-2} = \rho L^4 T^{-2} = \rho L^2 u^2, \quad (8.4)$$

то для динамического подобия необходимо соблюдение отношения

$$\frac{F_H}{F_M} = \frac{\rho_H L_H^2 u_H^2}{\rho_M L_M^2 u_M^2} = \alpha_F. \quad (8.5)$$

Условие (8.5) представляет собой математическое выражение общего закона динамического подобия Ньютона; его можно представить, вводя в рассмотрение число Ньютона Ne в виде

$$\frac{F_H}{\rho_H L_H^2 u_H^2} = \frac{F_M}{\rho_M L_M^2 u_M^2} = Ne = \text{const}, \quad (8.6)$$

и сформулировать так: в динамически подобных потоках безразмерное число Ньютона имеет одно и то же значение.

В теории подобия доказывается, что при соблюдении геометрического и динамического подобия имеет место и кинематическое подобие, т. е. скорости, ускорения частиц в модели будут соответственно в одних и тех же отношениях уменьшены по сравнению с натурой, т. е.

$$u_H/u_M = \alpha_u = \alpha_L \cdot \alpha_T^{-1}; \quad (8.7)$$

$$j_H/j_M = \alpha_j = \alpha_L \cdot \alpha_T^{-2}; \quad (8.8)$$

$$T_H/T_M = \alpha_T, \quad (8.9)$$

где α_u ; α_j ; α_T – постоянные для любой пары сходственных точек.

Таким образом, все кинематические элементы можно выразить через масштабы L и T , которые являются основными.

Силами, определяющими гидрогазодинамические процессы, являются силы трения, силы тяжести и силы упругости.

Закон подобия с учетом вязкости. Рассмотрим случай, когда решающее значение имеют силы трения, а силы тяжести и силы упругости по сравнению с ними малы и ими можно пренебречь. Это имеет место, например, при движении жидкости в горизонтальном трубопроводе. Силы трения можно представить в виде

$$F_{\text{тр}} = \tau_0 L^2, \quad (8.10)$$

где τ_0 – касательное напряжение на стенке трубы. При этом основное уравнение динамического подобия примет вид

$$\frac{\rho_H L_H^2 u_H^2}{\rho_M L_M^2 u_M^2} = \frac{\tau_{0H} L_H^2}{\tau_{0M} L_M^2}. \quad (8.11)$$

Отсюда находим

$$\frac{\tau_{0H}}{\rho_H u_H^2} = \frac{\tau_{0M}}{\rho_M u_M^2}. \quad (8.12)$$

Величина τ_0/ρ имеет размерность квадрата скорости и связана с u^2 при любом режиме течения в трубе круглого сечения соотношением

$$\tau_0/\rho = \lambda u^2/8. \quad (8.13)$$

Учитывая (8.13), имеем окончательно

$$\lambda_n = \lambda_m. \quad (8.14)$$

Этим еще раз подчеркивается значение коэффициента гидравлического трения λ при изучении движения жидкостей в трубах.

Если касательные напряжения определяются законом трения Ньютона, то

$$\tau = \mu \cdot (du/dy).$$

Но так как при кинематическом подобии имеет место пропорциональность

$$du/dy \sim u/L,$$

то

$$\tau = \mu u/L$$

и подставляя в (8.12) будем иметь

$$\frac{\mu_n u_n}{L_n \rho_n u_n^2} = \frac{\mu_m u_m}{L_m \rho_m u_m^2}$$

или

$$u_n L_n / \nu_n = u_m L_m / \nu_m. \quad (8.15)$$

Параметр uL/ν есть число Рейнольдса; величина L может быть любым характерным линейным размером, связанным с условиями движения. Поэтому условие (8.15) можно записать в виде

$$\text{Re}_n = \text{Re}_m. \quad (8.16)$$

Таким образом, для получения динамического подобия при превалировании сил вязкого трения должно соблюдаться равенство чисел Рейнольдса в натуре и в модели.

Моделирование напорных трубопроводов в соответствии с уравнением (8.15) связано с некоторыми неудобствами. Во-первых, использование этого уравнения требует, чтобы геометрическое подобие между натурой и моделью было распространено и на выступы шероховатости; с практической точки зрения это требование невыполнимо. Во-вторых, соблюдение условия (8.15) может оказаться выше технических возможностей лаборатории, так как в соответствии с этим условием скорость в модели должна быть в L раз больше скорости в натуре (при использовании на модели той же жидкости, что и в натуре). Поэтому в практике моделирования часто прибегают к приближенным методам, в частности, к моделированию в соответствии с условием (8.14), которое достаточно для обеспечения приближенного подобия даже в случаях, когда отсутствует геометрическое подобие шероховатости.

Закон подобия с учетом влияния сил тяжести. Если преобладающей является сила тяжести (например, при истечении жидкости из отверстия), то в основное уравнение динамического подобия Ньютона (8.6) нужно внести силы тяжести, которые можно представить в виде

$$F = mg = \rho L^3 g. \quad (8.17)$$

Уравнение (8.6) получает при этом вид

$$\frac{\rho_H L_H^2 u_H^2}{\rho_M L_M^2 u_M^2} = \frac{\rho_H L_H^3 g_H}{\rho_M L_M^3 g_M}$$

или после сокращений

$$\frac{g_H L_H}{u_H^2} = \frac{g_M L_M}{u_M^2}. \quad (8.18)$$

Безразмерная величина

$$u^2/(L g) = Fr \quad (8.19)$$

называется числом (критерием) Фруда.

Уравнение (8.18) можно записать поэтому в виде

$$Fr_H = Fr_M. \quad (8.20)$$

Таким образом, динамическое подобие при преобладающем значении сил тяжести требует равенства чисел Фруда в натуре и модели.

Закон подобия с учетом сжимаемости. Если преобладающее влияние принадлежит сжимаемости жидкости (например, при обтекании тел с большими скоростями потоком сжимаемой жидкости), то в основное уравнение динамического подобия Ньютона (8.6) нужно внести силы упругости, которые можно представить в виде

$$F = ES, \quad (8.21)$$

где E – модуль упругости жидкости, который, как известно, связан с плотностью жидкости и скоростью звука в ней соотношением

$$E = \rho a^2. \quad (8.22)$$

Поэтому условие (8.6) принимает вид

$$\frac{\rho_H L_H^2 u_H^2}{\rho_M L_M^2 u_M^2} = \frac{\rho_H a_H^2 L_H^2}{\rho_M a_M^2 L_M^2}$$

или

$$u_H/a_H = u_M/a_M. \quad (8.23)$$

Так как u/a – это число Маха, то условие (8.23) можно записать в виде

$$M_H = M_M. \quad (8.24)$$

Таким образом, для достижения динамического подобия в этих условиях должно соблюдаться равенство чисел Маха в натуре и модели.

Другие критерии подобия. Помимо рассмотренных выше критериев подобия существуют другие, которые следует учитывать, если при движении играют роль и другие силы или свойства среды.

Так, если решающее влияние в рассматриваемом гидравлическом явлении принадлежит силам давления, которые можно представить как

$$F = pS = pL^2,$$

то уравнение (8.6) получает вид

$$\frac{p_H L_H^2}{\rho_H L_H^2 u_H^2} = \frac{p_M L_M^2}{\rho_M L_M^2 u_M^2}$$

или после сокращений

$$\frac{p_H}{\rho_H u_H^2} = \frac{p_M}{\rho_M u_M^2}. \quad (8.25)$$

Безразмерная величина

$$p/(\rho u^2) = Eu \quad (8.26)$$

называется числом (критерием) Эйлера.

Поэтому уравнение (8.25) можно записать в виде

$$Eu_H = Eu_M. \quad (8.27)$$

Таким образом, достижение динамического подобия при преобладающем значении сил давления требует равенства в натуре и модели чисел Эйлера.

Если преобладающее значение в рассматриваемом случае принадлежит силам поверхностного натяжения (например, при истечении жидкости из капиллярных отверстий), определяющим подобие является так называемый критерий Вебера

$$We = \frac{\rho u^2 L}{\sigma},$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения.

При моделировании течений с учетом теплообмена подобие осуществляется по числу Нуссельта

$$Nu = \alpha L / \lambda,$$

где α – коэффициент теплопередачи, зависящий от природы среды, от тела и режима обтекания (обычно α определяют экспериментально), L – характерный размер, λ – коэффициент теплопроводности.

При моделировании температурных полей в потоках, обтекающих тело, необходимо осуществлять подобие по числу Пекле (Pe)

$$Pe = uL/a,$$

здесь $a = \lambda/c_p\rho$ – коэффициент температуропроводности данного газа; λ – коэффициент теплопроводности, ρ – плотность, c_p – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении.

При моделировании температурных и скоростных полей в потоках, обтекающих тело, подобие осуществляется по числу Прандтля (Pr)

$$\text{Pr} = \frac{\text{Pe}}{\text{Re}} = \frac{c_p \mu}{\lambda}.$$

При изучении течений разреженных газов подобие осуществляется по числу Кнудсена Kn , которое представляет собой отношение длины свободного пробега молекул (l) к характерному размеру тела (d):

$$\text{Kn} = \frac{l}{d} \approx \sqrt{\frac{\pi k}{2}} \frac{M}{\text{Re}},$$

где k – показатель адиабаты.

При $\text{Kn} < 0,001$ эффект молекулярных движений мал, и газ рассматривается как сплошная среда. При $\text{Kn} > 10$ течение можно считать свободномолекулярным, т. е. пренебрегать взаимодействием молекул между собой. В диапазоне $0,001 < \text{Kn} < 10$ – переходная область.

* * *

Таким образом, в §8:

- Рассмотрены общие принципы моделирования гидродинамических процессов.
- Получено математическое выражение общего закона динамического подобия Ньютона.
- Отмечено, что в случае, когда не удастся добиться полного динамического подобия, довольствуются соблюдением частичного подобия, т.е. тождественности для природы и модели лишь отношений каких-то двух сил, которые предполагаются определяющими для данного потока.
- Выведены критерии динамического подобия Рейнольдса, Фруда и Маха. Приведены примеры ряда других критериальных чисел.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. В чем состоит назначение теории моделирования и теории подобия? Какие виды подобия должны соблюдаться между модельным и натурным объектами?
2. Сформулируйте требования динамического подобия. Раскройте понятия полного и частичного подобия.
3. Приведите выражение общего закона динамического подобия. Раскройте смысл кинематического подобия. В каком случае оно достигается?
4. Назовите основные критерии подобия гидродинамических процессов. Какие еще критерии подобия Вы знаете? Укажите их физический смысл.

Задача 1. Представить функциональную зависимость между отдельными физическими величинами, входящими в уравнение Навье–Стокса, в виде зависимости между критериями подобия.

Ответ: $F(\text{Eu}, \text{Re}, \text{Fr}) = 0$

Решение. По аналогии с выражениями (8.1) и (8.7) константы подобия плотностей (ρ), вязкостей (μ), давлений (p), натурального и модельного потоков в сходственных точках и в соответственные моменты времени выразятся так:

$$\alpha_p = \rho_n / \rho_m; \quad \alpha_\mu = \mu_n / \mu_m; \quad \alpha_p = p_n / p_m. \quad (\text{а})$$

Напишем уравнение Навье–Стокса для модельного и натурального потоков (эти уравнения идентичны для всех осей координат, поэтому ограничимся уравнением движения вдоль оси x):

$$\frac{\partial p_m}{\partial x_m} - \rho_m x_m + \rho_m \frac{du_{x_m}^2}{2dx_m} - \mu_m \left(\frac{\partial^2 u_{x_m}}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 u_{x_m}}{\partial y_m^2} + \frac{\partial^2 u_{x_m}}{\partial z_m^2} \right) = 0, \quad (\text{б})$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial x_n} - \rho_n x_n + \rho_n \frac{du_{x_n}^2}{2dx_n} - \mu_n \left(\frac{\partial^2 u_{x_n}}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 u_{x_n}}{\partial y_n^2} + \frac{\partial^2 u_{x_n}}{\partial z_n^2} \right) = 0. \quad (\text{в})$$

Так как под массовой силой X здесь подразумевается сила тяжести, то величины X_m и X_n заменим ускорениями свободного падения g_m и g_n , причем по условию подобия $g_n = \alpha_g g_m$. С помощью соотношений (8.1), (8.7) и (а) заменим все величины в уравнении (в) на одноименные величины для модельного потока:

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_L} \frac{\partial p_m}{\partial x_m} - \alpha_p \alpha_g g_m + \alpha_p \frac{\alpha_u^2}{\alpha_L} \cdot \frac{du_{x_m}^2}{2dx_m} - \alpha_\mu \frac{\alpha_u}{\alpha_L^2} \left(\frac{\partial^2 u_{x_m}}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 u_{x_m}}{\partial y_m^2} + \frac{\partial^2 u_{x_m}}{\partial z_m^2} \right) = 0.$$

Так как модельный и натуральный потоки могут отличаться друг от друга не только геометрическими размерами и скоростями, но физическими свойствами жидкостей, то числовые значения коэффициентов в уравнениях могут быть различными. Подобными, однако, являются процессы, которые описываются одними и теми же уравнениями, что в рассматриваемом нами случае возможно лишь при

$$\alpha_p / \alpha_L = \alpha_p \alpha_g = \alpha_p (\alpha_u^2 / \alpha_L) = \alpha_\mu (\alpha_u / \alpha_L^2). \quad (\text{г})$$

Подставим в равенства (г) значения констант подобия, получим:

$$\frac{p_n L_m}{p_m L_n} = \frac{\rho_n}{\rho_m} \cdot \frac{g_n}{g_m} = \frac{\rho_n}{\rho_m} \cdot \frac{u_n^2}{u_m^2} \cdot \frac{L_m}{L_n} = \frac{\mu_n}{\mu_m} \cdot \frac{u_n}{u_m} \cdot \frac{L_m^2}{L_n^2} \quad (\text{I}) \quad (\text{II}) \quad (\text{III}) \quad (\text{IV})$$

Из равенства выражений (I) и (III), (II) и (III), (III) и (IV) находим три критериями гидродинамического подобия потоков жидкости:

$$\frac{p_n}{\rho_n u_n^2} = \frac{p_m}{\rho_m u_m^2} = \frac{p}{\rho u^2} = \text{Eu}; \quad \frac{g_n L_n}{u_n^2} = \frac{g_m L_m}{u_m^2} = \frac{gL}{u^2} = \text{Fr}; \quad \frac{u_n L_n \rho_n}{\mu_n} = \frac{u_m L_m \rho_m}{\mu_m} = \frac{uL\rho}{\mu} = \text{Re}$$

Таким образом, функциональная зависимость между отдельными физическими величинами, входящими в уравнение Навье–Стокса, может быть заменена зависимостью между критериями подобия Эйлера, Фруда и Рейнольдса:

$$F(\text{Eu}, \text{Re}, \text{Fr}) = 0.$$

Задача 2. Для изучения движения дымовых газов в дымоходе устроена водяная модель в масштабе 1:10 ($\alpha_L = 10$). Определить необходимую скорость воды на модели при следующих данных: скорость газов $u_\Gamma = 10$ м/с; коэффициент кинематической вязкости газов $\nu = 1,3$ см²/с (при температуре газов $t_\Gamma = 800^\circ\text{C}$). Температура воды на модели $t_b = 10^\circ\text{C}$. Диаметр дымохода $d_n = 50$ см, а шероховатость его внутренней поверхности $K = 0,005$ см.

Ответ: $u_m = 1,58$ м/с.

Примечание: при решении воспользоваться критерием подобия (8.14) и формулой Альтшуля (5.22). Шероховатость натуре и модели одинакова, т.е. $K_n = K_m = K$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Соотношения между единицами силы

1 килограмм-сила (кгс) = 9,81 Н

Соотношения между единицами давления

1 мм рт. ст. = 133 Па (Н/м²)

1 атм = 1,01325·10⁵ Па

1 кгс/м² = 9,81 Па

Соотношения между единицами динамической вязкости

1 Па·с [кг/(м·с)] = 10 Пз (Пуаз) = 10³ сПз (сантипуаз) = 1,02·10⁻¹ кгс·с/м²

Соотношения между единицами кинематической вязкости

1 м²/с = 10⁴ Ст (Стокс) = 10⁶ сСт (сантистокс)

Соотношения между единицами температуры

0°С = 273,16 К; $T = (t^{\circ}\text{C} + 273,16) \text{ К}$

Газовая постоянная R кислорода равна 259,81 Дж/(кг·К), углекислого газа – 188,95 Дж/(кг·К), воздуха R_v – 287,1 Дж/(кг·К); $R = R_v/\Delta$ (Δ – относительная плотность газа по воздуху, равна отношению ρ_g/ρ_v плотности ρ_g газа к плотности ρ_v воздуха при одинаковых условиях).

Таблица 1

Плотность ρ твердых веществ при 20°С, ρ и динамическая вязкость μ газов при 0°С и нормальном давлении

Вещество	$\rho, 10^3 \text{ кг/м}^3$	Газ	$\rho, \text{ кг/м}^3$	$\mu, 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$
Никель	8,9	Водород	0,0899	0,84
Сталь	7,7–7,9	Кислород	1,429	1,92
Кварц	2,65	Углекислый газ	1,977	1,40
Стекло	2,2–2,5	Насыщенный		
Поливинил	1,34–1,4	водяной пар	0,005	0,82
Фторопласт	2,1–2,4			

Таблица 2

Динамическая вязкость μ и плотность ρ воды, воздуха и μ насыщенного пара при различных температурах

Температура, °С	Вода		Воздух		Насыщенный пар
	$\mu, 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$	$\rho, \text{ кг/м}^3$	$\mu, 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$	$\rho, \text{ кг/м}^3$	$\mu, 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с}$
0	1,75	999,87	1,71	1,293	8,2
20	1,00	998,23	1,81	1,207	8,9
40	0,66	992,24	1,90	1,124	9,7
60	0,47	988,24	2,00	1,064	10,4
80	0,36	971,83	2,09	1	11,2
100	0,28	958,38	2,48	1,143	12,0

ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшуль А.Д., Киселев П.Г. Гидравлика и аэродинамика (основы механики жидкости). – М.: Стройиздат., 1965. – 275 с.
2. Андреев Б.М., Зельвенский Я.Д., Катальников С.Г. Разделение стабильных изотопов физико-химическими методами. – М.: Энергоатомиздат, 1982. – 208 с.
3. Андреев Б.М., Магомедбеков Э.П., Райтман А.А. и др. Разделение изотопов биогенных элементов в двухфазных системах. – М.: ИздАТ, 2003. – 376 с.
4. Гельперин Н.И. Основные процессы и аппараты химической технологии. В двух книгах. – М: Химия, 1981. – 812 с.
5. Гидравлические расчеты в теплоэнергетике. Теория и задачи: Учебное пособие/ А.В. Михневич, О.Л. Рыхнер, Н.Н. Михневич. – Мн.: УП «Технопринт», 2000. – 276 с.
6. Гидрогазодинамика: учебное пособие для вузов/ М.Е. Дейч, А.Е. Зарянкин. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 384 с.
7. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. – М.: Машиностроение, 1992. – 672 с.
8. Кафаров В.В., Глебов М. Б. Математическое моделирование основных процессов химических производств: учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1991. – 399 с.
9. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика: в 10-ти т. Т. 6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 320 с.
10. Лурье М.В. Задачник по трубопроводному транспорту нефти, нефтепродуктов и газа: учебное пособие. – М.: ООО "Недра-Бизнесцентр", 2003. – 349 с.
11. Примеры расчета по гидравлике: Учебное пособие для вузов/ под ред. Альтшуля А.Д. М.: Стройиздат, 1977. – 255 с.
12. Розен А.М. Теория разделения изотопов в колоннах. – М.: Атомиздат, 1960. – 439 с.
13. Самойлович Г.С. Гидрогазодинамика: учебник. – М.: Машиностроение, 1990. – 382 с.
14. Сборник задач по гидроаэромеханике/ Г.С. Самойлович, В.В. Нитусов.– М.: Машиностроение, 1986. – 152 с.
15. Соколов Ю.Н. Основы гидрогазодинамики: учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1964. – 87 с.
16. Справочное пособие по гидрогазодинамике для теплоэнергетиков / В. Ф. Касилов. – М.: Изд-во МЭИ, 2000. – 272 с.
17. Черный Г.Г. Газовая динамика. – М.: Наука, 1988. – 424 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Вязкость** жидкости, 9, 10
- Гидравлика** прикладная, 3, 28
- Гидравлическое сопротивление**, 43
- Гидравлический уклон**, 34
- Гидрогазодинамика**, 7
- Давление** геометрическое, 86
- гидростатическое, 8
 - динамическое, 86
 - статическое, 86
- Движение** вихревое, 20
- неустановившееся, 14
 - одномерное, 28
 - потенциальное, 21
 - установившееся, 14
- Диаметр эквивалентный**, 12
- Динамическое подобие**, 96
- Диффузор**, 56
- Жидкость** идеальная, 10
- несжимаемая, 8
 - сжимаемая, 8
- Закон трения Ньютона**, 9
- Истечение газа**, 84
- жидкостей, 83
- Коэффициент вязкости**, 9
- гидравлического трения, 47
 - динамической вязкости, 9
 - кинематической вязкости, 9
 - Кориолиса, 35
 - расхода, 84
 - сжатия струи, 56
 - скорости истечения, 84
 - смягчения, 57
 - сопротивления, 49
- Колонна насадочная**, 88
- Конфузор**, 58
- Линия тока**, 15
- полного напора, 33
 - пьезометрическая, 34
- Метод размерностей**, 44
- Местные сопротивления**, 44, 51
- Модуль упругости**, 77
- Напор скоростной**, 33
- Объемный вес**, 8
- Плотность** жидкости, 8
- ПИ теорема**, 44
- Потенциал скорости**, 21
- Потери напора**, 34, 43, 44
- Простой трубопровод**, 67
- Расход** весовой, 25, 30
- массовый, 25, 30
 - объемный, 25, 30
 - потока, 25
- Силы** массовые, 9
- поверхностные, 9
- Скорость** средняя, 34
- Сложный трубопровод**, 67, 72
- Струйка элементарная**, 28
- Текучесть**, 7
- Течение** адиабатическое, 37
- изотермическое, 37
 - квадратичное, 49
 - ламинарное, 11
 - турбулентное, 11
- Траектория**, 15
- Удар гидравлический**, 76
- Уклон гидравлический**, 34
- Уравнение Бернулли**, 33, 35, 38
- линии тока, 15
 - Навье–Стокса, 23
 - неразрывности, 26, 29
 - Эйлера, 22
- Формула** Альтшуля, 48, 55
- Блязиуса, 48
 - Борда, 53
 - Вейсбаха, 47
 - Дарси – Вейсбаха, 47
 - Гинзбурга, 48
 - Жуковского, 55, 77
 - Стокса, 48
 - Шифринсона, 49
- Число** Маха, 38, 99
- Ньютона, 97
 - Рейнольдса, 12, 98
 - Эйлера, 100
 - Фруда, 99
- Шероховатость** абсолютная, 50
- относительная, 50

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Список основных принятых обозначений.....	6
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТРЕХМЕРНОГО И ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА	
§1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ.....	7
1.1. Основные физические свойства жидкостей	7
1.2. Ламинарное и турбулентное течение жидкости. Число Рейнольдса	11
1.3. Методы изучения движения жидкости.....	13
Вопросы и задачи	17
§2. ТРЕХМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ.....	18
2.1. Вихревое и потенциальное движение жидкой частицы	18
2.2. Дифференциальные уравнения движения идеальной и вязкой жидкости (уравнения Эйлера и Навье–Стокса).....	21
2.3. Уравнение неразрывности трехмерного потока	24
Вопросы и задачи	27
§3. ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ	28
3.1. Элементарная струйка потока. Уравнение неразрывности для элементарной струйки при установившемся движении	28
3.2. Неустановившееся движение идеальной жидкости под действием сил тяжести вдоль линии тока	30
3.3. Установившееся движение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли	32
3.4. Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости.....	34
Вопросы и задачи	36
§4. ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАЗА	37
4.1. Основные соотношения термодинамики. Скорость звука. Число Маха	37
4.2. Уравнение Бернулли (энергии) для газа.....	38
4.3. Связь скорости газа с сечением потока. Сопло Лавалья	40
Вопросы и задачи	42
ГЛАВА 2. ОСНОВЫ РАСЧЕТА ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ НАПОРА	
§5. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ НАПОРА ПРИ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ.....	43
5.1. Виды гидравлических сопротивлений.....	43
5.2 Метод анализа размерностей, Пи-теорема	44

5.3. Определение коэффициента гидравлического трения при ламинарном и турбулентном течении жидкости	47
Вопросы и задачи	49
§6. МЕСТНЫЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ	51
6.1. Общие сведения	51
6.2. Потери напора, связанные с изменением сечения потока	52
6.3. Потери напора, связанные с изменением направления потока.....	59
6.4. Потери напора в арматуре трубопроводов, в тройниках и крестовинах.....	61
Вопросы и задачи	65
ГЛАВА 3. ОРГАНИЗАЦИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В РАЗДЕЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССАХ	
§7. ОРГАНИЗАЦИЯ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В РАЗДЕЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССАХ.....	67
7.1. Расчет трубопроводов для несжимаемой жидкости.....	67
7.2. Гидравлический удар в трубах	76
7.3. Расчет трубопроводов для газов.....	79
7.4. Истечение жидкости и газа через отверстия и насадки	82
7.5. Работа нагнетателей в трубопроводе	86
7.6. Гидродинамика противоточных двухфазных потоков газ(пар)-жидкость в насадочных колоннах	88
Вопросы и задачи	93
§8. МОДЕЛИРОВАНИЕ В ГИДРОГАЗОДИНАМИКЕ.....	95
8.1. Общие принципы моделирования.....	95
8.2. Критерии динамического подобия.....	96
Вопросы и задачи	101
Приложение	103
Литература.....	104
Предметный указатель	105

Учебное издание

ВИДЯЕВ Дмитрий Геннадьевич

ГИДРОГАЗОДИНАМИКА РАЗДЕЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

Издано в авторской редакции


Дизайн обложки *О.Ю. Аршинова*

Подписано к печати 29.12.2009. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 6,28. Уч.-изд. л. 5,68.
Заказ 2228-10. Тираж 35 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru